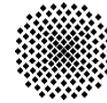
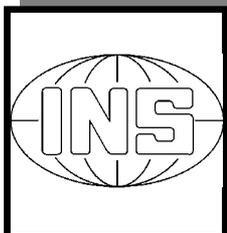


Universität Stuttgart



Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik

Technical Reports
Department of Geodesy and
Geoinformatics



J. Engels

Zur Modellierung von Auflast-
deformationen und induzierter
Polwanderung

Zur Modellierung von Auflastdeformationen und
induzierter Polwanderung

Von der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie
der Universität Stuttgart
zur Verleihung der Lehrbefähigung für das Lehrgebiet "Geodäsie"
genehmigte Habilitationsschrift
vorgelegt von

Dr.-Ing. Johannes Engels

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	3
1. Einleitung: Isostasie, Auflastdeformation und Polwanderung	4
1-1 Isostasie	4
1-2 Auflastdeformationen	7
1-3 Polwanderung	8
1-4 Ziele und Aufbau der vorliegenden Arbeit	11
2. Kontinuumsmechanische Elemente eines viskoelastischen Erdmodells – Bilanzgleichungen und Randbedingungen	13
2-1 Euler'sche und Lagrange'sche Beschreibung eines sich deformierenden Kontinuums	13
2-1.1 Euler'sche und Lagrange'sche Koordinaten	13
2-1.2 Lokale Basen und ihre Transformationen	17
2-1.3 Untermannigfaltigkeiten	20
2-1.4 Euler'sches und Lagrange'sches Inkrement: Definitionen und Rechenregeln	20
2-2 Geometrische Änderungsbeziehungen	21
2-2.1 Längenverzerrung	21
2-2.2 Interpretation der lokalen geometrischen Änderung als Drehung und Verzerrung	24
2-2.3 Volumenverzerrung	26
2-2.4 Flächenverzerrung	27
2-2.5 Linearisierungen	27
2-2.6 Differentialoperatoren und ihre Linearisierung	30
2-3 Bewegung	33
2-3.1 Räumliche und materielle Zeitableitung	33
2-3.2 Bewegte Systeme und relative Zeitableitung	36
2-3.3 Systemdefinitionen: Mittlere Vortizität, Tisserand- und Hauptachsensystem	39
2-4 Massenerhaltung	43
2-5 Impulsbilanz	44
2-5.1 Bewegungsgleichungen und Stress-Tensoren	44
2-5.2 Hydrostatischer Grundzustand	47
2-5.3 Linearisierung der Bewegungsgleichungen	48
2-6 Eingeprägte Volumenkräfte und Trägheitskräfte	51
2-6.1 Gravitation	51
2-6.2 Trägheitskräfte und ihre Linearisierung	55
2-7 Energiebilanz und konstitutive Gleichungen	57
2-7.1 Formale Herleitung der konstitutiven Gleichungen aus der Energiebilanz	57
2-7.2 Konstitutive Gleichungen für den Cauchy-Stress-Tensor	61
2-7.3 Spezialfälle der linearen viskoelastischen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen	62
2-7.4 Laplace-Transformation der konstitutiven Gleichungen; das Biot'sche Korrespondenzprinzip	65
2-7.5 Maxwell-Viskoelastizität	65
2-7.6 Ein eindimensionales Beispiel zur Benutzung des Korrespondenzprinzips	66
2-7.7 Linearisierte Bewegungsgleichungen für ein isotropes, homogen geschichtetes viskoelastisches Kontinuum	69
2-8 Randbedingungen	70
2-8.1 Randbedingungen an der Erdoberfläche	70
2-8.2 Randbedingungen an inneren Schichtgrenzen	71
2-8.3 Randbedingungen an der Kern-Mantel-Grenze	71
2-9 Globale Drehimpulsbilanz	72
2-9.1 Defekte der quasistatischen Bewegungsgleichungen	72
2-9.2 Linearisierung der Drehimpulsbilanz, Euler-Liouville-Gleichungen	73
2-9.3 Änderung des Trägheitstensors und äußere Momente	75
3. Kontinuumsmechanische Elemente eines viskoelastischen, homogen geschichteten, sphäroidischen Erdmodells – dargestellt in Kugelflächenfunktionen	78
3-1 Das sphärische Koordinatensystem $\{R, \Lambda, \Phi\}$ und das quasisphärische System $\{\bar{R}, \bar{\Lambda}, \bar{\Phi}\}$	78
3-2 Modifizierte vektorielle Kugelfunktionen (vektorielle Sphäroidfunktionen)	80
3-3 Hydrostatischer Grundzustand und Normalschwerefeld	81

3-4	Die quasistatischen Bewegungsgleichungen eines inkompressiblen Materials und ihre Lösung in vektoriellen Kugelfunktionen	88
3-4.1	Die Methode der Störungsrechnung	89
3-4.2	Darstellung der Trägheitsterme in vektoriellen Kugelfunktionen	89
3-4.3	Die Bewegungsgleichungen nach Anwendung der Operatoren DIV und ROT in vektoriellen Kugelfunktionen	90
3-4.4	Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen nach Anwendung der Operatoren DIV und ROT mit Hilfe der Störungsrechnung	92
3-4.5	Die originalen Bewegungsgleichungen in vektoriellen Kugelfunktionen	94
3-4.6	Transformation der Lösungen auf quasisphärische Koordinaten	96
3-5	Die Spannung an sphäroidischen Grenzflächen	99
3-6	Das inkrementelle Schwerefeld eines sphäroidisch geschichteten Erdmodells	107
3-6.1	Der deformatorische Anteil des inkrementellen Gravitationsfeldes 107	
3-6.2	Das gesamte inkrementelle Schwerepotential im Innenraum	109
3-6.3	Die Stetigkeitsbedingung für das inkrementelle Schwerepotential an einer Schichtgrenze	109
3-6.4	Das gesamte inkrementelle Gravitationspotential im Außenraum	110
3-6.5	Die Unstetigkeitsbedingung für die Normalableitung des inkrementellen Gravitationspotentials an einer inneren Schichtgrenze	110
3-7	Auflastpotential und Randspannung an der Erdoberfläche	111
3-8	Randbedingungen an der Kern-Mantel-Grenze 114	
3-9	Die Systemdefinition des Tisserandsystems	116
4.	Halbanalytische Berechnung der unbekanntenen Koeffizientenfunktionen, Lösungspropagation und Partialbruchzerlegungen	118
4-1	Lösungen für das sphärische, nichtrotierende Erdmodell	118
4-2	Lösungen für das sphäroidische, rotierende Erdmodell	126
5.	Lovezahlen, Auflastzahlen und Drehimpulsbilanz	135
5-1	Love- und Auflastzahlen	135
5-1.1	Rücktransformation der Lösungen in den Zeitbereich; Grenzwerte und Spezialfälle	137
5-2	Der inkrementelle Trägheitstensor und seine Beziehung zum inkrementellen Gravitationspotential	140
5-3	Berechnung der inkrementellen Rotation aus der Drehimpulsbilanz	141
5-3.1	Die ungestörte Lösung	142
5-3.2	Die gestörte Lösung	146
6.	Ein numerisches Beispiel (5-Schichten-Modell)	148
7.	Ausblick	161
	Anhang	162
A	Kugelfunktionen	162
A-1	Skalare Kugelflächenfunktionen - Definitionen und Eigenschaften	162
A-2	Vektorielle Kugelfunktionen	166
A-3	Tensorielle Kugelfunktionen	176
A-4	Darstellung geometrischer Elemente des Rotationsellipsoids mit Hilfe von Kugelfunktionen	179
B	Euler'sche und Lagrange'sche Störungen der gravitativen Feldgrößen	180
C	Rechenregeln für die Laplace-Transformation	183
D	Rechenregeln für Euler'sche und Lagrange'sche Inkremente	184
	Literaturverzeichnis	185

Zusammenfassung

Die kontinuumsmechanischen Elemente, welche zur Beschreibung der Deformation des Erdkörpers sowie dessen Rotationsverhalten dienen, werden ausführlich dargestellt. Insbesondere werden die verschiedenen Formulierungen der Impuls- und Drehimpulsbilanz verglichen und die alternativen Definitionen eines körperfesten Systems vorgestellt. Einen weiteren Schwerpunkt bildet die Darstellung des inkrementellen Gravitationsfeldes aufgrund von Deformationen, insbesondere dessen Glattheitseigenschaften. Das Verschiebungsfeld, das inkrementelle Potential, die Randspannungen und weitere Feldgrößen werden in skalaren und vektoriellen Kugelfunktionen entwickelt.

Üblicherweise wird in den Gleichungen für die Auflastrelaxation eines viskoelastischen Erdmodells die Abplattung der Erde vernachlässigt. Ähnliches gilt für die aus der Drehimpulsbilanz abgeleiteten Gleichungen der Polbewegung bzw. Polwanderung: Zwar wird die Differenz der Hauptträgheitsmomente des Referenzzustandes berücksichtigt, die inkrementellen Trägheitsmomente werden jedoch aus dem Verschiebungsfeld eines sphärischen Erdmodells abgeleitet. Zudem findet von den inkrementellen Trägheitskräften nur die Zentrifugalkraft Beachtung. Ein weiteres Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Auswirkung der vernachlässigten Terme auf den Winkelgeschwindigkeitsvektor einer homogen geschichteten, sphäroidischen, viskoelastischen, inkompressiblen rotierenden Erde unter dem Einfluss einer Oberflächenlast abzuleiten. Mit Hilfe des bekannten Korrespondenz-Prinzips werden die Gleichungen der Impuls- bzw. Drehimpulsbilanz in den Laplace-Bereich transformiert. Während die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen in vektoriellen bzw. skalaren Kugelfunktionen nur durch die Trägheitskräfte gestört wird, findet die Abplattung in den Randgleichungen ihren Niederschlag, welche unter anderem die Komponenten der von der Auflast erzeugten Randspannung enthalten. Die unbekanntenen Koeffizienten der allgemeinen Lösungen der quasistatischen Bewegungsgleichungen werden durch Propagation der Randbedingungen im Laplace-Bereich ermittelt und durch eine Partialbruchzerlegung als einfache Pole dargestellt. Mit Hilfe der so bestimmten Love- und Auflastzahlen, die noch vom Laplace-Parameter s abhängen, wird die Drehimpulsbilanz gelöst. Es werden Verhältniszahlen der Polbewegung bzw. Polwanderung für den Fall einer Heaviside-Anregung sowie für eine periodische Anregung berechnet. Es wird gezeigt, dass sich die "sphärische Lösung" von der hier abgeleiteten nur durch Terme höherer Ordnung in der Abplattung unterscheidet.

Danksagung

Zuvörderst gilt mein Dank Herrn Prof. Erik Grafarend, der es mir ermöglichte, diese Arbeit am Geodätischen Institut der Universität Stuttgart auszuführen. Er hat mich stets darin bestärkt, auftretende Probleme nicht vorschnell durch überstürzte "Lösungen" zur Seite zu schieben. Herr Prof. Bernhard Heck hat meine Arbeit von Anfang an in jeder Hinsicht unterstützt und hatte stets ein offenes Ohr für meine Fragen und Gedankengänge. Meine Kollegen am Geodätischen Institut der Universität Stuttgart, insbesondere Margarete Höck, Konrad Rösch, Dr. Friedrich Krumm und Dr. Amir Abolghasem haben mir durch Rat und Tat, aber auch durch ihr Verständnis sehr geholfen. Herrn Bernd Oppolzer verdanke ich unter anderem viele wertvolle programmieretechnische Hinweise. Prof. Wolfgang Keller war mir ein sicherer Rückhalt bei mathematischen Problemen. Herr Prof. Bert Vermeersen und hat mir in zahlreichen Diskussionen vieles nahegebracht, was ich der oft kryptischen geophysikalischen Literatur nicht entnehmen konnte. Schließlich danke ich der Deutschen Forschungsgesellschaft, die mir durch ihre Förderung diese Arbeit ermöglicht hat.

1. Einleitung: Isostasie, Auflastdeformation und Polwanderung

1–1 Isostasie

Da es eine Aufgabe der Geodäsie ist, die Figur der Erde zu bestimmen, muss sie sich notwendigerweise auch mit den Wirkungsmechanismen und Prozessen beschäftigen, welche diese Figur wesentlich prägen oder beeinflussen. Zum einen erleichtern geophysikalische Modelle häufig die Auswertung oder zumindest die Interpolation und Interpretation von Messergebnissen. Zum anderen obliegt es häufig den Geodäten, diese Modelle durch geeignete Messexperimente zu falsifizieren; in diesem Fall ist ein solides Verständnis des geophysikalischen Modells die Voraussetzung für eine effektive Anlage von Messkampagnen bzw. Beobachtungsnetzen. Ein Musterbeispiel für die Wechselwirkung zwischen Geodäsie und Geophysik ist das Prinzip der *Isostasie*, also des Gleichgewichts bzw. Schwimmgleichgewichts der oberflächennahen Schichten des Erdkörpers (griechisch: *ισοστάσιος* bedeutet “gleich schwer”). Einerseits liegt dieses Prinzip der topographisch-isostatischen Reduktion der Schwere zugrunde, welche häufig im Zusammenhang mit dem geodätischen Randwertproblem angewandt wird, um die Beobachtungsdaten zu glätten; das geophysikalische Modell ist also bei der Auswertung von Nutzen. Andererseits entstand die Hypothese der Isostasie aus einem Zusammenspiel von geodätischen Beobachtungen und geophysikalischer Modellbildung. Wir skizzieren hier die wesentlichen Entwicklungsschritte der isostatischen Hypothesen; ausführliche Darstellungen finden sich beispielsweise in *A.B. Watts (2001)* oder in *V. Bialas (1982)*.

Erste Ansätze in Richtung Isostasie entstanden bereits während der Gradbogenmessungen in Peru und Lappland in den Jahren 1735 bis 1744, bei denen die Abplattung der Erde an den Polen nachgewiesen werden konnte. Anlass zu diesen Expeditionen gab die Hypothese I.Newtons, der in seinen *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* 1687 diese Abplattung aus theoretischen Überlegungen gefolgert hatte. Die Grundlage für seine Überlegungen bildeten die von ihm entwickelte Gravitationstheorie und die Hypothese vom *hydrostatischen Gleichgewicht*, die im weitesten Sinne bereits als eine isostatische Hypothese (wenn auch eine besonders einschränkende) aufgefasst werden kann. Dabei wird ein lokales Gleichgewicht von Gravitationskraft, Zentrifugalkraft und Flächenkraft unter der Voraussetzung angenommen, dass zwischen benachbarten Volumenelementen nur Flächenkräfte senkrecht zu ihrer gemeinsamen Grenzfläche wirken, also keine Scherkräfte vorhanden sind. War Newton bei seinen Überlegungen von einem homogenen Erdmodell ausgegangen, so wurde die Theorie der hydrostatischen Gleichgewichtsfiguren bald auf Erdmodelle mit radiusabhängiger Dichte erweitert. Der wohl bedeutendste Beitrag in diese Richtung wurde von *A.C. Clairaut 1743* erbracht, der eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Abplattung als Funktion des mittleren Radius der Flächen gleicher Dichte aufstellte. Dieses einfache Modell liefert bereits ein erstaunlich gutes Ergebnis für die Abplattung der Erde. Der Schluss liegt nahe, dass sich die Erde tatsächlich in guter Näherung im hydrostatischen Gleichgewicht befindet. *Z. Martinec, K. Pěč (1987)* vertreten die Ansicht, dass die Hypothese des hydrostatischen Gleichgewichts auf 96-98 % der Erdmassen zutrifft. Historische und technische Details bezüglich der hydrostatischen Gleichgewichtsfiguren können etwa den Standardwerken von *I. Todhunter 1873*, *S. Chandrasekhar 1969*, *Z. Kopal 1960* entnommen werden.

Eine schwächere Annahme als die des vollständigen hydrostatischen Gleichgewichts ist diejenige, dass die Lithosphäre oder Teile davon sich im Archimedischen Schwimmgleichgewicht in einer zähflüssigen Asthenosphäre befinden, so dass erst unterhalb eines gewissen Ausgleichsniveaus hydrostatisches Gleichgewicht herrscht. Dies wird im engeren Sinne unter dem Begriff “Isostasie” verstanden. Damit das Gleichgewicht trotz der aufragenden topographischen Massen Bestand hat, muss also eine Kompensation dieser Massen vorhanden sein. Anlässlich der erwähnten Gradbogenmessung in Peru wurde festgestellt, dass die Massenanziehung der Anden viel kleiner ist als angesichts der sichtbaren topographischen Massen zu erwarten wäre (*W.A. Heiskanen, F.A. Vening Meinesz 1958, S.126*). *R.J. Boscovich* versuchte 1750 dieses Messergebnis zu deuten und verwendete dabei bereits den Begriff der Kompensation. Die grundlegenden isostatischen Ideen wurden jedoch erst ein Jahrhundert später entwickelt, nachdem ein ähnlicher Effekt anlässlich einer Gradbogenmessung in Indien beobachtet wurde. *W. Grüninger 1990* beschreibt den historischen Ablauf folgendermaßen:

“In den Jahren 1800 bis 1870 führten die Engländer in Indien eine Landesvermessung durch, die der Verwaltung der damaligen britischen Kolonie dienen sollte. Zur Bestimmung des Bezugsellipsoids wurde eine Gradbogenmessung entlang des 78°-Meridians, des ‘Great Arc of India’, zwischen Kalianpur an der Südspitze Indiens und Kaliana am Fuße des Himalaya-Massivs durchgeführt, an der George Everest (* 1790, †1866) maßgeblich beteiligt war. Bei der Gegenüberstellung der Ergebnisse aus Triangulation ($\Delta\varphi_T = 5^\circ 23' 42''$, 295) und astronomischen Breitenbestimmungen ($\Delta\varphi_A = 5^\circ 23' 37''$, 058) stellte man eine Breitendifferenz von $(\Delta\varphi_T - \Delta\varphi_A) = 5''$, 237 fest, worauf Everest zunächst einen Fehler in der Messung der Basisstrecken vermutete (*P.A. Dickey 1985*). Im Gegensatz dazu sah *J.H. Pratt*, Archidiakon in Kalkutta, den vermeintlichen Fehler in der gravitativen Anziehung des Himalaya begründet und berechnete 1855 die durch diese Gebirgsmassen verursachten Lotab-

weichungsstörungen für Kalia ($\delta\xi_2 = 27''$, 853) und Kalia ($\delta\xi_1 = 11''$, 968). Die daraus resultierende Differenz ($\delta\xi_2 - \delta\xi_1 = 15''$, 885) war jedoch etwa dreimal so groß wie der zuvor von Everest ermittelte Breitenunterschied ($\Delta\varphi_T - \Delta\varphi_A$) aus geodätischen Beobachtungen. Aufgrund dieser Tatsache vermutete man unterhalb des Gebirges ein Massendefizit, worauf fast gleichzeitig, jedoch unabhängig voneinander zwei Hypothesen über den Aufbau der Erdkruste entwickelt wurden:

- J.H. Pratt nahm 1854 an, dass die Massendichte der Kruste unterhalb der Gebirge geringer sei als im Flachland und die Berge infolgedessen wie gärender Teig entstehen (Teighypothese):
- G.B. Airy war 1855 der Auffassung dass das Krustenmaterial eine homogene Dichte aufweist, jedoch unterhalb der Gebirge tiefer in den dichteren Erdmantel eintaucht. Die Gebirge schwimmen folglich im "flüssigen" Erdmantel wie Eisberge im Wasser (Eisberghypothese)."

(soweit das Zitat von *W.Grüninger 1990*). Der Begriff der Isostasie wurde von *C.E. Dutton 1889* eingeführt. Wir geben Duttons Definition hier verkürzt wieder:

"If [laterally] heterogeneous, ... [the earth's] normal figure would no longer be spheroidal. Where the light matter was accumulated there would be a tendency to bulge, and where the denser matter existed there would be a tendency to ... depress the surface. For this condition of equilibrium of figure, to which gravitation tends to reduce a planetary body, irrespective of whether it be homogeneous or not, I propose the name isostasy."

Die beiden grundlegenden isostatischen Ideen wurden später von J.F. Hayford bzw. W.A. Heiskanen aufgegriffen und mathematisch ausformuliert: Setzt man eine konstante Asthenosphärendichte voraus, so kann im Rahmen der Teighypothese (Pratt-Hayford-Modell) bei festliegender Grenze zwischen Lithosphäre und Asthenosphäre die Massendichte der Lithosphäre in Abhängigkeit von der Höhe der Topographie bestimmt werden. Wählt man dagegen eine konstante Massendichte der Lithosphäre, so kann auf der Basis der Eisberghypothese (Airy-Heiskanen-Modell) die Tiefe der Grenzfläche zwischen Lithosphäre und Asthenosphäre bestimmt werden.

Während *Grüninger 1990* an dieser Stelle von "Kruste" und "Mantel" spricht, werden häufig auch die Begriffe "Lithosphäre" und "Asthenosphäre" benutzt. In der geophysikalischen Literatur wird die Abgrenzung zwischen Kruste und Mantel hauptsächlich anhand der *chemischen Zusammensetzung* des Gesteins (Kruste eher sauer, Mantel eher basisch), die Trennung in Lithosphäre und Asthenosphäre anhand der *rheologischen Eigenschaften* des Materials (Elastizität, Viskosität) vorgenommen. Die Grenzfläche zwischen Kruste und Mantel, die Mohorovicic-Diskontinuität (kurz: Moho) genannt wird, liegt in einer Tiefe von 5-60 km. Dagegen reicht die Grenzfläche zwischen Lithosphäre und Asthenosphäre bis über 100 km unter die Erdoberfläche. Hauptsächlich die Moho lässt sich wegen der relativ großen Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit der seismischen Wellen an dieser Schichtgrenze relativ genau bestimmen. In beiden isostatischen Modellen ist die Kompensationstiefe ein frei wählender Parameter. In der geodätischen Literatur wird für diesen Parameter im Fall des Airy-Heiskanen-Modells häufig 30 km (also etwa die Tiefe der Moho), im Fall des Pratt-Hayford-Modells häufig 100 km (also etwa die Tiefe der Lithosphäre) als normale Ausgleichstiefe gewählt (vgl. z.B. *W.A. Heiskanen, H. Moritz 1967*) – was zur Begriffsverwirrung in der Diskussion zwischen Geodäten und Geophysikern beiträgt.

Beiden Hypothesen ist gemeinsam, dass eine lokale Kompensation vorausgesetzt wird, d.h. dass (im Fall der Pratt-Hayford-Hypothese) die Dichte des Gebirges unter einer gewissen geographischen Länge und Breite bzw. (im Falle der Airy-Hypothese) die Tiefe der Grenzfläche zwischen Lithosphäre und Asthenosphäre *nur von der Höhe der Topographie zur selben Länge und Breite abhängt*. Physikalisch kann diese Vorstellung so interpretiert werden: Die Lithosphäre besteht aus Säulen infinitesimaler Oberfläche (jedoch endlicher Höhe), die in vertikaler Richtung frei gegeneinander verschiebbar sind, so dass sich ein *lokales Schwimmgleichgewicht* einstellen kann. *F.A. Vening Meinesz (1931, 1939)* erweiterte das Airy-Heiskanen-Modell in der Weise, dass er einen *regionalen Ausgleich* annahm: Die Lithosphäre wird als ebene elastische Platte behandelt, die auf der Asthenosphäre schwimmt und durch die Last der topographischen Massen deformiert wird. Zur Berechnung der Auslenkung konnte Vening-Meinesz auf die Hertz'sche Lösung der Kirchhoff'schen Plattengleichung zurückgreifen (*H. Hertz 1894, 1895*). Eine detaillierte Darstellung dieses Problems findet sich in *H. Leipholz 1968*. Das Modell von Vening-Meinesz leitet somit die Deformation der Lithosphäre im Vergleich zu einem *ungestörten* oder *Referenzzustand* (nämlich der unbelasteten Platte) mit Hilfe der Elastizitätstheorie her. Ein Gebirge, das auf der Lithosphärenplatte aufliegt, bewirkt eine Deformation der Lithosphärenplatte auch in einer horizontalen Umgebung. Dafür nimmt das Vening-Meinesz-Modell (im Gegensatz zu Airy-Heiskanen) auch Scherspannungen in der Lithosphäre in Kauf – damit wird das wichtigste Charakteristikum der isostatischen Modelle aufgegeben. Es lässt sich darüber streiten, ob dies eine Verallgemeinerung oder eine Verwässerung des Prinzips der Isostasie bedeutet.

Ein gewisser Nachteil des Vening-Meinesz-Modells (der sich jedoch leicht beheben lässt) ist die Annahme einer im unverformten Zustand ebenen Lithosphäre. Während diese Einschränkung für lokale Problemstellungen ohne weiteres hingenommen werden kann, ist für regionale und globale Fragestellungen, wenn also Wellenlängen über 100 km von Interesse sind, ein Modell wünschenswert, das zumindest von einer sphärisch geschichteten Erde ausgeht. Ein sphärisches Modell erlaubt darüber hinaus, den in der Geodäsie weit verbreiteten Formalismus der Kugelfunktionsentwicklungen zu anzuwenden, der beispielsweise in der Theorie der Gezeitendeformationen den standardmäßig benutzt wird. Es ist daher erstaunlich, dass sich das sphärische Modell für Auflastdeformationen in der Geodäsie nicht recht durchsetzen konnte. Ein wichtiger Grund mag darin liegen, dass Auflasten in der Regel sehr kleinräumig verteilt sind, so dass die Kugelfunktionsentwicklungen im Vergleich zum Gezeitenfall sehr viel schlechter konvergieren.

Eine weitere Verfeinerung der isostatischen Modelle bestand schließlich darin, zeitliche Veränderungen einzubeziehen. (Anlass dazu gab beispielweise die nacheiszeitliche Landhebung in Skandinavien und Kanada, auf die wir im nächsten Unterabschnitt ausführlicher eingehen.) Die Erweiterung des Prinzips der Isostasie in diesem Sinne wird mit der – etwas unglücklichen – Bezeichnung *Dynamische Isostasie* belegt.

Wie bis hierher geschildert, entstanden die isostatischen Hypothesen aus dem Bemühen, beobachtete Abweichungen der geodätischen Messgrößen von einem “Normalzustand” zu erklären. Bald aber erwies sich vor allem das Airy-Heiskanen-Modell in der Geodäsie auch als nützliches Hilfsmittel zur Bestimmung des Erdschwerefeldes. Bei der Lösung des geodätischen Randwertproblems wird in der Regel davon ausgegangen, dass sich oberhalb des Geoides bzw. des Ellipsoides keine Massen befinden. Ist diese Annahme erfüllt, kann die Laplace-Gleichung im Außenraum der Erde (mit dem Geoid bzw. dem Ellipsoid als Randfläche) gelöst werden. Werden die Beobachtungsgrößen (in der Regel Schwerewerte) um die Wirkung der topographischen Massen reduziert, verbleiben “große” und lokal stark variierende Restgrößen, so wie es bereits von J.H. Pratt in Indien beobachtet wurde. Dadurch kann die Lösung des Randwertproblems ungünstig beeinflusst werden: Da das ursprüngliche Problem nichtlinear ist, wird die Lösung des linearisierten Problems um so besser mit der Lösung des nichtlinearen Problems übereinstimmen, je besser das Referenzmodell bereits die Messgrößen reproduziert. Man vermindert daher bei der *topographisch-isostatischen Reduktion* die Messwerte nicht nur um den Effekt der topographischen Massen, sondern auch um den Effekt der isostatischen Kompensation, also des Massendefizites an der Grenze zwischen Lithosphäre und Asthenosphäre, welches das isostatische Gleichgewicht wiederherstellt (remove-step). Nach der Lösung des Randwertproblems wird der Effekt der topographischen Massen und der Kompensation auf das Schwerepotential berücksichtigt (restore-step). Wenn nur das Schwerefeld außerhalb der Erdoberfläche gesucht wird, hängt die Lösung kaum davon ab, welche Annahme über die Dichte der topographischen Massen getroffen wurde. In vielen Fällen gelingt es, mit Hilfe der Reduktion gemäß dem Airy-Heiskanen-Modell die Schwereanomalien dem Betrage nach zu verkleinern und zu glätten. Die Frage, ob und in welchem Maße eines der genannten Modelle der physikalischen Realität entspricht, ist aus dieser Sichtweise von untergeordneter Bedeutung. (In manchen Teilen der Erdoberfläche, beispielsweise im Osten von Kanada, sind die Hypothesen so schlecht erfüllt, dass die topographisch-isostatische Reduktion keine wesentlichen Vorteile bietet; es wird dann häufig auf andere Reduktionsmethoden zurückgegriffen, beispielsweise auf eine Reduktion der Schwerewerte, welche sich aus der Helmert-Kondensation ergibt (vgl. P. Vaníček, Z. Martinec 1994; Z. Martinec, P. Vaníček 1994a,b)). Von entscheidender Bedeutung für die Lösung des geodätischen Randwertproblems ist vielmehr, dass die topographisch-isostatische Reduktion konsistent angewandt wird bzw. dass der Effekt der topographischen Massen und der isostatischen Kompensation auf Potential und Messgrößen – stets unter den einmal getroffenen Annahmen über die Massendichten in Lithosphäre und Asthenosphäre – mindestens mit der Genauigkeit der Messdaten erfasst wird. Dies ist wohl auch das wichtigste Ziel der neueren geodätischen Arbeiten, die sich mit isostatischen Modellen beschäftigen. Wird beispielsweise eine Kugelfunktionsentwicklung des reziproken Abstandes im Gravitations-Potential bis zu Grad und Ordnung 200 benutzt, so sind in der Binomialentwicklung von $(R_E + h)^l$ mindestens Terme der Ordnung $(h/R_E)^2$ mitzuführen, damit eine Genauigkeit von 10% erreicht wird (R. Rummel et al. 1988). Daneben wird versucht, die freien Parameter (Massendichten von Lithosphäre und Asthenosphäre, Tiefe der Grenzfläche zwischen diesen beiden Schichten) so zu optimieren, dass die topographischen Massen zusammen mit der isostatischen Kompensation die beobachteten Werte an der Erdoberfläche möglichst gut reproduzieren, siehe z.B. J. Engels et al. 1996. Ein weiteres Ziel geodätischer Arbeiten ist es, das statistische Verhalten der topographisch-isostatischen Schwereanomalien zu erfassen. Wir nennen hier stellvertretend nur die Arbeit von H.A.H. Abd-Elmotaal 1991.

Das Prinzip der Isostasie wird somit als *nützliches Rechenhilfsmittel* bis heute in der Geodäsie benutzt und sogar immer weiter verfeinert. Das kann aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass es sich als *Modellvorstellung* als unzureichend erwiesen hat. Vergleicht man etwa eine Karte der Moho-Tiefe, wie sie z.B. von O. Čadež, Z. Martinec 1991 aus seismischen Beobachtungen abgeleitet wurde, mit der entsprechenden Karte dieser Grenzfläche aus dem Airy-Heiskanen-Modell, so stellt man erhebliche Abweichungen fest, siehe z.B. J. Engels et al. 1996.

(Dies gilt auch für die zugehörigen Kugelflächenfunktionskoeffizienten.) Beispielsweise ist das Himalaya-Massiv stark “überkompensiert”, d.h. die Moho liegt dort viel tiefer als es das Airy-Heiskanen-Modell voraussagt (*K.L. Kaila 1981, B.Vermeersen 1993*). Als wichtigste Ursache dieser Abweichungen wird in der geophysikalischen Literatur die *Plattentektonik* angesehen. Sie wird von Konvektionsströmen angetrieben, die Material aus dem tiefen Erdmantel bis zur Lithosphärenengrenze transportieren. Durch das Anströmen dieses Materials wird zum einen die Lithosphäre angehoben, selbst wenn die Stömung stationär ist. (Berechnungen von *J. Matas 1995* haben gezeigt, dass mit diesem Effekt ein Großteil des beobachteten Geoidsignals erklärt werden kann.) Zum anderen entstehen durch das Vorbeiströmen an der Lithosphärenengrenze Scherspannungen (viskose Reibung). Die Kontinentalplatten werden teilweise ineinander geschoben, teilweise auch subduziert. Durch die Kollision zweier Platten werden Gebirge hochgewölbt. Dabei können in der Lithosphäre selbst erhebliche Scherspannungen entstehen, so dass eine der Grundannahmen des Airy-Heiskanen-Modells, die freie Verschiebbarkeit der infinitesimalen Säulen, sich als hinfällig erweist. Aber auch die Vorstellung des Vening-Meinesz-Modells, die Topographie liege gleichmäßig auf der elastischen Platte der Lithosphäre auf, lässt sich mit der Vorstellung der Plattentektonik kaum in Einklang bringen. Die Gebirge entstehen danach ja durch eine Deformation der Kontinentalplatten aus diesen selbst. Eine gedankliche Aufspaltung der Lithosphäre in eine tragende elastische Platte und eine darauf auflastende Topographie erscheint damit – wenigstens für weite Teile der Erdoberfläche – als willkürlich und unrealistisch.

Von der geophysikalischen Forschung wurden bald Modelle entwickelt, die das Prinzip der Isostasie im engeren Sinne ganz oder teilweise verlassen. Diese Modelle wurden aber von geodätischer Seite nur zum geringen Teil übernommen. *W. Grüninger 1990* stellt zutreffend fest: “Weiterführende stationäre oder dynamische isostatische Modelle der Erdkruste, die in der Geophysik im Laufe der Zeit entwickelt wurden (*Turcotte und Schubert, 1982*), fanden bisher bei Schwerefeld- und Geoidbestimmungen in der Geodäsie kaum Beachtung.”

1–2 Auflastdeformationen

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich vornehmlich mit einem einzigen Aspekt der Dynamischen Isostasie, nämlich der Reaktion des Erdkörpers auf Auflasten an der Erdoberfläche. Zwar erscheint es, wie im vorigen Abschnitt erörtert, durchaus fragwürdig, die topographischen Massen selbst als Auflast zu behandeln. Angemessen ist dies dagegen bei Ablagerungen (Sedimenten) oder bei Niederschlägen und daraus resultierenden Ansammlungen von Wasser oder Eis. Solche Auflasten lassen sich gedanklich von der Lithosphäre trennen, besitzen häufig eine geringere Höhe und Masse als die Topographie und verursachen kaum Scherspannungen an der Erdoberfläche. Das (in verschiedener Hinsicht erweiterte) Prinzip der Isostasie lässt sich daher mit viel besserem Erfolg auf solche zeitabhängigen “kleinen” Auflasten anwenden als für die Topographie als Ganzes. Wird die Lithosphäre als elastisch und die Asthenosphäre als reibungsfreie Flüssigkeit vorausgesetzt, so kann – analog zum Vening-Meinesz-Modell – die *statische Verformung* dieser Schichtung infolge einer Last berechnet werden. Verfeinerte Modelle berücksichtigen das zähflüssige oder viskoelastische Verhalten der Asthenosphäre; sie erlauben die Darstellung der Verformung als Funktion der Zeit, beziehen also den dynamischen Aspekt mit ein. Dabei ist die ortsabhängige Höhe der Topographie selbst nicht mehr die entscheidende Größe: Vorausgesetzt, zu irgendeinem Zeitpunkt bestehe statisches Gleichgewicht, so sind die Abweichungen von einem ellipsoidischen oder sphäroidischen Grundzustand von untergeordneter Bedeutung; die Reaktion der Erde auf die Auflast wird nahezu dieselbe sein, als ob die Auflast auf eben ein solches ungestörtes Modell wirkte. Es sind daher durchaus auch negative Auflasten denkbar: Hat sich nach dem Auftreten einer (positiven) Auflast nach einer gewissen Zeit das statische Gleichgewicht weitgehend wieder eingestellt, und wird danach die Auflast wieder entfernt, so ist in dieser Phase des Prozesses die *Bewegung* innerhalb des Erdmodells nahezu dieselbe, als ob auf das ungestörte Modell eine negative Auflast wirkte. Betrachtet man den Zyklus der Eiszeiten und der daraus resultierenden Lasten, so befinden wir uns derzeit in einer solchen Phase: der Phase der *nacheiszeitlichen Landhebung* (wobei allerdings die Periode dieses Zyklus kürzer ist als einige der charakteristischen Relaxationszeiten). Tatsächlich treten nicht nur Hebungen, sondern auch Absenkungen auf: erstere hauptsächlich in ehemals eisbedeckten Gebieten, letztere hauptsächlich in deren Umgebung.

Selbst für die prähistorische Zeit lässt sich eine Landhebung nachweisen. Wesentliches Hilfsmittel hierbei sind die *Strandlinien*, die beispielsweise aus Altersbestimmungen von Sedimentkernen bzw. Muscheln und anderen Meerestieren rekonstruiert werden können, vgl. *A.M. Tushingham und W.R. Peltier (1991)*. Wenngleich davon ausgegangen werden kann, dass die Landhebung gleichmäßig vonstatten ging, zeigt die zeitliche Veränderung der Strandlinien überraschende Unstetigkeiten. Eindrücklichstes Beispiel dafür sind wohl die “Treppenstufen-Strände” an der Hudson-Bay. *R.W. Fairbridge 1983, C. Hillaire-Marcel 1980* weisen beispielsweise auf einen Abschnitt auf der Westseite des Richmond-Golfs der Hudson-Bay hin. Dort erheben sich eine Vielzahl von Stufen vom heutigen Ufer bis zu einer Höhe von 315 m. Diese Stufen sind nach allgemeiner Ansicht durch eine

relativ gleichmäßige Landhebung in Verbindung mit relativ sprunghaften Klimaveränderungen zustande gekommen, die eine Änderung des globalen Meeresspiegels bewirkt haben.

Seit dem 18. Jahrhundert lassen sich die Landhebungen auch aus Pegelbeobachtungen rekonstruieren. *M. Ekman (1993)* listet in seiner Tabelle 3-1 die Jahresmittel des Meeresspiegels in Stockholm von 1774-1984 auf. Für diesen Zeitraum kann ein relatives Absinken des Meeresspiegels von fast 1 m abgelesen werden. Das Maximum in Skandinavien mit einer Landhebungsrate von etwa 1cm pro Jahr liegt im Nordteil des bottnischen Meerbusens. Im Schwedischen Höhensystem RH70 und im Finnischen Höhensystem N 60 wird im übrigen die Landhebung in der Weise berücksichtigt, dass zu den angegebenen Höhen ein zeitabhängiger Term addiert wird.

Soll aus dem Verlauf der Strandlinien bzw. aus Beobachtungen des Meeresniveaus auf die Landhebung oder auf die Eisbedeckung geschlossen werden, so tritt das Problem auf, dass die Landhebung (die ein relatives Absinken des Meeresspiegels bewirkt), von einem globalen eustatischen Absinken des Meeresspiegels unterschieden werden muss. Wichtiges Hilfsmittel hierfür ist die Meeresspiegel-Gleichung, siehe *W.E. Farrell und J. A. Clarke (1976)*. Streng genommen müssen Eisbedeckung und Landhebung simultan bestimmt werden. Verwendet man eines der Standardmodelle, welche den zeitlichen Verlauf der Eisbedeckung beschreiben (wie z.B. Ice-3G von *A.M. Tushingham und W.R. Peltier (1991)* oder das einfachere Weichsel-1 von *D. Wolf (1987)*), so darf nicht vergessen werden, dass mit diesen Modellen bereits eine bestimmte Lösung für die Landhebung verknüpft ist.

Im Gegensatz zum isostatischen Fall handelt es sich bei einer Modellierung von nacheiszeitlichen Hebungen um Differentialgleichungen, die nicht nur Ortsableitungen, sondern auch Zeitableitungen enthalten. Alternativ zu einer numerischen Lösung im Zeitbereich bietet sich hier die Laplace-Transformation als Hilfsmittel an: Die Laplace-transformierten viskoelastischen quasistatischen Bewegungsgleichungen besitzen formal dieselbe Gestalt wie die statischen elastischen Gleichungen (Biot'sches Korrespondenzprinzip). Es sind lediglich die elastischen Parameter durch die entsprechenden Laplace-transformierten Relaxationsfunktionen zu ersetzen. Man erhält dann als Lösung den (frequenzabhängigen) Laplace-transformierten Verschiebungsvektor, der durch eine inverse Laplace-Transformation in den Zeitbereich zurückzutransformieren ist. Diese Art der Lösung wird derzeit bevorzugt angewandt, siehe z. B. *P. Wu und W.R. Peltier 1982, J.X. Mitrovica et al. 1994, B. Vermeersen et al. 1996, W. Sun and L. Sjöberg (1999)*.

1–3 Polwanderung

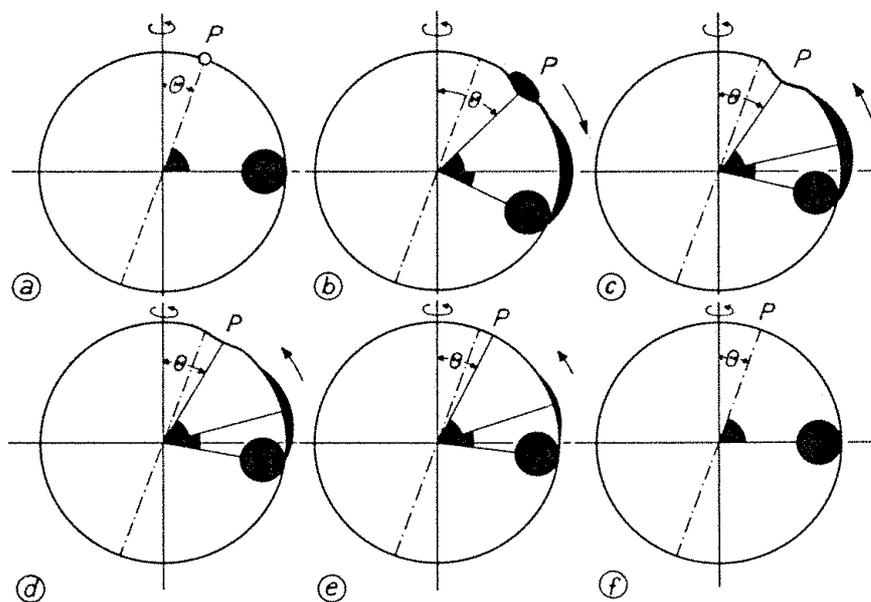
Die Änderung des Trägheitstensors der Erde infolge der Massenverlagerungen durch die Auflast selbst sowie der von ihr erzeugten Landsenkung oder -hebung zieht auch eine Änderung des Rotationsverhaltens der Erde nach sich. Einerseits führt der Winkelgeschwindigkeitsvektor bezüglich eines "körperfesten" Koordinatensystems eine periodische Kegelbewegung aus (Polbewegung, wobble). Eine solche Polbewegung träte auch bei einem starren Körper auf, wenn bei konstantem Drehimpuls der Winkelgeschwindigkeitsvektor zu einem Anfangszeitpunkt nicht die Richtung einer der drei Hauptträgheitsachsen besäße. Andererseits wird eine säkulare Bewegung der Symmetrieachse dieses Kegels beobachtet, die als *Polwanderung* oder *Polflucht* bezeichnet wird. Derzeit wandert die Polachse im Mittel mit einer Rate von 10cm pro Jahr in Richtung östliches Kanada.

Allgemein wird die nacheiszeitliche Hebung als wichtigste Ursache dieser Polwanderung angesehen. (Allerdings zeigt *B. Vermeersen (1993)*, dass auch tektonische Prozesse maßgeblich zur Polwanderung beitragen können.) Die entscheidenden Parameter, welche die Größenordnung der Polwanderung bestimmen, sind – abgesehen von der Masse, Verweildauer und Verteilung der Auflast – vor allem die Viskosität des Mantels und die Dicke der Lithosphäre. In der Geophysik war lange Zeit umstritten, ob eine nennenswerte Polwanderung vorhanden ist oder nicht; siehe z.B. *K. Lambeck 1980*. Der Grund war, dass die Viskosität des Mantels wesentlich höher eingeschätzt wurde als dies heute der Fall ist.

Bei einer deformierbaren Erde gibt es i. allg. kein körperfestes System in dem Sinne, dass sich die Massenelemente in diesem System nicht bewegen. Man bezieht daher die Polwanderung auf ein System, bezüglich dessen die Bewegung der Massenelemente möglichst klein ist (vgl. Abschnitt 2-33). Für theoretische Überlegungen wird häufig das physikalisch definierte Tisserandsystem benutzt (ebenda), bei Beobachtungen beziehen sich viele Autoren auf das sog. "hot-spot-frame", das durch relativ stabile Konvektionsströme im Erdmantel festgelegt wird. Häufig wird zwischen diesen beiden Systemen nicht unterschieden. Seltener wird ein System verwendet, das durch vermarktete Punkte an der Erdoberfläche festgelegt wird. Durch die Kontinentalverschiebung stellt ein Beobachter, der sich auf einer der Platten mitbewegt, auch eine Bewegung des Rotationspoles relativ zu seiner Platte fest. Man spricht hier von "scheinbarer Polwanderung"; für die säkulare Bewegung des Poles bezüglich des Tisserandsystems wird häufig auch der Begriff "wahre Polwanderung" benutzt.

K. Strobach (1991) bemüht sich um eine anschauliche Beschreibung des Vorgangs der Polwanderung; wir geben hier seine Darstellung ausführlich wieder. Der Autor vernachlässigt zunächst das Einsinken der Auflast im Zuge des isostatischen Ausgleichs und führt aus:

Durch eine Zusatzmasse, beispielsweise eine Eiskappe, werde ein Drehmoment erzeugt, das den Erdkörper kippe (in Abbildung 13.5b nach rechts). Diesem Drehmoment wirke jedoch der 21 km mächtige Äquatorwulst entgegen (in der Abbildung durch einen schwarzen Kreisausschnitt am Äquator versinnbildlicht), der aus der Äquatorebene herausgekippt werde, und zwar gerade so weit, dass sein eigenes Drehmoment jenes der Störmasse aufhebe. Dabei werde das Drehmoment des Äquatorwulstes durch die Zentrifugalkraft der Erdrotation erzeugt. Außer dem Äquatorwulst wirken auch die Massenanomalien im Erdmantel stabilisierend. Nun deformiere sich das zähflüssige Material des Erdmantels langsam durch Fließen derart, dass eine zunehmende Anpassung des Wulstes an die neue Gleichgewichtslage erfolge, wobei sich die noch nicht angepasste Wulstmasse stetig vermindere. Dies habe jedoch eine Gegenreaktion der Störmasse zur Folge: Sie kippe die Erde unaufhaltsam weiter (in der Abbildung nach rechts), und zwar gerade so schnell, dass die noch vorhandene Wulstmasse immer genau das kompensierende Drehmoment ausüben könne. Dieser Vorgang setze sich so lange fort, bis die Störmasse entweder am Äquator angekommen oder wieder abgeschmolzen sei. An einer anderen Stelle fährt der Autor wörtlich fort:



(Abbildung 13.5 in *K. Strobach 1991*)

“Wir wollen nun das obige Beispiel einer wahren Polwanderung unter mehr realistischen Verhältnissen betrachten. Hierzu muss berücksichtigt werden, dass die angenommene Eiskappe nicht einfach als Last aufliegt, sondern im Zuge des isostatischen Ausgleichs einsinkt. Dadurch wird das vom Eis ausgeübte Drehmoment erheblich verkleinert. Ferner wirkt diesem Drehmoment das Drehmoment der Massenanomalien des Erdmantels entgegen. So kommt es nicht zu einer Wanderung der Eismasse bis zum Äquator, sondern nur zu einer sehr begrenzten Kippbewegung der Erde, bis nämlich beide Drehmomente im Gleichgewicht sind. Anhand der Abbildung 13.5 können wir das Geschehen in 6 Phasen verfolgen. Bei a) bedeutet Punkt P (Poldistanz Θ) den künftigen Ort der Eismasse. Der schwarze Kreis stellt die Ersatzmasse für die Massenanomalien dar; da sie die Erdrotation stabilisiert, muss sie zunächst in der Äquatorebene liegen. Phase b) zeigt den Zustand, nachdem sich die Eiskappe gebildet hat. Die Eismasse ist im Zuge der Polwanderung nach rechts gekippt und nach Erreichen gleichgroßer Drehmomente von Eiskappe und Massenanomalien zum Stillstand gekommen. Der Äquatorwulst hat sich der neuen Lage angepasst; die dabei neu verschobene Wulstmasse ist als schwarze Sichel eingezeichnet. In Phase c) sei die Eiskappe gerade geschmolzen. Es bleibt eine Absenkung der Erdkruste zurück, die in der Folge erst langsam durch isostatische Hebung verschwindet (man denke an die Hebung Skandinaviens!). Wegen des nun fehlenden Drehmoments der abgeschmolzenen Eismassen ist die Erde nun um einen Bruchteil des vorangegangenen Wanderungsbetrages zurückgekippt in eine Position, wo sich die drei Drehmomente von Ersatzmasse, Wulst und Absenkung gerade aufheben. Dieses Zurückkippen kann sehr schnell erfolgen, weil hierbei kein vis-

koses Fließen des Erdmantels notwendig ist und bremsen könnte; die Erde kippt als quasi-starres Gebilde in die neue Gleichgewichtslage. Die Geschwindigkeit dieser Kippbewegung ist nur abhängig von der Geschwindigkeit, mit der die Eismasse abtaut. In der Folge setzt sich jedoch das Zurückkippen mit abnehmender Geschwindigkeit noch weiter fort, wie in Phasen d) und e) dargestellt ist. Diese Bewegung wird vom allmählich zunehmenden Überschuss des Drehmoments der Ersatzmasse angetrieben, denn das kompensierende Drehmoment der aus der Gleichgewichtslage herausgedrehten Wulstmasse (schwarze Sichel) nimmt infolge der Rückdeformation in die neue Äquatorlage mehr und mehr ab. (In der Abbildung dargestellt ist immer nur der in der gekippten Position verbleibende Rest). Zwar wirkt hier die isostatische Hebung in P entgegen; doch bleibt eine langsame Linksdrehung der gesamten Erde übrig, denn schließlich muss ja der Anfangszustand a) wieder erreicht werden (mit Phase f)). Da sich die Massenanomalien in der Zwischenzeit geringfügig verändert haben können, braucht der Anfangszustand natürlich nicht exakt wieder erreicht zu werden; die Ersatzmasse muss jedenfalls wieder in der Äquatorebene liegen.”

Selbstverständlich muss diese prägnante qualitative Darstellung der Polwanderung präzisiert und durch eine mathematische Formulierung ergänzt werden. Soviel wird aber bereits an dieser Stelle deutlich: Die Phänomene “Dynamische Isostasie” und “Polwanderung” können nicht getrennt voneinander betrachtet werden, sondern sind auf das engste miteinander verbunden. (Im Gegensatz dazu genügt zur Berechnung von Nutationen häufig ein starres Erdmodell.) Auffallend ist auch die wichtige Rolle, die der Autor der inkrementellen Zentrifugalkraft zuschreibt (die nämlich das Drehmoment des Äquatorwulstes erzeuge). Schließlich könnte man einen Widerspruch darin sehen, dass im ersten Absatz dieses Unterabschnittes gesagt wurde, die Auflast verursache eine Änderung des Trägheitstensors, während *Strobach (1991)* davon spricht, die Auflast verursache ein Drehmoment. Bei der erstgenannten Betrachtungsweise wird die Auflast als dem Erdkörper zugehörig angesehen, bei der zweiten dagegen als äußere Kraft, die auf das System Erde einwirkt. Wir werden im Abschnitt 2-93 zeigen, dass diese beiden Betrachtungsweisen äquivalent sind.

Zur quantitativen Modellierung der Polwanderung werden im wesentlichen folgende Elemente bzw. Bestimmungsgleichungen kombiniert (vgl. *R. Sabadini, W. Peltier 1981*):

1. (a) Linearisierte Euler-Liouville-Gleichungen im Laplace-Bereich, dargestellt in einem Tisserandsystem mit $\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_Z$:

$$[As - i(C - A)\Omega]\tilde{m} + [s + i\Omega]\delta\tilde{J} = 0$$

Dabei bezeichnen A und C die Hauptträgheitsmomente des rotationssymmetrischen ungestörten Erdkörpers, δJ_{ij} die kartesischen Komponenten des inkrementellen Trägheitstensors, $\delta\tilde{J} = \delta\tilde{J}_{13} + i\delta\tilde{J}_{23}$, $\mathbf{\Omega}$ den genäherten Rotationsvektor der Erddrehung, Ω dessen Betrag und $m_x\Omega$, $m_y\Omega$ Komponenten des inkrementellen Winkelgeschwindigkeitsvektors, $m = m_x + im_y$. s ist der Parameter der Laplace-Transformation; Tilden über den Variablen zeigen an, dass es sich um Laplace-transformierte Größen handelt. Die Gleichungen für den Fall eines starren Planeten wurden von *L. Euler (1758)*, diejenigen für einen deformierbaren Planeten wurden laut *E. Routh (1905)* von *J. Liouville* im Jahr 1858 im dritten Band seines Journals angegeben.

- (b) Gravitationspotential der Auflast an der Erdoberfläche:

$$\delta\tilde{v}^{Last}(\Lambda, \Phi, R_E) = \sum_{l,m} \delta\tilde{v}_{l,m}^{Last} Y_{l,m}(\Phi, \Lambda)$$

(Hier bedeuten $\delta\tilde{v}^{Last}$ das Laplace-transformierte Gravitationspotential, das durch die Auflast erzeugt wird, R_E den Erdradius, $Y_{l,m}(\Phi, \Lambda)$ die vollständig normierten komplexen Kugelflächenfunktionen, $\delta\tilde{v}_{l,m}^{Last}$ frequenzabhängige Koeffizienten.)

- (c) Inkrementelles Zentrifugalpotential:

$$\delta\tilde{v}_{Zent} = R^2\Omega^2\left(\frac{2\tilde{m}_z}{3} - \frac{2m_z}{3\sqrt{5}}Y_{2,0} - \frac{\tilde{m}}{\sqrt{30}}Y_{2,-1} + \frac{\tilde{m}^*}{\sqrt{30}}Y_{2,1}\right) =: R^2\Omega^2\frac{2}{3}\tilde{m}_z + \sum_{2,m} R^2\delta\tilde{v}_{2,m}^{Zent} Y_{2,m}$$

- (d) Beziehung zwischen den Koeffizienten $\delta\tilde{v}_{lm}^{Def}$ des Deformationspotentials, das infolge der Massenverlagerungen im Erdinneren auftritt, den Koeffizienten des Auflastpotentials sowie den Koeffizienten des inkrementellen Zentrifugalpotentials an der Erdoberfläche:

$$\delta\tilde{v}_{l,m}^{Def} = \tilde{k}_l^L \delta\tilde{v}_{l,m}^{Last} + \tilde{k}_l^T \delta\tilde{v}_{lm}^{Zent}$$

(Hier bedeuten \tilde{k}_l^L und \tilde{k}_l^T die frequenzabhängigen Auflast- bzw. Love-Zahlen.)

(e) Zusammenhang zwischen Potentialkoeffizienten und inkrementellen Trägheitsmomenten:

$$\delta J = -\frac{1}{g} \sqrt{\frac{10}{3}} \left\{ \delta v_{2,-1}^{Last} + \delta v_{2,-1}^{Def} \right\} R_E^3$$

Stark vereinfacht lässt sich die übliche Vorgehensweise folgendermaßen beschreiben: Ausgehend von einem *sphärischen, rotationssymmetrischen* Erdmodell werden Auflast-Zahlen \tilde{k}_l^L berechnet, d.h. Verhältniszahlen, welche die Beziehung zwischen den Koeffizienten des durch die Massen der Auflast erzeugten Gravitationspotentials und den Koeffizienten des durch die Massenverlagerung induzierten Potentials herstellen. Analog dazu wird der Effekt der inkrementellen Zentrifugalkraft auf das induzierte Deformationspotential mit Hilfe der Love'schen Zahlen \tilde{k}_l^T beschrieben: Formal besitzt das inkrementelle Zentrifugalpotential abgesehen von einem (0,0)-Term die Gestalt eines Gezeitenpotentials. Die Last- und Love-Zahlen sind hier vom Laplace-Parameter s abhängig. Gibt man eine bestimmte Auflast vor, so kann damit das gesamte inkrementelle Potential berechnet werden, allerdings noch in Abhängigkeit von dem vorerst unbekanntem inkrementellen Drehvektor $\delta \boldsymbol{\omega}$ (Gleichungen (b)-(d)). Ebenso lassen sich die Störungen des Trägheitstensors in Abhängigkeit von der Polbewegung bzw. Polwanderung m angeben (Gleichung (e)). Man führt nun diese Störungen in die Euler-Liouville-Gleichungen (a) ein. Damit kann aus den Euler-Liouville-Gleichungen \tilde{m} berechnet werden.

Die Beziehungen zwischen der Auflast einerseits und der durch sie entstehenden Deformation sowie des induzierten Potentials andererseits werden für eine *rotationssymmetrische, nichtrotierende Erde* bestimmt. Die Kugelsymmetrie führt zur Isotropie der zugehörigen Green-Funktionen (Love-Shida-Hyothese). Anschließend werden jedoch diese aus dem sphärischen Modell gewonnenen Beziehungen auf das ellipsoidische, rotierende Modell angewandt, d.h. in die Drehimpulsbilanz eingesetzt, die wesentlich die Differenz der Hauptträgheitsmomente der abgeplatteten Erde enthält. Es stellt sich daher die Frage, welche Größen bei dieser Betrachtungsweise vernachlässigt werden und wie sich das auf die Lösungen auswirkt. Dies gilt vor allem für die Polwanderung: Bei einem homogenen viskoelastischen Erdmodell, das durch eine Auflast angeregt wird, tritt keine Polwanderung, sondern lediglich eine Polbewegung auf. Polwanderung entsteht also nur, falls eine Schichtung bzw. eine Variation der Parameter innerhalb der Erde (Massendichte, viskoelastische Parameter) vorhanden ist. Es erhebt sich daher die Frage, ob es sich bei der Polwanderung um ein Phänomen handelt, das auch noch durch "Effekte zweiter Ordnung" maßgeblich beeinflusst werden könnte.

1–4 Ziele und Aufbau der vorliegenden Arbeit

Wie bereits geschildert, ist in der Geodäsie – im Gegensatz zur Geophysik – die Modellierung des Zustandes bzw. des Verhaltens der äußeren Schichten der Erde zu Gunsten einer eher pragmatischen bzw. zweckgebundenen Anwendung der isostatischen Modelle in den Hintergrund gerückt. Das erste Ziel der vorliegenden Arbeit ist es daher, die Methoden, die in der Geophysik zur Behandlung des Problemkreises der nacheiszeitlichen Hebung und Polwanderung benutzt werden, geschlossen darzustellen. Dies erscheint auch insofern gerechtfertigt, als in den Lehrbüchern der Kontinuumsmechanik in der Regel nicht auf die konkreten isostatischen Modelle und Algorithmen eingegangen wird, während in der geophysikalischen Literatur die theoretischen Grundlagen meist im Hintergrund stehen. Das zweite Ziel der Arbeit ist die Untersuchung des Einflusses der Abplattung der Erde auf die Lastzahlen und die Polwanderung. Diese beiden Ziele widersprechen sich leider insofern, als für die Untersuchung der sphäroidischen Einflüsse umfangreiche Ableitungen und Formelsysteme notwendig sind, die die Darstellung der Standard-Methoden durchsetzen und unübersichtlicher machen. (Dies betrifft vor allem das dritte Kapitel, in dem die Randbedingungen und Stetigkeitsbedingungen an den Schichtgrenzen in skalaren und vektoriellen Kugelflächenfunktionen ausgedrückt werden.)

Im zweiten Kapitel, das den vergleichsweise größten Raum einnimmt, werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen der isostatischen Modelle diskutiert. Ausgangspunkt der Betrachtungen sind die Feldgleichungen und Randbedingungen eines deformierbaren, gravitierenden Körpers. Dabei handelt es sich im wesentlichen um

- die Impulsbilanz (Bewegungsgleichungen),
- die Drehimpulsbilanz,
- die Formänderungsbeziehungen,
- ein Materialgesetz,
- die Massenerhaltung.

Das Verhalten eines Kontinuums im Lauf der Zeit kann vom *Euler'schen* oder *Lagrange'schen* Standpunkt aus betrachtet werden. Während bei ersterem der Beobachter im globalen Bezugssystem ruht, bewegt er sich bei diesem mit einem bewegten Massenelement mit. Für jede Feldgröße kann entsprechend ihre Veränderung im Euler'schen und im Lagrange'schen Sinne betrachtet werden.

Im zweiten Kapitel werden die Feldgleichungen bezüglich eines hydrostatischen Gleichgewichtszustandes in einem krummlinigen Koordinatensystem linearisiert, so dass die Euler'schen bzw. Lagrange'schen Inkremente nur noch linear auftreten. Ebenso werden die auftretenden Differentialoperatoren bezüglich des unverzerrten Zustandes linearisiert. (Der hydrostatische Gleichgewichtszustand ist ein Zustand verschwindender Scherspannungen und minimaler potentieller Energie, der von viskoelastischen Flüssigkeiten in Abwesenheit von Anregungen asymptotisch erreicht wird. Er eignet sich daher hervorragend als Referenzzustand für die Linearisierung.)

Zur Definition eines mitrotierenden Bezugssystems werden verschiedene Möglichkeiten diskutiert; je nach Wahl dieses Bezugssystems werden die Schwierigkeiten bei der Problemlösung mehr zur Orientierung des Bezugssystems oder zur Berechnung der Deformationen hin verlagert. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird das Tisserand-System benutzt, das sich sehr gut für Modellrechnungen, allerdings weniger für die Interpretation von Beobachtungsdaten an der Erdoberfläche eignet.

Einen weiteren Schwerpunkt des zweiten Kapitels bildet die Berechnung der inkrementellen Gravitation infolge einer Deformation des Erdkörpers. Die dabei auftretenden Stetigkeits- bzw. Sprungrelationen sind für die Formulierung von Randbedingungen an der Erdoberfläche, an der Kern-Mantel-Grenze oder an anderen inneren Schichtgrenzen von Bedeutung. Schließlich wird die Drehimpulsbilanz erläutert, die in diesem Zusammenhang dazu dienen wird, gewisse Defekte zu beheben, die durch die quasistatische Näherung entstehen.

Da das zweite Kapitel also im wesentlichen die *kontinuumsmechanischen Prinzipien* darstellt, sind die wichtigsten Beziehungen dort in Form von Sätzen formuliert. Im Gegensatz dazu erläutern die Kapitel 3 bis 5 hauptsächlich *Berechnungsmethoden*. Im dritten Kapitel stellen wir die Feldgleichungen bzw. kontinuumsmechanischen Feldgrößen in skalaren, vektoriellen und tensoriellen Kugelfunktionen dar. Dazu gehören das hydrostatische Schwerfeld, der Spannungstensor, Randspannungen an Grenzflächen u.a.m. Im Gegensatz zu den meisten geophysikalischen Autoren führen wir dabei konsequent die Terme der Ordnung e^2 (erste numerische Exzentrizität) bzw. $\Omega^2 R_E / \Gamma_E$ (R_E – Erdradius, Γ_E – Oberflächenschwere) mit. Um die Randbedingungen auf ellipsoidischen bzw. sphäroidischen Grenzflächen auswerten zu können, benutzen wir ein Koordinatensystem, das eine Schar von sphäroidischen Koordinatenflächen besitzt (quasisphärische Koordinaten). Auf diese Weise kann eine beliebige, in diesen Koordinaten dargestellte Feldgröße durch Konstantsetzen des mittleren Radius des jeweiligen Koordinaten-Sphäroids auf die Koordinatenfläche spezialisiert werden. Bei der Darstellung einer Feldgröße in quasisphärischen Koordinaten tritt die Schwierigkeit auf, dass häufig Produkte von skalaren oder vektoriellen Kugelfunktionen wieder als Summe von Kugelfunktionen zu rekombinieren sind. Der dafür notwendige Formelapparat ist im Anhang A zusammengestellt.

Die allgemeinen Lösungen der quasistatischen Bewegungsgleichungen eines homogen geschichteten inkompressiblen Körpers, die im dritten Kapitel aufgeführt sind, hängen noch von Koeffizienten ab, die aus Randbedingungen an den Schichtgrenzen zu bestimmen sind. Dabei tritt die Schwierigkeit auf, dass in den Randbedingungen für die Koeffizienten einer Schicht auch die Koeffizienten der angrenzenden Schichten auftreten. Es wird also eine Propagation der Koeffizienten von oben nach unten und wieder zurück notwendig. Diese Propagation wird im vierten Kapitel dargestellt, ebenso wie die halbanalytische Lösung des dabei entstehenden Gleichungssystems. Dabei ist zu beachten, dass die unbekanntes Koeffizienten noch vom Laplace-Parameter abhängen. Die Koeffizienten ergeben sich als gebrochenrationale Funktionen, die durch Partialbruchzerlegungen in Summen von einfachen Brüchen gebracht werden können. Die Nullstellen der Nenner können im Zeitbereich als inverse Relaxationszeiten interpretiert werden, die das Abklingen des jeweiligen Terms steuern.

Der fünfte Abschnitt beschäftigt sich in erster Linie mit der Auflösung der Drehimpulsbilanz nach der inkrementellen Rotation im Laplace-Bereich. Die darin auftretenden inkrementellen Trägheitsmomente sind als Störungen der Kugelfunktionskoeffizienten des Außenraumpotentials darstellbar; diese sind ihrerseits linear mit den Koeffizienten des anregenden Lastpotentials sowie den Koeffizienten des inkrementellen Zentrifugalpotentials gekoppelt (MacCullagh-Gleichungen). Proportionalitätsfunktionen sind die Last- bzw. Love“zahlen“, die aus den Lösungen des vierten Kapitels hervorgehen.

Im sechsten Kapitel wird schließlich ein numerisches Beispiel angeführt: Für ein Fünf-Schichten-Modell werden Faltungskerne für die Polbewegung und die Polwanderung errechnet. Dabei wird auch die Größenordnung der sphäroidischen Effekte offensichtlich: Sowohl für die auflastinduzierte Änderung des Gravitationspotentials als auch für die Polverlagerung liegen sie bei etwa 1 Prozent.

2. Kontinuumsmechanische Elemente eines viskoelastischen Erdmodells – Bilanzgleichungen und Randbedingungen

2–1 Euler’sche und Lagrange’sche Beschreibung eines sich deformierenden Kontinuums

2–1.1 Euler’sche und Lagrange’sche Koordinaten

Die Zustandsänderungen eines Kontinuums können von verschiedenen Standpunkten aus betrachtet werden. Zum einen kann untersucht werden, wie sich die Feldgrößen wie Massendichte, Geschwindigkeit usw. in einem *raumfesten Punkt* (d.h. in einem bezüglich eines gewählten Referenzsystems festgehaltenen Punkt) im Lauf der Zeit verändern. Man spricht in diesem Fall von der *Euler’schen* Sichtweise: Ort und Zeit sind die Argumente der Zustandsbeschreibung. Während hier also “der Beobachter im gewählten Bezugssystem ruht”, ist er im Fall der *Lagrange’schen* Sichtweise gleichsam an ein bewegtes Teilchen angeheftet; es wird das Verhalten der Feldgrößen in einem (beliebigen, aber festen) *bewegten Massenelement* untersucht, so dass sich die Zustandsbeschreibung auf ein Massenelement und die Zeit als Argumente bezieht. Eine dritte, mehr rechenstechnisch begründete Beschreibung der Bewegung bezieht sich auf einen (fiktiven) wandernden Punkt, dessen Gravitationspotential sich zeitlich nicht ändert (vgl. *D. Wolf 1997 S. 12*). Diese verschiedenen Beobachtungsstandpunkte geben Anlass zur Definition verschiedener Koordinatensysteme, die jeweils einer Betrachtungsweise zugeordnet werden.

Die vierdimensionale Raumzeit wird mathematisch durch eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit modelliert. Im Rahmen der klassischen Mechanik – auf die wir uns hier beschränken – werden jedoch Raum und Zeit als unabhängige Kontinua aufgefasst, die nicht metrisch miteinander verknüpft sind. Man versteht daher die Raumzeit zunächst als eindimensionales Kontinuum dreidimensionaler differenzierbarer Mannigfaltigkeiten $\{\mathcal{M}_t\}$ mit dem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$. Gemäß der klassischen Mechanik wird überdies jede dieser Mannigfaltigkeiten mit der euklidischen Metrik versehen und kann daher mit dem unveränderlichen *dreidimensionalen euklidischen Vektorraum* \mathbb{E}^3 identifiziert werden; die Mannigfaltigkeiten der verschiedenen Zeitparameter werden also nicht mehr unterschieden.

In der oberen Hälfte der nachfolgenden kommutativen Diagramme (Abbildungen 2-1 – 2-4) ist jeweils ein materielles Kontinuum zu drei verschiedenen Zeiten bzw. Zuständen t_0, t_i, t_n skizziert. Der Parameter t_0 entspricht keinem *Zeitpunkt*, sondern dem *Grundzustand* oder *undeformierten Zustand* des Kontinuums, der im Abschnitt 2-5.2 im Sinne bestimmter Gleichgewichtsbedingungen definiert werden wird und der als Referenzmodell für Linearisierungen dient. Es wird nicht gefordert, dass diese Bedingungen zu irgendeinem Zeitpunkt t erfüllt sind, d.h. das Kontinuum sich jemals im Grundzustand befindet. Der Index t_0 ist aus formalen Gründen gewählt: Die Ausdrücke “ $\forall t \in \mathbb{R}$ ” schließen auch t_0 mit ein.

Definition 2-1 (Ortsvektoren zu räumlichen und materiellen Punkten):

Wir bezeichnen mit

- \mathbf{x} - den Ortsvektor zu einem Punkt des Raumes \mathbb{E}^3 bezüglich eines gewählten Bezugssystems,
- \mathbf{p}_{t_i} - den (zeitabhängigen) Ortsvektor eines *materiellen* Punktes P zur Zeit t_i ,
- $\mathbf{P} = \mathbf{p}_{t_0}$ - den Ortsvektor desselben materiellen Punktes im Grundzustand des Kontinuums. ■

Als Bezugssystem verwenden wir teilweise ein Inertialsystem, häufiger jedoch ein System, dessen Ursprung mit dem Massenmittelpunkt der Erde zusammenfällt und dessen Rotation im Mittel mit der Rotation der Erde übereinstimmt. Ein solches System ist gegenüber einem Inertialsystem sowohl translativ als auch rotatorisch beschleunigt.

Zu einem Koordinatensystem gehören eine *Karte* \mathcal{K} (hier: $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$) und eine *Abbildungsvorschrift* \mathfrak{A} , die einem Koordinatentupel der Karte einen Punkt der (hier: 3-dimensionalen) Mannigfaltigkeit zuordnet. Die Koordinatenkurven sind i. allg. krummlinig. Wir benutzen zwei Karten \mathcal{K}_L und \mathcal{K}_E , die jeweils in der unteren Hälfte der kommutativen Diagramme (Abbildungen 2-1 – 2-6) veranschaulicht sind. (Der Übersichtlichkeit halber sind in den Diagrammen nur zweidimensionale Karten angedeutet.) Die linke Karte, bestehend aus den Koordinatentripeln $\{X^K\}, K \in \{1, 2, 3\}$, heißt *Lagrange-Bild*, die rechte Karte, bestehend aus den Koordinatentripeln $\{x^k\}, k \in \{1, 2, 3\}$ heißt *Euler-Bild*.

Die *Euler'schen* oder *räumlichen* Koordinaten x^k eines Raumpunktes \mathbf{x} zeichnen sich dadurch aus, dass sie für alle Zeitpunkte t_i unverändert bleiben; die Euler'schen Koordinaten eines Massenelementes ändern sich dagegen, falls sich das Massenelement gegenüber dem gewählten Bezugssystem bewegt. Umgekehrt bleiben die *Lagrange'schen* oder *materiellen* Koordinaten X^K eines Massenelementes für alle Zeitpunkte unverändert, so dass sich ein Massenelement stets durch seine Lagrange'schen Koordinaten identifizieren lässt. Dagegen ändern sich i. allg. die Lagrange'schen Koordinaten eines raumfesten Punktes, da sich ja die Materie i.allg. durch den Raum hindurchbewegt.

Um die Koordinaten, Raumpunkte bzw. Massenelemente (zur selben Zeit oder auch zu unterschiedlichen Zeitpunkten) einander zuzuordnen, führen wir die folgenden Operatoren ein:

Definition 2-2 (Abbildungen zwischen Karten und \mathbb{E}^3 bzw. von \mathbb{E}^3 auf sich selbst):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{t_i}^L : \mathcal{K}_L &\rightarrow \mathbb{E}^3 & \text{mit } \mathbf{x} = \mathfrak{A}_{t_i}^L(X^K) & =: \mathfrak{A}^L(X^K, t_i) \\
\mathfrak{A}_{t_i}^E : \mathcal{K}_E &\rightarrow \mathbb{E}^3 & \text{mit } \mathbf{x} = \mathfrak{A}_{t_i}^E(x^k) & \\
\mathfrak{T}_{t_i t_n} : \mathbb{E}^3 &\rightarrow \mathbb{E}^3 & \text{mit } \mathbf{p}_{t_n} = \mathfrak{T}_{t_i t_n}(\mathbf{p}_{t_i}) & \\
\mathfrak{T}_{t_0 t_n} : \mathbb{E}^3 &\rightarrow \mathbb{E}^3 & \text{mit } \mathbf{p}_{t_n} = \mathfrak{T}_{t_0 t_n}(\mathbf{p}_{t_0}) & =: \mathfrak{T}(\mathbf{P}, t_n)
\end{aligned} \tag{2-1}$$

Die Abbildung $\mathfrak{A}_{t_i}^L : \mathcal{K}_L \rightarrow \mathbb{E}^3$ mit $\mathbf{x}_{t_i} = \mathfrak{A}_{t_i}^L(X^K)$ ordnet den Lagrange-Koordinaten einen Punkt \mathbf{x} des Raumes \mathbb{E}^3 zu. Da wir den \mathbb{E}^3 zu verschiedenen Zeitpunkten nicht unterscheiden, hat \mathbf{x} keinen Index. Dagegen ist der untere Index des Operators $\mathfrak{A}_{t_i}^L$ wesentlich; die Abbildungsvorschrift ist zeitabhängig. Analog dazu bildet der Operator $\mathfrak{A}_{t_i}^E : \mathcal{K}_E \rightarrow \mathbb{E}^3$ mit $\mathbf{x} = \mathfrak{A}_{t_i}^E(x^k)$ die Euler-Koordinaten auf einen Punkt des Raumes ab. Der Identitätsoperator $\mathfrak{T}_{t_i t_n}$, den wir nur in den Diagrammen zur Veranschaulichung verwenden, *identifiziert* ein- und denselben räumlichen Punkt des Bezugssystems zu den Zeitpunkten t_i und t_n . Insbesondere fordern wir, dass der Nullvektor $\mathbf{0}_{t_i}$ durch $\mathfrak{T}_{t_i t_n}$ in den Nullvektor $\mathbf{0}_{t_n}$ überführt wird:

$$\mathfrak{T}_{t_i t_n}(\mathbf{0}_{t_i}) = \mathbf{0}_{t_n} \quad \forall t_i, t_n \tag{2-2}$$

Der *Bewegungs - Operator* $\mathfrak{T}_{t_i t_n} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ mit $\mathbf{p}_{t_n} = \mathfrak{T}_{t_i t_n}(\mathbf{p}_{t_i})$ *verschiebt einen materiellen Punkt* \mathbf{p} zwischen den Zeitpunkten t_i und t_n .

Definition 2-3 (Verschiebung):

Der Differenzvektor

$$\mathbf{u}_t := \mathbf{p}_t - \mathbf{P} \tag{2-3}$$

heißt *Verschiebung*. ■

Wir setzen im folgenden stets voraus, dass der Bewegungs - Operator $\mathfrak{T}_{t_i t_n}$ ein bijektiver Diffeomorphismus ist. (Für die Abbildungen $\mathfrak{A}_{t_i}^L$ und $\mathfrak{A}_{t_i}^E$ gilt dies nicht: Wählen wir ein krummliniges Koordinatensystem (wie z.B. Kugelkoordinaten), so können singuläre Punkte, Kurven oder Flächen auftreten. In diesem Fall müssen weitere Karten und Abbildungen eingeführt werden (Metasysteme), um die Singularitäten zu überbrücken.)

Daraus folgt, dass zwei Punkte, die im Grundzustand infinitesimal benachbart sind, zu allen Zeitpunkten infinitesimal benachbart bleiben; falls zwei Punkte im Referenzzustand endlichen Abstand besitzen, bleibt diese Eigenschaft ebenfalls erhalten. Insbesondere bleiben materielle Randpunkte eines sich deformierenden Kontinuums stets Randpunkte und innere Punkte stets innere Punkte.

Diese Annahmen stellen eine weitreichende Einschränkung dar; für die sich deformierende Erde sind sie i. allg. nicht erfüllt. So liegen bei Verwerfungen, Faltungen, Furkationen (wie etwa bei Konvektionsströmen) oder der unterschiedlichen Rotation von Kern und Mantel charakteristische Unstetigkeiten vor. In diesen Fällen kann die hier vorzustellende Theorie nur mit Modifikationen angewandt werden. Wenn es Unstetigkeitsflächen gibt, muss beispielsweise der Erdkörper in mehrere Teilkörper zerlegt werden, deren Grenzen gerade die Unstetigkeitsflächen sind. Es müssen dann für diese Grenzen Randbedingungen formuliert werden (siehe z.B. *K.Aki, P.Richards (1980, p.38)*).

Bisher wurden die beiden Karten \mathcal{K}_L und \mathcal{K}_E bzw. die Abbildungen $\mathfrak{A}_{t_i}^L$ und $\mathfrak{A}_{t_i}^E$ nicht näher spezifiziert. Im Sinne der vorher ausgeführten Eigenschaften der Euler'schen bzw. Lagrange'schen Beschreibung präzisieren wir nun die Definition 2-2:

Definition 2-4 (Euler'sche und Lagrange'sche Abbildungsvorschrift):

$$(\mathfrak{A}_{t_n}^E)^{-1} \circ \mathfrak{T}_{t_i t_n} \circ \mathfrak{A}_{t_i}^E = \mathfrak{T}_{\mathcal{K}_E} \quad (1. \text{ kommutatives Diagramm}) \quad (2-4)$$

und

$$(\mathfrak{A}_{t_n}^L)^{-1} \circ \mathfrak{T}_{t_i t_n} \circ \mathfrak{A}_{t_i}^L = \mathfrak{T}_{\mathcal{K}_L} \quad (2. \text{ kommutatives Diagramm}) \quad (2-5)$$

■

Dies bedeutet:

1. Die Abbildungsvorschrift $\mathfrak{A}_{t_i}^E$ ist für jeden Zeitpunkt dieselbe; der Index t_i kann daher weggelassen werden ("der Beobachter ruht im Bezugssystem").
2. Der materielle Punkt \mathbf{p} behält im Laufe seiner Bewegung seine Lagrange-Koordinaten bei ("der Beobachter ist an ein bewegtes Teilchen angeheftet"). Die Lagrange'schen Koordinaten werden daher auch *materielle Koordinaten* genannt. Umgekehrt werden sich für einen festen Raumpunkt \mathbf{x} die Lagrange-Koordinaten im Lauf der Zeit ändern.

Offensichtlich würde im Prinzip bereits *eine* Karte genügen; die Forderungen wurden ja an die *Abbildungsvorschriften* gestellt. Wir behalten jedoch im folgenden die zwei Karten bei, da hierdurch die Schreibweise entlastet wird: Um die Bewegung eines materiellen Punktes zu erfassen, werden wir die Beziehungen zwischen den Euler'schen Koordinaten einerseits und den Lagrange'schen Koordinaten und der Zeit andererseits betrachten. Diese Beziehungen sind durch die folgenden Verknüpfungen bestimmt:

Definition 2-5 (Abbildung zwischen Lagrange'schen und Euler'schen Koordinaten):

$\mathfrak{r}_{t_i}^k : \mathcal{K}_L \rightarrow \mathcal{K}_E$ mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_{t_i}^k(X^K) = \mathfrak{r}^k(X^K, t_i) &:= \left((\mathfrak{A}^E)^{-1} \circ \mathfrak{T}_{t_0 t_i} \circ \mathfrak{A}_{t_0}^L \right) (X^K) \\ &= \left((\mathfrak{A}^E)^{-1} \circ \mathfrak{A}_{t_i}^L \right) (X^K) \end{aligned}$$

Umkehrabbildung:

$\mathfrak{x}_{t_i}^K : \mathcal{K}_E \rightarrow \mathcal{K}_L$ mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{t_i}^K(x^k) = \mathfrak{X}^K(x^k, t_i) &:= \left((\mathfrak{A}_{t_0}^L)^{-1} \circ (\mathfrak{T}_{t_0 t_i})^{-1} \circ \mathfrak{A}^E \right) (x^k) \\ &= \left((\mathfrak{A}_{t_i}^L)^{-1} \circ \mathfrak{A}^E \right) (x^k) \end{aligned}$$

(3. kommutatives Diagramm)

(2-6)

■

Wir verzichten meist auf die Funktionssymbole $\mathfrak{r}^k(X^K, t)$ bzw. $\mathfrak{X}^K(x^k, t)$ und schreiben stattdessen $x^k = x^k(X^K, t)$ bzw. $X^K = X^K(x^k, t)$. Damit folgen wir im wesentlichen der Notation in *C. Eringen (1962)*. Für den Grundzustand setzen wir im folgenden stets voraus, dass die Euler'schen und die Lagrange'schen Koordinaten übereinstimmen; d.h. dass

$$x^k(X^K, t_0) = \delta_K^k X^K \quad \text{und} \quad X^K(x^k, t_0) = \delta_k^K x^k \quad (2-7)$$

gilt. Das bedeutet auch, dass $\mathfrak{A}^E = \mathfrak{A}_{t_0}^L$.

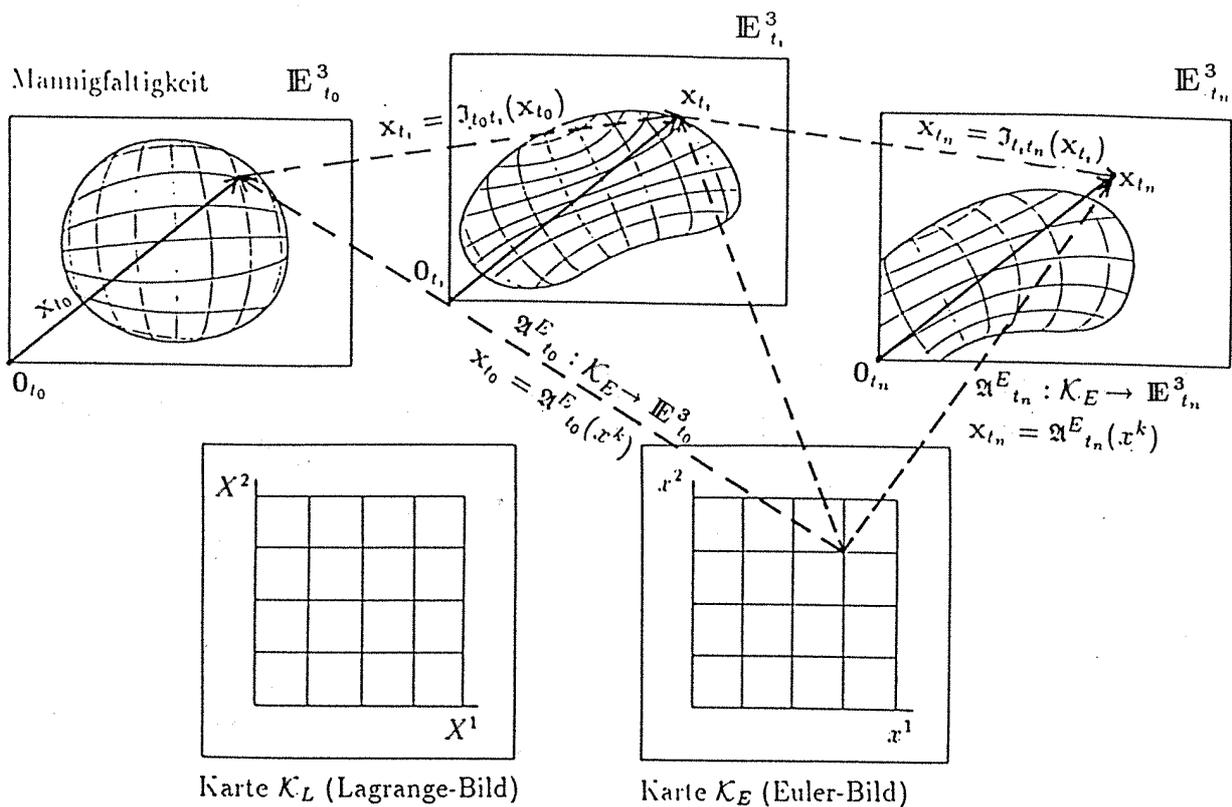


Abbildung 2-1 (1. kommutatives Diagramm): $(\mathfrak{A}^{E_{t_n}})^{-1} \circ \mathfrak{J}_{t_n, t_n} \circ \mathfrak{A}^{E_{t_0}} = \mathfrak{J}_{\mathcal{K}_E}$

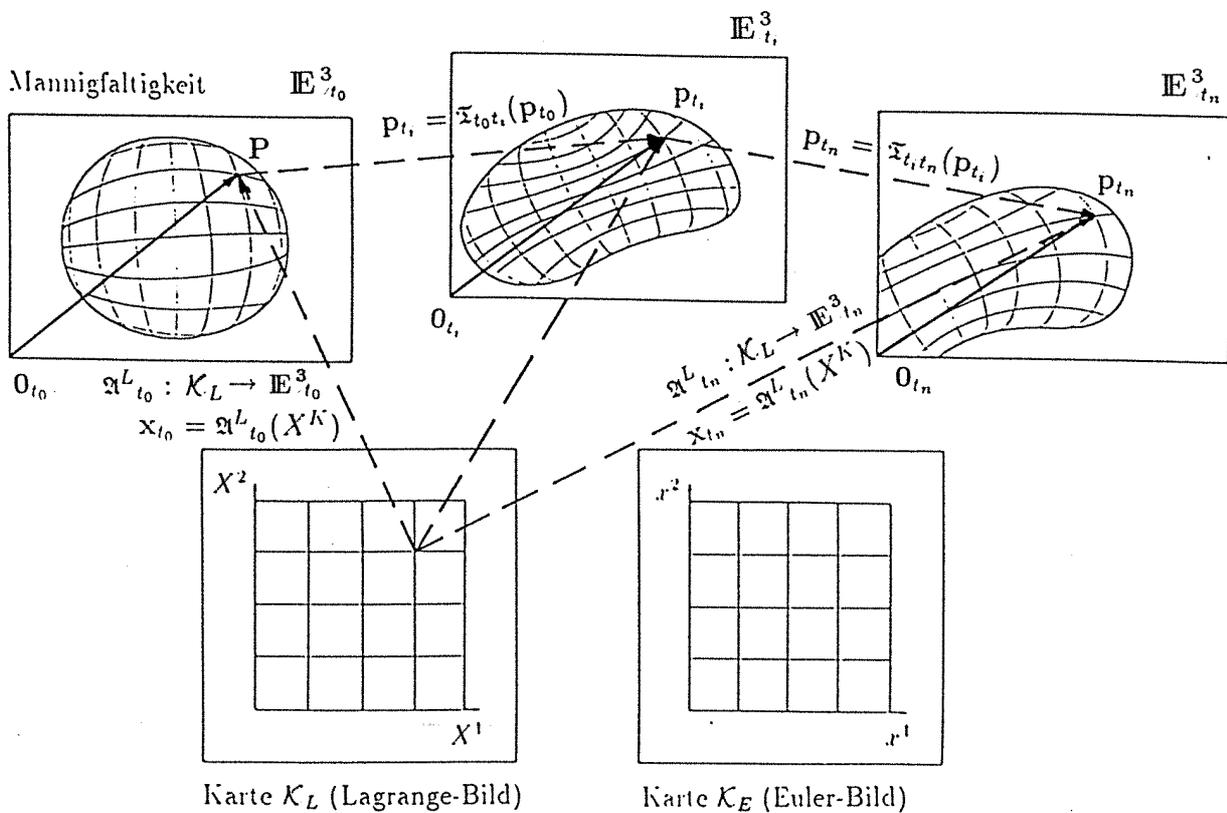


Abbildung 2-2 (2. kommutatives Diagramm): $(\mathfrak{A}^{L_{t_n}})^{-1} \circ \mathfrak{I}_{t_n, t_n} \circ \mathfrak{A}^{L_{t_0}} = \mathfrak{J}_{\mathcal{K}_L}$

Anmerkung 2-1 :

Wir können die Beziehungen zwischen x^k einerseits und X^K und t andererseits im Sinne einer *Koordinatentransformation*, aber auch im Sinne einer *Punktstransformation* interpretieren. Der ersten Sichtweise entspricht die Schleife

$$\mathfrak{A}^L_{t_i} = \mathfrak{A}^E \circ \mathfrak{r}_{t_i} = \mathfrak{A}^L_{t_0} \circ \mathfrak{r}_{t_i} \quad (2-8)$$

im 3. kommutativen Diagrammen. Da \mathfrak{A}^E nicht zeitabhängig ist, legt \mathfrak{r}_{t_i} den zeitabhängigen Teil der *Abbildungsvorschrift* $\mathfrak{A}^L_{t_i}$ fest. Der zweiten Sichtweise entspricht die Schleife

$$\mathfrak{r}_{t_0 t_i} = \mathfrak{A}^E \circ \mathfrak{r}_{t_i} \circ (\mathfrak{A}^L_{t_0})^{-1}. \quad (2-9)$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist allein \mathfrak{r}_{t_i} zeitabhängig und legt daher im wesentlichen die *Verschiebung* des materiellen Punktes P fest. Da im Grundzustand die Koordinatensysteme identisch sind, bleibt in dieser Interpretation *das* Koordinatensystem für alle Zeitpunkte ein- und dasselbe. Ein materieller Punkt P, der im Grundzustand den Ortsvektor \mathbf{P} bzw. die Ausgangskordinaten $x^k = \delta^k_K X^K$ besitzt, wird dann zum Punkt \mathbf{p} mit den Koordinaten $x^k = \mathfrak{r}^k(X^K, t)$ verschoben bzw. abgebildet. In diesem Sinne sind die Koordinaten X^K *Parameter der Bewegung*, nämlich die Anfangswerte der Euler'schen Koordinaten.

Die Verschiebung \mathbf{u} ergibt sich entsprechend dem 4. kommutativen Diagramm aus

$$\mathbf{u} = \mathfrak{A}^E(\mathfrak{r}^k(X^K, t)) - \mathfrak{A}^E(\delta^k_K X^K). \quad (2-10)$$

Einer Verschiebung \mathbf{u} im Vektorraum entsprechen in den Karten \mathcal{K}_E und \mathcal{K}_L Koordinatendifferenzen:

Definition 2-6 (räumliche und materielle Koordinatenänderungen):

$$\Delta x^k := \mathfrak{r}^k(X^K, t) - \delta^k_K X^K \quad \delta X^K := \mathfrak{X}^K(x^k, t) - \delta^K_k x^k \quad (2-11)$$

■

Δx^k bedeutet also die Differenz zwischen den Euler'schen Koordinaten eines materiellen Punktes im verschobenen - und im Grundzustand. Da \mathfrak{X}^K die Umkehrabbildung von \mathfrak{r}^K ist, folgt

$$\delta X^K = -\Delta x^k \delta^K_k. \quad (2-12)$$

2-1.2 Lokale Basen und ihre Transformationen

Durch Differentiation des Ortsvektors nach den Koordinaten X^K bzw. x^k gewinnt man *lokale Basisvektoren*, die für nichtsinguläre Punkte den \mathbb{R}^3 aufspannen. Wir unterscheiden jeweils zwei Arten von Basisvektoren in der Mannigfaltigkeit im Grundzustand und zu einer allgemeinen Zeit t :

Definition 2-7 (lokale Basisvektoren):

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_K &:= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} = \frac{\partial}{\partial X^K}(\mathfrak{A}_0^L(X^M)) & \mathbf{c}_k &:= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}(\mathfrak{A}_0^L(\mathfrak{X}^K(x^m, t))) \\ \mathbf{g}_k &:= \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} = \frac{\partial \mathfrak{A}^E(x^l)}{\partial x^k} & \mathbf{C}_K &:= \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^K} = \frac{\partial}{\partial X^K}(\mathfrak{A}^L(X^M, t)) \end{aligned} \quad (2-13)$$

Mit Hilfe des Innenproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ des \mathbb{R}^3 werden wie üblich die *kontravarianten* Basisvektoren implizit durch

$$\langle \mathbf{g}_k, \mathbf{g}^l \rangle = \delta^l_k \quad \text{usw.} \quad (2-14)$$

definiert.

■

Diese Definitionen beziehen sich auf materielle Punkte, wobei \mathbf{G}_K und \mathbf{c}_k als Ableitungen des Ortsvektors des Punktes im Referenzzustand, \mathbf{g}_k und \mathbf{C}_K dagegen als Ableitungen des Ortsvektors des Punktes zur Zeit t definiert sind. Wir nehmen im folgenden stets an, dass \mathbf{c}_k und \mathbf{g}_k mit $x^k = \mathfrak{r}^k(X^K, t)$ als Argument zu bilden sind, so dass X^K für alle Basisvektoren der gemeinsame Parameter ist. Wählt man $t = t_0$, so fallen \mathbf{c}_k und \mathbf{g}_k ebenso wie \mathbf{G}_K und \mathbf{C}_K zusammen.

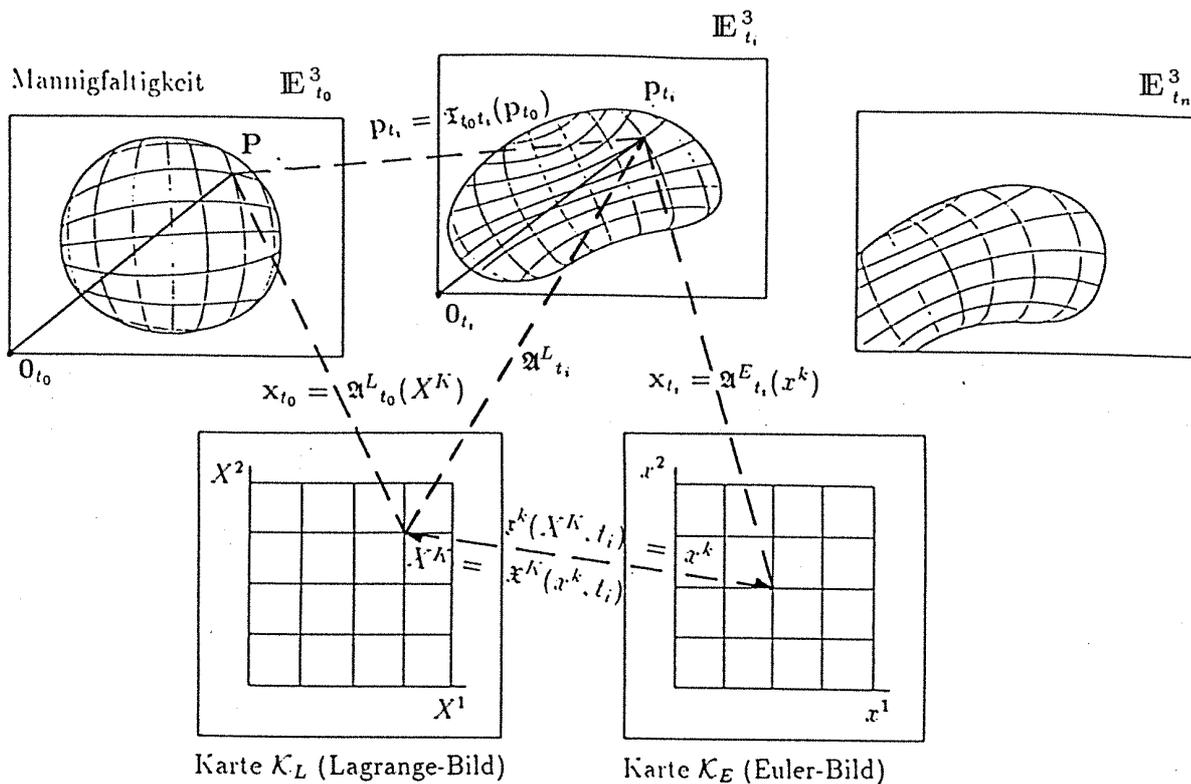


Abbildung 2-3 (3. kommutatives Diagramm): $\mathfrak{I}_{t_0 t_i} = \mathfrak{A}^E \circ \mathfrak{r}_{t_i}^k \circ (\mathfrak{A}_{t_0}^L)^{-1}$
 $\mathfrak{r}^k(x^k, t_i) := ((\mathfrak{A}_{t_i}^L)^{-1} \circ \mathfrak{A}^E)(x^k)$

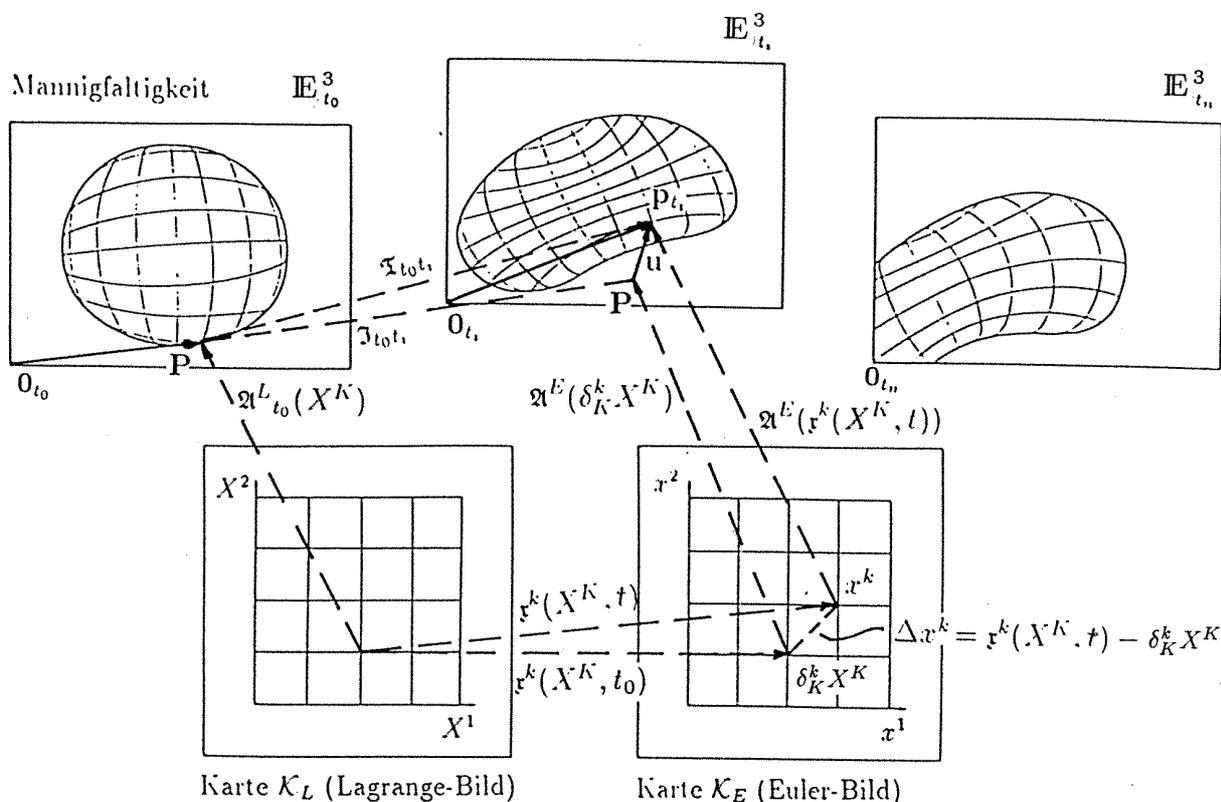


Abbildung 2-4 (4. kommutatives Diagramm): $\mathbf{u} = \mathfrak{A}^E(\mathfrak{r}^k(X^K, t)) - \mathfrak{A}^E(\delta_K^k X^K)$

Lemma 2-1 (Transformation von Basisvektoren):

Unter den genannten Voraussetzungen gelten mit den Abkürzungen $X^{K,k} := \partial X^K / \partial x^k$, $x^k{}_{,K} := \partial x^k / \partial X^K$ folgende Transformationsformeln für die kovarianten Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_k &= X^{K,k} \mathbf{G}_K & \mathbf{G}_K &= g_k^K \mathbf{g}_k & \mathbf{g}_k &= X^{K,k} \mathbf{C}_K \\ \mathbf{C}_K &= x^k{}_{,K} \mathbf{g}_k & \mathbf{g}_k &= g_k^K \mathbf{G}_K & \mathbf{G}_K &= x^k{}_{,K} \mathbf{c}_k. \end{aligned} \quad (2-15)$$

mit

$$g_k^K := \langle \mathbf{g}_k, \mathbf{G}^K \rangle, \quad g_K^k := \langle \mathbf{G}_K, \mathbf{g}^k \rangle \quad (2-16)$$

Für die kontravarianten Basisvektoren gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^k &= x^k{}_{,K} \mathbf{G}^K & \mathbf{G}^K &= g_k^K \mathbf{g}^k & \mathbf{g}^k &= x^k{}_{,K} \mathbf{C}^K \\ \mathbf{C}^K &= X^{K,k} \mathbf{g}^k & \mathbf{g}^k &= g_k^K \mathbf{G}^K & \mathbf{G}^K &= X^{K,k} \mathbf{c}^k. \end{aligned} \quad (2-17)$$

■

Gemäß der Einstein-Konvention ist über Indices, die in einem Produkt doppelt vorkommen, zu summieren. Die Transformationsmatrizen $[g_k^K]$, $[g_K^k]$ heißen *shifters*. Die Transformationsformeln der mittleren Spalte unterscheiden sich von den übrigen dadurch, dass hier Basisvektoren ineinander überführt werden, die i. allg. in verschiedenen räumlichen Punkten definiert sind. Der Beweis der Transformationsformeln ergibt sich aus der Definition 2-7, dem 3. kommutativen Diagramm und der Kettenregel.

Die Jacobi-Matrix $x^k{}_{,K}$ wird auch *pull-back-Operator* genannt; mit ihrer Hilfe kann die Euler'sche Koordinatenbasis $\{\mathbf{g}_k\}$ in die Lagrange'sche Koordinatenbasis $\{\mathbf{C}_K\}$ überführt werden. Entsprechend heißt die Matrix $X^{K,k}$ auch *push-forward-Operator*.

Die Determinante von $x^k{}_{,K}$ bezeichnen wir mit

$$j := \det x^k{}_{,K}. \quad (2-18)$$

Aus den Innenprodukten gleichartiger Basisvektoren ergeben sich die Metrikoeffizienten der Euler'schen bzw. Lagrange'schen Koordinaten:

Definition 2-8 (Metrikoeffizienten):

$$G_{KL} = \langle \mathbf{G}_K, \mathbf{G}_L \rangle, \quad c_{kl} = \langle \mathbf{c}_k, \mathbf{c}_l \rangle, \quad g_{kl} = \langle \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_l \rangle, \quad C_{KL} = \langle \mathbf{C}_K, \mathbf{C}_L \rangle \quad (2-19)$$

Abweichend von *C. Eringen 1962* verstehen wir unter den kontravarianten Koeffizienten stets diejenigen, welche sich durch Inversion der Matrizen der kovarianten Koeffizienten ergeben:

$$G^{KL} G_{LM} = \delta_M^K \text{ usw.}$$

■

Die Metrikoeffizienten erlauben es, in der Umgebung von Punkten der Mannigfaltigkeit Bogenelemente aus Koordinatendifferenzen abzuleiten:

$$\begin{aligned} dS^2 &= G_{KL} dX^K dX^L = c_{kl} dx^k dx^l \\ ds^2 &= g_{kl} dx^k dx^l = C_{KL} dX^K dX^L \end{aligned} \quad (2-20)$$

dS bedeutet hier ein materielles Bogenelement im Grundzustand, ds das entsprechende Bogenelement im veränderten Zustand zur Zeit t . Auch hier wird grundsätzlich angenommen, dass die Größen g_{kl} und C_{KL} im (verschobenen) materiellen Punkt P (Ortsvektor \mathbf{p}) zur Zeit t , G_{KL} und c_{kl} dagegen im selben materiellen Punkt P im Grundzustand (Ortsvektor \mathbf{P}) zu bilden sind. Ebenso ist dX^K in den letzten beiden Formeln als fest zu betrachten, während $dx^k = dx^k(X^K, dX^L, t)$ von der Zeit t abhängt.

Lemma 2-2 (Transformation von Metrikoeffizienten):

Die Transformationsformeln zwischen den eingeführten kovarianten Metrikoeffizienten lauten:

$$\begin{aligned} C_{KL} &= x^k{}_{,K} x^l{}_{,L} g_{kl} & g_{kl} &= g_K^K g_L^L G_{KL} & G_{KL} &= x^k{}_{,K} x^l{}_{,L} c_{kl} \\ g_{kl} &= X^K{}_{,k} X^L{}_{,l} C_{KL} & G_{KL} &= g_K^k g_L^l g_{kl} & c_{kl} &= X^K{}_{,k} X^L{}_{,l} G_{KL}. \end{aligned} \quad (2-21)$$

Für die kontravarianten Koeffizienten gelten die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} C^{KL} &= X^K{}_{,k} X^L{}_{,l} g^{kl} & g^{kl} &= g_K^k g_L^l G^{KL} & G^{KL} &= X^K{}_{,k} X^L{}_{,l} c^{kl} \\ g^{kl} &= x^k{}_{,K} x^l{}_{,L} C^{KL} & G^{KL} &= g_K^K g_L^L g^{kl} & c^{kl} &= x^k{}_{,K} x^l{}_{,L} G^{KL}. \end{aligned} \quad (2-22)$$

■

Insbesondere aus den Metrikoeffizienten C_{KL} werden im Abschnitt 2-2 Maße für die Deformation abgeleitet. Im Abschnitt 2-2.5.2 werden die Transformationen zwischen \mathbf{C}_K und \mathbf{G}_K sowie zwischen C_{KL} und G_{KL} in den Verschiebungskoordinaten linearisiert.

2-1.3 Untermannigfaltigkeiten

Definition 2-9 (materielle Kurve):

Durch die Parameterdarstellung

$$X^K = \mathcal{X}^K(S), \quad \mathcal{X}^K : \mathbb{R} \supset D_s \rightarrow \mathcal{K}_L, \quad S \in D_s, \quad K \in \{1, 2, 3\} \quad (2-23)$$

ist eine *materielle Kurve* gegeben, die i. allg. im Lauf der Zeit verschoben und gedehnt wird. Liegt ein materieller Punkt zu irgendeinem Zeitpunkt auf der materiellen Kurve, so auch zu allen anderen Zeitpunkten. Wir fordern von einer materiellen Kurve, dass sie im Grundzustand genügend glatt und doppelpunktfrei sein soll. ■

Definition 2-10 (materielle Fläche):

Durch die Parameterdarstellung

$$X^K = \chi^K(U^\alpha), \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad \chi^K : \mathbb{R}^2 \supset D_u \rightarrow \mathcal{K}_L, \quad \{U^1, U^2\} \in D_u, \quad K \in \{1, 2, 3\} \quad (2-24)$$

ist eine *materielle Fläche* definiert. Eine spezielle materielle Fläche ist die *Oberfläche* des Kontinuums. Wie bei den materiellen Kurven fordern wir ausreichende Glattheitseigenschaften. Ein Teilgebiet des Kontinuums, das von einer geschlossenen materiellen Fläche begrenzt wird, heißt *materielles Volumen*. ■

2-1.4 Euler'sches und Lagrange'sches Inkrement: Definitionen und Rechenregeln

Sei F eine beliebige Feldgröße des Kontinuums, wie z.B. Geschwindigkeit, Druck oder Temperatur. F soll als Funktion des räumlichen Punktes und der Zeit oder als Funktion des materiellen Punktes und der Zeit dargestellt werden. Es liegt nahe, hierzu die Euler'schen und die Lagrange'schen Koordinaten zu verwenden:

Definition 2-11 (Funktionssymbole):

Feldgröße als Funktion des Massenelementes:

$$F = \mathfrak{F}^{\mathcal{L}}(\mathbf{p}, t) =: F^{\mathcal{L}}(X^K, t) =: F^{\mathcal{E}}(\mathfrak{r}^k(X^K, t), t) \quad (2-25)$$

Feldgröße als Funktion des Raumpunktes:

$$F = \mathfrak{F}^{\mathcal{E}}(\mathbf{x}, t) =: F^{\mathcal{E}}(x^k, t)$$

■

Wir verwenden also die Funktionssymbole $F^{\mathcal{E}}$ bzw. $F^{\mathcal{L}}$ je nachdem ob Euler'sche oder Lagrange'sche Koordinaten als Argument benutzt werden. Für die Ableitungen der Feldgröße F nach X^K bzw. nach x^k benutzen wir die Abkürzungen $F_{,K} := F^{\mathcal{L}}_{,K}(X^L, t)$ bzw. $F_{,k} := F^{\mathcal{E}}_{,k}(x^l, t)$.

Wollen wir F zu einem Zeitpunkt t mit seinem Wert im Grundzustand vergleichen, so kann dies entsprechend in ein und demselben mitbewegten materiellen oder in ein und demselben räumlichen Punkt geschehen:

Definition 2-12 (Euler'sches und Lagrange'sches Inkrement):

Wir bezeichnen die Differenz

$$\delta F(\mathbf{x}) := F^{\mathcal{E}}(x^k, t) - F^{\mathcal{E}}(x^k, t_0) \quad (2-26)$$

als *Euler'sches Inkrement* oder als *Störung*, die Differenz

$$\Delta F(\mathbf{p}) := F^{\mathcal{L}}(X^K, t) - F^{\mathcal{L}}(X^K, t_0) \quad (2-27)$$

dagegen als *Lagrange'sches Inkrement* oder als *Anomalie*. ■

Rechenregeln für diese Inkremente finden sich im Anhang D. Die Bezeichnungen für die Koordinaten-Inkremente wurden bereits in der Definition 2-6 eingeführt. Insbesondere gilt

$$\Delta X^K = 0, \quad \delta x^k = 0. \quad (2-28)$$

2-2 Geometrische Änderungsbeziehungen

Wir betrachten hier die lokalen geometrischen Veränderungen zwischen dem Kontinuum im Grundzustand und dem Kontinuum zu einem festen, beliebigen Zeitpunkt t , wobei der *zeitliche Verlauf* dieser Änderungen unberücksichtigt bleibt; dieser wird im Abschnitt 2-3 (Bewegung) untersucht. Lokal besteht eine geometrische Änderung in einer Kombination von *starrer Verschiebung*, *starrer Drehung* und *Verzerrung*. Während ein starrer Körper nur Verschiebungen und Drehungen zulässt, ändern sich bei einem deformierbaren Körper unter dem Einfluss von Kräften auch die Strecken und Winkel zwischen materiellen Punkten des Kontinuums. Um die *Verzerrung* des Kontinuums in einem infinitesimal kleinen Teilgebiet zu beschreiben, werden die materiellen Punkte infinitesimal benachbart gewählt. Wir zitieren die wichtigsten Beziehungen aus *E. Grafarend 1982*, *L. Malvern 1969* und *C. Eringen 1962*, wo auch sämtliche Beweise zu finden sind.

2-2.1 Längenverzerrung

Sei $X^K(S)$ eine materielle Kurve, deren Parameter S im Grundzustand mit der Bogenlänge der Kurve identisch sei. Die Euler'sche Darstellung der Kurve in einem verformten Zustand des Kontinuums sei $x^k(s(S))$, wobei s wiederum die Bedeutung der Bogenlänge der Kurve (im verformten Zustand) habe.

Definition 2-13 :

Die Vektoren

$$d\mathbf{P}(S) = \mathbf{G}_N(X^L) \frac{dX^N}{dS} dS = \mathbf{c}_n(x^l(X^L, t)) \frac{dx^n}{ds} ds, \quad d\mathbf{p}(s) = \mathbf{g}_n(x^l) \frac{dx^n}{ds} ds = \mathbf{C}_N(X^L) \frac{dX^N}{dS} dS \quad (2-29)$$

sind die *infinitesimalen Tangentenvektoren an die materielle Kurve im Referenzzustand bzw. im verzerrten Zustand*. ■

Für entsprechende Linienelemente im undeformierten bzw. deformierten Zustand gilt

$$dS^2 = \langle d\mathbf{P}, d\mathbf{P} \rangle = G_{KL} dX^K dX^L = c_{kl} dx^k dx^l \quad ds^2 = \langle d\mathbf{p}, d\mathbf{p} \rangle = g_{kl} dx^k dx^l = C_{KL} dX^K dX^L \quad (2-30)$$

Definition 2-14 :

Das Verhältnis Λ zwischen den entsprechenden Streckeninkrementen ds und dS einer materiellen Kurve im undeformierten bzw. deformierten Kontinuum wird *Streckung* oder *Verzerrung* genannt; es kann aus

$$\Lambda^2 := \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{C_{KL}dX^K dX^L}{G_{KL}dX^K dX^L} = \frac{g_{kl}dx^k dx^l}{c_{kl}dx^k dx^l} \quad (2-31)$$

berechnet werden. ■

Definition 2-15 (Cauchy-Green-Verzerrungstensoren):

Wir nennen die beiden (i. allg. voneinander verschiedenen) Tensoren

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &:= C_{KL}\mathbf{G}^K \otimes \mathbf{G}^L = g_{kl}\mathbf{c}^k \otimes \mathbf{c}^l \\ \mathbf{c} &:= G_{KL}\mathbf{C}^K \otimes \mathbf{C}^L = c_{kl}\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l \end{aligned}$$

Cauchy-Green-Verzerrungstensoren. ■

Die Überschiebung zweier Tensoren wird in dieser Arbeit mit einem Punkt gekennzeichnet, z.B. $\mathbf{G}^K \otimes \mathbf{G}^L \cdot \mathbf{G}_N := \langle \mathbf{G}^L, \mathbf{G}_N \rangle \mathbf{G}^K$. Damit lässt sich (2-30) auch auf folgende Weise darstellen:

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{P} = d\mathbf{p} \cdot \mathbf{I} \cdot d\mathbf{p} \\ dS^2 &= d\mathbf{P} \cdot \mathbf{I} \cdot d\mathbf{P} = d\mathbf{p} \cdot \mathbf{c} \cdot d\mathbf{p} \end{aligned} \quad (2-32)$$

Das bedeutet: Überschieben wir den Cauchy-Green-Tensor \mathbf{C} von beiden Seiten mit dem infinitesimalen Tangentenvektor des *unverzerrten* Zustandes, so erhalten wir das quadrierte Bogenelement des *verzerrten* Zustandes; überschieben wir den Cauchy-Green-Tensor \mathbf{c} von beiden Seiten mit dem infinitesimalen Tangentenvektor des *verzerrten* Zustandes, so erhalten wir das quadrierte Bogenelement des *unverzerrten* Zustandes.

Die Differenz zweier entsprechender quadrierter Längenelemente, die *Elongation*, ist durch

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= (C_{KL} - G_{KL})dX^K dX^L =: 2E_{KL}dX^K dX^L \\ &= (g_{kl} - c_{kl})dx^k dx^l =: 2e_{kl}dx^k dx^l \end{aligned} \quad (2-33)$$

gegeben. Die Koeffizienten E_{KL} bzw. e_{kl} können ebenfalls als Komponenten von Tensoren aufgefasst werden:

Definition 2-16 (Euler-Lagrange-Verzerrungstensoren):

Die beiden (i. allg. voneinander verschiedenen) Tensoren

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &:= E_{KL}\mathbf{G}^K \otimes \mathbf{G}^L = e_{kl}\mathbf{c}^k \otimes \mathbf{c}^l \\ \mathbf{e} &:= E_{KL}\mathbf{C}^K \otimes \mathbf{C}^L = e_{kl}\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l \end{aligned} \quad (2-34)$$

heißen *Euler-Lagrange-Verzerrungstensoren.* ■

Analog zu den Cauchy-Green-Verzerrungstensoren gilt: Überschieben wir den Euler-Lagrange-Tensor \mathbf{E} von beiden Seiten mit dem infinitesimalen Tangentenvektor des *unverzerrten* Zustandes, so erhalten wir die Elongation; überschieben wir den Euler-Lagrange-Tensor \mathbf{e} von beiden Seiten mit dem infinitesimalen Tangentenvektor des *verzerrten* Zustandes, so erhalten wir ebenfalls die Elongation.

Wegen $\delta\mathbf{g}^k = \mathbf{0}$ und $\Delta\mathbf{G}^K = \mathbf{0}$ ist $2\mathbf{E}$ die Anomalie von \mathbf{C} , $2\mathbf{e}$ die negative Störung von \mathbf{c} :

$$2\mathbf{E} = \Delta\mathbf{C}, \quad 2\mathbf{e} = -\delta\mathbf{c}. \quad (2-35)$$

In linearer Näherung fallen die beiden Verzerrungstensoren zusammen:

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{e}.$$

Die Komponenten E_{KL} bzw. e_{kl} können auch mit Hilfe der Ableitungen der Verschiebungskomponenten ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} 2E_{KL} &= U_{K|L} + U_{L|K} + U_{M|K}U^M{}_{|L} \\ 2e_{kl} &= u_{k|l} + u_{l|k} - u_{m|k}u^m{}_{|l}, \end{aligned} \quad (2-36)$$

(siehe z.B. *Eringen 1962 S. 15*; ein vertikaler Strich vor einem Index bedeutet hier die kovariante Ableitung, und zwar bei großgeschriebenen Indices stets bezüglich der Basis $\{\mathbf{G}_K\}$ bzw. $\{\mathbf{G}^K\}$, bei kleingeschriebenen Indices stets bezüglich der Basis $\{\mathbf{g}_k\}$ bzw. $\{\mathbf{g}^k\}$.)

Die Streckung ist i.allg. richtungsabhängig. Die Richtungen in der unverzerrten Mannigfaltigkeit, für welche die Streckung extremal wird, heißen *Hauptverzerrungsrichtungen*, die entsprechenden Streckungen *Hauptstreckungen*. Die Hauptverzerrungsrichtungen werden durch die Vektoren (Hauptverzerrungsvektoren)

$$\frac{d\mathbf{P}}{dS_\alpha} =: N^K_\alpha \mathbf{G}_K, \quad \alpha \in \{1, 2, 3\} \quad (2-37)$$

repräsentiert. Ihre Komponenten

$$N^K_\alpha := \frac{dX^K}{dS_\alpha} \quad (2-38)$$

sind gerade die Ableitungen der Lagrange'schen Koordinaten nach der Bogenlänge, die einem Fortschritt in der Hauptverzerrungsrichtung entsprechen. Die Extremwertaufgabe

$$N^K C_{KL} N^L \stackrel{!}{=} \text{Extremum} \quad (2-39)$$

$$N^K G_{KL} N^L \stackrel{!}{=} 1 \quad (\text{Nebenbedingung})$$

führt mit der Methode von *Lagrange* auf das *allgemeine Eigenwertproblem*

$$(C_{KL} - \Lambda^2 G_{KL}) N^L = 0 \quad (2-40)$$

$$N^K G_{KL} N^L = 1 \quad (\text{Nebenbedingung})$$

Durch Überschiebung mit den kontravarianten Metrikkoeffizienten G^{MK} lässt sich das allgemeine Eigenwertproblem in ein spezielles Eigenwertproblem überführen:

$$(G^{MK} C_{KL} - \Lambda^2 \delta_L^M) N^L = 0 \quad (2-41)$$

$$N^K G_{KL} N^L = 1 \quad (\text{Nebenbedingung})$$

Für reguläre Punkte existieren stets genau drei reelle, positive Eigenwerte (wenngleich die Matrix des Eigenwertproblems i. allg. nicht symmetrisch ist). Die positiven Wurzeln der Eigenwerte Λ_α^2 sind die Hauptstreckungen. Die Hauptverzerrungsvektoren im Urbild $d\mathbf{P}_\alpha$ und im Bild $d\mathbf{p}_\alpha$ lassen sich gerade aus den zugehörigen Eigenvektoren bestimmen:

$$d\mathbf{P}_\alpha = N^K_\alpha \mathbf{G}_K dS \quad d\mathbf{p}_\alpha = N^K_\alpha \mathbf{C}_K dS \quad (2-42)$$

Hauptverzerrungsvektoren, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind in Urbild und Bild zueinander orthogonal. Falls zwei oder gar alle drei Eigenwerte gleich sind, sind die Hauptverzerrungsrichtungen nicht eindeutig definiert; wird beispielsweise eine infinitesimale Kugel in ein infinitesimales Rotationsellipsoid verformt, so ist jeder Vektor, dessen Bildvektor in der Äquatorebene des Ellipsoides liegt, Hauptverzerrungsvektor. Es lässt sich jedoch stets ein orthogonales Tripel $N^K_\alpha \mathbf{G}_K$ finden, so dass (2 – 40) für alle drei Vektoren erfüllt ist.

Das duale Eigenwertproblem

$$(c_{kl} - \lambda^2 g_{kl}) n^l = 0 \quad (2-43)$$

$$n^k g_{kl} n^l = 1 \quad (\text{Nebenbedingung})$$

liefert die normierten Koordinaten n^k_α der Bilder der Hauptverzerrungsvektoren (bezüglich der Basis \mathbf{g}_k), die Eigenwerte λ_α^2 sind die Reziprokwerte der Eigenwerte Λ_α^2 ,

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{\Lambda_\alpha} = \frac{dS}{ds_\alpha} \quad (2-44)$$

Dies wird offensichtlich, wenn die erste Gleichung in (2 – 43) mit $x^k{}_{,K}$ multipliziert und

$$n^l_\alpha := \frac{dx^l}{ds_\alpha} = x^l{}_{,L} \frac{dX^L}{dS} \frac{dS}{ds_\alpha} \quad (2-45)$$

eingesetzt wird. Mit den Transformationsformeln (2 – 21) ergibt sich gerade das Eigenwertproblem (2 – 40). Wir können also $\frac{dX^L}{dS}$ in (2 – 45) mit N^L_α identifizieren und erhalten die Beziehungen

$$n^k_\alpha = \lambda_\alpha x^k_{,K} N^K_\alpha \quad N^K_\alpha = \Lambda_\alpha X^K_{,k} n^k_\alpha \quad (2-46)$$

(über α ist hier nicht zu summieren). Schließlich führen wir die *reziproken Komponenten* N^α_K und n^α_k ein:

$$\sum_{\alpha=1}^3 N^L_\alpha N^\alpha_K = \delta^L_K \quad \sum_{\alpha=1}^3 n^l_\alpha n^\alpha_k = \delta^l_k. \quad (2-47)$$

Die Bilder verschiedener Hauptverzerrungsvektoren sind wie diese selbst aufeinander senkrecht, so dass der Zusammenhang zwischen den normierten Bildern und den Urbildern durch eine Drehung hergestellt werden kann:

$$n^k_\alpha \mathbf{g}_k = R^l_m \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^m \cdot N^K_\alpha \mathbf{G}_K = R^l_m \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^m \cdot N^K_\alpha g^i_K \mathbf{g}_i = R^l_m g^m_K N^K_\alpha \mathbf{g}_l \quad (2-48)$$

Dabei sind die Koeffizienten R^l_m für alle $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ dieselben. Wir haben hier wieder die Tensorschreibweise benutzt, um Fehlinterpretationen auszuschließen, die durch die Kombination unterschiedlicher Indextypen entstehen könnten: die Bilder der Hauptstreckungsvektoren werden üblicherweise in der Basis \mathbf{g}_k , die Hauptstreckungsvektoren selbst in der Basis \mathbf{G}_K dargestellt. Die lineare Beziehung zwischen den entsprechenden Komponenten enthält daher nicht nur eine Drehmatrix $[R^l_m]$, sondern auch die shifters g^i_K .

Die Matrizen $[R^l_m]$ sind *orthonormal*; die zu $\mathbf{R} = R^l_m \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^m$ inverse Drehung lautet

$$\mathbf{R}^{-1} = R^k_n \mathbf{g}^n \otimes \mathbf{g}_k = R_n^k \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^n.$$

Mit $[R^i_j]^{-1} = [R_j^i]$ und $R^l_K := g^k_K R^l_k$ ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} n^l_\alpha &= R^l_m g^m_K N^K_\alpha = R^l_K N^K_\alpha & N^K_\alpha &= g^m_K R_k^m n^k_\alpha = R_k^K n^k_\alpha \\ n^\alpha_l &= R_l^m g^m_K N^\alpha_K = R_l^K N^\alpha_K & N^\alpha_K &= g^m_K R^l_m n^\alpha_l = R^l_K n^\alpha_l \end{aligned} \quad (2-49)$$

Durch Überschiebung der beiden linken Gleichungen mit N^M_α, N^α_M erhält man die Koeffizienten R^l_M, R_l^M des Drehoperators \mathbf{R} :

$$R^l_M = n^l_\alpha N^\alpha_M \quad R_l^M = N^M_\alpha n^\alpha_l \quad (2-50)$$

2–2.2 Interpretation der lokalen geometrischen Änderung als Drehung und Verzerrung

Mit Hilfe der Drehmatrizen $[R^l_m]$ und der Koordinaten C^K_L des Cauchy-Green-Verzerrungstensors kann ein aktuelles Koordinateninkrement dx^k als Funktion des entsprechenden Inkrementes im Grundzustand dX^K angegeben werden; die geometrische Änderung in der Umgebung eines Punktes lässt sich damit als Kombination einer Drehung und einer Verzerrung interpretieren. Insbesondere wird eine infinitesimale Kugel in ein infinitesimales dreiaxsiges Ellipsoid abgebildet. Die Interpretation gestaltet sich besonders einfach, wenn die Verschiebungen und das zugehörige Gradientenfeld sehr klein sind, wenn also eine Abbildung nahe der Identität vorliegt. Dies setzen wir in dieser Arbeit stets voraus. Dennoch skizzieren wir die Aufspaltung bzw. Partitionierung des Verschiebungsfeldes auch für endliche (große) Verschiebungen bzw. Verschiebungsgradienten. Es sollen wiederum nur die wichtigsten Zwischenergebnisse aus *C. Eringen (1962)* erläutert werden.

Wir ordnen die Eigenwerte $\Lambda_\alpha, \lambda_\alpha$ in den Diagonalmatrizen $[\Lambda^\alpha_\beta], [\lambda^\alpha_\beta]$ an und definieren damit die folgenden Matrizen:

Definition 2-17 (lokale Schermatrizen):

$$[U^K_L] := [N^K_\alpha \Lambda^\alpha_\beta N^\beta_L] \quad [u^k_l] := [n^k_\alpha \lambda^\alpha_\beta n^\beta_l] \quad (2-51)$$

■

Die Inversen dieser Matrizen lauten:

$$[\bar{U}^L_M] := [U^K_L]^{-1} = [N^L_\gamma \lambda^\gamma_\delta N^\delta_M] \quad [\bar{u}^l_m] := [u^k_l]^{-1} = [n^l_\gamma \Lambda^\gamma_\delta n^\delta_m] \quad (2-52)$$

Lemma 2-3 :

$$\begin{aligned} U_L^K U_M^L &= G^{KL} C_{LM} & u^k u^l{}_m &= g^{kl} c_{lm} \\ \bar{U}_L^K \bar{U}_M^L &= C^{KL} G_{LM} & \bar{u}^k \bar{u}^l{}_m &= c^{kl} g_{lm} \end{aligned} \quad (2-53)$$

Beweisskizze:

Offensichtlich erfüllen N_α^L und Λ_β^α bzw. n_α^l und λ_β^α die Eigenwertgleichungen

$$\begin{aligned} U_L^K N_\alpha^L &= N_\beta^K \Lambda_\alpha^\beta \\ u^k n_\alpha^l &= n_\beta^k \lambda_\alpha^\beta \end{aligned} \quad (2-54)$$

Durch Multiplikation mit U_K^M bzw. u_k^m folgt

$$\begin{aligned} U_K^M U_L^K N_\alpha^L &= N_\alpha^M \Lambda_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^\beta \\ u_k^m u_l^k n_\alpha^l &= n_\alpha^m \lambda_\beta^\alpha \lambda_\gamma^\beta. \end{aligned} \quad (2-55)$$

Somit haben jeweils die Matrizen $[U_K^M U_L^K]$ und $[G^{MK} C_{KL}]$ sowie $[u_k^m u_l^k]$ und $[g^{mk} c_{kl}]$ dieselben Eigenvektoren und Eigenwerte. Wegen der Eindeutigkeit der Eigenwert-Eigenvektorzerlegung ergibt sich daraus die Identität dieser Matrizen. ■

Anmerkung 2-2 :

Setzen wir (2-49) in die Definition (2-51) ein und beachten (2-54), so erhalten wir die Verknüpfungen

$$U_L^K = R_k^K \bar{u}_l^k R_L^l \quad u^k{}_l = R_k^K \bar{U}_L^K R_l^L \quad (2-56)$$

(siehe *Toupin 1956 art. 4*; diese Beziehungen lassen sich auch auf beliebige reelle Potenzen von $g^{kl} c_{lm}$ bzw. $G^{KL} C_{LM}$ verallgemeinern.)

Lösen wir die Gleichungen (2-46) nach $x^k{}_{,K}$ bzw. $X^K{}_{,k}$ auf und verwenden (2 – 49) und (2 – 51) so folgt

Satz 2-4 (Partitionierung der Jacobi-Matrizen):

$$\begin{aligned} x^k{}_{,K} &= R_k^K U_L^K = \bar{u}_l^k R_L^l \\ X^K{}_{,k} &= R_l^L \bar{U}_L^K = \bar{U}_L^K R_k^L \end{aligned} \quad (2-57)$$

Ein aktuelles Koordinateninkrement dx^k kann damit als Funktion des entsprechenden Inkrementes im Grundzustand dX^K und dem Koordinatentripel X^L bzw. x^l angegeben werden:

$$dx^k = dx^k(X^K, dX^L, t) = x^k{}_{,K} dX^K = R_k^K U_L^K dX^K = \bar{u}_l^k R_L^l dX^K \quad (2-58)$$

Wir haben damit die lokale Änderung des Kontinuums in eine reine Scherung (Matrix $[U_K^M]$) und eine Drehung (Matrix $[R_M^k]$) zerlegt, wobei es sich um eine *multiplikative* Verknüpfung dieser Abbildungstypen handelt. Es ist i. allg. die *Reihenfolge* der Transformationen zu beachten, da Matrizenprodukte nicht kommutativ sind. Diese Zerlegung ist auch für endliche Drehwinkel gültig. Im Falle von kartesischen Koordinaten sind die shift-Matrizen gerade Einheitsmatrizen; die gefundene Partitionierung entspricht dann der bekannten Zerlegung einer regulären Matrix in das Produkt einer symmetrischen und einer orthonormalen Matrix (“polare Zerlegung”).

Sind die Drehwinkel sehr klein, ist also die Drehmatrix $\underline{R} := [R_m^l]$ nahezu mit der Einheitsmatrix identisch, so gelingt in linearer Näherung auch eine additive Zerlegung. Wir stellen die Drehmatrix mit Hilfe von *Cardan*-Winkeln α, β, γ dar:

$\underline{R} = \underline{R}_1^T(\alpha) \cdot \underline{R}_2^T(\beta) \cdot \underline{R}_3^T(\gamma)$ mit

$$\underline{R}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \underline{R}_2(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad \underline{R}_3(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-59)$$

$$\underline{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2-60)$$

Da wir annehmen, die Drehwinkel seien klein, dürfen wir die trigonometrischen Funktionen linearisieren und erhalten

$$\underline{R} \approx \underline{I} + \delta \underline{R} = \underline{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}. \quad (2-61)$$

(Das Zeichen \approx soll in der vorliegenden Arbeit stets "in linearer Näherung" bedeuten.) Für kleine Drehwinkel kann also die Drehmatrix additiv in die Einheitsmatrix und eine *antisymmetrische Störmatrix* zerlegt werden. Umgekehrt können wir jedes lineare, antisymmetrische Verschiebungsfeld in linearer Näherung als "kleine Rotation" interpretieren und sogar die Cardan'schen Drehwinkel direkt aus der Matrix ablesen.

Anmerkung 2-3 :

Es ist zu beachten, dass wir es hier mit einer *Punkttransformation* oder *aktiven Transformation* zu tun haben - im Gegensatz zu einer *passiven* oder *Koordinatentransformation*. Bei ersterer ist das Koordinatensystem fest und die Punkte bzw. materiellen Elemente bewegen sich, bei letzterer verhält es sich umgekehrt. Wenn die Transformation linear ist (was für eine Rotation offensichtlich zutrifft), dann ist die Transformationsmatrix der aktiven Transformation gerade die Inverse der passiven. Im Fall der Rotationsmatrix gleicht diese Inverse der transponierten Matrix; für die äktivlinearisierte Drehmatrix bedeutet dies, dass die Vorzeichen gegenüber der passivlinearisierten Drehmatrix vertauscht sind.

Zerlegen wir auch die Matrizen $[U_K^L]$ und $[\bar{u}_l^k]$ jeweils in die Einheitsmatrix und eine Störmatrix $[\delta U_K^L]$ bzw. $[\delta \bar{u}_l^k]$, so erhalten wir aus (2-58) in linearer Näherung die additive Zerlegung

$$\begin{aligned} dx^k &= dx^k(X^K, dX^L, t) &= x^k_{,K} dX^K \\ &= \{g^k_L(\delta_K^L + \delta U_K^L) + \delta R^k_l g^l_K\} dX^K &= \{(\delta_l^k + \delta R^k_l + \delta \bar{u}_l^k) g^l_K\} dX^K \end{aligned} \quad (2-62)$$

In linearer Näherung ist es somit ohne Bedeutung, ob zuerst die Drehung oder zuerst die Streckung ausgeführt wird.

Die Matrizen $[U_K^L]$ und $[\bar{u}_l^k]$ können noch weiter zerlegt werden in einen Dilatationsanteil (Anteil, der einer Volumenänderung entspricht) und einen reinen Scheranteil. Bezüglich weiterer Einzelheiten verweisen wir auf die Lehrbücher der Kartenprojektionslehre oder Kontinuumsmechanik.

2-2.3 Volumenverzerrung

Lemma 2-5 :

Die Volumenelemente des Grundzustandes bzw. des deformierten Zustandes lauten

$$d^3 \mathbf{X} = \sqrt{\det[G_{LM}]} dX^1 dX^2 dX^3 \quad d^3 \mathbf{x} = \sqrt{\det[g_{lm}]} dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{\det[C_{LM}]} dX^1 dX^2 dX^3 \quad (2-63)$$

Zwischen verzerrtem und unverzerrtem Volumenelement besteht daher die Beziehung

$$d^3 \mathbf{x} = \sqrt{\frac{\det C_{MN}}{\det G_{MN}}} d^3 \mathbf{X} = \sqrt{\frac{\det g_{mn}}{\det G_{MN}}} j d^3 \mathbf{X} = \sqrt{\frac{\det g_{mn}}{\det G_{MN}}} \det x^k_{,K} d^3 \mathbf{X} \quad (2-64)$$

■

2-2.4 Flächenverzerrung

Es sei \mathcal{F} ein materielles Flächenstück des undeforinierten Kontinuums, \mathbf{N} dessen Normalenvektor, das Flächenelement wird mit $d^2\mathbf{X}$ bezeichnet, das Produkt beider, der sogenannte *Flächenvektor*, mit $d\mathbf{A} = \mathbf{N}d^2\mathbf{X}$. Die entsprechenden Größen des deformierten Kontinuums lauten \mathbf{n} , $d^2\mathbf{x}$ bzw. $d\mathbf{a}$. Die Flächenvektoren werden mit Hilfe der eingeführten Basisvektoren dargestellt:

$$d\mathbf{A} = \mathbf{G}^K dA_K \quad d\mathbf{a} = \mathbf{g}^k da_k = \mathbf{C}^K d\hat{a}_K \quad (2-65)$$

Den Flächenvektor im Grundzustand erhalten wir aus

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^L} \frac{\partial X^K}{\partial U^1} \frac{\partial X^L}{\partial U^2} dU^1 dU^2 = \mathbf{G}_K \times \mathbf{G}_L \frac{\partial X^K}{\partial U^1} \frac{\partial X^L}{\partial U^2} dU^1 dU^2 = \\ &= \epsilon_{KLM} \mathbf{G}^M \frac{\partial X^K}{\partial U^1} \frac{\partial X^L}{\partial U^2} dU^1 dU^2; \end{aligned} \quad (2-66)$$

dabei sind ϵ_{KLM} die kovarianten Koordinaten des Levi-Civita-Tensors:

$$\epsilon_{KLM} := \sqrt{\det G_{IJ}} e_{KLM} = \sqrt{\det G_{IJ}} \begin{cases} 1 & \text{falls } KLM \text{ gerade Permutation von } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{falls } KLM \text{ ungerade Permutation von } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2-67)$$

Analog berechnet man den Flächenvektor im verzerrten Zustand des Kontinuums und gelangt zu folgendem

Lemma 2-6 (Flächenverzerrung):

Die Beziehungen zwischen den einzelnen Komponenten und den Flächenelementen lauten:

$$\begin{aligned} d\hat{a}_K &= \sqrt{\frac{\det g_{mn}}{\det G_{MN}}} j dA_K & da_k &= \sqrt{\frac{\det g_{mn}}{\det G_{MN}}} j X^{K, k} dA_K \\ (d^2\mathbf{X})^2 &= G^{KL} dA_K dA_L & (d^2\mathbf{x})^2 &= \frac{\det C_{MN}}{\det G_{MN}} g^{kl} X^{K, k} X^{L, l} dA_K dA_L \end{aligned} \quad (2-68)$$

■

Der Faktor zwischen $d\hat{a}_K$ und dA_K ist gerade die Volumenverzerrung.

2-2.5 Linearisierungen

2-2.5.1 Linearisierung von Koordinatendifferenzen und Verschiebungskordinaten

Sukzessive werden wir die Feldgleichungen bezüglich der vorkommenden Unbekannten linearisieren. Voraussetzung dafür ist, dass die zu linearisierenden Größen genügend glatt sind. Wir können die unbekanntten Größen im wesentlichen auf die Koordinatendifferenzen Δx^k oder auf die Verschiebungskordinaten zurückführen (die Zeit hat bisher nur den Charakter eines Indices). Wir zeigen zunächst, dass in linearer Näherung die Koordinaten des Verschiebungsvektors mit den Koordinatendifferenzen übereinstimmen. Dazu stellen wir den Verschiebungsvektor \mathbf{u} mit Hilfe der Basisvektoren \mathbf{g}_k bzw. \mathbf{G}_K dar:

$$\mathbf{u} = u^k \mathbf{g}_k = U^K \mathbf{G}_K \quad (2-69)$$

Lemma 2-7 :

In linearer Näherung gilt

$$\Delta x^k \approx u^k \quad \delta X^K \approx -U^K \quad (2-70)$$

■

Beweis von Lemma 2-7 :

Taylorentwicklung von \mathfrak{A}^E bis zum linearen Glied ergibt (die Abkürzung \approx bedeutet im folgenden "in linearer Näherung"):

$$\mathbf{p} = \mathfrak{A}^E(x^l) = \mathfrak{A}^E(\xi^l + \Delta x^l) \approx \mathfrak{A}^E(\xi^l) + \frac{\partial \mathfrak{A}^E}{\partial x^k}(\xi^l) \Delta x^k \approx \mathfrak{A}^E(\xi^l) + \frac{\partial \mathfrak{A}^E}{\partial x^k}(x^l) \Delta x^k \approx \mathfrak{A}^E(\xi^l) + \mathbf{g}_k \Delta x^k; \quad (2-71)$$

andererseits gilt (vgl. 4. kommutatives Diagramm)

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{u} = \mathfrak{A}^E(\xi^l) + u^k \mathbf{g}_k. \quad (2-72)$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt die erste Gleichung in (2-70). Wegen $\mathfrak{A}^E = \mathfrak{A}_0^L \circ \Xi$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{p} = \mathfrak{A}_0^L(\Xi^L(x^l(X^K, t))) &= \mathfrak{A}_0^L(X^L - \delta X^L) \approx \mathfrak{A}_0^L(X^L) - \frac{\partial \mathfrak{A}_0^L}{\partial X^K}(X^L) \delta X^K \\ &\approx \mathfrak{A}_0^L(X^L) - \mathbf{G}_K \delta X^K; \end{aligned} \quad (2-73)$$

woraus sich die zweite Gleichung in (2-70) ergibt. ■

Aus (2-12) folgt auch

$$u^k \approx \delta_K^k U^K. \quad (2-74)$$

2-2.5.2 Linearisierungen von Basisvektoren, shifters, Metrikkoeffizienten und Christoffelsymbolen

Lemma 2-8 (Linearisierung der Basisvektoren \mathbf{C}_K , \mathbf{C}^J , \mathbf{g}_k , \mathbf{g}^j) :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_K &= \mathbf{G}_K + U^L_{|K} \mathbf{G}_L =: \mathbf{G}_K + \text{GRAD } \mathbf{u} \cdot \mathbf{G}_K & \mathbf{C}^J &\approx \mathbf{G}^J - U^J_{|M} \mathbf{G}^M =: \mathbf{G}^J - \mathbf{G}^J \cdot \text{GRAD } \mathbf{u} \\ \mathbf{g}_k &\approx \mathbf{G}_K(\delta_k^K + {}^{(G)}\Gamma_{LM}^K \delta_k^L U^M) & \mathbf{g}^j &\approx \mathbf{G}^J(\delta_J^j - {}^{(G)}\Gamma_{NJ}^I \delta_I^j U^N) \end{aligned} \quad (2-75)$$

Dabei sind ${}^{(G)}\Gamma_{LM}^K$ die Christoffelsymbole, die sich auf die Basis $\{\mathbf{G}_K\}$ beziehen. ■

Beweis von Lemma 2-8 :

Das Lagrange-Inkrement der Basisvektoren \mathbf{C}_K berechnen wir mit Hilfe der Definition (2-7) zu

$$\mathbf{C}_K = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^K} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^K} = \mathbf{G}_K + U^L_{|K} \mathbf{G}_L$$

Diese Beziehung gilt im übrigen streng. Die Formel für die kontravarianten Basisvektoren zeigt man durch Bilden des Innenproduktes mit den kovarianten Basisvektoren:

$$\langle \mathbf{C}_K, \mathbf{C}^J \rangle = \delta_K^J$$

Ebenfalls aus der Definition (2-7) folgt die Linearisierung von \mathbf{g}_k :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_k &= \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^K} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^K} \right) X^K_{,k} \approx (\mathbf{G}_K + U^L_{|K} \mathbf{G}_L)(\delta_k^K - U^K_{,L} \delta_k^L) \\ &\approx \mathbf{G}_K \delta_k^K - \mathbf{G}_L U^L_{,K} \delta_k^K + \mathbf{G}_L \delta_k^K (U^L_{,K} + {}^{(G)}\Gamma_{KM}^L U^M) = \mathbf{G}_K(\delta_k^K + {}^{(G)}\Gamma_{LM}^K \delta_k^L U^M) \end{aligned}$$

Die Formel für die kontravarianten Basisvektoren \mathbf{g}^j zeigt man wieder durch Bilden des Innenproduktes $\langle \mathbf{g}_k, \mathbf{g}^j \rangle \approx \delta_k^j$. ■

Lemma 2-9 (Linearisierung der Metrikoeffizienten):

$$\begin{aligned} C_{MN} &= G_{MN} + \Delta C_{MN} & C^{KL} &= G^{KL} + \Delta C^{KL} \\ &\approx G_{MN} + U^J_{|N} G_{JM} + U^J_{|M} G_{JN} & &\approx G^{KL} - U^L_{|I} G^{KI} - U^K_{|I} G^{IL} \end{aligned} \quad (2-76)$$

$$\begin{aligned} g_{kl} &\approx G_{KL} (\delta_k^K \delta_l^L + \delta_k^K \delta_l^J \text{}^{(G)}\Gamma_{JM}^L U^M + \delta_k^J \delta_l^L \text{}^{(G)}\Gamma_{JM}^K U^M) \\ g^{mn} &\approx G^{MN} (\delta_M^m \delta_N^n - \delta_M^m \delta_I^n \text{}^{(G)}\Gamma_{NQ}^I U^Q - \delta_N^n \delta_I^m \text{}^{(G)}\Gamma_{MQ}^I U^Q) \end{aligned} \quad (2-77)$$

■

Beweis von Lemma 2-9 :

Man erhält den Beweis durch Einsetzen der jeweiligen linearisierten Basisvektoren in die Definition (2-8). Die Linearisierung von C_{MN} kann auch direkt aus (2-35) und (2-36) abgelesen werden. ■

Lemma 2-10 (Linearisierung der shifters):

$$g_k^K \approx \delta_k^K + U^M \text{}^{(G)}\Gamma_{MJ}^K \delta_k^J \quad g_L^l \approx \delta_L^l - U^N \text{}^{(G)}\Gamma_{NL}^I \delta_I^l \quad (2-78)$$

■

Beweis von Lemma 2-10 :

Man erhält den Beweis durch Einsetzen der jeweiligen linearisierten Basisvektoren in die Definitionen $g_k^K := \langle \mathbf{G}^K, \mathbf{g}_k \rangle$, $g_K^k := \langle \mathbf{G}_K, \mathbf{g}^k \rangle$. ■

Lemma 2-11 (Linearisierung der Christoffelsymbole):

Wir bezeichnen mit $\text{}^{(C)}\Gamma_{LM}^K$ die Christoffelsymbole bezüglich der Basis $\{\mathbf{C}_K\}$. Aus der Definition der Christoffelsymbole

$$\text{}^{(C)}\Gamma_{LM}^K := \frac{1}{2} C^{KN} (C_{MN,L} + C_{NL,M} - C_{LM,N}) \quad (2-79)$$

ergibt sich ihre Linearisierung:

$$\begin{aligned} \text{}^{(C)}\Gamma_{NJ}^K &\approx \text{}^{(G)}\Gamma_{NJ}^K - \text{}^{(G)}\Gamma_{NJ}^L U^L_{,L} + \text{}^{(G)}\Gamma_{LN}^K U^L_{,J} + \text{}^{(G)}\Gamma_{LJ}^K U^L_{,N} + \text{}^{(G)}\Gamma_{NJ}^K_{,L} U^L + U^K_{,NJ} \\ &\text{und} \\ \text{}^{(C)}\Gamma_{KM}^K C^{MI} &\approx \text{}^{(G)}\Gamma_{KM}^K G^{MI} + \text{}^{(G)}\Gamma_{KM}^K_{,L} G^{MI} U^L + U^K_{,KM} G^{MI} - \text{}^{(G)}\Gamma_{KM}^K G^{LM} U^I_{,L} \end{aligned} \quad (2-80)$$

■

2-2.5.3 Linearisierung von Flächen- und Volumenelement

Wir leiten zunächst eine Linearisierung der Jacobi-Determinanten $j = \det(x^k_{,K})$ her:
Mit Hilfe von

$$\frac{\partial j}{\partial (x^k_{,K})} = j X^K_{,k} \quad (2-81)$$

(siehe z.B. *C.Eringen 1962 S.11*) erhalten wir

Lemma 2-12 :

$$j = \text{}^{(0)}j + \Delta j \approx 1 + \frac{\partial j}{\partial x^k_{,K}} \Big|_0 \Delta x^k_{,K} = 1 + \delta_k^K u^k_{,K} = 1 + U^K_{,K} \quad (2-82)$$

■

Aus (2-64), (2-82) und (2-77) oder (2-76) kann (2-83) hergeleitet werden:

Lemma 2-13 (Linearisierung des Volumenelementes):

$$d^3 \mathbf{x} \approx (1 + U^K_{|K}) d^3 \mathbf{X} =: (1 + \text{DIV } \mathbf{u}) d^3 \mathbf{X} \quad (2-83)$$

■

Aus (2-68) und (2-83) ergibt sich mit $X^K_{,k} \approx \delta_k^K + \delta X^K_{,L} \delta_k^L$:

Lemma 2-14 (Linearisierung des Flächenvektors):

$$\begin{aligned} da_k &\approx (1 + \text{DIV } \mathbf{u}) X^K_{,k} dA_K \approx (1 + U^J_{|J}) (\delta_k^K + {}^{(G)} \Gamma_{ML}^K U^M \delta_k^L - U^K_{|L} \delta_k^L) dA_K \\ \implies \mathbf{n} d^2 \mathbf{x} &= \mathbf{g}^k da_k \approx [(1 + U^J_{|J}) dA_L - dA_K U^K_{|L}] \mathbf{G}^L \\ &\approx \mathbf{N} d^2 \mathbf{X} \cdot [(1 + \text{DIV } \mathbf{u}) \mathbf{I} - \text{GRAD } \mathbf{u}] \end{aligned} \quad (2-84)$$

■

2-2.5.4 Beziehung zwischen Anomalie und Störung

Ist die Anomalie $\Delta \Psi$ einer Feldgröße Ψ eine glatte Funktion der Lagrange-Koordinaten, so braucht dies für die Störung $\delta \Psi$ nicht der Fall zu sein und umgekehrt. Als Beispiel betrachten wir die starre Verschiebung einer homogenen Kugel. Die Anomalie der Massendichte $\Delta \rho$ verschwindet für alle materiellen Punkte identisch und ist daher beliebig oft stetig differenzierbar. Dagegen ist die Dichtestörung $\delta \rho$ eine unstetige Funktion der Euler-Koordinaten: Für Raumpunkte, die sowohl vor als auch nach der Verschiebung innerhalb der Kugel gelegen sind, verschwindet die Störung, ebenso für Punkte, die vorher und nachher außerhalb liegen. Dagegen beträgt die Störung für Raumpunkte, durch welche die materielle Grenzfläche im Lauf der Verschiebung hindurchtritt, $\pm \rho$.

Für den Fall, dass sowohl Störung als auch Anomalie genügend glatt sind, gilt unabhängig davon, um welche Feldgröße Ψ es sich handelt, in linearer Näherung der Zusammenhang

Lemma 2-15 (Beziehung zwischen Anomalie und Störung):

$$\begin{aligned} \Delta \Psi &\approx \delta \Psi + \frac{\partial \Psi^\mathcal{E}}{\partial x^k} (\xi^l, t_0) u^k \\ \delta \Psi &\approx \Delta \Psi - \frac{\partial \Psi^\mathcal{L}}{\partial X^K} (\Xi^L, t_0) U^K \end{aligned} \quad (2-85)$$

■

Dieses Lemma folgt aus der Linearisierung der 2. Rechenregel in (D-1).

2-2.6 Differentialoperatoren und ihre Linearisierung

Definition 2-18 (Gradientenoperatoren):

Es sei $F(\mathbf{x}, t)$ eine Funktion von Ort und Zeit. Wir benutzen folgende Gradientenoperatoren:

$$\begin{aligned} \text{grad } F(\mathbf{p}, t) &:= \frac{\partial F^\mathcal{E}(x^l, t)}{\partial x^k} \mathbf{g}^k(x^m) = \frac{\partial F^\mathcal{L}(X^L, t)}{\partial X^K} \mathbf{C}^K(X^M, t) \\ \text{GRAD } F(\mathbf{p}, t) &:= \frac{\partial F^\mathcal{E}(x^l, t)}{\partial x^k} \mathbf{c}^k(x^m, t) = \frac{\partial F^\mathcal{L}(X^L, t)}{\partial X^K} \mathbf{G}^K(X^M) \end{aligned} \quad (2-86)$$

■

Mit dem Symbol “grad” wird demnach der übliche Gradient bezeichnet, mit dem Symbol “GRAD” dagegen ein Gradient, der die geometrischen Verhältnisse des unverzerrten Zustandes zugrundelegt (vgl. *J. Marsden, T. Hughes 1983*). Es wird der Funktionswert F zur aktuellen Zeit t dem materiellen Punkt \mathbf{p} zugeordnet und das Kontinuum “wieder in den Grundzustand gebracht”, wobei F im materiellen Punkt unverändert bleibt. Dann wird der Gradient bezüglich der Geometrie des Referenzzustandes gebildet und schließlich parallel von \mathbf{P} nach

\mathbf{p} verschoben. Auch der Operator GRAD bezieht sich also auf die Zeit t . Zur Zeit t_0 fallen beide Gradientendefinitionen zusammen.

Wir stellen mit Hilfe von (2-75) eine linearisierte Beziehung zwischen $\text{grad } F$ und $\text{GRAD } F$ her:

$$\text{grad } F \approx \text{GRAD } F - \text{GRAD } F \cdot \text{GRAD } \mathbf{u} = \frac{\partial F^{\mathcal{L}}(X^M, t)}{\partial X^K} \mathbf{G}^K - \frac{\partial F^{\mathcal{L}}(X^M, t)}{\partial X^K} U_{|L}^K \mathbf{G}^L. \quad (2-87)$$

Bei der Linearisierung der Bewegungsgleichungen werden in Abschnitt 2-5.3 zwei Sonderfälle auftreten: Sei erstens

$$F = F^{\mathcal{L}}(X^K) \text{ unabhängig von } t. \text{ Dann gilt} \quad (2-88)$$

$$\text{grad } F|_{(\mathbf{p}, t_0)} = \text{GRAD } F|_{(\mathbf{p}, t)} = \text{GRAD } F|_{(\mathbf{p}, t_0)}.$$

Sei zweitens

$$F = F^{\mathcal{E}}(x^l) \text{ unabhängig von } t. \text{ Dann gilt} \quad (2-89)$$

$$\text{grad } F|_{(\mathbf{p}, t_0)} = \text{grad } F|_{(\mathbf{p}, t)}.$$

Beide Aussagen ergeben sich direkt aus den Definitionen (2-86), wenn wir noch $\mathbf{C}^K(X^L, t_0) = \mathbf{G}^K(X^L)$ beachten.

Definition 2-19 (Divergenzoperatoren):

Sei \mathbf{F} ein Vektor. Wir bezeichnen mit “DIV” den Divergenzoperator bezüglich der Geometrie des Referenzzustandes, mit “div” den Divergenzoperator bezüglich der Geometrie des aktuellen Zustandes zur Zeit t . Es ergeben sich verschiedene Möglichkeiten der Darstellung, je nachdem in welchem Basissystem der Vektor aufgelöst ist, z.B.

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}, t) = F^l(x^k, t) \mathbf{g}_l(x^m) = F^L(X^K, t) \mathbf{G}_L(X^M)$$

$$\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{p}, t) := \frac{\partial \mathbf{F}^{\mathcal{E}}(x^l, t)}{\partial x^k} \cdot \mathbf{g}^k = F^l_{|l}(x^m, t) = \frac{\partial \mathbf{F}^{\mathcal{L}}(X^L, t)}{\partial X^K} \cdot \mathbf{C}^K = F^L_{|K} \mathbf{G}_L \cdot \mathbf{C}^K \quad (2-90)$$

$$\text{DIV } \mathbf{F}(\mathbf{p}, t) := \frac{\partial \mathbf{F}^{\mathcal{L}}(X^L, t)}{\partial X^K} \cdot \mathbf{G}^K = F^K_{|K}(X^L, t) = \frac{\partial \mathbf{F}^{\mathcal{E}}(x^l, t)}{\partial x^k} \cdot \mathbf{c}^k = F^l_{|k} \mathbf{g}_l \cdot \mathbf{c}^k$$

(Großgeschriebene Indices bei Komponenten beziehen sich, falls nichts anderes vermerkt ist, stets auf die Basis $\{\mathbf{G}_K\}$, kleingeschriebene auf die Basis $\{\mathbf{g}_k\}$; dies gilt auch für kovariante oder kontravariante Ableitungen.) ■

DIV kann demnach in folgender Weise interpretiert werden: Der Vektor $\mathbf{F}(\mathbf{x}_P(\mathbf{X}_P, t), t)$ wird *parallel* nach \mathbf{X}_P verschoben; danach wird bezüglich der Topologie des Referenzzustandes die Divergenz gebildet.

Anmerkung 2-4 :

Ein weiterer Operator könnte folgendermaßen definiert werden: Der Vektor wird nicht parallel zurückabgebildet, sondern behält seine Komponenten bezüglich der sich verändernden Basisvektoren: $F^K \mathbf{C}_K \rightarrow F^K \mathbf{G}_K$; daraufhin wird wieder die Divergenz DIV gebildet. Dieser Operator wird aber im folgenden nicht benötigt.

Wir linearisieren mit Hilfe von (2 – 75) “div \mathbf{F} ” bezüglich “DIV \mathbf{F} ” :

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{F}^{\mathcal{L}}(X^L, t)}{\partial X^K} \cdot \mathbf{C}^K \approx \frac{\partial \mathbf{F}^{\mathcal{L}}(X^L, t)}{\partial X^K} \cdot (\mathbf{G}^K - U_{|L}^K \mathbf{G}^L) \\ &\approx F^K_{|K} - F^L_{|K} U_{|L}^K = \text{DIV } \mathbf{F} - \text{GRAD } \mathbf{F} \cdot \text{GRAD } \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2-91)$$

Ist $\mathbf{F} = \hat{F}^J \mathbf{C}_J$ mit Hilfe der Basis $\{\mathbf{C}_J\}$ dargestellt, so gilt wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &\approx \hat{F}^J (\mathbf{G}_J + U_{|J}^L \mathbf{G}_L) = (\hat{F}^J + \hat{F}^L U_{|L}^J) \mathbf{G}_J \\ F^J &\approx \hat{F}^J + \hat{F}^L U_{|L}^J \\ &\text{und damit} \\ \text{div } \mathbf{F} &\approx F^K_{|K} - \hat{F}^L_{|K} U_{|L}^K \approx (\hat{F}^J + \hat{F}^L U_{|L}^J)_{|J} - \hat{F}^L_{|K} U_{|L}^K \approx \hat{F}^L_{|L} + \hat{F}^L U_{|L}^J \end{aligned} \quad (2-92)$$

Ganz analog können wir bei einem Tensor zweiter Stufe verfahren. Die Definitionen (2 – 86) und (2 – 90) lassen sich auf Tensoren beliebiger Stufe übertragen. Ist der Tensor beispielsweise in der Basis $\{\mathbf{G}_K\}$ aufgelöst, so erhalten wir wieder mit Hilfe von (2 – 75)

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= F^{KL}\mathbf{G}_K \otimes \mathbf{G}_L \\ \operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial X^J} \cdot \mathbf{C}^J = F^{KL}{}_{|J} \mathbf{G}_K \otimes \mathbf{G}_L \cdot \mathbf{C}^J \\ &\approx F^{KL}{}_{|L} \mathbf{G}_K - F^{KL}{}_{|M} U^M{}_{|L} \mathbf{G}_K = \operatorname{DIV} \mathbf{F} - F^{KL}{}_{|M} U^M{}_{|L} \mathbf{G}_K\end{aligned}\tag{2-93}$$

Mitunter kommen auch gemischte Darstellungen vor, so z.B. beim Piola-Kirchhoff-Tensor (vgl. (2 – 162)):

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \widehat{F}^{KL} \mathbf{C}_K \otimes \mathbf{G}_L \approx (\widehat{F}^{KL} + \widehat{F}^{ML} U^K{}_{|M}) \mathbf{G}_K \otimes \mathbf{G}_L \\ \operatorname{DIV} \mathbf{F} &\approx (\widehat{F}^{KL}{}_{|L} + \widehat{F}^{ML}{}_{|L} U^K{}_{|M} + \widehat{F}^{ML} U^K{}_{|ML}) \mathbf{G}_K \\ \operatorname{div} \mathbf{F} &\approx \operatorname{DIV} \mathbf{F} - \widehat{F}^{KL}{}_{|M} U^M{}_{|L} \mathbf{G}_K \\ &\approx (\widehat{F}^{KL}{}_{|L} + \widehat{F}^{ML}{}_{|L} U^K{}_{|M} - \widehat{F}^{KL}{}_{|M} U^M{}_{|L} + \widehat{F}^{ML} U^K{}_{|ML}) \mathbf{G}_K.\end{aligned}\tag{2-94}$$

Linearisierung des Laplace-Operators ergibt:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{grad} F &\approx \operatorname{div} (\operatorname{GRAD} F - F_{,K} U^K{}_{|L} \mathbf{G}^L) = \operatorname{div} ((F_{,K} - F_{,M} U^M{}_{|K}) G^{KL} \mathbf{G}_L) \\ &\approx F_{|KL} G^{KL} - F_{|KM} U^M{}_{|L} G^{KL} - \operatorname{DIV} (F_{,M} U^M{}_{|K} G^{KL} \mathbf{G}_L) \\ &= (F_{|KL} - 2F_{|KM} U^M{}_{|L} - F_{,M} U^M{}_{|KL}) G^{KL}\end{aligned}\tag{2-95}$$

Definition 2-20 (Rotationsoperatoren):

Die Rotation rot bzw. ROT (bezüglich der Topologie des Referenzzustandes) ist definiert durch

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{F} &= \mathbf{g}^k \times \frac{\partial \mathbf{F}^\varepsilon(x^l, t)}{\partial x^k} = \mathbf{C}^K \times \frac{\partial \mathbf{F}^\mathcal{L}(X^L, t)}{\partial X^K} \\ \operatorname{ROT} \mathbf{F} &= \mathbf{c}^k \times \frac{\partial \mathbf{F}^\varepsilon(x^l, t)}{\partial x^k} = \mathbf{G}^K \times \frac{\partial \mathbf{F}^\mathcal{L}(X^L, t)}{\partial X^K}\end{aligned}\tag{2-96}$$

■

Linearisierung von rot bezüglich ROT ergibt:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{F} &= \mathbf{C}^K \times F^L{}_{|K} \mathbf{G}_L \approx (\mathbf{G}^K - U^K{}_{|M} \mathbf{G}^M) \times F^L{}_{|K} \mathbf{G}_L = F^L{}_{|K} \mathbf{G}^K \times \mathbf{G}_L - F^L{}_{|K} U^K{}_{|M} \mathbf{G}^M \times \mathbf{G}_L \\ &= \epsilon^{KLM} G_{LJ} F^J{}_{|K} \mathbf{G}_M - \epsilon^{KLM} G_{LJ} F^J{}_{|N} U^N{}_{|K} \mathbf{G}_M = \operatorname{ROT} \mathbf{F} - \epsilon^{KLM} G_{LJ} F^J{}_{|N} U^N{}_{|K} \mathbf{G}_M,\end{aligned}\tag{2-97}$$

dabei sind wie in (2-67) ϵ^{KLM} die Koordinaten des Levi-Civita-Tensors bezüglich der Basis \mathbf{G}_K .

2-3 Bewegung

2-3.1 Räumliche und materielle Zeitableitung

Bisher haben wir die Zeit nur als (diskreten) Index benutzt und damit gleichsam Momentaufnahmen des Kontinuums verglichen. Im vorliegenden Abschnitt betrachten wir den zeitlichen Ablauf der Änderung des Kontinuums.

Definition 2-21 (Geschwindigkeit):

Die Abbildung $\mathfrak{A}^L(X^K, t) = \mathfrak{A}^E(x^k(X^K, t))$ sei auch bezüglich der Zeitvariablen stetig differenzierbar. Die *Geschwindigkeit* eines materiellen Punktes \mathbf{P} mit den materiellen Koordinaten X^K bezüglich des gewählten Bezugssystems ist durch

$$\mathbf{v} := v^k \mathbf{g}_k = \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{P}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} \cdot \frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}^k(X^K, t)}{\partial t} \mathbf{g}_k = -\frac{\partial \mathfrak{X}^K(x^k, t)}{\partial t} \mathbf{C}_K \quad (2-98)$$

definiert. ■

Definition 2-22 (räumliche und materielle Zeitableitung):

Sei F ein Attribut des Kontinuums, wie z.B. Druck oder Ladungsdichte. F kann als Funktion des materiellen Punktes und der Zeit oder des räumlichen Punktes und der Zeit, entsprechend mit Hilfe Euler'scher oder Lagrange'scher Koordinaten als Argument dargestellt werden:

$$F = \mathfrak{F}(\mathbf{p}, t) = \mathfrak{F}(\mathfrak{A}^E(x^k, t), t) =: F^E(x^k, t) = F^E(\mathbf{r}^k(X^K, t), t) =: F^L(X^K, t). \quad (2-99)$$

Im Abschnitt 2-1.4 wurde die Unterscheidung zwischen dem räumlichen und dem materiellen Inkrement eingeführt. Analog dazu unterscheiden wir hier zwischen der *materiellen* Zeitableitung $\frac{D}{Dt}$ und der *räumlichen* Zeitableitung \dot{F} :

$$\frac{DF}{Dt} := \frac{\partial F^L(X^K, t)}{\partial t} = \frac{\partial \Delta F(X^K, t)}{\partial t} \quad \dot{F} := \frac{\partial F^E(x^k, t)}{\partial t} = \frac{\partial \delta F(x^k, t)}{\partial t} \quad (2-100)$$

Speziell für die Koordinaten gilt in Analogie zu (2-28)

$$\dot{x}^k = 0 \quad \frac{DX^K}{Dt} = 0. \quad (2-101)$$

Mit dieser Beziehung und (2-15) kann das letzte Gleichheitszeichen in der Definition (2-21) bewiesen werden:

$$\frac{DX^K}{Dt} = X^K_{,k} \frac{dx^k}{dt} + \frac{\partial X^K}{\partial t} = 0; \implies X^K_{,k} \frac{dx^k}{dt} = -\frac{\partial X^K}{\partial t}$$

Sowohl die räumliche als auch die materielle Zeitableitung lassen sich wiederum als Funktion von Lagrange'schen Koordinaten und der Zeit oder von Euler'schen Koordinaten und der Zeit darstellen. Wegen $F^L(X^K, t) = F^E(x^k(X^K, t), t)$ gelten die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \frac{DF}{Dt} &= \dot{F} + \frac{\partial F^E}{\partial x^k} \frac{Dx^k}{Dt} = \dot{F} + \langle \text{grad } F(x^k, t), \mathbf{v} \rangle \\ \dot{F} &= \frac{DF}{Dt} + \frac{\partial F^L}{\partial X^K} \dot{X}^K = \frac{DF}{Dt} - \langle \text{grad } F(x^k, t), \mathbf{v} \rangle. \end{aligned} \quad (2-102)$$

Wird ein Tensor 1. Stufe \mathbf{F} nach der Zeit abgeleitet, so ist nach der Produktregel auch die zeitliche Änderung der Basis zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(F^k \mathbf{g}_k) &= \frac{DF^k}{Dt} \mathbf{g}_k + F^k \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^l} \frac{Dx^l}{Dt} = \frac{DF^k}{Dt} \mathbf{g}_k + F^k \Gamma_{kl}^m \frac{Dx^l}{Dt} \mathbf{g}_m \\ &= \frac{\partial F^k(x^l, t)}{\partial t} \mathbf{g}_k + \frac{\partial F^k}{\partial x^l} \frac{Dx^l}{Dt} \mathbf{g}_k + F^k \Gamma_{kl}^m \frac{Dx^l}{Dt} \mathbf{g}_m = \left(\frac{\partial F^k(x^l, t)}{\partial t} + F^k_{|l} v^l \right) \mathbf{g}_k. \end{aligned} \quad (2-103)$$

Definition 2-23 :

Wir bezeichnen die Größe

$$\frac{\mathbf{D}F^k}{\mathbf{D}t} := \frac{\partial F^k(x^l, t)}{\partial t} + F^k|_l \frac{Dx^l}{Dt} \quad (2-104)$$

als *kovariante materielle Zeitableitung*. ■

Definition 2-24 (Beschleunigung):

Speziell heißt die materielle Zeitableitung der Geschwindigkeit *Beschleunigung* \mathbf{a} :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \dot{\mathbf{v}} + \langle \text{grad } \mathbf{v}(x^k, t), \mathbf{v} \rangle = \dot{\mathbf{v}} + \text{grad } \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} \\ &= \frac{\partial v^k(x^l, t)}{\partial t} \mathbf{g}_k + \frac{\partial v^k}{\partial x^l} v^l \mathbf{g}_k + v^m v^l \Gamma_{ml}^k \mathbf{g}_k = \left(\frac{\partial v^k(x^l, t)}{\partial t} + v^k|_l v^l \right) \mathbf{g}_k \end{aligned} \quad (2-105)$$

(den Beweis des zweiten Gleichheitszeichens findet man z.B. in *E. Klingbeil 1966 S.79*). ■

Weiter betrachten wir die Zeitableitungen eines Integrals über ein zeitabhängiges Volumen $\mathcal{V}(t)$.

Satz 2-16 :

Sei $\sigma(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t), t)$ eine Zweipunkt-Kernfunktion; die Feldgröße F sei definiert als

$$F(\mathbf{p}, t) = \int_{\mathcal{V}(t)} \sigma(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}_Q(t), t) d^3 \mathbf{x}_Q.$$

(Der laufende Punkt der Integration ist hier mit einem tiefgestellten Index Q bezeichnet.) Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} F(\mathbf{p}(\mathbf{P}, t), t) &= \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{D}{Dt} \sigma(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}_Q(t), t) d^3 \mathbf{x}_Q + \int_{\mathcal{V}(t)} \sigma(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}_Q(t), t) \text{div}_Q \mathbf{v}(\mathbf{x}_Q, t) d^3 \mathbf{x}_Q \\ \dot{F}(\mathbf{x}_p, t) &= \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{d}{dt} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{x}_Q(t), t) d^3 \mathbf{x}_Q + \int_{\mathcal{V}(t)} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{x}_Q(t), t) \text{div}_Q \mathbf{v}(\mathbf{x}_Q, t) d^3 \mathbf{x}_Q \end{aligned} \quad (2-106)$$

Bei der materiellen Zeitableitung von σ ist die zeitliche Änderung sowohl von \mathbf{p} als auch von \mathbf{q} zu berücksichtigen, bei der räumlichen Zeitableitung dagegen wird \mathbf{p} als fix angesehen. Hängt σ nicht von \mathbf{p} , sondern nur von $\mathbf{q}(t)$ und eventuell der Zeit t explizit ab, so fallen materielle und räumliche Zeitableitung von F zusammen. ■

Beweisskizze:

Man nimmt zunächst an, das Kontinuum befinde sich zu einem Zeitpunkt t_0 im Grundzustand und berechnet die Ableitungen für diesen Zeitpunkt. Wir setzen die Formeln (D-2) in (2-100) ein. Damit ergibt sich für die materielle Zeitableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta F}{\partial t} \Big|_{t=t_0} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{V}_0} \Delta_{PQ} \sigma(t_0 + \Delta t) d^3 \mathbf{X}_Q + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{V}_0} \sigma(\mathbf{p}(t_0 + \Delta t), \mathbf{x}_Q(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t) \Delta \left(\sqrt{\frac{\det g}{\det G}} \cdot j \right) \Big|_{Q, t_0 + \Delta t} d^3 \mathbf{X}_Q \right\} \\ &= \int_{\mathcal{V}_0} \frac{D\sigma}{Dt} \Big|_{(P, Q, t_0)} d^3 \mathbf{X}_Q + \int_{\mathcal{V}_0} \sigma(t_0) v^k|_k d^3 \mathbf{X}_Q \end{aligned}$$

Der gestörte Zustand ist hier dem Grundzustand infinitesimal benachbart, daher konnte die lineare Näherung (2-83) verwendet werden. Da die speziellen Eigenschaften des Grundzustandes nirgends verwendet wurden, lässt sich das Ergebnis auf beliebige Zeitpunkte t verallgemeinern. Die angegebene Formel gilt streng.

Analog kann auch die Formel für die räumliche Zeitableitung bewiesen werden. Einen ausführlichen Beweis findet man z.B. in *H.W. Mikolajski 1989 S.128*.

Definition 2-25 :

Der Tensor zweiter Stufe $\mathcal{D} := d_{kl}\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l$ mit $d_{kl} := \frac{1}{2}(v_{k|l} + v_{l|k})$ heißt *strain-rate-Tensor*. ■

Lemma 2-17 (materielle Zeitableitung des quadrierten Bogenelementes):

$$\frac{D}{Dt}(ds^2) = 2d_{kl}dx^k dx^l \quad (2-107)$$

Beweis von Lemma 2-17 :

1. (a)

$$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t}(g_{kl}) = \frac{\partial}{\partial t}(g_{kl}) + g_{kl|m}v^m = 0;$$

(beide Summanden verschwinden, der erste infolge der zeitlichen Invarianz der Euler'schen Koordinaten in einem Raumpunkt, der zweite infolge von Ricci's Lemma).

(b)

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t}(dx^k) &= \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t}(x^k{}_{,K} dX^K) = \left(\frac{\partial x^k{}_{,K}}{\partial t} + (x^k{}_{,K})_{|l}v^l\right)dX^K \\ &= \left(\frac{\partial x^k{}_{,K}}{\partial t} + (x^k{}_{,K})_{,l}v^l + \Gamma_{lm}^k x^m{}_{,K}v^l\right)dX^K \end{aligned}$$

$$\text{Wegen } v^k{}_{,l} = v^k{}_{,M} X^M{}_{,l} = \frac{Dx^k{}_{,M}}{Dt} X^M{}_{,l} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(x^k{}_{,M}) + (x^k{}_{,M})_{,j}v^j \right\} X^M{}_{,l}$$

$$\text{und } v^k{}_{,l} x^l{}_{,K} = \frac{\partial}{\partial t}(x^k{}_{,K}) + (x^k{}_{,K})_{,j}v^j$$

wird

$$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t}(dx^k) = (v^k{}_{,l} x^l{}_{,K} + \Gamma_{lm}^k x^l{}_{,K} v^m)dX^K = v^k{}_{|l} x^l{}_{,K} dX^K = v^k{}_{|l} dx^l;$$

mit Hilfe von (a) und (b) folgt

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(ds^2) &= \frac{D}{Dt}(g_{kl}dx^k dx^l) = g_{kl}dx^l \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t}(dx^k) + g_{kl}dx^k \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t}(dx^l) \\ &= (v_{l|k} + v_{k|l})dx^l dx^k = 2d_{kl}dx^k dx^l \end{aligned}$$

Lemma 2-18 :

$$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t}(E_{KL}) = d_{kl} x^k{}_{,K} x^l{}_{,L} \quad (2-108)$$

Beweis von Lemma 2-18 :

$$\frac{D}{Dt}(ds^2) = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t}(C_{KL})dX^K dX^L = 2\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t}(E_{KL})dX^K dX^L,$$

und durch Vergleich mit Lemma (2-17) folgt Lemma (2-18). ■

(E_{KL} wird hier als Koeffizient des ersten Euler-Lagrange-Verzerrungstensors in der Definition (2-16) aufgefasst; da die Basisvektoren \mathbf{G}^K zeitlich konstant sind, brauchen materielle Zeitableitung und kovariante materielle Zeitableitung hier nicht unterschieden werden.)

Lemma 2-19 :

$$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t}(e_{kl}) = d_{kl} - (e_k^m v_{m|l} + e_l^m v_{m|k}) \quad (2-109)$$

■

Beweis von Lemma 2-19 :

$$\frac{D}{Dt}(ds^2) = \frac{D}{Dt}(ds^2 - dS^2) = 2\frac{D}{Dt}(e_{kl}dx^k dx^l) = 2\left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t}e_{kl} + e_k^m v_{m|l} + e_l^m v_{m|k}\right)dx^k dx^l,$$

(vgl. (b) im Beweis zu Lemma (2-17)), und aus Lemma (2-17) folgt (2-19). ■

Lemma (2-18) und (2-19) werden benötigt, wenn das Integral der elastischen Verschiebungsenergie berechnet bzw. auf das unverzerrte Volumen transformiert werden soll.

2-3.2 Bewegte Systeme und relative Zeitableitung

Sei $\{(I)x^k\}$ ein Inertialsystem. Es wird sich als günstig erweisen, ein weiteres System $\{\bar{x}^k\}$ zu benutzen, das gegenüber dem Inertialsystem beschleunigt ist. Wir lassen sowohl eine translative Beschleunigung des Ursprungs des gequerten Systems relativ zum Inertialsystem als auch eine (starre) Drehung der Koordinatenachsen zu. Es sind daher Ortsvektoren bezüglich der beiden Systeme zu unterscheiden. Wir bezeichnen einen Ortsvektor bezüglich des Inertialsystems mit $(I)\mathbf{x}$, den Ortsvektor bezüglich des beschleunigten Systems mit \mathbf{x} .

Als Ursprung des beschleunigten Systems wählen wir stets den *Massenmittelpunkt* des Kontinuums (in unserem Fall der Erde):

Definition 2-26 :

Der Massenmittelpunkt \mathbf{x}^M eines Kontinuums bezüglich des Inertialsystems ist durch

$$\mathbf{x}^M := \frac{1}{M} \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho^{(I)\mathbf{x}, t} (I)\mathbf{x} d^3\mathbf{x} \quad (2-110)$$

definiert. Hier bedeuten M die Gesamtmasse, ϱ die Massendichte. ■

Es gilt also

$$(I)\mathbf{x} = \mathbf{x}^M + \mathbf{x}. \quad (2-111)$$

In diesem Abschnitt nehmen wir ausnahmsweise an, dass sämtliche Systeme kartesisch sind; die Basisvektoren werden entsprechend mit \mathbf{e}_k bzw. $\bar{\mathbf{e}}_k$ bezeichnet. Die Transformation zwischen den Basisvektoren des gequerten und des ungequerten Systems ist durch eine (zeitabhängige) Rotationsmatrix \underline{R} gegeben:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_k &= R_{kl}\mathbf{e}_l & \mathbf{e}_k &= R_{lk}\bar{\mathbf{e}}_l \\ \bar{x}_k &= R_{kl}x_l & x_k &= R_{lk}\bar{x}_l. \end{aligned} \quad (2-112)$$

Definition 2-27 (relative Zeitableitung):

Sei $\mathbf{F} = F_k\mathbf{e}_k = \bar{F}_k\bar{\mathbf{e}}_k$ ein zeitabhängiger (freier) Vektor. Wir bezeichnen den Ausdruck

$$\frac{d'\mathbf{F}}{dt'} := \frac{d\bar{F}_k}{dt}\bar{\mathbf{e}}_k \quad (2-113)$$

als *relative Zeitableitung* bezüglich des Systems $\{\bar{x}^k\}$. Dabei bleibt offen, ob es sich um die materielle oder räumliche Ableitung handeln soll. ■

Satz 2-20 :

Sei $\mathbf{F} = F_k \mathbf{e}_k = \bar{F}_k \bar{\mathbf{e}}_k$ ein zeitabhängiger freier Vektor. Der Zusammenhang zwischen der relativen Zeitableitung $d'\mathbf{F}/dt'$ und der Zeitableitung $d\mathbf{F}/dt$ (bezüglich des Inertialsystems) ist durch die Beziehung

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{d'\mathbf{F}}{dt'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{F} = \frac{d\bar{F}_k}{dt} \bar{\mathbf{e}}_k - \bar{\Omega}_{kl} \bar{F}_l \bar{\mathbf{e}}_k = \frac{d\bar{F}_k}{dt} \bar{\mathbf{e}}_k - \Omega_{kl} F_l \mathbf{e}_k \quad (2-114)$$

mit $\boldsymbol{\omega} = \bar{\omega}_j \bar{\mathbf{e}}_j = \omega_j \mathbf{e}_j$ und

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{kl} &= \dot{R}_{km} R_{lm} = -R_{km} \dot{R}_{lm}, & \bar{\omega}_j &:= \frac{1}{2} \epsilon_{jkl} \bar{\Omega}_{kl}, & \bar{\Omega}_{kl} &= \epsilon_{jkl} \bar{\omega}_j \\ \Omega_{kl} &= R_{mk} \dot{R}_{ml} = -\dot{R}_{mk} R_{ml}, & \omega_j &:= \frac{1}{2} \epsilon_{jkl} \Omega_{kl}, & \Omega_{kl} &= \epsilon_{jkl} \omega_j \end{aligned} \quad (2-115)$$

gegeben. ϵ_{jkl} sind die Permutationssymbole; $\boldsymbol{\omega}$ ist der *Winkelgeschwindigkeitsvektor* des beschleunigten (gequerten) Systems bezüglich des Inertialsystems. ■

Man gewinnt diesen Satz, indem man die Produktregel auf das Produkt von gequerten Vektorkoordinaten \bar{F}_k und Basisvektoren $\bar{\mathbf{e}}_k$ anwendet und die Transformationsbeziehungen (2-112) einsetzt. Ω_{kl} und $\bar{\Omega}_{kl}$ sind antisymmetrisch. Es ist zu beachten, dass es sich bei der relativen Zeitableitung nicht einfach um die Transformation der Komponenten einer absoluten Zeitableitung in das rotierende System handelt, sondern um eine physikalisch eigenständige Tensorgröße.

Anmerkung 2-5 :

Es gilt $\bar{\omega}_j = R_{jm} \omega_m$, $\bar{\Omega}_{kl} = R_{km} \Omega_{mn} R_{ln}$. Die Formeln (2-115) sind damit in Einklang, z.B.

$$2\bar{\omega}_j = 2R_{jm} \omega_m = R_{jm} \epsilon_{mkl} \Omega_{kl} = \epsilon_{mkl} R_{jm} R_{nk} \dot{R}_{nl}$$

Der Ausdruck $\epsilon_{mkl} R_{jm} R_{nk}$ gleicht aber gerade den Komponenten des Kreuzprodukts zwischen der j-ten und der n-ten Zeile der orthonormalen Matrix \underline{R} , also $\epsilon_{mkl} R_{jm} R_{nk} = \epsilon_{jnk} R_{ql}$, damit $2\bar{\omega}_j = \epsilon_{jnk} \dot{R}_{nl} R_{ql} = \epsilon_{jnk} \Omega_{nk}$.

Wir bilden die zweite relative zeitliche Ableitung des Ortsvektors, welche in den Bewegungsgleichungen erscheint, indem wir sukzessive den Satz (2-20) anwenden; wir haben allerdings zu beachten, dass sich die Ortsvektoren bezüglich der beiden Systeme unterscheiden. Wir müssen die Geschwindigkeit \mathbf{v}^M bzw. die Beschleunigung \mathbf{a}^M des Ursprungs des beschleunigten Systems berücksichtigen.

Korollar 2-21 (Trägheitsterme bei Geschwindigkeit und Beschleunigung):

Speziell für die Zeitableitungen des Orts- sowie des Geschwindigkeitsvektors gilt, wenn wir $\frac{D'\mathbf{p}}{Dt'} =: \mathbf{v}^{Rel}$ und $\frac{D'\mathbf{v}^{Rel}}{Dt'} =: \mathbf{a}^{Rel}$ abkürzen

$$\begin{aligned} {}^{(I)}\mathbf{v} &= \frac{D}{}^{(I)}\mathbf{p} = \mathbf{v}^M + \mathbf{v}^{Rel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} = \mathbf{v}^M + \frac{D\bar{x}_k}{Dt} \bar{\mathbf{e}}_k - \bar{\Omega}_{kl} \bar{x}_l \bar{\mathbf{e}}_k = \mathbf{v}^M + \bar{v}_k^{Rel} \bar{\mathbf{e}}_k + \epsilon_{jkl} \bar{\omega}_k \bar{x}_l \bar{\mathbf{e}}_j \\ {}^{(I)}\mathbf{a} &= \mathbf{a}^M + \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{a}^M + \mathbf{a}^{Rel} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^{Rel} + \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{p} \rangle \boldsymbol{\omega} - \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle \mathbf{p} \\ &= \mathbf{a}^M + \frac{D^2 \bar{x}_k}{Dt^2} \bar{\mathbf{e}}_k - \dot{\bar{\Omega}}_{kl} \bar{x}_l \bar{\mathbf{e}}_k - 2\bar{\Omega}_{kl} \frac{D\bar{x}_l}{Dt} \bar{\mathbf{e}}_k + \bar{\Omega}_{kl} \bar{\Omega}_{lm} \bar{x}_m \bar{\mathbf{e}}_k \\ &= \mathbf{a}^M + \bar{a}_k^{Rel} \bar{\mathbf{e}}_k + \epsilon_{ijk} \dot{\bar{\omega}}_i \bar{x}_j \bar{\mathbf{e}}_k + 2\epsilon_{ijk} \bar{\omega}_i \bar{v}_j^{Rel} \bar{\mathbf{e}}_k + \bar{\omega}_l \bar{x}_l \bar{\omega}_k \bar{\mathbf{e}}_k - \bar{\omega}_l \bar{\omega}_l \bar{x}_k \bar{\mathbf{e}}_k \end{aligned} \quad (2-116)$$

Die Summanden auf der rechten Seite dieser Gleichung werden in der gegebenen Reihenfolge als *Anfahrbeschleunigung* \mathbf{a}^M , *Relativbeschleunigung* \mathbf{a}^{Rel} , *Euler- oder Drehbeschleunigung* \mathbf{a}^{Euler} , *Coriolisbeschleunigung* \mathbf{a}^{Cor} und *Zentripetalbeschleunigung* \mathbf{a}^{Zent} bezeichnet. ■

Korollar 2-22 :

$$\frac{d' \boldsymbol{\omega}}{dt'} = \frac{d \boldsymbol{\omega}}{dt} \quad (2-117)$$

■

Die Ableitung des Winkelgeschwindigkeitsvektors ist in allen Systemen dieselbe, da das Kreuzprodukt von $\boldsymbol{\omega}$ mit sich selbst verschwindet.

Manchmal ist es von Vorteil, noch ein weiteres (drittes) System einzuschalten. Der Winkelgeschwindigkeitsvektor der Erde variiert zeitlich nur sehr wenig; es liegt daher nahe, ihn in die Summe eines konstanten Anteils und eines kleinen Störanteils zerlegen. Neben dem Inertialsystem und einem System, bezüglich dessen sich die Massenteilchen der Erde möglichst wenig bewegen (das also, grob gesprochen, an die Erde "angeheftet ist"), benutzen wir noch ein drittes System, das mit konstantem Winkelgeschwindigkeitsvektor rotiert. Für die relativen Winkelgeschwindigkeitsvektoren dieser drei Systeme gilt:

Satz 2-23 (Addition von Winkelgeschwindigkeitsvektoren):

Seien drei Koordinatensysteme A, B und C stetig differenzierbar, aber sonst beliebig gegeneinander bewegt. Seien $\boldsymbol{\omega}_{AB}$ bzw. $\boldsymbol{\omega}_{AC}$ die Winkelgeschwindigkeitsvektoren der Systeme B bzw. C bezüglich des Systems A, $\boldsymbol{\omega}_{BC}$ der Winkelgeschwindigkeitsvektor des Systems C bezüglich des Systems B. Dann gilt

$$\boldsymbol{\omega}_{AC} = \boldsymbol{\omega}_{AB} + \boldsymbol{\omega}_{BC} \quad (2-118)$$

■

Beweis von Satz 2-23 :

Wir bezeichnen hier mit $\mathbf{x}_A(P)$, $\mathbf{x}_B(P)$ bzw. $\mathbf{x}_C(P)$ den Ortsvektor eines materiellen Punktes P bezüglich des Systems A, B bzw. C. Den relativen Geschwindigkeitsvektor des Punktes P bezüglich des Systems A, B bzw. C nennen wir $\mathbf{v}_A(P)$, $\mathbf{v}_B(P)$ bzw. $\mathbf{v}_C(P)$. Den Ortsvektor des Ursprungs des Systems B bezüglich des Systems A nennen wir $\mathbf{0}_{AB}$, den zugehörigen Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_{0(AB)}$ usw. Aus Korollar (2-21), Formel (2-116) folgt

$$\mathbf{v}_{(A)}(P) = \mathbf{v}_{0(AB)} + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{x}_B(P) + \mathbf{v}_{(B)}(P)$$

$$\text{und entsprechend} \quad (2-119)$$

$$\mathbf{v}_B(P) = \mathbf{v}_{0(BC)} + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{x}_C(P) + \mathbf{v}_C(P)$$

$$\mathbf{v}_A(P) = \mathbf{v}_{0(AC)} + \boldsymbol{\omega}_{AC} \times \mathbf{x}_C(P) + \mathbf{v}_C(P)$$

Wir wenden die erste Formel in (2-119) speziell auf die Geschwindigkeit des Ursprungs des dritten Systems an:

$$\mathbf{v}_{0(AC)} = \mathbf{v}_{0(AB)} + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{0}_{BC} + \mathbf{v}_{0(BC)} \quad (2-120)$$

Nun setzen wir die zweite Zeile von (2-119) in die erste Zeile dieses Formelsystems ein:

$$\mathbf{v}_A(P) = \mathbf{v}_{0(AB)} + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{x}_B(P) + \mathbf{v}_{0(BC)} + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{x}_C(P) + \mathbf{v}_C(P) \quad (2-121)$$

Mit (2-120) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A(P) &= \mathbf{v}_{0(AC)} + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times (\mathbf{x}_B(P) - \mathbf{0}_{BC}) + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{x}_C(P) + \mathbf{v}_C(P) \\ &= \mathbf{v}_{0(AC)} + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{x}_C(P) + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{x}_C(P) + \mathbf{v}_C(P) \end{aligned} \quad (2-122)$$

Aus dem Vergleich mit der letzten Zeile in (2-119) folgt die Behauptung.

■

Schließlich geben wir noch eine Formel für die relative Zeitableitung der Koordinaten eines Tensors zweiter Stufe an, die beispielsweise auf den Trägheitstensor angewandt werden kann:

Satz 2-24 :

Sei \mathbf{J} ein Tensor zweiter Stufe. Dann lautet der Zusammenhang zwischen absoluter und relativer Zeitableitung:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d'\mathbf{J}}{dt'} + \mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{J} = \left\{ \frac{d'\bar{J}_{kl}}{dt'} + \bar{J}_{km}\bar{\Omega}_{ml} - \bar{\Omega}_{km}\bar{J}_{ml} \right\} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (2-123)$$

■

2-3.3 Systemdefinitionen: Mittlere Vortizität, Tisserand- und Hauptachsensystem

Im Falle eines starren Körpers kann immer ein Koordinatensystem gefunden werden, bezüglich dessen sich die Massenelemente des Körpers nicht bewegen. Falls Anfangsbedingungen vorliegen, ist dieses System sogar eindeutig. Der Winkelgeschwindigkeitsvektor des Systems heißt dann auch Winkelgeschwindigkeitsvektor des Körpers.

Im Falle eines deformierbaren Körpers dagegen gibt es i. allg. kein System, bezüglich dessen es keine Verschiebungen gibt. Man versucht daher, den *globalen* Winkelgeschwindigkeitsvektor mit Hilfe von Mittelbildungen bzw. Minimumsbedingungen zu definieren.

Wir stellen kurz die Varianten vor, die in der Literatur gebräuchlich sind; die Definitionen müssen in der Regel noch durch Anfangsbedingungen bzw. durch die Festlegung des Systems zu einem gewählten Zeitpunkt ergänzt werden.

1. Variante: (Nutationssystem)

Hierbei wird

$$\boldsymbol{\omega}_N = \text{const.} \quad (2-124)$$

gesetzt. Dies hat den Vorteil, dass sich die Berechnungen vereinfachen; allerdings wird der Ausdruck $\boldsymbol{\omega}_N \times \mathbf{p}$ das Geschwindigkeitsfeld des Körpers nur unzureichend beschreiben, da ja selbst für einen starren Körper die Rotation nicht unbedingt konstant zu sein braucht. Das Nutationssystem bietet sich jedoch als Näherungssystem im Rahmen einer Störungsrechnung an. Es wurde z.B. von *M.L. Smith 1974, 1977, 1980, J.M. Wahr 1980, 1981* benutzt.

Beispiel 2-1 (Darstellung der Orientierung der Erde in Cardan-Winkeln):

Wir wählen das raumfeste System in der Weise, dass die dritte Achse in Richtung des konstanten Winkelgeschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{\omega}_N$ zeigt: $\boldsymbol{\omega}_N =: \Omega \mathbf{e}_Z$. Die Drehung zwischen Inertialsystem und Nutationssystem ist also durch die Matrix $\underline{\mathbf{R}}_{NI} = \underline{\mathbf{R}}_3(\Omega t)$ gegeben. Dieser gleichförmigen Rotation der Erde sei nun eine "kleine" Störung überlagert, die wir mit Hilfe der linearisierten *Cardan'schen Drehmatrix* $\delta \underline{\mathbf{R}}_{KN}(\alpha, \beta, \gamma)$ darstellen (die Drehwinkel α, β, γ seien klein). Diese Matrix überführt also die kartesischen Basisvektoren des Nutationssystems in diejenigen eines i. allg. nicht gleichförmig rotierenden "körperfesten" Systems, das noch näher spezifiziert werden muss:

$$\begin{aligned} \delta \underline{\mathbf{R}}_{KN} &= \underline{\mathbf{R}}_3(\gamma) \underline{\mathbf{R}}_2(\beta) \underline{\mathbf{R}}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \\ \underline{\mathbf{R}}_{KI} &= \delta \underline{\mathbf{R}}_{KN}(\alpha, \beta, \gamma) \underline{\mathbf{R}}_{NI} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t + \gamma) & \sin(\Omega t + \gamma) & -\beta \\ -\sin(\Omega t + \gamma) & \cos(\Omega t + \gamma) & \alpha \\ \alpha \sin(\Omega t) + \beta \cos(\Omega t) & \beta \sin(\Omega t) - \alpha \cos(\Omega t) & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-125)$$

Wiewohl es sich hier um eine multiplikative Zerlegung handelt, lassen sich gemäß (2-118) die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten addieren. Der gesamte Winkelgeschwindigkeitsvektor kann mit Hilfe von (2-115) konstruiert werden und lautet aufgelöst

$$\begin{aligned} \text{im körperfesten System: } \underline{\boldsymbol{\omega}}_{IK} &= \begin{bmatrix} \dot{\alpha} - \Omega\beta \\ \dot{\beta} + \Omega\alpha \\ \Omega + \dot{\gamma} \end{bmatrix} & \text{im Nutationssystem: } \underline{\boldsymbol{\omega}}_{IK} &= \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \Omega + \dot{\gamma} \end{bmatrix} \\ \text{im Inertialsystem: } \underline{\boldsymbol{\omega}}_{IK} &= \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos(\Omega t) - \dot{\beta} \sin(\Omega t) \\ \dot{\beta} \cos(\Omega t) + \dot{\alpha} \sin(\Omega t) \\ \Omega + \dot{\gamma} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-126)$$

Die x - und die y -Komponente der Gleichungen für das Körpersystem können in komplexer Darstellung zusammengefasst werden:

$$\frac{d}{dt}(\alpha + i\beta) + i\Omega(\alpha + i\beta) = \omega_{IK}^1 + i\omega_{IK}^2 \quad (2-127)$$

Dies sind linearisierte Formen der Euler'schen kinematischen Gleichungen, mit deren Hilfe bei bekanntem Winkelgeschwindigkeitsvektor die Orientierungswinkel berechnet werden können.

Auch eine modifizierte Darstellung der Cardan'schen Drehmatrix kann von Nutzen sein: Das Körpersystem wird zunächst mit Hilfe einer linearisierten Cardan'schen Drehmatrix $\delta \underline{R}_{NK} = \underline{R}_3(\bar{\gamma})\underline{R}_2(\bar{\beta})\underline{R}_1(\bar{\alpha})$ in das Nutationssystem überführt; anschließend wird das Nutationssystem mit der Matrix $\underline{R}_3(-\Omega t)$ in das Inertialsystem zurückgedreht. Anhand des Vergleichs $\underline{R}_{IK} = \underline{R}_3(-\Omega t)\delta \underline{R}_{NK} = \underline{R}_{KI}^T$ stellt man fest, dass $\bar{\alpha} = -\alpha$, $\bar{\beta} = -\beta$, $\bar{\gamma} = -\gamma$ gilt. Mit Hilfe der Winkel $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ kann in linearer Näherung der dritte Basisvektor des Inertialsystems in der Basis des Körpersystems aufgelöst werden. Es gilt, wenn wir wieder die Basisvektoren des Körpersystems mit Querstrichen kennzeichnen:

$$\mathbf{e}_Z = \bar{\beta}\bar{\mathbf{e}}_X - \bar{\alpha}\bar{\mathbf{e}}_Y + \bar{\mathbf{e}}_Z = -\beta\mathbf{e}_X + \alpha\mathbf{e}_Y + \bar{\mathbf{e}}_Z \quad (2-128)$$

■

Während das Nutationssystem sich lediglich als 0-te Approximation im Rahmen einer Störungsrechnung eignet, stellen die Varianten 2 bis 4 physikalische Definitionen des Winkelgeschwindigkeitsvektors dar.

2. Variante: (System der mittleren Vortizität)

Für den Fall, dass das Kontinuum starr mit dem System \bar{x}_k mitrotiert, dass also \mathbf{v}^{Rel} für alle t verschwindet, gilt

$${}^{(I)}\mathbf{v} = \mathbf{v}^M + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}, \quad 2\boldsymbol{\omega} = \text{rot } {}^{(I)}\mathbf{v}, \quad (2-129)$$

wobei der letztere Ausdruck für alle Punkte des Kontinuums derselbe ist. Falls das Kontinuum sich jedoch deformiert, ist die *Vortizität* $\text{rot } {}^{(I)}\mathbf{v}$ i.allg. ortsabhängig; sie kann als Maß für die lokale kinematische Rotation des Kontinuums angesehen werden. In der Praxis wird man versuchen, das System \bar{x}_k bzw. dessen Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ so zu wählen, dass die Abweichungen der lokalen Vortizität von $2\boldsymbol{\omega}$ gering sind. Durch die Wahl

$$2\boldsymbol{\omega}_V := \frac{1}{M} \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \text{rot } {}^{(I)}\mathbf{v}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad (2-130)$$

ist $2\boldsymbol{\omega}_V$ als Mittelwert der lokalen Vortizität, bezogen auf das Volumen des Körpers, definiert. $\varrho(\mathbf{x}, t)$ ist eine zu wählende Gewichtsfunktion, für die wir im folgenden stets die Massendichte des Kontinuums einsetzen. M ist daher gerade die Gesamtmasse. Die Definition ist in der Praxis nicht ohne weiteres anwendbar, da Messwerte nur an der Oberfläche vorliegen. Es liegt daher nahe, die 2. Variante in der folgenden Weise zu modifizieren:

3. Variante: (System der mittleren Oberflächenvortizität)

$$2\boldsymbol{\omega}_O = \frac{1}{A} \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \text{rot } {}^{(I)}\mathbf{v}(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} \quad (2-131)$$

Hier wird das Integral nur über die Oberfläche $\partial\mathcal{V}(t)$ des Kontinuums angesetzt, mit A ist der Flächeninhalt der Randfläche bezeichnet. Die Varianten 2 und 3 sind in *P. Georgiadou, E. Grafarend (1986)* diskutiert.

4. Variante: (Tisserandsystem)

Wir zerlegen das Geschwindigkeitsfeld des Kontinuums gemäß Korollar (2-21) in

$${}^{(I)}\mathbf{v} = \mathbf{v}^M + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} + \mathbf{v}^{Rel} \quad (2-132)$$

Der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}_T$ des Tisserandsystems wird so gewählt, dass die kleinste-Quadrate-Bedingung

$$\mathfrak{K}^{Rel} := \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{v}^{Rel}, \mathbf{v}^{Rel} \rangle d^3\mathbf{x} = \text{Minimum} \quad (2-133)$$

erfüllt ist. $\varrho(\mathbf{x}, t)$ ist wieder die Massendichte. Beim Tisserandsystem wird also die *relative kinetische Energie* \mathfrak{K}^{Rel} minimiert. Nach Einführung einiger Definitionen lässt sich das System noch in anderer Weise charakterisieren:

Definition 2-28 (Drehimpulsvektoren, Trägheitstensor):

Der Vektor

$$\mathbf{H}^{(I)} := \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) ({}^{(I)}\mathbf{x} \times ({}^{(I)}\mathbf{v})) d^3\mathbf{x} \quad (2-134)$$

heißt *Drehimpulsvektor des Kontinuums bezüglich des Inertialsystems*. Ersetzen wir $({}^{(I)}\mathbf{x})$ und $({}^{(I)}\mathbf{v})$ mit Hilfe der Formeln (2-111) bzw. (2-116), so lässt sich $\mathbf{H}^{(I)}$ in die folgenden Anteile zerlegen:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(I)} &= M \mathbf{x}^M \times \mathbf{v}^M + \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \{ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{I} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \} d^3\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega} + \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} \times \mathbf{v}^{Rel}) d^3\mathbf{x} \\ &= \mathbf{H}^{Bahn} + \mathbf{H}^{Spin} + \mathbf{H}^{Rel} \end{aligned} \quad (2-135)$$

Diese Anteile heißen der Reihenfolge nach *Bahndrehimpuls*, *Spin* und *relativer Drehimpuls*. Mit \mathbf{H} (ohne oberen Index) kürzen wir die Differenz $\mathbf{H} := \mathbf{H}^{(I)} - \mathbf{H}^{Bahn}$ ab.

Der Tensor

$$\mathbf{J} := \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) (\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{I} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}; \quad (2-136)$$

heißt *Trägheitstensor* (bezogen auf den Ursprung des bewegten Systems). Seine Komponenten \bar{J}_{ij} im kartesischen System $\{\bar{x}_i\}$ lauten

$$\bar{J}_{ij} = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) (\bar{x}_k \bar{x}_k \delta_{ij} - \bar{x}_i \bar{x}_j) d^3\mathbf{x}. \quad (2-137)$$

■

Mit Hilfe des Trägheitstensors lässt sich der Spin in der folgenden Weise darstellen:

$$\mathbf{H}^{Spin} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \quad (2-138)$$

Anmerkung 2-6 :

Wird in (2-134) bzw. (2-135) das Kreuzprodukt $({}^{(I)}\mathbf{x} \times ({}^{(I)}\mathbf{v})) = (\mathbf{x}^M + \mathbf{x}) \times (\mathbf{v}^M + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \mathbf{v}^{Rel})$ ausmultipliziert, so verschwinden drei der sechs Terme durch die Integralbildung, da als Ursprung des bewegten Systems gerade der Massenmittelpunkt \mathbf{x}^M gewählt wurde.

Mit Hilfe der Variationsrechnung lässt sich zeigen, dass das Verschwinden des relativen Drehimpulses

$$\mathbf{H}^{Rel} = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} \times \mathbf{v}^{Rel}) d^3\mathbf{x} = 0 \quad (2-139)$$

eine äquivalente Definition des Tisserandsystems ist (*H. Moritz, I. Mueller 1987*). Die Winkelgeschwindigkeit lässt sich aufgrund von (2-139), (2-135) und (2-138) aus

$$\boldsymbol{\omega}_T = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{H} \quad (2-140)$$

berechnen. Wir können das Tisserand-System also auch folgendermaßen interpretieren: $\boldsymbol{\omega}_T$ wird so bestimmt, dass es zu jedem Zeitpunkt dem Winkelgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$ eines starren Körpers gleicht, der denselben Drehimpulsvektor und denselben Trägheitstensor besitzt wie das Kontinuum. Das Tisserandsystem wurde beispielsweise von *H. Jeffreys, R.O. Vicente 1957a,b*, *M.S. Molodenskii 1961* und *T. Sasao, S. Okubo und M. Saito 1980* benutzt.

Während das Tisserandsystem durch das Verschwinden des relativen Drehimpulses die Lösung der Drehimpuls-gleichungen erleichtert (vgl. Abschnitt 2-9.2), ist der Winkelgeschwindigkeitsvektor gemäß der Definition als mittlerer Oberflächenvortizität leichter aus Beobachtungen an der Erdoberfläche abzuleiten. Wird jedoch neben der Rotation der Erde auch deren Verschiebungsfeld modelliert, so lassen sich die verschiedenen Definitionen ineinander überführen.

5. Variante: (Hauptachsensystem)

Dieses System ist nicht mit den Varianten 2–4 vergleichbar, da es nicht über eine Mittelung der Bewegung materieller Punkte definiert ist, sondern über die Eigenvektoren des Trägheitstensors. J_{ij} ist symmetrisch und kann durch eine (zeitabhängige) orthonormale Transformation Q_{lm} auf Hauptachsenform gebracht werden; wird also in (2-112) $R_{kl} = Q_{kl}$ gesetzt, so zeigen die Basisvektoren $\bar{\mathbf{e}}_k$ in Richtung der Hauptachsen. Im Gegensatz zu den übrigen vier Varianten werden hier keine Anfangsbedingungen benötigt – durch die Definition wird ja nicht nur der Winkelgeschwindigkeitsvektor des Systems festgelegt, sondern sogar dessen Orientierung. Allerdings ist das Hauptachsensystem nicht immer eindeutig definiert: Im Fall eines *symmetrischen Kreisels* sind zwei oder alle drei Hauptträgheitsmomente gleich und die Hauptachsen daher unbestimmt. Implizit wird das Hauptachsensystem durch die Bedingungsgleichungen

$$\frac{d\bar{J}_{ij}}{dt} = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad (2-141)$$

definiert. Mit Hilfe des *Reynold'schen Transport-Theorems* (2-151) folgt aus der Definition von \bar{J}_{ij} gemäß (2-136)

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{J}_{ij}}{dt} &= \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \{2\bar{x}_k \bar{v}_k^{Rel} \delta_{ij} - (\bar{x}_i \bar{v}_j^{Rel} + \bar{x}_j \bar{v}_i^{Rel})\} d^3\mathbf{x} \\ \implies \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) (\bar{x}_i \bar{v}_j^{Rel} + \bar{x}_j \bar{v}_i^{Rel}) d^3\mathbf{x} &= 0 \quad \text{für } i \neq j \end{aligned} \quad (2-142)$$

Man vergleiche diese Bedingung mit der Systembedingung (2-139) des Tisserandsystems! Während dort gefordert wird, dass der antisymmetrische Anteil des Tensors des ersten Geschwindigkeitsmomentes $\int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \otimes \mathbf{v}^{Rel} d^3\mathbf{x}$ verschwindet, muss hier der symmetrische Teil der zugehörigen Matrix verschwinden – abgesehen von den Diagonalelementen.

Wir bezeichnen die Hauptträgheitsmomente mit $\bar{J}_{11} =: A$, $\bar{J}_{22} =: B$, $\bar{J}_{33} =: C$. Leiten wir den Trägheitstensor absolut nach der Zeit ab, stellen diese Ableitung aber im Hauptachsensystem dar, so gewinnen wir mit Hilfe von Satz (2-24), Formel (2-123) die Beziehung

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \dot{A} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{B} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{C} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega}_3(A - B) & \bar{\omega}_2(C - A) \\ \bar{\omega}_3(A - B) & 0 & \bar{\omega}_1(B - C) \\ \bar{\omega}_2(C - A) & \bar{\omega}_1(B - C) & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \begin{pmatrix} 2(\bar{x}_2 \bar{v}_2 + \bar{x}_3 \bar{v}_3) & -(\bar{x}_1 \bar{v}_2 + \bar{x}_2 \bar{v}_1) & -(\bar{x}_1 \bar{v}_3 + \bar{x}_3 \bar{v}_1) \\ -(\bar{x}_1 \bar{v}_2 + \bar{x}_2 \bar{v}_1) & 2(\bar{x}_1 \bar{v}_1 + \bar{x}_3 \bar{v}_3) & -(\bar{x}_2 \bar{v}_3 + \bar{x}_3 \bar{v}_2) \\ -(\bar{x}_1 \bar{v}_3 + \bar{x}_3 \bar{v}_1) & -(\bar{x}_2 \bar{v}_3 + \bar{x}_3 \bar{v}_2) & 2(\bar{x}_1 \bar{v}_1 + \bar{x}_2 \bar{v}_2) \end{pmatrix} d^3\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2-143)$$

Ist bezüglich eines der anderen angeführten Systeme der Trägheitstensor bekannt, so kann die Richtung der polaren Hauptträgheitsachse einfach aus der Lösung eines Eigenwertproblems bestimmt werden. Die Matrix des Trägheitstensors ist symmetrisch und kann daher in Diagonalf orm gebracht werden; der zum größten Eigenwert gehörige Eigenvektor gibt die Richtung der polaren Hauptträgheitsachse bezüglich des gewählten Systems. Zerlegt man die Matrix des Trägheitstensors in die Matrix des Grundzustandes und einen Störanteil und nimmt man an, dass im Grundzustand die beiden äquatorialen Hauptträgheitsmomente gleich sind (“symmetrischer Kiesel”), so lautet das Eigenwertproblem:

$$\begin{bmatrix} A + \delta J_{11} & \delta J_{12} & \delta J_{13} \\ \delta J_{21} & A + \delta J_{22} & \delta J_{23} \\ \delta J_{31} & \delta J_{32} & C + \delta J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (2-144)$$

Im Fall der Erde gilt in linearer Näherung $f_3 \approx 1$, $f_1, f_2 \ll 1$. Nimmt man an, dass durch die Störung δJ_{ij} die Hauptträgheitsmomente nicht geändert werden, sondern nur das Hauptträgheitssystem gedreht wird, so bleiben die Eigenwerte (wie im Grundzustand) $\lambda_1 = A$, $\lambda_2 = A$, $\lambda_3 = C$. Aus den ersten beiden Eigenvektorgleichungen folgt in diesem Fall für $\lambda_3 = C$

$$f_1 \approx \frac{\delta J_{13}}{C - A} \quad f_2 \approx \frac{\delta J_{23}}{C - A} \quad (2-145)$$

Wenn sich - wie das bei der Erde tatsächlich der Fall ist - die Hauptträgheitsmomente A, C nur wenig unterscheiden, bedarf es also nur kleiner Störungen $\delta J_{13}, \delta J_{23}$, um eine große Änderung der Richtung der Hauptträgheitsachsen herbeizuführen.

Für die Varianten 2–4 wurden hier Definitionen des Winkelgeschwindigkeitsvektors angegeben; die zugehörigen Drehmatrizen müssen daraus erst noch durch Lösen der *Euler'schen kinematischen Differentialgleichungen* bestimmt werden. Dabei handelt es sich um ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung, aus dem drei Parameter (z.B. Euler'sche Winkel) hochintegriert werden müssen (siehe auch Beispiel (2-1)).

2–4 Massenerhaltung

Im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik ist die Masse eine Erhaltungsgröße, d.h.

$$\Delta M = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dM}{dt} = 0. \quad (2-146)$$

Wegen (2 – 64) und $\varrho = dM/d^3\mathbf{x}$, $\varrho_0 = dM/d^3\mathbf{X}$ gilt

$$\varrho^{\mathcal{L}}(X^K) = \sqrt{\frac{\det g(x^k(X^K, t), t)}{\det G(X^K)}} j \varrho^{\mathcal{L}}(X^K, t) \quad (2-147)$$

Mit Hilfe der linearen Näherung (2-83): $d^3\mathbf{x} = (1 + \text{DIV } \mathbf{u})d^3\mathbf{X}$ und der linearisierten Beziehung (2-85) zwischen Störung und Anomalie folgen in linearer Näherung Beziehungen zwischen den Inkrementen der Massendichte und dem Verschiebungsvektor:

Satz 2-25 (Inkremente der Massendichte):

$$\begin{aligned} \Delta \varrho(\mathbf{p}, t) + \varrho_0 \text{DIV } \mathbf{u} &\approx 0 \\ \delta \varrho(\mathbf{p}, t) + \varrho_0 \text{DIV } \mathbf{u} + \langle \text{GRAD } \varrho_0, \mathbf{u} \rangle &\approx 0 \\ \delta \varrho(\mathbf{p}, t) + \text{DIV}(\varrho_0 \mathbf{u}) &\approx 0. \end{aligned} \quad (2-148)$$

Diese Formeln können auch aus (D-2) hergeleitet werden. ■

Ist die Divergenz des Verschiebungsvektors gleich null, so verschwinden gemäß (2-83) auch die Volumenverzerrung und gemäß (2-148) die Dichteanomalie in linearer Näherung. Ein Material, bei dem dies unabhängig von der Belastung stets in allen Punkten gilt, heißt *inkompressibel*.

Wenden wir die Formel (2-106) für die Zeitableitung eines materiellen Volumenintegrals auf die Masse eines beliebigen Teilvolumens des Kontinuums an, so erhalten wir die globale Bedingung

$$\frac{dM}{dt} = \int_{V(t)} \left(\frac{D\varrho(\mathbf{x}_Q(t), t)}{Dt} + \varrho(\mathbf{x}_Q(t), t) \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}_Q(t), t) \right) d^3\mathbf{x}_Q = 0. \quad (2-149)$$

Da diese Gleichung für jedes Teilvolumen des Kontinuums gelten muss, folgen die lokalen Gleichungen

Satz 2-26 (Zeitableitungen der Massendichte):

$$\begin{aligned} \frac{D\varrho(\mathbf{p}(t), t)}{Dt} + \varrho(\mathbf{p}(t), t) \text{div } \mathbf{v} &= 0 \\ \dot{\varrho} + \varrho(\mathbf{p}, t) \text{div } \mathbf{v} + \langle \text{grad } \varrho, \mathbf{v} \rangle &= 0 \\ \dot{\varrho} + \text{div}(\varrho \mathbf{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (2-150)$$

Im Gegensatz zu (2-148) gelten die Formeln (2-150) streng. ■

Anmerkung 2-7 :

(2-148) kann aus (2-150) hergeleitet werden. Dazu nehmen wir an, das Kontinuum befinde sich zu einem Zeitpunkt t_0 im Grundzustand und deformiere sich ab dann linear in der Zeit, d.h. die Geschwindigkeit aller Massenteilchen sei für $t > t_0$ konstant. Es gelte also

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \Delta t, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \Delta t \cdot \operatorname{div} \mathbf{v}$$

Setzt man diese Beziehungen in (2-150) ein, so folgt in linearer Näherung (2-148). Selbstverständlich ist ein linearer Zeitverlauf unrealistisch, jedoch bleibt die Gültigkeit von (2-148) davon unberührt. t hat hier lediglich die Bedeutung eines Parameters, der als Hilfsmittel zur Bildung der Gateaux-Ableitung von ϱ nach der Verschiebung \mathbf{u} dient.

Setzen wir in (2-106) anstelle von σ das Produkt $\varrho \cdot \Psi$ ein, wobei Ψ ein beliebiges skalares oder tensorwertiges Attribut des Kontinuums sein kann, so erhalten wir

Satz 2-27 (“Reynold’sches Transport-Theorem”, auch: “Durchziehsatz”):

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}_Q(t), t) \cdot \Psi(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}_Q(t), t) d^3 \mathbf{x}_Q &= \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}_Q(t), t) \cdot \frac{D}{Dt} \Psi(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}_Q(t), t) d^3 \mathbf{x}_Q \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}_Q(t), t) \cdot \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{x}_Q(t), t) d^3 \mathbf{x}_Q &= \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}_Q(t), t) \cdot \frac{d}{dt} \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{x}_Q(t), t) d^3 \mathbf{x}_Q. \end{aligned} \quad (2-151)$$

Analog dazu folgt aus (D-2) mit (2-83) und (2-148):

$$\begin{aligned} \Delta \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}_Q(t), t) \cdot \Psi(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}_Q(t), t) d^3 \mathbf{x}_Q &\approx \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}_Q(t), t) \cdot \Delta_{PQ} \Psi(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}_Q(t), t) d^3 \mathbf{x}_Q \\ \delta \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}_Q(t), t) \cdot \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{x}_Q(t), t) d^3 \mathbf{x}_Q &\approx \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}_Q(t), t) \cdot \Delta_Q \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{x}_Q(t), t) d^3 \mathbf{x}_Q \end{aligned} \quad (2-152)$$

2-5 Impulsbilanz

2-5.1 Bewegungsgleichungen und Stress-Tensoren

Wir wählen vorderhand ein Inertialsystem als Bezugssystem (lassen aber die oberen Indices ^(I) weg). Mit Hilfe des Reynolds’schen Transporttheorems erhalten wir aus der Formel (2-110), Definition (2-26) die beiden ersten zeitlichen Ableitungen des Ortsvektors des Massenmittelpunktes des Kontinuums:

$$\mathbf{v}^M(t) := \frac{d\mathbf{x}^M(t)}{dt} = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d^3 \mathbf{x} \quad \mathbf{a}^M(t) := \frac{d\mathbf{v}^M}{dt} = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) d^3 \mathbf{x} \quad (2-153)$$

Satz 2-28 (Beschleunigung des Massenmittelpunktes, Impulssatz):

Gemäß den grundlegenden Bewegungsgleichungen von Leonhard Euler (1755) ergibt sich die Beschleunigung \mathbf{a}^M des Massenmittelpunktes als Summe aus einem Integral über die Kraftdichte \mathbf{f} (Kraft pro Masseneinheit), einem Integral über die Flächenkraftdichte $\mathbf{t}_{(n)}$ sowie Einzelkräften \mathbf{f}_i :

$$M\mathbf{a}^M = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d^3 \mathbf{x} + \int_{\partial \mathcal{V}(t)} \mathbf{t}_{(n)}(\mathbf{x}, t) d^2 \mathbf{x} + \sum_i \mathbf{f}_i \quad (2-154)$$

Satz 2-29 (Drehimpulssatz):

Die Zeitableitung des Gesamtdrehimpulses des Kontinuums ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{H}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) d^3\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) d^3\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{l}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) d^3\mathbf{x} + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} (\mathbf{m}_{(n)}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x} \times \mathbf{t}_{(n)}(\mathbf{x}, t)) d^2\mathbf{x} + \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{f}_i.\end{aligned}\quad (2-155)$$

Dabei bedeuten $\mathbf{m}_{(n)}$ eine flächenhafte Momentendichte, \mathbf{l} eine volumenhafte Momentendichte (Moment pro Masseneinheit); beide Dichten können nicht einer Kraft, sondern nur einer Dichte von infinitesimal benachbarten Kräftepaaren zugeordnet werden. ■

Für den Fall, dass $\mathbf{m}_{(n)}$ und \mathbf{l} identisch verschwinden, folgt der Drehimpulssatz aus dem Impulssatz, siehe z.B. *C. Truesdell 1964*. Die tiefgestellten Indizes (n) bei der Momentendichte $\mathbf{m}_{(n)}$ und der Flächenkraftdichte $\mathbf{t}_{(n)}$ deuten an, dass $\mathbf{m}_{(n)}$ und $\mathbf{t}_{(n)}$ nicht nur vom Ort, sondern auch von der Richtung der Flächennormalen abhängen. Wir nehmen im folgenden stets an, dass keine Einzelkräfte \mathbf{f}_i vorhanden sind.

Lokal kann die Flächenkraftdichte mit Hilfe des *Cauchy-Spannungstensors* $\boldsymbol{\sigma}$ dargestellt werden:

$$\mathbf{t}_{(n)}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t); \quad (2-156)$$

\mathbf{n} ist wieder der Normalenvektor der Fläche. Ebenso wird $\mathbf{m}_{(n)}$ durch

$$\mathbf{m}_{(n)} = \mathbf{m}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \quad (2-157)$$

ausgedrückt. \mathbf{m} und $\boldsymbol{\sigma}$ sind Tensoren 2. Stufe. Setzt man (2 – 156) und (2 – 157) in den Impuls- und Drehimpulssatz ein, so können mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes die Flächenintegrale in Volumenintegrale verwandelt werden:

$$\begin{aligned}M\mathbf{a}^M &= \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} (\varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)) d^3\mathbf{x} \\ \frac{d\mathbf{H}}{dt} &= \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) d^3\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \{ \varrho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{l}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) + \mathbf{g}_k \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{g}^k) + \mathbf{x} \times \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \operatorname{div} \mathbf{m}(\mathbf{x}, t) \} d^3\mathbf{x}\end{aligned}\quad (2-158)$$

Da (2 – 158) auch für beliebige materielle Unterteilungen des Kontinuums gilt, lassen sich die Bewegungsgleichungen in Punkten ohne Einzelkräfte bzw. Einzelmomente lokal formulieren:

Satz 2-30 (lokale Impuls- und Drehimpulsbilanz):

$$\begin{aligned}\varrho \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) &= \varrho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \\ \varrho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) &= \varrho (\mathbf{l} + \mathbf{x} \times \mathbf{f}) + \mathbf{g}_k \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{g}^k) + \mathbf{x} \times \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \operatorname{div} \mathbf{m}(\mathbf{x}, t) \\ \implies \varrho \mathbf{l} + \mathbf{g}_k \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{g}^k) + \operatorname{div} \mathbf{m} &= 0\end{aligned}\quad (2-159)$$

Der zweite Term der letzten Gleichung entspricht dem antisymmetrischen Teil des Spannungstensors; er verschwindet stets, wenn die Momentendichten \mathbf{m} und \mathbf{l} identisch verschwinden, wenn also alle Momente durch Kräfte erzeugt sind; $\boldsymbol{\sigma}$ ist dann symmetrisch. In Komponentenschreibweise lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\varrho a^j &= \sigma^{jk}|_k + \varrho f^j = \sigma^{jk}|_k + \Gamma_{km}^j \sigma^{km} + \Gamma_{km}^k \sigma^{jm} + \varrho f^j \\ m^{jk}|_k + \varrho l^j + \epsilon^j_{kl} \sigma^{kl} &= m^{jk}|_k + \Gamma_{lk}^j m^{lk} + \Gamma_{km}^k m^{jm} + \varrho l^j + \epsilon^j_{kl} \sigma^{kl} = 0.\end{aligned}\quad (2-160)$$

Anstatt auf den *aktuellen* Normalenvektor der Fläche kann sich der Spannungstensor auch auf den Normalenvektor im Grundzustand beziehen:

$$\mathbf{t}_{(n)}(\mathbf{x}, t) d^2\mathbf{x} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{X}, t) d^2\mathbf{X} \quad (2-161)$$

(Die Beziehung zwischen \mathbf{n} und \mathbf{N} ergibt sich aus (2 – 68).) $\boldsymbol{\tau}$ heißt *Piola-Kirchhoff-Spannungstensor*. Es ist zu betonen, dass es sich bei $\boldsymbol{\tau}$ und $\boldsymbol{\sigma}$ tatsächlich um zwei verschiedene Tensoren handelt; beide Tensoren können in den eingeführten Systemen aufgelöst werden, z.B.

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{lk} \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}_k \quad \boldsymbol{\tau} = \tau^{LK} \mathbf{C}_L \otimes \mathbf{G}_K = \tau^{lK} \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{G}_K \quad (2-162)$$

Bei $\boldsymbol{\tau}$ wird tatsächlich eine gemischte Darstellung bevorzugt: $\mathbf{N}d^2\mathbf{X}$ ist ein Vektor, der die Orientierung des gewählten Flächenelementes im *Grundzustand* ausdrückt; deswegen wird der Basisvektor \mathbf{G}_K als hinterer Teil der Dyade gewählt. $\mathbf{t}d^2\mathbf{x}$ dagegen ist der Spannungsvektor des aktuellen Zustandes und soll daher in den Basisvektoren \mathbf{C}_K oder \mathbf{g}_k ausgedrückt werden. Die Transformationen zwischen den verschiedenen Darstellungen ergeben sich aus (2-156), (2-161) und (2-68) zu

$$\begin{aligned} \tau^{lK} &= \sqrt{\frac{\det g}{\det G}} j X^{K, k} \sigma^{lk} = x^l{}_{,L} \tau^{LK} \\ \tau^{LK} &= \sqrt{\frac{\det g}{\det G}} j X^{K, k} X^L{}_{,l} \sigma^{lk} = X^L{}_{,l} \tau^{lK} \\ \sigma^{lk} &= \frac{1}{j} \sqrt{\frac{\det G}{\det g}} x^k{}_{,K} \tau^{lK} = \frac{1}{j} \sqrt{\frac{\det G}{\det g}} x^k{}_{,K} x^l{}_{,L} \tau^{LK} \end{aligned} \quad (2-163)$$

Satz 2-31 :

Die Bewegungsgleichungen, ausgedrückt mit Hilfe des Piola-Kirchhoff- Spannungstensors, lauten:

$$\varrho_0 \mathbf{a} = \varrho_0 \mathbf{f} + \text{DIV } \boldsymbol{\tau} \quad (2-164)$$

bzw. in Komponentendarstellung

$$\begin{aligned} \varrho_0 a^l &= \{ {}^{(G)}\Gamma_{MK}^M \tau^{lK} + \tau^{lK}{}_{,K} + \tau^{mK} \Gamma_{mk}^l x^k{}_{,K} \} + \varrho_0 f^l \\ &= \{ {}^{(G)}\Gamma_{MK}^M \tau^{lK} + \tau^{lK}{}_{,K} + \tau^{mK} (x^l{}_{,L} X^M{}_{,m} {}^{(C)}\Gamma_{MK}^L - x^l{}_{,KM} X^M{}_{,m}) \} + \varrho_0 f^l \\ \varrho_0 a^L &= \{ {}^{(G)}\Gamma_{MK}^M \tau^{LK} + {}^{(C)}\Gamma_{MK}^L \tau^{MK} + \tau^{LK}{}_{,K} \} + \varrho_0 f^L; \end{aligned} \quad (2-165)$$

die letzte Gleichung bezieht sich auf die Basis \mathbf{C}^K , man vergleiche hierzu (2 – 162). ■

Dieser Satz ergibt sich wieder mit Hilfe des Satzes von Gauß aus (2-154). Für die Koordinatendarstellung wurden (2-94) sowie die Transformationsbeziehungen (2-163) benutzt. Statt der aktuellen Dichte ϱ erscheint in den Gleichungen (2 – 165) auf der linken Seite die Referenzdichte ϱ_0 .

Bis hierher bezogen sich sämtliche Beziehungen dieses Abschnitts auf ein Inertialsystem. Die Bewegungsgleichungen lassen sich jedoch leicht auf ein beschleunigtes System übertragen, wenn wir \mathbf{a} gemäß (2-116) in die relative Beschleunigung \mathbf{a}^{Rel} und die Trägheitsbeschleunigungen \mathbf{a}^T zerlegen. Letztere werden dann, multipliziert mit ϱ , auf die rechte Seite der Bewegungsgleichungen verschoben und als Trägheitskraftdichten in der Kraftdichtefunktion \mathbf{f} mitberücksichtigt. Wir betrachten die Trägheitskräfte im Abschnitt 2-6.2 näher.

Bei der Übertragung des globalen Drehimpulssatzes auf beschleunigte Bezugssysteme setzen wir voraus, dass keine flächen- oder volumenhaften Momentendichten \mathbf{l} , \mathbf{m} vorhanden sind. In diesem Fall gilt

Satz 2-32 (Invarianz des Drehimpulssatzes):

Der globale Drehimpulssatz hat bezüglich aller rein translativ beschleunigten Systeme dieselbe Gestalt. ■

Beweis von Satz 2-32 :

Wir setzen in den Drehimpulssatz

$$\frac{d}{dt} {}^{(I)}\mathbf{H} = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) ({}^{(I)}\mathbf{x} \times ({}^{(I)}\mathbf{a})) d^3\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) ({}^{(I)}\mathbf{x} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) d^3\mathbf{x} + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} ({}^{(I)}\mathbf{x} \times \mathbf{t}_{(n)}(\mathbf{x}, t)) d^2\mathbf{x}$$

die Zerlegungen ${}^{(I)}\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{x}^M$, ${}^{(I)}\mathbf{a} = \mathbf{a}^M + \mathbf{a}^{Rel}$ ein (aufgrund der Voraussetzungen treten keine rotatorischen Trägheitsbeschleunigungen auf). Aus dem Impulssatz (2-154) folgt

$$M \mathbf{x}^M \times \mathbf{a}^M = \mathbf{x}^M \times \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} + \mathbf{x}^M \times \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{t}_{(n)}(\mathbf{x}, t) d^2\mathbf{x}.$$

Berücksichtigen wir außerdem $\int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} d^3\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (Definition des Massenmittelpunktes), so fallen nach dem Ausmultiplizieren der äußeren Vektorprodukte die meisten Terme weg. Es verbleibt

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times \mathbf{a}^{Rel}(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t}_{(n)}(\mathbf{x}, t) d^2\mathbf{x}.$$

■

Dies bedeutet auch, dass die Drehimpulsbilanz im Prinzip unabhängig von der Beschleunigung des Massenmittelpunktes betrachtet werden kann. Allerdings sind im allgemeinen die Kraftdichten und Randspannungen von der Position des Kontinuums im Inertialsystem abhängig. Umgekehrt kann die Orientierung des Kontinuums im Raum auch einen Einfluss auf die Summe der eingepprägten Kräfte ausüben. Im allgemeinen besteht also ungeachtet des obigen Satzes (2-32) eine Kopplung zwischen Impuls- und Drehimpulsbilanz.

2-5.2 Hydrostatischer Grundzustand

Mit der Bezeichnung ‘‘Grundzustand’’ verbinden wir eine ‘‘einfache’’ Massenverteilung des Kontinuums, aber auch eine Verteilung aller anderen Feldgrößen, insbesondere der Spannung. Der Grundzustand wird als Referenz für die Linearisierung der Bewegungsgleichungen im nächsten Teilabschnitt dienen. Wir wählen hier insbesondere einen *hydrostatischen* Grundzustand. Dies bedeutet, dass

1. bezüglich eines konstant rotierenden Systems $\{\bar{x}^k\}$ keine relative Bewegung stattfindet,
2. daher sämtliche Kräfte lokal im Gleichgewicht sind:

$$\text{DIV } \Sigma(\mathbf{P}, t_0) + \varrho_0 \mathbf{F} = 0 \quad (2-166)$$

(hierin sind mit \mathbf{F} und Σ die Volumenkräfte bzw. der Cauchy-Spannungstensor im Grundzustand bezeichnet; die Zentrifugalkraft ist in \mathbf{F} enthalten).

3. keine Scherspannungen auftreten, d.h. der Spannungstensor (im Grundzustand fallen Cauchy- und Piola-Kirchhoff-Tensor zusammen) bis auf eine multiplikative Ortsfunktion $-p_0$ (dem negativen hydrostatischen Druck) dem Einheitstensor gleicht:

$$\Sigma(\mathbf{P}, t_0) = \boldsymbol{\tau}_0(\mathbf{P}, t_0) = -p_0(\mathbf{P}, t_0) \mathbf{I} \quad (2-167)$$

In Komponentenschreibweise gilt, wenn wir die Bedingungen 2) und 3) zusammenfassen,

$$-p_{0,K} G^{LK} + \varrho_0 F^L = 0 \quad \text{bzw.} \quad -\text{GRAD } p_0 + \varrho_0 \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2-168)$$

Aus (2-168) folgt, dass die (auf die Volumeneinheit bezogene) Kraftdichte $\varrho_0 \mathbf{F}$ konservativ ist. Zusätzlich werden wir im folgenden annehmen, dass die (auf die Masseneinheit bezogene) Kraftdichte \mathbf{F} ebenfalls konservativ ist und \mathbf{F} damit ein Potential besitzt. Es gilt also

$$(\varrho_0 F_K)_{|L} = (\varrho_0 F_L)_{|K} \quad F_{K|L} = F_{L|K} \quad (2-169)$$

Als eingepprägte Kraft wird nur die Schwerkraft berücksichtigt, somit ist $\mathbf{F} = \mathbf{\Gamma}$. Dann folgt durch die Anwendung des ROT-Operators auf (2-168):

$$\text{GRAD } \varrho_0 \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \implies \quad \varrho_{0,K} F_L = \varrho_{0,L} F_K \quad (2-170)$$

Aus (2-168) und (2-170) folgt, dass die Vektoren \mathbf{F} , $\text{GRAD } p_0$ und $\text{GRAD } \varrho_0$ parallel sind. Das bedeutet, dass die Flächen gleicher Dichte auch Flächen gleichen Drucks und Flächen gleichen Potentials sind. Insbesondere sind am Rand des Kontinuums \mathbf{F} und die Flächennormale \mathbf{N} parallel.

Auch im Grundzustand können Randspannungen vorhanden sein, vorausgesetzt die oben genannten Kriterien sind erfüllt.

2-5.3 Linearisierung der Bewegungsgleichungen

In diesem Abschnitt linearisieren wir die Bewegungsgleichungen (2-159) bzw. (2-164) bezüglich der Verschiebungskordinaten. Dabei wird die Abhängigkeit der Spannungstensoren von der Verschiebung (Spannungs-Dehnungs-Beziehungen) noch offengelassen. Die beiden Darstellungsarten (2-159) und (2-164) (es wird alternativ der Cauchy- oder der Piola-Kirchhoff-Tensor zur Darstellung der Spannungen verwendet) können unabhängig voneinander betrachtet werden; jedoch ergibt sich aus den Formeln (2-163), (2-83), (2-11), (2-70) und (2-74) die linearisierte Beziehung zwischen den Koordinaten des Piola-Kirchhoff- und des Cauchy-Tensors:

$$\sigma^{kl} \approx [\delta_K^k \delta_L^l - \delta_K^k \delta_L^l U_{|M}^M + \delta_K^k \delta_M^l U^M_{,L} + \delta_M^k \delta_L^l U^M_{,K}] \tau^{KL} \quad (2-171)$$

(Es sei nochmals daran erinnert, dass sich der *erste* Index der Koordinaten des Piola-Kirchhoff-Tensors auf die Basis \mathbf{C}_K bezieht.) I. allg. hängt nicht nur die Beziehung zwischen den Tensorkomponenten, sondern auch die Beziehung zwischen dem Cauchy- und dem Piola-Kirchhoff-Tensor insgesamt von den Verschiebungen \mathbf{u} und damit von der Zeit ab.

Die Spannungstensoren σ bzw. τ werden in einen Referenzanteil (*Vorspannung*) und eine Spannungsanomalie aufgespalten:

$$\sigma(\mathbf{p}, t) = \Sigma(\mathbf{P}, t) + \Delta\sigma(\mathbf{p}, t) \quad \tau(\mathbf{p}, t) = \tau_0(\mathbf{P}, t) + \Delta\tau(\mathbf{p}, t) \quad (2-172)$$

Dabei lassen wir hier ausnahmsweise (im Widerspruch zur Definition der Anomalie gemäß (2-27)) zu, dass auch der Referenzanteil zeitabhängig ist; er soll aber für $t = t_0$ einen hydrostatischen Spannungszustand darstellen. Nur durch diese Inkonsequenz in der Definition der Anomalie halten wir die Möglichkeit offen, dass die Beziehung zwischen den Anomalien von Cauchy- und Piola-Kirchhoff-Tensor unabhängig von der Vorspannung ist. Der Operator \mathfrak{A}^{PC} , der den Piola-Kirchhoff-Tensor auf den Cauchy-Tensor abbildet, ist von den Verschiebungen abhängig und damit zeitabhängig; es muss also gelten

$$\Sigma + \Delta\sigma = \mathfrak{A}^{PC}(t)(\tau_0 + \Delta\tau) \quad (2-173)$$

Spalten wir daher beide Tensoren in Referenzteil und Anomalie auf, so haben wir uns zwischen zwei nicht miteinander zu vereinbarenden Bedingungen zu entscheiden:

a) Wir fordern, dass jeweils die beiden Referenzteile und die beiden Anomalien einander entsprechen sollen; in diesem Fall muss einer der beiden Referenzteile zeitabhängig sein:

$$\Sigma = \mathfrak{A}^{PC}(t)\tau_0 \quad \Delta\sigma = \mathfrak{A}^{PC}(t)\Delta\tau \quad (2-174)$$

In Koordinaten ausgedrückt, bedeutet dies

$$\Sigma^{kl} \approx [\delta_K^k \delta_L^l - \delta_K^k \delta_L^l U_{|M}^M + \delta_K^k \delta_M^l U^M_{,L} + \delta_M^k \delta_L^l U^M_{,K}] \tau_0^{KL}, \quad (\Delta\sigma)^{kl} \approx \delta_K^k \delta_L^l (\Delta\tau)^{KL} \quad (2-175)$$

b) Fordern wir dagegen, dass beide Referenzteile zeitunabhängig sein sollen, so entsprechen sich die beiden Anomalien nicht, oder anders ausgedrückt, die Beziehung zwischen den Anomalien beinhaltet dann auch die Vorspannung. Für diesen Fall ist $\Sigma = \tau_0$ zu setzen, denn $\mathfrak{A}^{PC}(t_0) = \mathbf{1}$. Für die Anomalien erhalten wir wegen (2-173) die Beziehung

$$\Delta\sigma = (\mathfrak{A}^{PC}(t) - \mathfrak{A}^{PC}(t_0)) \tau_0 + \mathfrak{A}^{PC}(t)\Delta\tau. \quad (2-176)$$

In Koordinaten ausgedrückt heißt das für die Variante b):

$$\begin{aligned} \Sigma^{kl} &\approx \{\delta_K^k \delta_L^l + \delta_M^k \delta_L^l U^M_{,K} - \delta_K^k \delta_I^l \Gamma_{NL}^I U^N\} \tau_0^{KL} \\ (\Delta\sigma)^{kl} &\approx [-\delta_K^k \delta_L^l U_{|M}^M + \delta_K^k \delta_M^l U^M_{,L} + \delta_M^k \delta_L^l U^M_{,K}] \tau_0^{KL} + \delta_K^k \delta_L^l (\Delta\tau)^{KL} \end{aligned} \quad (2-177)$$

(vgl. z.B. *D. Wolf 1997 Seite 24 Formel 3.36*; dort wurde $\Sigma(\mathbf{X}) = -p_0(\mathbf{X})\mathbf{I}$ gesetzt.) Die komplizierte Umrechnung zwischen den Referenzteilen Σ^{kl} und τ_0^{KL} kommt nur dadurch zustande, dass sich die Koordinaten auf die unterschiedlichen Basen $\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l$ bzw. $\mathbf{C}_K \otimes \mathbf{G}_L$ beziehen; die entsprechenden Tensoren sind identisch. Wir haben hier die Formeln (2-163), (2-78) und (2-75) benutzt.

Die linearisierte Spannungs-Dehnungsbeziehung muss sich auf die Anomalie beziehen, nicht auf die Störung. Dies wird klar, wenn man an eine homogene Verschiebung eines vorgespannten Körpers denkt. Wäre die Störung des Spannungstensors homogen linear vom Verzerrungstensor abhängig, so würde wegen $u_{|l}^k = 0 \forall k, l$ auch $\delta\sigma = \mathbf{0}$ folgen, was falsch ist, wenn eine inhomogene Vorspannung vorliegt. Da Vorspannung und Anomalie beim Cauchy-Spannungstensor symmetrisch sein müssen, falls keine Momentendichten angreifen (vgl. (2-159)), müssen auch die Komponenten $\Delta\sigma^{kl}$ und $\Delta\tau^{KL}$ symmetrisch sein.

Wir geben zwei Varianten der Linearisierung der Bewegungsgleichungen an. Die erste Variante benutzt den Cauchy-Tensor und ist die weitaus gebräuchlichste. Die zweite Variante benutzt den Piola-Kirchhoff-Tensor. Werden die Spannungs-Dehnungsbeziehungen spezifiziert und daraus die Inkremente des Cauchy- und des Piola-Kirchhoffs-Tensors abgeleitet, so fallen die beiden Varianten wieder zusammen.

1. Variante:

$$\boldsymbol{\Sigma}(X^K, t) = -p_0(X^K, t)\mathbf{I} = -p_0\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_k = -p_0(X^K, t)g^{kl}\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad (2-178)$$

Hier wird also die Aufspaltung in Referenzanteil und Anomalie gemäß (2–27) für den Cauchy-Spannungstensor durchgeführt. $\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_k$ ist - unabhängig vom Argument! - gleich dem Einheitstensor. Wir nehmen wieder \mathbf{p} als Argument an und berechnen die Divergenz des Cauchy-Spannungstensors zu einem beliebigen Zeitpunkt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma} + \operatorname{div} \Delta\boldsymbol{\sigma} = -p_{0,K} \mathbf{C}^K + \operatorname{div} \Delta\boldsymbol{\sigma} \\ &\approx -p_{0,L} \mathbf{G}^L + p_{0,K} U_{|L}^K \mathbf{G}^L + \operatorname{DIV} \Delta\boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (2-179)$$

Wir haben hier (2-87) sowie (2-88) benutzt.

Mit $\varrho^{\mathcal{E}}(x^k, t) = \varrho_0^{\mathcal{L}}(X^K, t_0) + \Delta\varrho$, $\mathbf{f}(x^k, t) = \mathbf{F}(X^K, t_0) + \Delta\mathbf{f}$ sowie (2–147) und (2–83) folgt für den “Kraftterm”

$$\varrho\mathbf{f}(x^k, t) \approx \varrho_0\mathbf{F}(X^K, t_0) + \varrho_0(\Delta\mathbf{f} - \mathbf{F} \operatorname{DIV} \mathbf{u}). \quad (2-180)$$

Damit lautet die linearisierte Bewegungsgleichung in “materieller Form”, wenn wir noch die Gleichung (2–168) für den hydrostatischen Grundzustand berücksichtigen:

Satz 2-33 (linearisierte Bewegungsgleichungen in materieller Form):

$$\begin{aligned} \varrho\mathbf{a} &\approx -\operatorname{GRAD} p_0 + \operatorname{GRAD} p_0 \cdot \operatorname{GRAD} \mathbf{u} + \operatorname{DIV} \Delta\boldsymbol{\sigma} + \varrho_0\mathbf{F} + \varrho_0(\Delta\mathbf{f} - \mathbf{F} \operatorname{DIV} \mathbf{u}) \approx \\ \varrho_0\mathbf{a} &\approx \varrho_0 F_K U_{|L}^K G^{LM} \mathbf{G}_M + \Delta\sigma^{MK}_{|K} \mathbf{G}_M + \varrho_0(\Delta f^M - F^M U_{|K}^K) \mathbf{G}_M \\ &\approx \varrho_0\mathbf{F} \cdot \operatorname{GRAD} \mathbf{u} + \operatorname{DIV} \Delta\boldsymbol{\sigma} + \varrho_0(\Delta\mathbf{f} - \mathbf{F} \operatorname{DIV} \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2-181)$$

■

(bei “kleinen” Größen darf div durch DIV ersetzt werden.) Da auf der rechten Seite nur noch Größen erster Ordnung erscheinen, darf auf der linken Seite ϱ durch ϱ_0 ersetzt werden (denn die rechte Seite bleibt bis auf Größen zweiter Ordnung unverändert, wenn mit $\varrho_0/\varrho \approx 1 + \operatorname{DIV} \mathbf{u}$ durchmultipliziert wird). Im Rahmen der linearen Näherung darf im übrigen bei allen Termen, die eine “kleine” Größe enthalten, auch \mathbf{p} statt \mathbf{P} als Argument verwendet werden.

In der letzten Zeile von (2-181) treten keine Terme mehr auf, die den Druck p_0 im Referenzzustand enthalten. Alternativ dazu können wir in (2-181) die Kraftdichte im Referenzzustand \mathbf{F} durch den Druckterm ersetzen, der sich aus dem hydrostatischen Gleichgewicht ergibt:

$$\varrho_0\mathbf{a} \approx p_{0,K} U_{|L}^K G^{LM} \mathbf{G}_M - p_{0,L} G^{LM} U_{|K}^K \mathbf{G}_M + \Delta\sigma^{MK}_{|K} \mathbf{G}_M + \varrho_0 \Delta f^M \mathbf{G}_M \quad (2-182)$$

(vgl. *D. Wolf 1997 Formel (3.37)*).

D. Wolf 1997 spricht von der “materiell-lokalen” Formulierung, wenn $\Delta\mathbf{f}$ gemäß (2–85) durch $\delta\mathbf{f}$ ersetzt wird:

$$\Delta\mathbf{f} \approx \delta\mathbf{f} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial X^K} U^K = \delta\mathbf{f} + \operatorname{GRAD} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = [(\delta f)^M + F_{L|K} U^K G^{LM}] \mathbf{G}_M$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \varrho_0\mathbf{a} &\approx [\varrho_0 F_K U_{|L}^K G^{LM} + \Delta\sigma^{MK}_{|K} + \varrho_0(\delta f)^M - \varrho_0 F^M U_{|K}^K + \varrho_0 F_{|K}^M U^K] \mathbf{G}_M \\ &= \varrho_0\mathbf{F} \cdot \operatorname{GRAD} \mathbf{u} + \operatorname{DIV} \Delta\boldsymbol{\sigma} + \varrho_0\delta\mathbf{f} - \varrho_0\mathbf{F} \operatorname{DIV} \mathbf{u} + \varrho_0 \operatorname{GRAD} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2-183)$$

Da gemäß (2-169) sowohl $\varrho_0\mathbf{F}$ als auch \mathbf{F} konservativ sind, also $(\varrho_0 F_L)_{|K} = (\varrho_0 F_K)_{|L}$ und $F_{L|K} = F_{K|L}$ gilt, vereinfacht sich die Gleichung (2-183) zu

Satz 2-34 (linearisierte Bewegungsgleichungen in materiell-lokaler Form):

$$\begin{aligned}
\varrho_0 \mathbf{a} &\approx [(\varrho_0 F_K U^K)_{|L} G^{LM} - F^M (\varrho_0 U^K)_{|K} + \varrho_0 (\delta f)^M + \Delta \sigma_{|K}^{MK}] \mathbf{G}_M \\
&\approx \text{GRAD} \langle \varrho_0 \mathbf{F}, \mathbf{u} \rangle - \mathbf{F} \text{DIV} (\varrho_0 \mathbf{u}) + \varrho_0 \delta \mathbf{f} + \text{DIV} \Delta \sigma \\
&\text{oder} \\
\varrho_0 \mathbf{a} &\approx [\varrho_0 (F_K U^K)_{|L} G^{LM} + \Delta \sigma_{|K}^{MK} + \varrho_0 (\delta f)^M - \varrho_0 F^M U^K_{|K}] \mathbf{G}_M \\
&= \varrho_0 \text{GRAD} \langle \mathbf{F}, \mathbf{u} \rangle + \text{DIV} \Delta \sigma + \varrho_0 \delta \mathbf{f} - \varrho_0 \mathbf{F} \text{DIV} \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{2-184}$$

■

(Dies ist die Form der Bewegungsgleichungen, die wir in den folgenden Abschnitten dieser Arbeit hauptsächlich benutzen. Einerseits lassen sich die Inkremente der eingepprägten Kräfte (Gravitation) und der Trägheitskräfte am einfachsten im Euler-Bild darstellen, andererseits beziehen sich die Materialgleichungen (Spannungs-Dehnungsbeziehungen) auf die Anomalie des Spannungstensors.)

Auch hier können wieder die Kraftterme durch Druckterme ersetzt werden; *M. Smith 1974 p. 494* verwendet eine gemischte Form, die direkt aus (2-183) folgt:

$$\begin{aligned}
\varrho_0 \mathbf{a} &\approx [-p_{0,L} U^K_{|K} + p_{0,K} U^K_{|L} + \varrho_0 F_{L|K} U^K + \varrho_0 (\delta f)_L + \Delta \sigma_{|K}^{MK} G_{ML}] \mathbf{G}^L \\
&\approx [-(p_0 U^K_{|K})_{|L} + (p_0 U^K_{|L})_{|K} + \varrho_0 F_{L|K} U^K + \varrho_0 (\delta f)_L + \Delta \sigma_{|K}^{MK} G_{ML}] \mathbf{G}^L
\end{aligned} \tag{2-185}$$

Wird in (2-184) auch noch gemäß (2-85) die Anomalie des Cauchy-Spannungstensors durch die Störung ersetzt, gelangt man zur "lokalen" Formulierung:

$$\Delta \sigma \approx \delta \sigma - p_{0,K} U^K \mathbf{I}, \quad \text{DIV} \Delta \sigma \approx \text{DIV} \delta \sigma - (p_{0,K} U^K)_{,L} \mathbf{G}^L \implies$$

Satz 2-35 (linearisierte Bewegungsgleichungen in lokaler Form):

$$\varrho_0 \mathbf{a} \approx \text{DIV} \delta \sigma + \varrho_0 \delta \mathbf{f} - \mathbf{F} \text{DIV} (\varrho_0 \mathbf{u}) \tag{2-186}$$

■

Auch bei der lokalen Formulierung, die u.a. *V. Dehant, J. Wahr 1991 p. 160* benutzen, wird also mit der Dichte im Grundzustand ϱ_0 , nicht mit der aktuellen Dichte ϱ gearbeitet. (2-186) ergibt sich ohne den Umweg über die materielle Formulierung, wenn man $\sigma = -p_0^\xi(x^k) \mathbf{I} + \delta \sigma$ in (2-159) einsetzt und (2-89) anwendet.

2. Variante (vgl. *D. Wolf (1997, p.23 Formel (3.16))*):

Hier wird $\tau_0^{KL} = -p_0 G^{KL}$ gewählt. Obwohl τ_0^{KL} somit konstant ist, ist τ_0 zeitabhängig, denn der Index K bezieht sich auf die Basis \mathbf{C}_K , die mit der Verschiebung variiert.

$$\begin{aligned}
\tau_0(X^K, t) &= -p_0(X^K, t_0) \mathbf{C}_L \otimes \mathbf{G}^L = -p_0(X^K, t_0) G^{LK} \mathbf{C}_L \otimes \mathbf{G}_K \\
&\approx -p_0(X^K, t_0) G^{LK} \mathbf{G}_L \otimes \mathbf{G}_K - p(X^K, t_0) G^{LK} U^M_{|L} \mathbf{G}_M \otimes \mathbf{G}_K
\end{aligned} \tag{2-187}$$

Zur Berechnung der Divergenz von $\tau_0(X^K, t)$ kann (2-94) verwendet werden:

$$\text{DIV} \tau_0 \approx -\text{GRAD} p_0 - G^{LK} (p_0 U^M_{|L})_{|K} \mathbf{G}_M \tag{2-188}$$

Damit lauten die linearisierten Bewegungsgleichungen in der "materiellen Darstellung" :

$$\varrho_0 \mathbf{a} = \varrho_0 \mathbf{f} + \text{DIV} \tau \approx \varrho_0 \Delta \mathbf{f} - (p_0 U^M_{|L})_{|K} G^{LK} \mathbf{G}_M + \text{DIV} \Delta \tau. \tag{2-189}$$

Schreiben wir die Anomalien der Kraftdichte und des Spannungstensors mit Hilfe von (2-85) auf die Störungen um, so erhalten wir analog zur ersten Variante die "materiell-lokale" Darstellung

$$\varrho_0 \mathbf{a} \approx \varrho_0 \delta \mathbf{f} + \varrho_0 \text{GRAD} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} - (p_0 U^M_{|L})_{|K} G^{LK} \mathbf{G}_M + \text{DIV} \Delta \tau. \tag{2-190}$$

sowie die "lokale" Darstellung

$$\varrho_0 \mathbf{a} \approx \varrho_0 \delta \mathbf{f} + \varrho_0 \text{GRAD} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} - (p_0 U^M_{|L})_{|K} G^{LK} \mathbf{G}_M + \text{DIV} \delta \tau - (p_{0,K} U^K)_{|L} \mathbf{G}^L. \tag{2-191}$$

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit betrachten wir hauptsächlich extrem langperiodische oder säkulare Bewegungen. Für Vorgänge dieser Art wird in der Literatur in der Regel die *quasistatische Näherung* benutzt. Dies bedeutet, dass der inertielle Term $\rho_0 \mathbf{a}$ vernachlässigt wird. Im Gegensatz zum Fall von kurzperiodischen Schwingungen wird bei gleichförmig ablaufenden Ausgleichsvorgängen die Lösung hierdurch nicht wesentlich beeinträchtigt.

2–6 Eingeprägte Volumenkräfte und Trägheitskräfte

2–6.1 Gravitation

Gemäß der Newton'schen Gravitationstheorie, auf die wir uns hier beschränken, lauten die Feldgleichungen für die gravitative Kraftdichte \mathbf{f}^{Grav}

$$\text{rot } \mathbf{f}^{Grav}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{div } \mathbf{f}^{Grav}(\mathbf{x}) = -4\pi g \rho(\mathbf{x}) \quad (2-192)$$

in differentieller Formulierung bzw.

$$\mathbf{f}^{Grav}(\mathbf{x}_P) = g \int_{R^3} \rho(\mathbf{x}_Q) \frac{\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|^3} d^3 \mathbf{x}_Q \quad (2-193)$$

in integraler Formulierung. g ist die Gravitationskonstante, \mathbf{f}^{Grav} die Gravitationsbeschleunigung (wir werden später \mathbf{f}^{Grav} mit der Zentrifugalbeschleunigung zum Schwerevektor $\boldsymbol{\gamma}$ zusammenfassen). Als konservatives Feld kann \mathbf{f}^{Grav} als Gradient einer Funktion $v^{Grav}(\mathbf{x})$, des Gravitationspotentials, dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{Grav} &= \text{grad } v^{Grav}(\mathbf{x}) & \delta \mathbf{f}^{Grav} &= \text{grad } \delta v^{Grav}(\mathbf{x}) \\ \text{div grad } v^{Grav}(\mathbf{x}) &= -4\pi g \rho(\mathbf{x}) & \text{div grad } \delta v^{Grav}(\mathbf{x}) &= -4\pi g \delta \rho(\mathbf{x}) \\ v^{Grav}(\mathbf{x}) &= g \int_{R^3} \frac{\rho(\mathbf{x}_Q)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|} d^3 \mathbf{x}_Q & \delta v^{Grav}(\mathbf{x}) &= g \int_{R^3} \frac{\delta \rho(\mathbf{x}_Q)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|} d^3 \mathbf{x}_Q \end{aligned} \quad (2-194)$$

Wir werden im folgenden stets annehmen, dass sich außerhalb der Erde keine Massen befinden, so dass die Volumenintegrale nur über den Erdkörper zu bilden sind.

In den weiteren Abschnitten dieser Arbeit werden wir den Effekt von *Auflasten* an der Erdoberfläche untersuchen. Diese Auflasten bewirken eine *Randspannung*, da sie infolge der Erdanziehung gegen die Erdoberfläche drücken, sie erzeugen jedoch auch selbst ein Gravitationsfeld, durch das die Massenelemente der Erde Kräfte erfahren. Die inkrementellen Änderungen von Gravitationspotential und Gravitationsvektor bestehen also in der Summe von

1. (a) den Änderungen durch die gravitative Wirkung δv^{Last} bzw. $\delta \boldsymbol{\gamma}^{Last}$ der Auflast selbst
- (b) den Änderungen infolge der Massenverlagerungen im Erdinneren bzw. der hierdurch entstehenden Gravitation δv^{Def} bzw. $\delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}$

Es gilt also

$$\delta v^{Grav} = \delta v^{Last} + \delta v^{Def} \quad (2-195)$$

Es erweist sich als zweckmäßig, die Auflast als *einfache Schichtbelegung* $\kappa(\mathbf{X}, t)$ (flächenhafte Dichte) auf der Erdoberfläche zu approximieren. Diese Schichtbelegung kann als Kondensation der auflastenden Massen auf die Erdoberfläche verstanden werden; sie gleicht daher in guter Näherung der Höhe der Auflast multipliziert mit ihrer Massendichte

$$\kappa(\mathbf{X}, t) := \rho_{Last}(\mathbf{X}, t) h_{Last}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \partial \mathcal{V}_0. \quad (2-196)$$

Das Gravitationspotential der Auflast wird durch ein Flächenintegral dargestellt:

$$\delta v^{Last}(\mathbf{x}_P) \approx v_\kappa(\mathbf{x}_P) := g \int_{\partial \mathcal{V}_0} \frac{\kappa(\mathbf{x}_Q, t)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|} d^2 \mathbf{x}_Q \quad (2-197)$$

(Wir integrieren stets über die unverzerrte Erdoberfläche $\partial \mathcal{V}_0$; der dadurch entstehende Fehler ist von zweiter Ordnung, da κ selbst eine kleine Größe ist.)

Dieses Potential ist unter schwachen Voraussetzungen an die Regularität der Randfläche $\partial\mathcal{V}_0$ und der Belegung κ stetig. Der Gravitationsvektor, der durch die Auflast erzeugt wird, ist in dieser Approximation dagegen gemäß der bekannten Sprungrelation des Gradienten eines Einfachschicht-Potentials unstetig:

Lemma 2-36 (Stetigkeit des Potentials einer einfachen Schichtbelegung):

Es sei κ eine stetige Belegung auf einer stetig gekrümmten Fläche $\partial\mathcal{V}_0$. Dann ist das Potential (2-197) überall auf und außerhalb $\partial\mathcal{V}_0$ stetig. ■

Lemma 2-37 (Sprungrelation des Gravitationsvektors einer einfachen Schichtbelegung):

Seien die Fläche $\partial\mathcal{V}_0$ sowie die Belegung κ analytisch. Dann ist der Gradient des Potentials der einfachen Schichtbelegung (2-197) außerhalb der Fläche analytisch. Der innere (+) bzw. äußere (-) Grenzwert des Gradienten in einem Punkt \mathbf{x}_P der Schicht lautet

$$\text{grad } v_\kappa(\mathbf{x}_P)|_\pm \approx g \int_{\partial\mathcal{V}_0} \kappa(\mathbf{x}_Q) \text{grad } \frac{1}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|} d^2\mathbf{x}_Q \mp 2\pi g \kappa(\mathbf{x}_P) \mathbf{N}_P \quad (2-198)$$

Die Differenz zwischen äußerem und innerem Grenzwert beträgt daher

$$\text{grad } v_\kappa(\mathbf{x}_P)_+ - \text{grad } v_\kappa(\mathbf{x}_P)_- \approx -4\pi g \kappa(\mathbf{x}_P) \mathbf{N}_P \quad (2-199)$$

Beweise dieser beiden Hilfssätze findet man beispielsweise in *E. Martensen (1968)*. Der Gravitationsvektor $\delta\boldsymbol{\gamma}^{Last}$ als Volumenintegral ist im übrigen stetig; unstetig ist nur seine Approximation als Gradient des Flächenintegrals (2-197).

Wir betrachten nun die Änderung des Schwerefeldes infolge der Massenverlagerungen. Anomalien und Störungen von Gravitationspotential und -beschleunigung können in linearer Approximation aus

$$\Delta F \approx \frac{DF}{Dt}|_{t_0} \Delta t \quad \delta F \approx \frac{\partial F^\mathcal{E}}{\partial t}|_{t_0} \Delta t$$

berechnet werden, wobei

$$\frac{D\mathbf{x}_Q}{Dt}|_{t_0} \Delta t \approx \mathbf{u}(\mathbf{X}_Q) =: \mathbf{u}_Q, \quad \frac{D\mathbf{x}_P}{Dt}|_{t_0} \Delta t \approx \mathbf{u}(\mathbf{X}_P) =: \mathbf{u}_P$$

Der Parameter t ist wiederum als Parameter des *Gateaux-Differentials* von $F^\mathcal{E}$ bzw. $F^\mathcal{L}$ bezüglich \mathbf{u} zu betrachten. Mit Hilfe des Transport-Theorems (2-151) ergeben sich die folgenden Formeln für die lineare Näherung der Anomalien des Deformationspotentials und des zugehörigen Gravitationsvektors:

Lemma 2-38 (Anomalien von Deformations-Potential und -Gravitationsvektor):

$$\Delta v^{Def}(\mathbf{x}_P(t)) \approx \frac{D}{Dt} \left\{ g \int_{R^3} \frac{\varrho(\mathbf{x}_Q)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|} d^3\mathbf{x}_Q \right\}|_{t_0} \Delta t \approx g \int_{R^3} \frac{\varrho(\mathbf{X}_Q)}{|\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q|^3} \langle \mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q, \mathbf{u}_Q - \mathbf{u}_P \rangle d^3\mathbf{X}_Q \quad (2-200)$$

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}(\mathbf{x}_P(t)) &\approx \frac{D}{Dt} \left\{ g \int_{R^3} \frac{\varrho(\mathbf{x}_Q) (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|^3} d^3\mathbf{x}_Q \right\}|_{t_0} \Delta t \\ &\approx g \int_{R^3} \varrho(\mathbf{X}_Q) \left\{ \frac{\mathbf{u}_Q - \mathbf{u}_P}{|\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q|^3} + 3 \frac{(\mathbf{X}_Q - \mathbf{X}_P)}{|\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q|^5} \langle \mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q, \mathbf{u}_Q - \mathbf{u}_P \rangle \right\} d^3\mathbf{X}_Q \end{aligned} \quad (2-201)$$

(Zum Beweis des Lemmas müsste zunächst gezeigt werden, dass Differentiation und Integration vertauscht werden dürfen; siehe dazu Anhang B.) Setzen wir

$$|\mathbf{u}_Q - \mathbf{u}_P| \leq E_{max} |\mathbf{X}_Q - \mathbf{X}_P| \quad \forall \mathbf{X}_Q, \mathbf{X}_P \quad (2-202)$$

mit einer Konstanten $E_{max} \ll 1$ voraus, so ist die Singularität des Integralkerns von Δv^{Def} einerseits von der Ordnung $|\mathbf{X}_Q - \mathbf{X}_P|^{-1}$, von $\Delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}$ andererseits von der Ordnung $|\mathbf{X}_Q - \mathbf{X}_P|^{-2}$. Beide Integrale existieren also

für integrierbares $\varrho(\mathbf{x})$ und genügend glattes \mathbf{u} als *schwach singuläre* Integrale. Aufgrund der Stetigkeit von \mathbf{u} und aufgrund von (2-202) lässt sich der Integrand von (2-201) als Produkt $\varrho(\mathbf{X}_Q)/|\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q|^2 \cdot \Psi(\mathbf{u}_Q, \mathbf{u}_P, \mathbf{X}_Q, \mathbf{X}_P)$ darstellen, wobei $|\Psi(\mathbf{u}_Q, \mathbf{u}_P, \mathbf{X}_Q, \mathbf{X}_P)|$ für alle in Frage kommenden $\mathbf{X}_Q \neq \mathbf{X}_P$, $\mathbf{X}_Q, \mathbf{X}_P \in \mathbb{R}^3$ die Schranke $4E_{max}$ besitzt und stetig ist. Die linearen Näherungen von Δv^{Def} und $\Delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}$ sind daher ebenso wie Δv^{Def} und $\Delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}$ selbst stetig.

(2-202) ist beispielsweise verletzt, falls Teilkörper des Kontinuums (der Erde) aneinander vorbeigleiten, wie das bei Konvektionsströmen oder der differentiellen Rotation zwischen Mantel und Kern tatsächlich auftritt. In diesem Fall ist \mathbf{u} unstetig.

Lemma 2-39 (Störungen von Deformations-Potential und -Gravitationsvektor):

Die Störungen δv^{Def} und $\delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}$ ergeben sich in linearer Näherung zu

$$\begin{aligned} \delta v^{Def}(\mathbf{x}_P, t) &\approx \frac{d}{dt} \left\{ g \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho(\mathbf{x}_Q(t))}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q(t)|} d^3 \mathbf{x}_Q \right\} \Big|_{t_0} \Delta t = g \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho_0(\mathbf{X}_Q)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|^3} \langle \mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q, \mathbf{u}_Q \rangle d^3 \mathbf{X}_Q \\ &= g \int_{\mathbb{R}^3} \varrho_0(\mathbf{X}_Q) \langle \text{GRAD}_Q \left(\frac{1}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|} \right), \mathbf{u}_Q \rangle d^3 \mathbf{X}_Q \end{aligned} \quad (2-203)$$

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}(\mathbf{x}_P, t) &\approx \frac{d}{dt} \left\{ g \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho(\mathbf{x}_Q(t)) (\mathbf{x}_Q(t) - \mathbf{x}_P)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q(t)|^3} d^3 \mathbf{x}_Q \right\} \Big|_{t_0} \Delta t \\ &\approx \frac{4\pi}{3} g \varrho(\mathbf{x}_P, t_0) \mathbf{u}(\mathbf{x}_P) + \lim_{\delta \rightarrow 0} g \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K^\delta} \frac{\varrho_0(\mathbf{X}_Q)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|^3} \left\{ \mathbf{u}_Q - 3 \frac{\langle \mathbf{X}_Q - \mathbf{x}_P, \mathbf{u}_Q \rangle}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|^2} (\mathbf{X}_Q - \mathbf{x}_P) \right\} d^3 \mathbf{X}_Q \end{aligned} \quad (2-204)$$

Zum Beweis siehe Anhang B. Im letzten Fall durfte die Zeitableitung nicht mehr unter das Integral gezogen werden. Der Integrand in (2-204) ist singulär von der Ordnung $1/|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|^3$. Das Integral ist als Cauchy-Hauptwert zu verstehen, d.h. als Grenzwert einer Folge von Integralen, bei denen eine Kugel K^δ vom Radius $\delta \rightarrow 0$ um den Berechnungspunkt aus dem Integrationsgebiet ausgenommen wird.

$\delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}$ ist als Differenz zweier stetiger Funktionen selbst stetig. Dagegen kann die *lineare Näherung* von $\delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}$ offensichtlich unstetig sein, da ja die Dichtefunktion ϱ in den beiden integralfreien Termen $\frac{4\pi}{3} g \varrho(\mathbf{x}_P, t_0) \mathbf{u}(\mathbf{x}_P)$ in (2-204) nicht stetig sein muss. Ein einfaches Beispiel ist das folgende:

Der Mittelpunkt \mathbf{x}_M einer starren, homogenen, gravitierenden Kugel mit Radius R_E und Dichte ϱ bewege sich auf einen Aufpunkt \mathbf{x}_P zu. Der Gravitationsvektor lautet

$$\mathbf{f}^{Grav}(\mathbf{x}_P) = \begin{cases} -\frac{4\pi g \varrho R_E^3}{3r^2} \mathbf{e}_r & \text{für } r > R_E \\ -\frac{4\pi g \varrho r}{3} \mathbf{e}_r & \text{für } r < R_E, \end{cases}$$

wobei wir $r := |\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_M|$ und $\mathbf{e}_r := (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_M)/|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_M|$ gesetzt haben. Offensichtlich ist \mathbf{f}^{Grav} stetig. Ist nun $r = r_0 + \Delta r$, so ergibt sich für die lineare Näherung von $\delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}$

$$\delta \boldsymbol{\gamma}^{Def} \approx \frac{\partial \mathbf{f}^{Grav}}{\partial t} \Big|_{t_0} \Delta t \approx \begin{cases} +\frac{4\pi g \varrho R_E^3}{3r_0^3} \cdot 2\Delta r \mathbf{e}_r & \text{für } r > R_E \\ -\frac{4\pi g \varrho}{3} \Delta r \mathbf{e}_r & \text{für } r < R_E, \end{cases}$$

so dass sich an der Stelle $r = R_E$ tatsächlich eine Unstetigkeit der linearen Näherung von $\delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}$ ergibt.

Um diese Unstetigkeit interpretieren zu können, leiten wir eine weitere Darstellung von (2-203) her, die wir in Kapitel 3 anwenden werden und die vor allem für die Behandlung von Sprungstellen der Dichte (z. B. an der Erdoberfläche!) von Nutzen ist. Wir nehmen an, die Erde bestehe aus mehreren (i. allg. unregelmäßig aufgebauten) Schalen B_i , innerhalb denen die Dichte stetig differenzierbar sei. An den Schalgrenzen lassen wir Unstetigkeiten der Dichte zu. Wir betrachten zunächst das Integral (2-203) über eine Schale B gesondert.

(2-203) lässt sich wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
\delta v_B^{Def}(\mathbf{x}_P, t) &:= g \int_B \varrho(\mathbf{X}_Q) < \text{GRAD}_Q \left(\frac{1}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|} \right), \mathbf{u}_Q > d^3 \mathbf{X}_Q \\
&= g \int_B \text{DIV} \left[\frac{\varrho_0(\mathbf{X}_Q) \mathbf{u}(\mathbf{X}_Q)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|} \right] d^3 \mathbf{X}_Q - g \int_B \varrho_0(\mathbf{X}_Q) \frac{\text{DIV} \mathbf{u}(\mathbf{X}_Q)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|} d^3 \mathbf{X}_Q - \\
&\quad - g \int_B \frac{< \mathbf{u}(\mathbf{X}_Q), \text{GRAD} \varrho_0(\mathbf{X}_Q) >}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|} d^3 \mathbf{X}_Q,
\end{aligned}$$

und mit Hilfe des Gauß'schen Satzes folgt

$$\begin{aligned}
\delta v_B^{Def}(\mathbf{x}_P, t) &\approx g \int_{\partial B} \frac{< \varrho_0(\mathbf{X}_Q) \mathbf{u}(\mathbf{X}_Q), \mathbf{N}(\mathbf{X}_Q) >}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|} d^2 \mathbf{X}_Q - \\
&\quad - g \int_B \varrho_0(\mathbf{X}_Q) \frac{\text{DIV} \mathbf{u}(\mathbf{X}_Q)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|} d^3 \mathbf{X}_Q - g \int_B \frac{< \mathbf{u}(\mathbf{X}_Q), \text{GRAD} \varrho_0(\mathbf{X}_Q) >}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|} d^3 \mathbf{X}_Q.
\end{aligned} \tag{2-205}$$

Dieser Ausdruck lässt sich besonders einfach interpretieren, falls die Dichte in der Schale konstant ($\text{GRAD} \varrho_0 = 0$) und das Material inkompressibel ist ($\text{DIV} \mathbf{u} = 0$). Für diesen Fall entsteht das Störpotential ausschließlich durch ein Nach-außen-drängen oder Zurückweichen der Massen an der Schalengrenze. Andererseits verschwinden für die genannten Voraussetzungen die beiden Volumenintegrale in (2-205) und es verbleibt nur das Flächenintegral. Das Potential dieser an der Schalengrenze zusätzlich "angehäuften" oder "abgetragenen" Massen wird offensichtlich in linearer Näherung durch das Potential einer einfachen Schichtbelegung approximiert, wobei diese Schichtbelegung sich aus dem Produkt der Dichte und der Normalkomponente der Verschiebung an der Schalengrenze ergibt. Man spricht im Zusammenhang mit dem geodätischen Randwertproblem von einer *Helmert-Kondensation* der Massen auf die Schichtgrenze. Wir haben hier die entsprechende Formel als lineare Approximation des Störpotentials infolge von Verformungen eines Kontinuums erhalten.

Addiert man die einzelnen Anteile von δv^{Def} aus den verschiedenen Schalen, so heben sich die Flächenintegrale teilweise wieder auf, da die Normalen zweier benachbarter Schalen unterschiedliches Vorzeichen besitzen. Wir setzen hier voraus, dass der Verschiebungsvektor an der Schichtgrenze stetig ist. Besteht das Modell aus n Schalen B_i , $i = 1, 2, \dots, n$, so erhalten wir

Lemma 2-40 (Potentialstörung):

$$\begin{aligned}
\delta v^{Def}(\mathbf{x}_P, t) &\approx \sum_{i=1}^n \left\{ g \int_{S_i} \frac{< [\varrho_0]_{\mp} \mathbf{u}_Q, \mathbf{N}_Q >}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|} d^2 \mathbf{X}_Q - \right. \\
&\quad \left. - g \int_{B_i} \varrho_0(\mathbf{X}_Q) \frac{\text{DIV}(\mathbf{u}_Q)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|} d^3 \mathbf{X}_Q - g \int_{B_i} \frac{< \mathbf{u}_Q, \text{GRAD} \varrho_0(\mathbf{X}_Q) >}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|} d^3 \mathbf{X}_Q \right\}.
\end{aligned} \tag{2-206}$$

Hier bezeichnen S_i die Grenze zwischen der i -ten und $i+1$ -ten Schicht und $[\varrho_0]_{\mp}$ die Differenz zwischen innerem und äußerem Grenzwert der Dichte an einer Schichtgrenze. Der Normalenvektor \mathbf{N} zeigt hier - im Gegensatz zu (2-205) - stets in die Richtung der nächstäußeren Schicht. An der Erdoberfläche, also für $i = n$, ist für $[\varrho_0]_{\mp}$ der Dichtewert an der Oberfläche einzusetzen. Die Normalkomponente \mathbf{u}_Q wurde als stetig vorausgesetzt. ■

Bilden wir nun den Gradienten von δv^{Def} , um die zugehörige Störung des Gravitationsvektors zu erhalten, so haben wir die Unstetigkeit des Gradienten einer einfachen Schichtbelegung zu beachten, die bereits in (2-198) und (2-199) bei der Berechnung des Gradienten des Auflastpotentials benutzt wurde. Die Schichtbelegung ist im vorliegenden Fall offensichtlich $< [\varrho_0]_{\mp} \mathbf{u}_Q, \mathbf{N}_Q >$. Es gilt also

Lemma 2-41 (Unstetigkeit der linearen Näherung des Schwerevektors an einer Schichtgrenze):

Unter den genannten Voraussetzungen (insbesondere Stetigkeit des Verschiebungsvektors) beträgt die Unstetigkeit des deformativen Anteils des Schwerevektors, nämlich die Differenz zwischen äußerem und innerem Grenzwert an einer Schichtgrenze

$$[\delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}(\mathbf{x}_P)]_{\pm} \approx -4\pi g [\varrho_0]_{\mp} < \mathbf{u}(\mathbf{x}_P), \mathbf{N}_P > \mathbf{N}_P. \tag{2-207}$$

Das Lagrange-Inkrement ist dagegen auch in linearer Näherung stetig. ■

Anmerkung 2-8 :

Die Potentialstörung δv^{Def} bzw. die Potentialanomalie Δv^{Def} erfüllt die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \delta v^{Def}(\mathbf{x}_P) &= -4\pi g \delta \rho(\mathbf{x}_P) \approx 4\pi g \operatorname{div}(\varrho_0 \mathbf{u}_P) \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} \Delta v^{Def}(\mathbf{X}_P) &\approx \operatorname{DIV} \operatorname{GRAD} \Delta v^{Def}(\mathbf{X}_P) \approx -4\pi g \Delta \varrho + (2v_{|KL} U_{|M}^K + v_{|K} U_{|LM}^K) G^{LM} \end{aligned} \quad (2-208)$$

Die erste Formelzeile ergibt sich aus der Definition von δv^{Def} bzw. $\delta \rho$ sowie (2-148); die Differentialgleichung für Δv^{Def} wird im Anhang (B) gezeigt.

Für die Inkremente des Gravitationsvektors gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}(\mathbf{x}_P, t) &= -4\pi g \varrho(\mathbf{x}_P, t) \\ \operatorname{div} \Delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}(\mathbf{x}_P, t) &\approx \operatorname{DIV} \Delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}(\mathbf{x}_P, t) \approx -4\pi g \Delta \varrho(\mathbf{x}_P, t) + F_{|K}^L U_{|L}^K \end{aligned} \quad (2-209)$$

sowie

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}(\mathbf{x}_P, t) &= \mathbf{0} \\ \operatorname{rot} \Delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}(\mathbf{x}_P, t) &\approx \operatorname{ROT} \Delta \boldsymbol{\gamma}^{Def}(\mathbf{x}_P, t) \approx \epsilon^{KLM} F_{|N}^J U_{|K}^N G_{LJ} \mathbf{G}_M = \epsilon^{KLM} v_{|JN} U_{|K}^N \mathbf{G}_M \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \Delta \boldsymbol{\gamma}^{Def} &\approx (G^{RL} G^{MK} - G^{RK} G^{ML})(v_{|LNR} U_{|K}^N + v_{|LN} U_{|KR}^N) \mathbf{G}_M \end{aligned} \quad (2-210)$$

Beweise hierzu finden sich wieder im Anhang B.

2-6.2 Trägheitskräfte und ihre Linearisierung

Die Beschleunigungen \mathbf{a} auf der linken Seite der Bewegungsgleichungen (2-159) sind als *inertiale* Beschleunigungen zu verstehen. Arbeiten wir in einem rotierenden Bezugssystem, so bleiben die Bewegungsgleichungen gültig, wenn wir darin die Beschleunigungen \mathbf{a} durch die Relativbeschleunigungen \mathbf{a}^{Rel} ersetzen und dafür die Differenzterme $\varrho \mathbf{f}^T := \varrho(\mathbf{a}^{Rel} - \mathbf{a})$ als *Trägheitskraftdichten* auf der rechten Seite addieren. Die Kraftdichten $\varrho \mathbf{f}$ sind also als Summe von eingepägten und Trägheitskraftdichten (sowie eventuell Reaktionskraftdichten) zu verstehen.

Gemäß (2-116) gilt

$$\varrho(\mathbf{x}) \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) = -\varrho(\mathbf{x}) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} - 2\varrho(\mathbf{x}) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^{Rel}(\mathbf{x}) - \varrho(\mathbf{x}) \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \quad (2-211)$$

Wir linearisieren diese Gleichung bezüglich $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ und $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \delta \boldsymbol{\omega}$, wobei wir hier \mathbf{X} und $\boldsymbol{\Omega}$ als Größen 0-ter Ordnung, \mathbf{u} und $\delta \boldsymbol{\omega}$ als Größen 1-ter Ordnung verstehen; $\boldsymbol{\Omega}$ wird als konstant angenommen. Es ergibt sich

Lemma 2-42 (Linearisierung der Trägheitskraftdichten):

$$\begin{aligned} \varrho(\mathbf{x}) \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) &\approx \varrho_0 \mathbf{F}^T(\mathbf{X}) + \Delta \varrho \mathbf{F}^T + \varrho_0 \delta \mathbf{f}^T(\mathbf{X}) + \varrho_0 \operatorname{GRAD} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{u} \\ \text{mit} & \\ \varrho_0 \mathbf{F}^T(\mathbf{X}) &= -\varrho_0(\mathbf{X}) \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}) = \varrho_0(\mathbf{X}) [\Omega^2 \mathbf{X} - \langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{X} \rangle \boldsymbol{\Omega}] \\ \Delta \varrho \mathbf{F}^T &\approx \varrho_0 (\operatorname{DIV} \mathbf{u}) \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}) = \varrho_0 (\operatorname{DIV} \mathbf{u}) [\langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{X} \rangle \boldsymbol{\Omega} - \Omega^2 \mathbf{X}] \\ \varrho_0 \delta \mathbf{f}^T(\mathbf{X}) &= \varrho_0 \delta \mathbf{f}^{Euler} + \varrho_0 \delta \mathbf{f}^{Coriolis} + \varrho_0 \delta \mathbf{f}^{Zent.}, \quad \text{wobei} \\ \varrho_0 \delta \mathbf{f}^{Euler} &\approx -\varrho_0(\mathbf{X}) \frac{d \delta \boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{X} \\ \varrho_0 \delta \mathbf{f}^{Coriolis} &\approx -2\varrho_0(\mathbf{X}) \boldsymbol{\Omega} \times \frac{D' \mathbf{u}}{Dt'} \\ \varrho_0 \delta \mathbf{f}^{Zent.} &\approx -\varrho_0 \delta \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}) - \varrho_0 \boldsymbol{\Omega} \times (\delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{X}) = \\ &= -\varrho_0 \langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{X} \rangle \delta \boldsymbol{\omega} - \varrho_0 \langle \delta \boldsymbol{\omega}, \mathbf{X} \rangle \boldsymbol{\Omega} + 2\varrho_0 \langle \boldsymbol{\Omega}, \delta \boldsymbol{\omega} \rangle \mathbf{X} \\ \varrho_0 \operatorname{GRAD} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{u} &\approx -\varrho_0 \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) = \varrho_0 [\Omega^2 \mathbf{u} - \langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{u} \rangle \boldsymbol{\Omega}] \end{aligned} \quad (2-212)$$

■

Der Zentrifugalterm $\varrho_0 \mathbf{F}^T(\mathbf{X})$ ist der einzige Term 0-ter Ordnung; er wird üblicherweise im Grundzustand berücksichtigt. Er ist ebenso wie der zentrifugale Störterm $\delta \mathbf{f}^{Zent}$ konservativ, es lassen sich also zugehörige *Zentrifugalpotentiale* angeben:

$$\begin{aligned} V^{Zent} &= \frac{1}{2}(\Omega^2 R^2 - \langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{X} \rangle^2) & \mathbf{F}^T &= \text{GRAD } V^{Zent} \\ \delta v^{Zent} &\approx (\langle \boldsymbol{\Omega}, \delta \boldsymbol{\omega} \rangle R^2 - \langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{X} \rangle \langle \delta \boldsymbol{\omega}, \mathbf{X} \rangle) & \delta \mathbf{f}^{Zent.} &\approx \text{GRAD } \delta v^{Zent} \end{aligned} \quad (2-213)$$

Die übrigen störenden Trägheitskraftdichten sind i.allg. nicht konservativ, besitzen also kein Potential. Üblicherweise fasst man das Gravitationspotential mit dem Zentrifugalpotential zum *Schwerepotential* zusammen (und entsprechend dazu auch die Gradienten):

$$W = V^{Grav} + V^{Zent} \quad \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}^{Grav} + \mathbf{F}^T, \quad (2-214)$$

analog dazu werden auch die gestörten Größen zusammengefasst.

In die Trägheitskraftdichte gemäß (2-212) gehen neben den Unbekannten \mathbf{u} und $\delta \boldsymbol{\omega}$ auch deren zeitliche Ableitungen ein, was die Lösung der Bewegungsgleichungen erschwert. Um von den Zeitableitungen frei zu werden, führt man eine *Laplace-Transformation* der Bewegungsgleichungen durch. *Wolf(1997)* stellt in seinem Appendix A die benötigten Rechenregeln der Laplace-Transformation zusammen; wir übernehmen die wichtigsten Regeln in Anhang C. Wir kennzeichnen die Laplace-transformierten Größen durch eine Tilde ($\tilde{\cdot}$) oder durch das Symbol $\mathcal{L}(\cdot)$. Für die Trägheitskraftdichten entsteht

Lemma 2-43 (Laplace-Transformierte der Trägheitskraftdichten):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varrho \mathbf{F}^T) &\approx \varrho_0(\mathbf{X}) \tilde{\mathbf{F}}^T(\mathbf{X}) + \mathcal{L}(\Delta \varrho \mathbf{F}^T) + \varrho_0 \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Euler} + \varrho_0 \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Coriolis} + \varrho_0 \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Zent.} + \\ &+ \varrho_0 \mathcal{L}(\text{GRAD } \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2-215)$$

mit

$$\begin{aligned} \varrho_0(\mathbf{X}) \tilde{\mathbf{F}}^T(\mathbf{X}) &\approx \frac{1}{s} \varrho_0(\mathbf{X}) [\Omega^2 \mathbf{X} - \langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{X} \rangle \boldsymbol{\Omega}] \\ \mathcal{L}(\Delta \varrho \mathbf{F}^T) &\approx \varrho_0(\text{DIV } \tilde{\mathbf{u}}) [\langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{X} \rangle \boldsymbol{\Omega} - \Omega^2 \mathbf{X}] \\ \varrho_0 \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Euler} &\approx -\varrho_0(\mathbf{X}) s \delta \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{X} \\ \varrho_0 \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Coriolis} &\approx -2\varrho_0(\mathbf{X}) s \boldsymbol{\Omega} \times \tilde{\mathbf{u}} \\ \varrho_0 \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Zent.} &\approx -\varrho_0 \langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{X} \rangle \delta \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \varrho_0 \langle \delta \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{X} \rangle \boldsymbol{\Omega} + 2\varrho_0 \langle \boldsymbol{\Omega}, \delta \tilde{\boldsymbol{\omega}} \rangle \mathbf{X} \\ \varrho_0 \mathcal{L}(\text{GRAD } \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{u}) &\approx -\varrho_0 [\langle \boldsymbol{\Omega}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle \boldsymbol{\Omega} - \Omega^2 \tilde{\mathbf{u}}] \end{aligned} \quad (2-216)$$

s ist der (eventuell komplexe) Parameter der Laplace-Transformierten. ■

Wenden wir die Operatoren ROT und DIV auf $\delta \tilde{\mathbf{f}}^T$ an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{ROT } \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Euler} &\approx -2s \delta \tilde{\boldsymbol{\omega}} & \text{DIV } \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Euler} &\approx \mathbf{0} \\ \text{ROT } \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Coriolis} &\approx -2s(\boldsymbol{\Omega} \text{ DIV } \tilde{\mathbf{u}} - \text{GRAD } \tilde{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\Omega}) & \text{DIV } \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Coriolis} &\approx 2s \langle \boldsymbol{\Omega}, \text{ROT } \tilde{\mathbf{u}} \rangle \\ \text{ROT } \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Zent.} &\approx \mathbf{0} & \text{DIV } \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Zent.} &\approx 4 \langle \boldsymbol{\Omega}, \delta \tilde{\boldsymbol{\omega}} \rangle \end{aligned} \quad (2-217)$$

Man kann $\delta \boldsymbol{\omega}$ zerlegen in einen Term $\delta \boldsymbol{\omega}_L$, der parallel zu $\boldsymbol{\Omega}$, und einen Term $\delta \boldsymbol{\omega}_W$, der senkrecht auf $\boldsymbol{\Omega}$ steht:

$$\delta \boldsymbol{\omega} = \delta \boldsymbol{\omega}_L + \delta \boldsymbol{\omega}_W \quad \text{mit} \quad \delta \boldsymbol{\omega}_L = \frac{\langle \delta \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega} \rangle \boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2}, \quad \delta \boldsymbol{\omega}_W = \delta \boldsymbol{\omega} - \delta \boldsymbol{\omega}_L \quad (2-218)$$

Der Term $\delta \boldsymbol{\omega}_L$ entspricht einer *Tageslängenschwankung*: die Richtung des Winkelgeschwindigkeitsvektors bleibt unverändert, und nur der Betrag ändert sich. Dagegen entspricht $\delta \boldsymbol{\omega}_W$ einer *Polbewegung* oder *Polwanderung*: Der Betrag des Winkelgeschwindigkeitsvektors bleibt in linearer Näherung konstant, aber es ändert sich seine Richtung.

Aus der letzten Gleichung in (2-217) folgt

Lemma 2-44 (Harmonizität des inkrementellen Zentrifugalpotentials):

Das inkrementelle Zentrifugalpotential, das einer Polbewegung bzw. Polwanderung entspricht, ist harmonisch. Dagegen ist das Zentrifugalpotential, das einer Tageslängenänderung entspricht, unharmonisch mit der Inhomogenität $4\Omega|\delta\boldsymbol{\omega}|$. ■

2-7 Energiebilanz und konstitutive Gleichungen

2-7.1 Formale Herleitung der konstitutiven Gleichungen aus der Energiebilanz

Um die Bewegungsgleichungen anwenden zu können, benötigt man zusätzlich den Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor und dem Verzerrungstensor. In ein solches *Materialgesetz* geht i. allg. auch die Temperatur ein. Als *konstitutive Gleichungen* werden in der Regel die Zusammenhänge zwischen Temperatur T und Verzerrungstensor einerseits und Entropie S und Spannungstensor andererseits bezeichnet. Die konstitutiven Gleichungen müssen für die interessierenden Materialien aus Experimenten bestimmt werden. Jedoch kann die Vielzahl von denkbaren Materialgesetzen durch übergeordnete physikalische Prinzipien von vornherein eingeschränkt werden. Wir nennen hier nur einige dieser a priori Anforderungen:

1. Der Stress-Tensor im Punkt \mathbf{p} zur Zeit t hängt ab vom Verhalten des Kontinuums
 - (a) bis zur Zeit t (nicht vom Verhalten zu späterer Zeit)
 - (b) in einer infinitesimalen Umgebung von \mathbf{p} , nicht vom Verhalten von Elementen mit endlicher Entfernung von \mathbf{p} .
2. Der Stress-Tensor ist invariant gegen
 - (a) Koordinatentransformationen (eine Eigenschaft jedes Tensors)
 - (b) gegen starre Translationen und Rotationen (Objektivität)

Diese und weitere einschränkende Prinzipien sind in *C. Eringen 1962* ausführlich erklärt. Sie sind charakteristisch für die *kontinuumsmechanische* Betrachtungsweise, bei der die Teilchennatur der Materie außer acht gelassen wird. So lässt sich das Prinzip 1b) vom Standpunkt der Gittertheorie aus nicht aufrechterhalten; siehe z.B. *D. Kessel (1968)*. Jedoch ist die Approximation des Gitters durch das Kontinuum für geophysikalische Anwendungen gerechtfertigt, da hierbei das Verhältnis zwischen der Reichweite der (nichtlokalen) Kohäsionskräfte und der Ausdehnung des Festkörpers (Erde) sehr klein ist.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwenden wir die *lineare Viskoelastizitätstheorie*. Dabei stützen wir uns vor allem auf die Darstellung von *R.M. Christensen 1982*. Die allgemeine Form der linearen viskoelastischen Gleichungen kann mit Hilfe eines quadratischen Ansatzes für die freie Energie (siehe unten) aus der *Energiebilanz* und der *Clausius-Duhem-Ungleichung* hergeleitet werden.

Die *Gesamtenergie* \mathfrak{E} des Systems gliedert sich in die *kinetische Energie* \mathfrak{K} und die *innere Energie* \mathfrak{U} :

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{K} + \mathfrak{U}$$

$$\text{mit } \mathfrak{K} := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho < \mathbf{v}^{\mathcal{E}}(x^k, t), \mathbf{v}^{\mathcal{E}}(x^k, t) > d^3\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0 < \mathbf{v}^{\mathcal{L}}(X^K, t), \mathbf{v}^{\mathcal{L}}(X^K, t) > d^3\mathbf{X} \quad (2-219)$$

Die Gesamtenergie ändert sich im Lauf der Zeit infolge von *Wärmezufuhr* \mathfrak{Q}_{input} und der *Leistung äußerer Kräfte und Spannungen* \mathfrak{P}_{input} :

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \frac{d\mathfrak{K}}{dt} + \frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \mathfrak{Q}_{input} + \mathfrak{P}_{input} \quad (2-220)$$

Die Leistung \mathfrak{P}_{input} , welche die äußeren Kraftdichten \mathbf{f}^{Ext} und Spannungen $\mathbf{t}_{(n)}$ zur Zeit t an einer beliebigen materiellen Unterteilung $\mathcal{V}(t)$ des Kontinuums verrichten, ist

$$\mathfrak{P}_{input} := \int_{\partial\mathcal{V}(t)} < \mathbf{v}, \mathbf{t}_{(n)} > d^2\mathbf{x} + \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho < \mathbf{f}^{Ext}, \mathbf{v} > d^3\mathbf{x} \quad (2-221)$$

\mathfrak{P}_{input} lässt sich als Summe der Änderung der kinetischen Energie und der “Änderung der Verzerrungsenergie” sowie der negativen Leistung der inneren Kraftdichten \mathbf{f}^{Int} darstellen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_{input} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle d^3\mathbf{x} + \int_{\mathcal{V}(t)} \boldsymbol{\sigma} : \mathcal{D} d^3\mathbf{x} - \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho \langle \mathbf{v}, \mathbf{f}^{Int} \rangle d^3\mathbf{x} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle d^3\mathbf{x} + \int_{\mathcal{V}(t)} \sigma^{kl} \left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} e_{kl} + e_{k|l}^m v_{m|l} + e_{l|k}^m v_{m|k} \right) d^3\mathbf{x} - \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho \langle \mathbf{v}, \mathbf{f}^{Int} \rangle d^3\mathbf{x}\end{aligned}\quad (2-222)$$

(Das *innere Tensorprodukt* $\boldsymbol{\sigma} : \mathcal{D}$ ist dabei durch $\boldsymbol{\sigma} : \mathcal{D} := \sigma^{kl} d_{kl}$ definiert.)

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_{input} &= \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{x} + \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho \langle \mathbf{f}^{Ext}, \mathbf{v} \rangle d^3\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \{ \langle \mathbf{v}, \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \varrho(\mathbf{f} - \mathbf{f}^{Int}) \rangle + \operatorname{grad} \mathbf{v} : \boldsymbol{\sigma} \} d^3\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \{ \langle \mathbf{v}, \varrho \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} \mathbf{v} \rangle + \operatorname{grad} \mathbf{v} : \boldsymbol{\sigma} \} d^3\mathbf{x} - \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho \langle \mathbf{v}, \mathbf{f}^{Int} \rangle d^3\mathbf{x} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle d^3\mathbf{x} + \int_{\mathcal{V}(t)} \sigma^{kl} d_{kl} d^3\mathbf{x} - \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho \langle \mathbf{v}, \mathbf{f}^{Int} \rangle d^3\mathbf{x}\end{aligned}$$

In der letzten Formelzeile wurde benutzt, dass $\operatorname{grad} \mathbf{v}$ in seinen symmetrischen Anteil \mathcal{D} (“deformation rate”) und seinen antisymmetrischen Anteil (“spin”) zerlegt werden kann; wegen der Symmetrie von $\boldsymbol{\sigma}$ kommt aber nur der symmetrische Anteil von $\operatorname{grad} \mathbf{v}$ zum Tragen. Der zweite Ausdruck in (2-222) folgt mit Hilfe von (2-109). ■

Für kleine Verzerrungen darf d_{kl} in 1. Näherung durch den linearen Teil von $\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} e_{kl} \approx \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} \epsilon_{kl}$ ersetzt werden.

Es bietet sich an, \mathfrak{P}_{input} auf das Referenzvolumen zu transformieren:

$$\mathfrak{P}_{input} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0 \langle \mathbf{v}^{\mathcal{L}}(\mathbf{X}, t), \mathbf{v}^{\mathcal{L}}(\mathbf{X}, t) \rangle d^3\mathbf{X} + \int_{\mathcal{V}_0} \tau^{KL} \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} (E_{KL}) d^3\mathbf{X} - \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0 \langle \mathbf{v}^{\mathcal{L}}(\mathbf{X}, t), \mathbf{f}^{\mathcal{L}, Int}(\mathbf{X}, t) \rangle d^3\mathbf{X}\quad (2-223)$$

Beweis:

Ausgehend von der vorletzten Zeile des Beweises von (2-222) folgt mit (2-163), (2-108) und (2-64)

$$\operatorname{grad} \mathbf{v} : \boldsymbol{\sigma} d^3\mathbf{x} = d_{kl} \sigma^{kl} d^3\mathbf{x} = d_{kl} \tau^{KL} x^k_{,K} x^l_{,L} d^3\mathbf{X} = \tau^{KL} \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} (E_{KL}) d^3\mathbf{X} \approx \tau^{KL} \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} (\epsilon_{KL}) d^3\mathbf{X}. \quad \blacksquare$$

Der Ausdruck $\tau^{KL} \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} (E_{KL})$ lässt sich nicht als “Doppelpunktprodukt” des Euler-Lagrange-Tensors und des Piola-Kirchhoff-Tensors schreiben, da τ^{KL} sich auf $\mathbf{C}_K \otimes \mathbf{G}_L$, $\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} (E_{KL})$ dagegen auf $\mathbf{G}^K \otimes \mathbf{G}^L$ bezieht. Die Darstellung im Referenzvolumen hat aber den Vorteil, dass sich gemäß (2-223) \mathfrak{P}_{input} *streng* durch $\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} (E_{KL})$ ausdrücken lässt; die vergleichbare Darstellung im aktuellen Volumen (2-222) enthält außer den Komponenten $\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} (e_{kl})$ auch noch quadratische Terme mit den Komponenten $v_{k|l}$.

Die Wärmezufuhr \mathfrak{Q}_{input} setzt sich zusammen aus der Leistung der inneren Wärmequellen und dem Wärmefluss durch die Oberfläche:

$$\mathfrak{Q}_{input} = - \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \langle \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle d^2\mathbf{x} + \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho \boldsymbol{\tau} d^3\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} (- \operatorname{div} \mathbf{q} + \varrho \boldsymbol{\tau}) d^3\mathbf{x}\quad (2-224)$$

Darin bedeuten $\boldsymbol{\tau}$ die Leistung der inneren Wärmequellen pro Masseneinheit (“heat supply Funktion”), $\mathbf{q} = q^k \mathbf{g}_k$ den Wärmeflussvektor, der positiv nach außen gezählt wird. Um die Gleichung auch im Referenzvolumen darstellen zu können, definieren wir

$$\mathbf{Q} := q^k X^K_{,k} \sqrt{\frac{\det g_{nm}}{\det G_{NM}}} \mathbf{G}_K = q^k X^K_{,k} \frac{\varrho_0}{\varrho} \mathbf{G}_K\quad (2-225)$$

und erhalten mit Hilfe von (2-68)

$$\mathfrak{Q}_{input} = - \int_{\partial\mathcal{V}_0} \langle \mathbf{Q}, \mathbf{N} \rangle d^2\mathbf{X} + \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0 \boldsymbol{\tau} d^3\mathbf{X} = \int_{\mathcal{V}_0} (- \operatorname{DIV} \mathbf{Q} + \varrho_0 \boldsymbol{\tau}) d^3\mathbf{X}\quad (2-226)$$

Im übrigen ist die *Wärmeflussdichte* $\mathbf{\Omega}$ - im Gegensatz zur Temperatur T und der Entropie S - keine Zustandsgröße des Kontinuums; es gilt die differentielle Beziehung

$$d\mathbf{\Omega} = T dS. \quad (2-227)$$

Wir setzen nun die Ergebnisse (2-222) bzw. (2-223) und (2-224) bzw. (2-226) in (2-220) ein. Die Ableitung der kinetischen Energie fällt dabei heraus, und wir erhalten Bilanzgleichungen für die innere Energie in integraler Form. Da die Gleichung auch für jedes Teilvolumen gelten muss, existieren auch lokale Formulierungen:

$$\varrho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \varrho \mathbf{r} + \boldsymbol{\sigma} : \mathcal{D} - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (2-228)$$

$$\varrho_0 \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \varrho_0 \mathbf{r} + \tau^{KL} \frac{D}{Dt} E_{KL} - \operatorname{DIV} \mathbf{Q}. \quad (2-229)$$

Darin bedeutet \mathbf{u} die *spezifische innere Energie* (innere Energie pro Masseneinheit). Beim Übergang auf die lokalen Formulierungen fallen die inneren Kräfte heraus. Sämtliche Größen beziehen sich auf ein materielles Element (das Argument \mathbf{P} bzw. \mathbf{X} wurde jeweils fortgelassen). Der *Energiesatz* in der Form (2-228) bzw. (2-229) ist somit eine Kombination der Leistungsbilanz der äußeren Kräfte und Spannungen sowie der Wärmebilanz. Im Allgemeinfall sind noch weitere nichtmechanische Energieflüsse (wie z.B der elektromagnetische Energiefluss) zu berücksichtigen.

Anstelle der spezifischen inneren Energie \mathbf{u} wird häufig die *Helmholtz'sche spezifische freie Energie* \mathfrak{F} gemäß

$$\varrho \mathfrak{F} = \varrho \mathbf{u} - \varrho T S_m \quad (2-230)$$

eingeführt; S_m bezeichnet hier die spezifische Entropie.

Die fundamentale Ungleichung der lokalen Entropieerzeugung lautet

$$\begin{aligned} \varrho T \frac{D}{Dt} S_m - \varrho \mathbf{r} + \operatorname{div} \mathbf{q} - \langle \mathbf{q}, \frac{\operatorname{grad} T}{T} \rangle &\geq 0 \quad \text{bzw.} \\ \varrho_0 T \frac{D}{Dt} S_m - \varrho_0 \mathbf{r} + \operatorname{DIV} \mathbf{Q} - \langle \mathbf{Q}, \frac{\operatorname{GRAD} T}{T} \rangle &\geq 0 \end{aligned} \quad (2-231)$$

(Clausius-Duhem-Ungleichung)

(Die beiden Ungleichungen sind streng äquivalent.)

Die "heat-supply-Funktion" kann mit Hilfe des Energiesatzes (2-228) bzw. (2-229) aus der Clausius-Duhem-Ungleichung eliminiert werden:

$$\begin{aligned} \varrho S_m \frac{D}{Dt} (T(t)) + \varrho \frac{D}{Dt} (\mathfrak{F}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathcal{D} + \langle \mathbf{q}, \frac{\operatorname{grad} T}{T} \rangle &\leq 0 \\ \varrho_0 S_m \frac{D}{Dt} (T(t)) + \varrho_0 \frac{D}{Dt} (\mathfrak{F}) - \tau^{KL} \frac{D}{Dt} E_{KL} + \langle \mathbf{Q}, \frac{\operatorname{GRAD} T}{T} \rangle &\leq 0 \end{aligned} \quad (2-232)$$

Werden konstitutive Gleichungen für die spezifische freie Energie und den Wärmefluss als quadratische Funktionale der Verzerrungs- und Temperaturgeschichte des Kontinuums angesetzt, so ergeben sich aus dem Energiesatz und der Clausius-Duhem-Ungleichung die konstitutiven Gleichungen für den Spannungstensor und die spezifische Entropie. Wir übernehmen den Ansatz aus *R.M. Christensen (1971)*, abweichend von diesem beziehen wir uns jedoch auf das Referenzvolumen:

$$\begin{aligned} \varrho_0 \mathfrak{F} &= \varrho_0 \mathfrak{F}_0 + \int_{-\infty}^t D^{KL}(t-t') \frac{D}{Dt'} (E_{KL}(t')) dt' - \int_{-\infty}^t \beta(t-t') \frac{D}{Dt'} (T(t')) dt' \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t H^{IJKL}(t-t', t-\bar{t}) \frac{D}{Dt'} (E_{IJ}(t')) \frac{D}{Dt} (E_{KL}(\bar{t})) dt' d\bar{t} \\ &- \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \phi^{IJ}(t-t', t-\bar{t}) \frac{D}{Dt'} (E_{IJ}(t')) \frac{D}{Dt} (T(\bar{t})) dt' d\bar{t} \\ &- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t m(t-t', t-\bar{t}) \frac{D}{Dt'} (T(t')) \frac{D}{Dt} (T(\bar{t})) dt' d\bar{t} + O(E^3, (T - T_0)^3). \end{aligned} \quad (2-233)$$

Wir fordern dass $E_{IJ}(t)$, $T(t)$ im Intervall $-\infty < t < \infty$ stetig seien und dass $E_{IJ}(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow -\infty$ sowie $T(t) \rightarrow T_0$ für $t \rightarrow -\infty$ gelte. Da E_{IJ} symmetrisch ist, kann a priori angenommen werden, dass auch $H^{IJKL}(t-t', t-\bar{t})$ in den vorderen beiden und in den hinteren beiden Indices symmetrisch ist. Da es sich bei den Integralen mit den Kernen $H^{IJKL}(t-t', t-\bar{t})$ und $m(t-t', t-\bar{t})$ um quadratische Formen handelt, dürfen wir diese Kerne als symmetrisch in ihren Argumenten annehmen, und die vorderen beiden Indices in $H^{IJKL}(t-t', t-\bar{t})$ dürfen mit den hinteren beiden Indices vertauscht werden. Wir dürfen also die folgenden Symmetrie-Eigenschaften voraussetzen:

$$H^{IJKL}(t-t', t-\bar{t}) = H^{IJKL}(t-\bar{t}, t-t') = H^{KLIJ}(t-t', t-\bar{t}) = H^{JIKL}(t-t', t-\bar{t}) = H^{JLKI}(t-t', t-\bar{t}) \quad (2-234)$$

Die Faltungskerne $D^{KL}(t-t')$, $\beta(t-t')$, $H^{IJKL}(t-t', t-\bar{t})$, $\phi^{IJ}(t-t', t-\bar{t})$, $m(t-t', t-\bar{t})$ charakterisieren die Eigenschaften des Materials; sie sind Funktionen der Zeit und des jeweiligen materiellen Punktes. Wir fordern dass die Faltungskerne verschwinden, falls eines ihrer Argumente kleiner 0 ist. Der Term $\varrho_0 \mathfrak{F}_0$ beinhaltet die freie Energie im Grundzustand.

Wir setzen (2-233) in die Clausius-Duhem-Ungleichung (2-232) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} & \left\{ -D^{IJ}(0) - \int_{-\infty}^t H^{IJKL}(t-t', 0) \frac{D}{Dt'}(E_{KL}(t')) dt' + \int_{-\infty}^t \phi^{IJ}(0, t-\bar{t}) \frac{D}{Dt}(T(\bar{t})) d\bar{t} + \tau^{IJ} \right\} \frac{D}{Dt}(E_{IJ}(t)) + \\ & + \left\{ \beta(0) + \int_{-\infty}^t \phi^{IJ}(t-t', 0) \frac{D}{Dt'}(E_{IJ}(t')) dt' + \int_{-\infty}^t m(t-t', 0) \frac{D}{Dt'}(T(t')) dt' - \varrho_0 S_m \right\} \frac{D}{Dt}(T(t)) \quad (2-235) \\ & + \left\{ - \int_{-\infty}^t \frac{D}{Dt} D^{KL}(t-t') \frac{D}{Dt'}(E_{KL}(t')) dt' + \int_{-\infty}^t \frac{D}{Dt} \beta(t-t') \frac{D}{Dt'}(T(t')) dt' + \Lambda - \langle \mathbf{Q}, \frac{\text{GRAD } T}{T} \rangle \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \Lambda & := -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{D}{Dt} (H^{IJKL}(t-t', t-\bar{t})) \frac{D}{Dt'}(E_{IJ}(t')) \frac{D}{Dt}(E_{KL}(\bar{t})) dt' d\bar{t} + \\ & + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{D}{Dt} (\phi^{IJ}(t-t', t-\bar{t})) \frac{D}{Dt'}(E_{IJ}(t')) \frac{D}{Dt}(T(\bar{t})) dt' d\bar{t} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{D}{Dt} (m(t-t', t-\bar{t})) \frac{D}{Dt'}(T(t')) \frac{D}{Dt}(T(\bar{t})) dt' d\bar{t}. \end{aligned}$$

Da die Ungleichung (2-235) für beliebige Werte von $\frac{D}{Dt}(E_{IJ}(t))$, $\frac{D}{Dt}(T(t))$ gilt, müssen die Koeffizienten dieser Funktionen, also die geschweiften Klammern, verschwinden:

$$\tau^{IJ} = D^{IJ}(0) + \int_{-\infty}^t H^{IJKL}(t-t', 0) \frac{D}{Dt'}(E_{KL}(t')) dt' - \int_{-\infty}^t \phi^{IJ}(0, t-\bar{t}) \frac{D}{Dt}(T(\bar{t})) d\bar{t} \quad (2-236)$$

$$\varrho_0 S_m = \beta(0) + \int_{-\infty}^t \phi^{IJ}(t-t', 0) \frac{D}{Dt'}(E_{IJ}(t')) dt' + \int_{-\infty}^t m(t-t', 0) \frac{D}{Dt'}(T(t')) dt'. \quad (2-237)$$

Das sind gerade die *linearen konstitutiven Gleichungen* für $\boldsymbol{\tau}$ und S_m , die sich somit aus dem quadratischen Ansatz für die freien Energie und der Clausius-Duhem-Ungleichung ergeben. Letztere Ungleichung vereinfacht sich zu

$$- \int_{-\infty}^t \frac{D}{Dt} D^{KL}(t-t') \frac{D}{Dt'}(E_{KL}(t')) dt' + \int_{-\infty}^t \frac{D}{Dt} \beta(t-t') \frac{D}{Dt'}(T(t')) dt' + \Lambda - \langle \mathbf{Q}, \frac{\text{GRAD } T}{t} \rangle \geq 0. \quad (2-238)$$

(Weitere Vereinfachungen sind möglich, jedoch für die vorliegende Arbeit nicht von Bedeutung.)

Die Kernfunktionen $H^{IJKL}(t-t', 0)$, $\phi^{IJ}(0, t-\bar{t})$, $\phi^{IJ}(t-t', 0)$ und $m(t-t', 0)$ lassen sich somit als *Relaxationsfunktionen* deuten, die den Zusammenhang zwischen der *Verzerrungsgeschichte* und der *Temperaturgeschichte*

einerseits und dem aktuellen Spannungstensor und der aktuellen Entropie andererseits herstellen. $D^{IJ}(0)$ sind die Komponenten des Piola-Kirchhoff-Stress-Tensors im Grundzustand (Vorspannungen), $\beta(0)$ die Entropie pro Volumeneinheit im Grundzustand. Da wir von einem hydrostatischen Grundzustand (mit isotroper Spannung) ausgehen, ergibt sich

$$D^{IJ}(0) = -^{(0)}p G^{IJ},$$

was der Variante 2 im Abschnitt 2-5.3 entspricht.

Es vereinfacht die Berechnungen erheblich, wenn die Energieübergänge *isotherm*, also bei konstanter Temperatur stattfinden; für diesen Fall ist $\frac{D}{Dt}T \equiv 0$ und die konstitutiven Gleichungen für den Piola-Kirchhoff-Spannungstensor lauten

$$\tau^{IJ}(t) = D^{IJ}(0) + \int_{-\infty}^t H^{IJKL}(t-t') \frac{D}{Dt'}(E_{KL}(t')) dt'. \quad (2-239)$$

Das zweite Argument der Funktion H^{IJKL} ist hier und in Zukunft stets gleich null; wir lassen es daher auch im folgenden weg.

2-7.2 Konstitutive Gleichungen für den Cauchy-Stress-Tensor

Bezieht man sich in der Energiebilanz auf das aktuelle Volumen, indem (2-221) eingeführt wird, so lassen sich analog zu der beschriebenen Vorgehensweise auch konstitutive Gleichungen für den Cauchy-Tensor herleiten. (Dies hat allerdings den Nachteil, dass in der Energiebilanz quadratische Terme auftreten, welche die kovarianten Ableitungen der Geschwindigkeit $v_{k|l}$ enthalten, vgl. (2-109), (2-222) .) Mit einem modifizierten Ansatz für die freie Energie erhalten wir für den isothermen Fall in linearer Näherung

$$\sigma^{ij}(t) \approx \widehat{D}^{ij}(0) + \int_{-\infty}^t \widehat{H}^{ijkl}(t-t') \frac{D}{Dt'}(E_{KL}(t')) dt'. \quad (2-240)$$

Gemäß der 1. Variante in Abschnitt 2-5.3 wählen wir $\widehat{D}^{ij}(0) = -^{(0)}p g^{ij}$. Das folgende Lemma stellt den Zusammenhang zwischen den Relaxationsfunktionen $\widehat{H}^{ijkl}(t-t')$ und $H^{IJKL}(t-t')$ des Cauchy- und des Piola-Kirchhoff-Tensors her:

Lemma 2-45 :

Es gelte

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= -^{(0)}p g^{ij} + \int_{-\infty}^t \widehat{H}^{ijkl}(t-t') \frac{D}{Dt'}(E_{KL}(t')) dt' \\ \tau^{IJ} &= -^{(0)}p G^{IJ} + \int_{-\infty}^t H^{IJKL}(t-t') \frac{D}{Dt'}(E_{KL}(t')) dt' \end{aligned}$$

Wählt man

$$\widehat{H}^{ijkl}(t-t') = \delta_i^i \delta_j^j \left[H^{IJKL}(t-t') + ^{(0)}p (G^{IJ} G^{KL} - G^{IK} G^{JL} - G^{IL} G^{JK}) \right], \quad (2-241)$$

so wird durch die Tensoren τ und σ in linearer Näherung derselbe Spannungszustand beschrieben. ■

Beweis von Lemma 2-45 :

Einerseits folgt durch Einsetzen von (2-241) in (2-240)

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &\approx -^{(0)}p g^{ij} + x^i_{,I} x^j_{,J} \int_{-\infty}^t H^{IJKL}(t-t') \frac{D}{Dt'}(E_{KL}(t')) dt' + \\ &+ ^{(0)}p x^i_{,I} x^j_{,J} (G^{IJ} G^{KL} - G^{IK} G^{JL} - G^{IL} G^{JK}) \frac{1}{2} (U_{K|L} + U_{L|K}) \\ &\approx -^{(0)}p g^{ij} + x^i_{,I} x^j_{,J} \int_{-\infty}^t H^{IJKL}(t-t') \frac{D}{Dt'}(E_{KL}(t')) dt' + \\ &+ ^{(0)}p x^i_{,I} x^j_{,J} (G^{IJ} U^L_{|L} - G^{JL} U^I_{|L} - G^{IL} U^J_{|L}) \end{aligned}$$

andererseits folgt aus (2-163) mit Hilfe von (2-78) und (2-83)

$$\begin{aligned}
\sigma^{ij} &\approx (1 - \text{DIV } \mathbf{u})x^i_{,I}x^j_{,J}\tau^{IJ} \\
&\approx (1 - \text{DIV } \mathbf{u})x^i_{,I}x^j_{,J}(-^{(0)}p)G^{IJ} + x^i_{,I}x^j_{,J}\int_{-\infty}^t H^{IJKL}(t-t')\frac{D}{Dt'}(E_{KL}(t'))dt' \\
&\approx -^{(0)}p(1 - \text{DIV } \mathbf{u})(g^i_I + U^L_{|I}\delta^i_L)(g^j_J + U^M_{|J}\delta^j_M)G^{IJ} + x^i_{,I}x^j_{,J}\int_{-\infty}^t H^{IJKL}(t-t')\frac{D}{Dt'}(E_{KL}(t'))dt' \\
&\approx -^{(0)}p g^{ij} + ^{(0)}p\delta^i_I\delta^j_J(G^{IJ}U^L_{|L} - G^{JL}U^I_{|L} - G^{IL}U^J_{|L}) + x^i_{,I}x^j_{,J}\int_{-\infty}^t H^{IJKL}(t-t')\frac{D}{Dt'}(E_{KL}(t'))dt',
\end{aligned}$$

so dass also die Transformationsformel (2-241) für die Relaxationsfunktionen mit der Transformationsformel (2-163) kompatibel ist. ■

Es ist bemerkenswert, dass in (2-241) die hydrostatische Spannung erscheint: In die Beziehung der genannten Relaxationsfunktionen gehen also nicht nur die Eigenschaften des Materials, sondern auch die Vorspannung ein. Ist beispielsweise die Relaxationsfunktion $\hat{H}^{ijkl}(t-t')$ *homogen*, so dass es sich in diesem Sinn um “dasselbe Material” handelt, so ist jedoch in der Regel die Relaxationsfunktion $H^{IJKL}(t-t')$ *inhomogen*, da ja die hydrostatische Spannung i. allg. nicht homogen ist. Vergleiche hierzu auch die Formel (2-176).

2-7.3 Spezialfälle der linearen viskoelastischen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen

Die linearen viskoelastischen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen (2-239) und (2-240) beinhalten als Spezialfälle auch linear-elastische Festkörper und viskose Flüssigkeiten:

1. (a) Setzen wir $H^{IJKL}(t-t') = \text{const.}$ (nicht zeitabhängig), so erhalten wir aus (2-239) unter der Voraussetzung $E_{KL}(t = -\infty) = 0$

$$\tau^{IJ}(t) = D^{IJ}(0) + H^{IJKL}E_{KL}(t), \quad (2-242)$$

also gerade das lineare elastische (Hooke'sche) Gesetz; die Spannungen hängen hier nur von den Verzerrungen zum selben Zeitpunkt ab.

- (b) Es gelte $H^{IJKL}(t-t') = \eta(G^{IK}G^{JL} + G^{IL}G^{JK})\delta(t-t')$. Dabei sind $\delta(t-t')$ der Dirac-Puls, η eine Materialkonstante (*Viskosität*). Damit wird aus (2-239):

$$\tau^{IJ}(t) = D^{IJ}(0) + 2\eta\frac{D}{Dt}E^{KL}(t). \quad (2-243)$$

Hier hängen die Spannungen linear von den Zeitableitungen der Verzerrungen zum selben Zeitpunkt ab. Allerdings muss daran erinnert werden, dass wir “kleine” Verschiebungen vorausgesetzt haben, was bei einer Flüssigkeit i. allg. nicht der Fall ist. Man wird daher das Verhalten der viskosen Flüssigkeit i. allg. auch nicht im Lagrange-Bild, sondern im Euler-Bild beschreiben.

In beiden Fällen handelte es sich um Spezialisierungen des zeitlichen Verhaltens der Relaxationsfunktionen.

Gemäß allen bekannten Experimenten *fallen* die Beträge der Relaxationsfunktionen $H^{IJKL}(t)$, $\hat{H}^{ijkl}(t)$ *monoton* für $t > 0$ (“fading-memory-Hypothese”). Ebenso fallen sogar die Beträge der ersten Ableitungen dieser Funktionen $\frac{d}{dt}H^{IJKL}(t)$, $\frac{d}{dt}\hat{H}^{ijkl}(t)$ *monoton*. Anschaulich bedeutet dies, dass bei gleichbleibender Deformation und Temperatur die Spannungen betragsmäßig nicht zunehmen.

Die instantane Reaktion des Spannungszustandes des Körpers auf eine Änderung des Verzerrungszustandes wird auch als “elastische” Reaktion bezeichnet. Um sie zu isolieren, integrieren wir die Gleichungen (2-240) partiell. Setzen wir voraus, dass $E_{KL} = 0 \forall t < 0$ gilt, d.h. vor dem Zeitpunkt $t = 0$ der Grundzustand besteht, so folgt mit Hilfe der Substitution $\bar{t} = t - t'$ aus (2-239), (2-240):

$$\sigma^{ij}(t) = \hat{D}^{ij}(0) + \hat{H}^{ijkl}(0)E_{KL}(t) + \int_0^t E_{KL}(t-\bar{t})\frac{D}{D\bar{t}}(\hat{H}^{ijkl}(\bar{t}))d\bar{t} \quad (2-244)$$

Lässt sich die Euler-Lagrange-Matrix in ihrem zeitlichen Verhalten durch eine Heaviside-Funktion modellieren, d.h. springt E_{KL} zum Zeitpunkt t_S von 0 auf einen konstanten Wert E_{KL}^c , dann ist die Spannung zur Zeit t_S gerade durch $\sigma^{ij}(t_S) = \hat{D}^{ij}(0) + \hat{H}^{ijKL}(0)E_{KL}^c$ gegeben. Allgemein lässt sich zeigen, dass eine sprunghafte Änderung ΔE_{KL} des Verzerrungszustandes zu einer instantanen Änderung der Koeffizienten des Cauchy-Tensors um $\hat{H}^{ijKL}(0)\Delta E_{KL}$ führt. Die "elastische" Reaktion des Materials wird also durch die Werte der Relaxationsfunktionen für das Argument 0 charakterisiert.

Sind die Relaxationsfunktionen *richtungsinvariant*, so spricht man von einem *isotropen* Material. Analog zum elastischen Fall lassen sich für ein isotropes Material die H^{IJKL} durch lediglich zwei unabhängige Funktionen ausdrücken:

$$H^{IJKL}(t-t') = \frac{1}{3} \{3K(t-t') - 2M(t-t')\} G^{IJ} G^{KL} + M(t-t')(G^{IK} G^{JL} + G^{IL} G^{JK})$$

bzw.

$$\hat{H}^{ijkl}(t-t') = \frac{1}{3} \{3k(t-t') - 2\mu(t-t')\} g^{ij} g^{kl} + \mu(t-t')(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk})$$

Die Relaxationsfunktionen $k(t-t')$, $\mu(t-t')$ treten an die Stelle des Schermoduls bzw. des Kompressionsmoduls im elastischen Fall. Alternativ dazu könnten auch die Parameter-Paare $\{E, \nu\}$ (Young'scher Modul, Poisson'sches Verhältnis) oder $\{\lambda, \mu\}$ (Lame'sche Parameter) benutzt werden. Wir geben die Beziehungen zwischen diesen Parametern an:

	λ, μ	k, μ	E, ν
k	$= \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)$		$= \frac{E}{3(1-2\nu)}$
λ		$= \frac{1}{3}(3k - 2\mu)$	$= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
μ			$= \frac{E}{2(1+\nu)}$
E	$= \frac{\mu}{\lambda + \mu}(2\mu + 3\lambda)$	$= \frac{9k\mu}{3k + \mu}$	
ν	$= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	$= \frac{3k - 2\mu}{2(3k + \mu)}$	

Damit lautet beispielsweise das Inkrement des Cauchy-Spannungs-Tensors

$$\Delta\sigma \approx \int_{-\infty}^t \left\{ \lambda(t-t') \frac{D}{Dt'} (\text{DIV } \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu(t-t') \frac{D}{Dt'} \mathbf{E} \right\} dt',$$

und die in den Bewegungsgleichungen erscheinende Divergenz

$$\begin{aligned} \text{DIV } \Delta\sigma \approx & \int_{-\infty}^t \left\{ (\lambda(t-t') + 2\mu(t-t')) \frac{D}{Dt'} (\text{GRAD } \text{DIV } \mathbf{u}) - \mu(t-t') \frac{D}{Dt'} (\text{ROT } \text{ROT } \mathbf{u}) \right\} dt' + \\ & + \int_{-\infty}^t \left\{ \text{GRAD } \lambda(t-t') \frac{D}{Dt'} (\text{DIV } \mathbf{u}) + 2 \left(\frac{D}{Dt'} \mathbf{E} \right) \cdot \text{GRAD } \mu(t-t') \right\} dt'; \end{aligned}$$

(Einen entsprechenden Ausdruck erhält man für den Piola-Kirchhoff-Tensor.) Ist das Material zusätzlich *homogen*, so fallen die räumlichen Ableitungen der Relaxationsfunktionen und damit das zweite Integral fort. Es

sei nochmals betont, dass bei vorgespanntem Material die Homogenität bezüglich des Cauchy-Tensors von der Homogenität bezüglich des Piola-Kirchhoff-Tensors unterschieden werden muss, vgl. hierzu den vorigen Teilabschnitt.

Ist das Material *inkompressibel*, gilt also $\text{DIV } \mathbf{u} = 0$, so genügt für den isotropen Fall die Relaxationsfunktion $\mu(t - t')$ zur Beschreibung des Materials. Damit das Kräftegleichgewicht trotz dieser geometrischen Bindung erhalten bleibt, muss dann ein (zunächst unbekanntes) Druckinkrement Δp eingeführt werden; für ein homogenes isotropes inkompressibles Material lautet das Inkrement des Cauchy-Tensors

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} \approx -\Delta p(t) \mathbf{I} + \int_{-\infty}^t \left\{ 2\mu(t-t') \frac{D}{Dt'} \mathbf{E} \right\} dt' \quad (2-249)$$

und dessen Divergenz

$$\text{DIV } \Delta \boldsymbol{\sigma} \approx -\text{GRAD } \Delta p(t) - \int_{-\infty}^t \left\{ \mu(t-t') \frac{D}{Dt'} (\text{ROT ROT } \mathbf{u}) \right\} dt'. \quad (2-250)$$

Für ein inkompressibles Material ist insbesondere $\nu = 1/2$, k sowie λ sind unbestimmt (unendlich) und $E = 3\mu$. Der inkompressible Fall entsteht bei vorgegebener endlicher Relaxationsfunktion $\mu(t - t')$ durch den Grenzübergang

$$\lambda(t - t') \rightarrow \infty, \quad \text{DIV } \mathbf{u}(t) \rightarrow 0, \quad \int_{-\infty}^t \lambda(t-t') \frac{D}{Dt'} (\text{DIV } \mathbf{u}) dt' \rightarrow -\Delta p(t).$$

Unter dem Begriff *Druck* wird in der Kontinuumsmechanik die mit dem Faktor $-1/3$ multiplizierte Spur des Spannungstensors verstanden. Da im Falle eines inkompressiblen Mediums der Euler-Lagrange-Tensor und damit das in (2-249) auftretende Integral spurfrei ist, ist die Bezeichnung "Druckinkrement" für die neu eingeführte Unbekannte Δp offensichtlich gerechtfertigt.

In einem elastischen Medium wird keinerlei mechanische Energie in Wärmeenergie umgewandelt, vielmehr wird Energie als *Verzerrungsenergie* gespeichert. In einem viskoelastischen Medium dagegen wird i. allg. Energie dissipiert. Konvergieren die Relaxationsfunktionen $H^{IJKL}(t - t')$ für $t \rightarrow \infty$ alle gegen 0, so wird dem Medium zugeführte mechanische Energie im Lauf der Zeit *vollständig* in Wärmeenergie umgesetzt; dieser Fall tritt bei kompressiblen Medien jedoch nicht auf, es wird vielmehr wenigstens ein Teil der zugeführten mechanischen Energie gespeichert. In einem isotropen kompressiblen Medium beispielsweise konvergiert der Kompressions-Modul $k(t)$ für $t \rightarrow \infty$ nicht gegen 0 – dies würde bedeuten, dass sich das Medium bei einem konstanten hydrostatischen Druck auf einen ausdehnungslosen Punkt zusammendrücken ließe. Konvergiert $\mu(t)$ gegen 0, so spricht man von einer *viskoelastischen Flüssigkeit*; konvergiert $\mu(t)$ gegen einen endlichen Wert > 0 , so spricht man dagegen von einem *viskoelastischen Festkörper*. Eine strengere Definition einer viskoelastischen Flüssigkeit fordert zusätzlich noch, dass sich bei einer zeitlich konstanten einfachen Scherspannung asymptotisch eine stationäre Strömung einstellt. Diese Forderung ist mit der hier skizzierten linearen Viskoelastizitätstheorie nicht darzustellen, da die Verschiebungen im Falle einer stationären Strömung i.allg. nicht mehr "klein" sind; siehe hierzu *C. Truesdell und W. Noll 1965*.

Bei einer *elastischen Flüssigkeit* verschwindet der Schermodul μ bzw. dessen Relaxationsfunktion identisch. Es gilt also

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = -\Delta p \cdot \mathbf{I} = k \text{DIV } \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}, \quad \text{DIV } \Delta \boldsymbol{\sigma} = -\text{GRAD } \Delta p = \text{GRAD } (k \text{DIV } \mathbf{u}) \quad (2-251)$$

Für diesen Fall sind statische Zustände nahe des Referenzzustandes nur unter zusätzlichen Bedingungen möglich. Setzt man nämlich in den Bewegungsgleichungen (2-184) den inertialen Term gleich null ($\varrho_0 \mathbf{a} = \mathbf{0}$), dividiert durch ϱ_0 und setzt (2-251) ein, so ergibt sich

$$\text{GRAD } \langle \mathbf{F}, \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{\varrho_0} \text{GRAD } (k \text{DIV } \mathbf{u}) + \delta \mathbf{f} - \mathbf{F} \text{DIV } \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Anwendung des Rotationsoperators ROT ergibt unter der Voraussetzung $\text{ROT } \delta \mathbf{f} = \text{ROT } \mathbf{F} = \mathbf{0}$

$$\text{GRAD } \left(\frac{1}{\varrho_0} \right) \times \text{GRAD } (k \text{DIV } \mathbf{u}) - \text{GRAD } \text{DIV } \mathbf{u} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Unter der Annahme, dass im Referenzzustand die Flächen gleicher Dichte auch Flächen gleichen Kompressionsmoduls k sind, gilt $\text{GRAD } k \times \text{GRAD } \varrho_0 = \mathbf{0}$ und damit

$$\text{GRAD } \text{DIV } \mathbf{u} \times \left[k \text{GRAD } \left(\frac{1}{\varrho_0} \right) + \mathbf{F} \right] = \mathbf{0} \quad (2-252)$$

Es lassen sich einfache Fälle konstruieren, für welche die an dem Kreuzprodukt beteiligten Vektoren nicht parallel sind. Für allgemeine Randbedingungen ist also eine notwendige Bedingung für die Existenz statischer Zustände nahe des Referenzzustandes

$$\varrho_0^2 \mathbf{F} = k \text{GRAD } \varrho_0 \quad (2-253)$$

Dies ist die *Adams-Williamson-Gleichung* (in etwas verallgemeinerter Form). Sie lässt sich physikalisch in der Weise interpretieren, dass ein einzelnes Teilchen, das aus seinem Referenzzustand geringfügig ausgelenkt wird, infolge der etwas veränderten elastischen Kräfte in seiner neuen Umgebung gerade die Dichte der Teilchen seiner neuen Umgebung annimmt (siehe z.B. *V.N. Zharkov (1996 p.62)*). Ein solches Verhalten der Parameter lässt sich in der realen Erde (insbesondere im flüssigen Mantel) nicht erwarten. Führt man jedoch Parameterfunktionen ein, welche die Adams-Williamson-Gleichung nicht erfüllen, so treten bei der Berechnung der Auslenkung \mathbf{u} Widersprüche auf (man spricht von *Longman's Paradox*, siehe z.B. *I.M. Longman (1963)*, *M.A. Chinnery (1975)*). Diese Widersprüche haben zur Auffassung geführt, es sei nicht gerechtfertigt, die Gleichungen (2-184) durch Einsetzen von (2-251) auf Flüssigkeiten anzuwenden (a.a.O.). Die Adams-Williamson-Gleichung (2-253) kann jedoch auch in der Weise hergeleitet werden, dass man von einem gegenüber dem Referenzzustand leicht gestörten hydrostatischen Gleichgewichtszustand ausgeht und diesen ausgehend vom Referenzzustand linearisiert. Tatsächlich existieren also nur in Ausnahmefällen hydrostatische Gleichgewichtszustände nahe dem Referenzzustand. Dies führt zu Problemen insbesondere bei der Aufstellung von Randbedingungen an der Kern-Mantel-Grenze.

2-7.4 Laplace-Transformation der konstitutiven Gleichungen; das Biot'sche Korrespondenzprinzip

Wenden wir auf die konstitutiven Gleichungen eine Laplace-Transformation an, so vereinfachen sich die Faltingsintegrale zu Produkten der Laplace-transformierten Relaxationsfunktionen und Verzerrungskomponenten. Wir fordern im folgenden stets

$$\mathbf{E}(t \leq 0) = 0 \quad (2-254)$$

Dann folgt für den isotropen Fall aus (2-239), (2-245), (C-2) und (C-3):

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\tau}^{IJ} &= s \cdot \frac{1}{3} \{3\tilde{K}(s) - 2\tilde{M}(s)\} \tilde{E}_{KL} G^{KL} G^{IJ} + 2s \cdot \tilde{M}(s) \tilde{E}^{IJ} = \\ &= s \cdot \frac{1}{3} \{3\tilde{K}(s) - 2\tilde{M}(s)\} \text{DIV } \tilde{\mathbf{u}} G^{IJ} + 2s \cdot \tilde{M}(s) \tilde{E}^{IJ} \end{aligned} \quad (2-255)$$

sowie ein entsprechender Ausdruck für das Inkrement des Cauchy-Tensors; speziell für inkompressibles Material folgt aus (2-249) mit Hilfe der Rechenregeln (C-2), (C-3)

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\sigma}(s) &\approx -\Delta \tilde{p}(s) \mathbf{I} + 2s \tilde{\mu}(s) \tilde{\mathbf{E}} \\ \text{DIV } \Delta \tilde{\sigma}(s) &\approx -\text{GRAD } \Delta \tilde{p}(s) - s \tilde{\mu}(s) \text{ROT ROT } \tilde{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (2-256)$$

s ist der (eventuell komplexe) Parameter der Laplace-Transformierten; die Laplace-transformierten Größen sind durch eine Tilde $\tilde{}$ gekennzeichnet. Wählt man eine feste, aber beliebige Frequenz s , so gleichen die Laplace-transformierten *viskoelastischen* konstitutiven Gleichungen formal den linear elastischen, wobei die Komponenten des Hooke-Tensors nun allerdings frequenzabhängig sind. Man spricht vom *Biot'schen Korrespondenzprinzip*. Es ist daher möglich, Lösungsprinzipien aus der linearen Elastizitätstheorie auf den viskoelastischen Fall zu übertragen.

2-7.5 Maxwell-Viskoelastizität

Wir benutzen in dieser Arbeit durchgehend das *Maxwell-Modell* für die Relaxationsfunktion $\mu(t-t')$ (vgl. etwa *R.M. Christensen, 1982, pp. 16-20*):

$$\mu(t-t') = \mu_e \exp(-\alpha(t-t')) H(t-t') \quad (2-257)$$

Dabei heißt μ_e (elastischer) Schermodul, α *inverse Maxwell-Zeit*. $H(t-t')$ ist wieder die Heaviside-Funktion. Häufig wird α gemäß

$$\alpha = \frac{\mu_e}{\eta} \quad (2-258)$$

zerlegt; η heißt *dynamische Viskosität*. Offensichtlich klingt gemäß (2-257) für $t \rightarrow \infty$ die Relaxationsfunktion $\mu(t - t')$ gegen 0 ab; Medien, die durch das Maxwell-Modell beschrieben werden können, erfüllen also die wichtigste Voraussetzung einer *viskoelastischen Flüssigkeit*.

Aus (2-257) ergibt sich durch Laplace-Transformation

$$\tilde{\mu}(s) = \frac{\mu_e}{s + \alpha} = \frac{\eta\mu_e}{\eta s + \mu_e} \quad (2-259)$$

2-7.6 Ein eindimensionales Beispiel zur Benutzung des Korrespondenzprinzips

In diesem Unterabschnitt zeigen wir an einem eindimensionalen Beispiel, wie mit Hilfe des Biot'schen Korrespondenzprinzips Anfangs-Randwertprobleme viskoelastischer Kontinua gelöst werden können. Vor allem wird jedoch an diesem Beispiel offensichtlich, dass durch die quasistatische Näherung Defekte entstehen können, durch die das jeweilige Problem unterbestimmt wird.

Wir betrachten eine nichtvorgespannte, nichtgravitierende viskoelastische Feder der Länge $2L$, die an beiden Enden auf Zug belastet wird. Der Ursprung der Koordinatenachse liege im Mittelpunkt der Feder. Das Spannungs-Dehnungsgesetz der Feder laute ($E(t)$ ist die Relaxationsfunktion des Young'schen Moduls, $u(X)$ die gesuchte Auslenkung)

$$\sigma(X, t) = \int_0^t E(t - t') \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial t'}(X, t') dt'$$

Dieses Spannungs-Dehnungs-Gesetz ist das eindimensionale Analogon zu (2-240): Statt den Relaxationsfunktionen $\hat{H}^{ijKL}(t - t')$ tritt im eindimensionalen Fall nur die Relaxationsfunktion des Young'schen Moduls $E(t - t')$ auf. Der Vorspannungsterm verschwindet im vorliegenden Beispiel. Damit ergibt sich die folgende Bewegungsgleichung der Feder:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(X, t) = \frac{\partial \sigma}{\partial X} = \int_0^t E(t - t') \frac{\partial^3 u}{\partial X^2 \partial t'}(X, t') dt'$$

Die Anfangs- und Randbedingungen sollen folgendermaßen lauten:

$$\begin{aligned} u(X, t \leq 0) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t}(X, t \leq 0) &= 0 \\ \sigma(X = L, t) &= f(t), & \sigma(X = -L, t) &= f(t) \end{aligned}$$

mit der vorgegebenen Funktion ("Boxcar-Funktion")

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & \text{für } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir haben damit eine konstante Belastung der Feder im Zeitraum $0 < t < 1$ angenommen. Die Laplace-Transformierte dieser Funktion ist

$$\tilde{f}(s) = \frac{f_0}{s}(1 - \exp(-s))$$

Für die Relaxationsfunktion wählen wir nach dem Maxwell-Modell

$$E(t - t') := E_0 \exp(-\alpha(t - t'))H(t - t') \quad \text{mit } \alpha > 0, E_0 > 0;$$

die Laplace-Transformierte dieser Funktion ist

$$\tilde{E}(s) = \frac{E_0}{s + \alpha}.$$

(Das Maxwell-Modell wurde im vorigen Abschnitt für die Relaxationsfunktion des *Schermoduls* μ eingeführt; es ist jedoch auch für die Relaxationsfunktion des Young'schen Moduls E realistisch: Beispielsweise ergibt sich für den inkompressiblen Fall ($k \rightarrow \infty$) aus der Tabelle (2-246) die Beziehung $E(t) = 3\mu(t)$.)

Unter den genannten Voraussetzungen soll die Verschiebung $u(X, t)$ der Feder bestimmt werden.

Anwendung der quasistatischen Näherung $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ und Laplace-Transformation der Bewegungsgleichungen ergibt mit Hilfe der Rechenregeln (C-2), (C-3) und Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} s \tilde{E}(s) = 0,$$

woraus für $s \neq 0$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} = 0$$

folgt. Die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung lautet

$$\tilde{u}(X, s) = \tilde{a}(s)X + \tilde{b}(s)$$

Die Laplace-Transformierte der Spannungsfunktion wird damit

$$\tilde{\sigma}(X, s) = s \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \tilde{E}(s) = s \tilde{a}(s) \tilde{E}(s).$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in die Randbedingungen ergibt sich jeweils dieselbe Gleichung, nämlich

$$\tilde{\sigma}(L, s) = \tilde{\sigma}(-L, s) = s \tilde{a}(s) \tilde{E}(s) = \tilde{f}(s),$$

woraus

$$\tilde{a}(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{s \tilde{E}(s)} = \frac{f_0}{E_0} \frac{(s + \alpha)}{s^2} (1 - \exp(-s))$$

folgt. Offensichtlich ist $\tilde{b}(s)$ aus den Randbedingungen nicht bestimmbar! Hätten wir an den beiden Enden verschiedene Randspannungen eingeführt, so wäre sogar bei der Bestimmung von $\tilde{a}(s)$ ein Widerspruch aufgetreten. Der Defekt lässt sich heben, wenn wir beispielsweise die Zusatzforderung

$$u(X = 0, t) = 0 \quad \forall t \quad \implies \quad \tilde{u}(X = 0, s) = 0 \quad \forall s$$

aufstellen, die sich aus dem Satz vom Massenmittelpunkt ergibt, da wir ja an beiden Enden der Feder dieselbe Spannung vorausgesetzt haben. Einsetzen dieser Zusatzbedingung in die allgemeine Lösung führt auf

$$\tilde{b}(s) = 0 \quad \forall s$$

Einsetzen der Koeffizientenfunktionen $\tilde{a}(s), \tilde{b}(s)$ in die allgemeine Lösung und inverse Laplace-Transformation ergibt

$$u(X, t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{f_0}{E_0} X(1 + \alpha t) & \text{für } 0 < t < 1 \\ \frac{f_0}{E_0} X \alpha & \text{für } 1 < t < \infty \end{array} \right\}$$

Schließlich kann zur Kontrolle die Lösung in das Spannungs-Dehnungsgesetz eingesetzt werden. Dabei ist der Sprung von u an der Stelle $t = 0$ in der Ableitung $\partial u / \partial t'$ als Dirac-Puls zu berücksichtigen. Es ergibt sich

$$\sigma(X, t) = \left\{ \begin{array}{ll} f_0 & \text{für } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}$$

so dass die quasistatische Gleichgewichtsbedingung und die Randbedingungen für die Spannung offensichtlich erfüllt sind.

Während etwa bei einer gedämpften elastischen Feder die Auslenkung nach dem Verschwinden der Belastung wieder gegen null geht, bleibt im Fall der viskoelastischen Feder eine konstante Auslenkung zurück.

Wird der inertielle Term nicht vernachlässigt, so ist im Laplace-Bereich die Gleichung

$$\rho s^2 \tilde{u} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} s \tilde{E}(s)$$

zu lösen. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung für $s \neq 0$ ist

$$\tilde{u}(X, s) = \tilde{C}_1(s) \cosh \left[\sqrt{\frac{\varrho s}{\tilde{E}(s)}} X \right] + \tilde{C}_2(s) \sinh \left[\sqrt{\frac{\varrho s}{\tilde{E}(s)}} X \right];$$

daraus ergibt sich die Spannungsfunktion

$$\bar{\sigma}(X, s) = s\tilde{E}(s) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} = s\sqrt{\varrho s \tilde{E}(s)} \left\{ \tilde{C}_1(s) \sinh \left[\sqrt{\frac{\varrho s}{\tilde{E}(s)}} X \right] + \tilde{C}_2(s) \cosh \left[\sqrt{\frac{\varrho s}{\tilde{E}(s)}} X \right] \right\}$$

Durch Einsetzen der beiden Randbedingungen erhalten wir die Gleichungen

$$s\sqrt{\varrho s \tilde{E}(s)} \left\{ \tilde{C}_1(s) \sinh \left[-\sqrt{\frac{\varrho s}{\tilde{E}(s)}} L \right] + \tilde{C}_2(s) \cosh \left[-\sqrt{\frac{\varrho s}{\tilde{E}(s)}} L \right] \right\} = \tilde{f}(s)$$

$$s\sqrt{\varrho s \tilde{E}(s)} \left\{ \tilde{C}_1(s) \sinh \left[\sqrt{\frac{\varrho s}{\tilde{E}(s)}} L \right] + \tilde{C}_2(s) \cosh \left[\sqrt{\frac{\varrho s}{\tilde{E}(s)}} L \right] \right\} = \tilde{f}(s)$$

Durch Lösung dieses Gleichungssystems folgt

$$\tilde{C}_1(s) = 0 \quad \tilde{C}_2(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{s\sqrt{\varrho s \tilde{E}(s)} \cosh \left[\sqrt{\frac{\varrho s}{\tilde{E}(s)}} L \right]}$$

und damit

$$\tilde{u}(X, s) = \frac{\tilde{f}(s)}{s\sqrt{\varrho s \tilde{E}(s)}} \frac{\sinh \left[\sqrt{\frac{\varrho s}{\tilde{E}(s)}} X \right]}{\cosh \left[\sqrt{\frac{\varrho s}{\tilde{E}(s)}} L \right]}$$

Verzichtet man also auf die quasistatische Näherung, so tritt keinerlei Defekt auf! Auch für den Fall unterschiedlicher Randspannungen an den Enden der Feder würde sich hier eine Lösung ergeben; der Massenmittelpunkt würde sich dann aus dem Koordinatenursprung herausbewegen. Ein erheblicher Vorteil der quasistatischen Näherung ist hier indessen, dass eine Rücktransformation in den Zeitbereich leicht möglich ist. Dagegen wird sich die eben hergeleitete Lösung kaum elementar in den Zeitbereich transformieren lassen.

Die quasistatische Näherung wird hier auch durch den Grenzübergang $\varrho \rightarrow 0$ realisiert. Wir können leicht zeigen, dass sich die vorher hergeleitete Lösung des Problems in quasistatischer Näherung ergibt, wenn wir diesen Grenzübergang in der vollständigen Lösung durchführen. Es ist nämlich

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \cosh \left[\sqrt{\frac{\varrho s}{\tilde{E}(s)}} L \right] = 1, \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \left\{ \sinh \left[\sqrt{\frac{\varrho s}{\tilde{E}(s)}} X \right] \cdot \left[\frac{\varrho s}{\tilde{E}(s)} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} = X$$

und daher

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(s)}{s\sqrt{\varrho s \tilde{E}(s)}} \frac{\sinh \left[\sqrt{\frac{\varrho s}{\tilde{E}(s)}} X \right]}{\cosh \left[\sqrt{\frac{\varrho s}{\tilde{E}(s)}} L \right]} = \frac{\tilde{f}(s)}{s\tilde{E}(s)} X$$

Das ist gerade die Lösung, die wir vorher in quasistatischer Näherung erhalten hatten.

Physikalisch lässt sich der aufgetretene Defekt in folgender Weise deuten: Aufgrund der vernachlässigten Trägheitskraft sind starre Verschiebungen der Feder möglich, ohne dass dadurch die quasistatische Gleichgewichtsbedingung verletzt würde, da diese ja nur das differentielle Verhalten der Feder bzw. die Relativbewegungen ihrer Teilchen festlegt.

2-7.7 Linearisierte Bewegungsgleichungen für ein isotropes, homogen geschichtetes viskoelastisches Kontinuum

Wir setzen nun das erläuterte Materialgesetz eines isotropen, viskoelastischen Kontinuums in die linearisierten Bewegungsgleichungen des Abschnitts 2-5.3 ein. Wir beschränken uns dabei auf 1. Variante; wir benutzen die Gleichungen (2-184) und (2-186). Zusätzlich wird eine homogene Schichtung vorausgesetzt, so dass die Ableitungen der Relaxationsfunktionen in (2-248) verschwinden.

Satz 2-46 :

Die linearisierten Bewegungsgleichungen für ein isotropes, homogen geschichtetes, kompressibles viskoelastisches Kontinuum lauten im Zeitbereich

$$\begin{aligned}
\varrho_0 \mathbf{a} &\approx [\varrho_0 (F_K U^K)_{|L} G^{LM} + \varrho_0 (\delta f)^M - \varrho_0 F^M U_{|K}^K] \mathbf{G}_M + \\
&+ \int_{-\infty}^t \left\{ (\lambda(t-t') + 2\mu(t-t')) \frac{D}{Dt'} (U_{|KL}^K G^{LM} - \mu(t-t') \frac{D}{Dt'} (U_{|KL}^K G^{LM} - U_{|KL}^M G^{KL})) \right\} dt' \mathbf{G}_M \\
&= \varrho_0 \text{GRAD} \langle \mathbf{F}, \mathbf{u} \rangle + \varrho_0 \delta \mathbf{f} - \varrho_0 \mathbf{F} \text{DIV} \mathbf{u} \\
&+ \int_{-\infty}^t \left\{ (\lambda(t-t') + 2\mu(t-t')) \frac{D}{Dt'} (\text{GRAD} \text{DIV} \mathbf{u}) - \mu(t-t') \frac{D}{Dt'} (\text{ROT} \text{ROT} \mathbf{u}) \right\} dt'
\end{aligned} \tag{2-260}$$

Die linearisierten Bewegungsgleichungen für ein isotropes, homogen geschichtetes, inkompressibles viskoelastisches Kontinuum lauten im Zeitbereich

$$\begin{aligned}
\varrho_0 \mathbf{a} &\approx \varrho_0 \delta f^M \mathbf{G}_M - \delta p_{,K} G^{KM} - \int_{-\infty}^t \left\{ \mu(t-t') \frac{D}{Dt'} (U_{|KL}^K G^{LM} - U_{|KL}^M G^{KL}) \right\} dt' \mathbf{G}_M \\
&= \varrho_0 \delta \mathbf{f} - \text{GRAD} \delta p(t) - \int_{-\infty}^t \left\{ \mu(t-t') \frac{D}{Dt'} (\text{ROT} \text{ROT} \mathbf{u}) \right\} dt'
\end{aligned} \tag{2-261}$$

Die Laplace-transformierten linearisierten Bewegungsgleichungen für ein isotropes, homogen geschichtetes, kompressibles viskoelastisches Kontinuum lauten

$$\begin{aligned}
\varrho_0 s^2 \tilde{\mathbf{u}} &\approx [\varrho_0 (F_K \tilde{U}^K)_{|L} G^{LM} + \varrho_0 (\delta \tilde{f})^M - \varrho_0 F^M \tilde{U}_{|K}^K] \mathbf{G}_M + \\
&+ s \left\{ (\tilde{\lambda}(s) + 2\tilde{\mu}(s)) \tilde{U}_{|KL}^K G^{LM} - \tilde{\mu}(s) (\tilde{U}_{|KL}^K G^{LM} - \tilde{U}_{|KL}^M G^{KL}) \right\} \mathbf{G}_M \\
&= \varrho_0 \text{GRAD} \langle \mathbf{F}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle + \varrho_0 \delta \tilde{\mathbf{f}} - \varrho_0 \mathbf{F} \text{DIV} \tilde{\mathbf{u}} + \\
&+ s (\tilde{\lambda}(s) + 2\tilde{\mu}(s)) \text{GRAD} \text{DIV} \tilde{\mathbf{u}} - s \tilde{\mu}(s) \text{ROT} \text{ROT} \tilde{\mathbf{u}}
\end{aligned} \tag{2-262}$$

Die Laplace-transformierten linearisierten Bewegungsgleichungen für ein isotropes, homogen geschichtetes, inkompressibles viskoelastisches Kontinuum lauten

$$\begin{aligned}
\varrho_0 s^2 \tilde{\mathbf{u}} &\approx \varrho_0 \delta \tilde{f}^M \mathbf{G}_M - \delta \tilde{p}_{,K} G^{KM} - s \tilde{\mu}(s) (\tilde{U}_{|KL}^K G^{LM} - \tilde{U}_{|KL}^M G^{KL}) \mathbf{G}_M \\
&= - \text{GRAD} \delta \tilde{p}(s) - s \tilde{\mu}(s) \text{ROT} \text{ROT} \tilde{\mathbf{u}} + \varrho_0 \delta \tilde{\mathbf{f}}
\end{aligned} \tag{2-263}$$

■

In der Literatur finden sich bereits Lösungen für kompressible geschichtete Erdmodelle, vgl. *B. Vermeersen et al. 1996*. Allerdings wird dort eine lineare Abhängigkeit der Schwere vom Radius vorausgesetzt, was eigentlich nur bei homogenen sphärischen Modellen zutrifft. Zudem ist für den Fall von homogen geschichteten kompressiblen Modellen i.allg. die Adams-Williamson-Gleichung (2-253) verletzt. Diese beiden Probleme sollten in zukünftigen Untersuchungen noch näher betrachtet werden. In der vorliegenden Arbeit beschränken wir uns auf den inkompressiblen Fall.

2–8 Randbedingungen

2–8.1 Randbedingungen an der Erdoberfläche

Die Flächenkräfte bzw. Spannungen, die an der Erdoberfläche angreifen, sind überaus vielfältig; sie reichen von Auflasten aller Art (Eis, Ozeane, Gebirge usw.) bis zu Scherkräften, z.B. Windschubspannungen an Gebirgen. Darüber hinaus können aber auch Kräfte im Inneren der Erde als Flächenkräfte modelliert werden, man denke an Spannungen, die an geophysikalischen Diskontinuitäten übertragen werden (z.B. Reibungskopplung an der Kern-Mantel-Grenze). In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns in erster Linie mit Auflasten an der Erdoberfläche. Diese werden durch die von der Erde selbst erzeugten Schwere gegen die Erdoberfläche gedrückt, so dass die Richtung des Randspannungsvektors mit der Richtung des Schwerevektors identisch ist. Da wir von einem hydrostatischen Grundzustand ausgehen, fällt diese Richtung in linearer Näherung auch mit der Richtung des unverzerrten Normalenvektors der Erdoberfläche zusammen. Die durch eine Auflast verursachte Randspannung ist in guter Näherung durch

$$\mathbf{t}_{(n)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \approx \varrho_{Last} h_{Last} \boldsymbol{\Gamma} =: \kappa \boldsymbol{\Gamma} \quad (2-264)$$

gegeben. Hier ist mit ϱ_{Last} die mittlere Dichte der Auflast, mit h_{Last} deren Mächtigkeit bezeichnet. (Bei strenger Rechnung müsste die Spannung durch eine Integration über die Auflast bestimmt werden; der Fehler bleibt jedoch klein, falls $\boldsymbol{\Gamma}$ und ϱ_{Last} im Bereich der Auflast wenig variieren. Auch müssten bei strenger Rechnung außer der Zentrifugalkraft weitere Trägheitskräfte berücksichtigt werden.) Das Produkt $\kappa := h_{Last} \varrho_{Last}$ kann als Flächenbelegung mit der Dimension Masse pro Flächeneinheit betrachtet werden. Es ist zu beachten, dass auch im Grundzustand eine Auflast vorhanden sein kann, falls das hydrostatische Gleichgewicht gewährleistet bleibt. Es sei aber angenommen, dass κ im gestörten ebenso wie im Grundzustand eine kleine Größe sei, so dass κ dieselbe Größenordnung besitzt wie $\Delta\kappa$.

Wir bezeichnen mit \mathbf{x}_P einen Randpunkt im gestörten Zustand, mit \mathbf{X}_P denselben Randpunkt im ungestörten Zustand und linearisieren die Randspannung im Lagrange-Bild:

Lemma 2-47 (Linearisierung der Randspannung):

$$\Delta \mathbf{t}_{(n)}(\mathbf{X}) \approx \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{X}) \Delta \kappa(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{X}) \varrho_{Last} \Delta h_{Last} \approx \Delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{X}) \quad \mathbf{X} \in \partial \mathcal{V}_0 \quad (2-265)$$

■

Beweis von Lemma 2-47 :

Mit Hilfe von $\boldsymbol{\Sigma} = -^{(0)}p(\mathbf{X}_P) \mathbf{I}$ wird

$$\Delta \mathbf{t}_{(n)}(\mathbf{x}_P) \approx \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{X}_P) \cdot \Delta \mathbf{n}(\mathbf{X}_P) + \Delta \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_P) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{X}_P) = -^{(0)}p(\mathbf{X}_P) \Delta \mathbf{n}(\mathbf{X}_P) + \Delta \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_P) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{X}_P), \quad (2-266)$$

andererseits ist

$$\Delta \mathbf{t}_{(n)}(\mathbf{x}_P) \approx \kappa_0(\mathbf{X}_P) \Delta \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{X}_P) + \Delta \kappa(\mathbf{X}_P) \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{X}_P) \approx \Delta \kappa \cdot \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{X}_P). \quad (2-267)$$

Wir haben hier die lineare Näherung der Rechenregel 1.) in (D-1) benutzt; da κ_0 und $\Delta \boldsymbol{\gamma}$ beide klein erster Ordnung sind, verschwindet ihr Produkt. Wegen $1 = \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \approx \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle + 2 \langle \mathbf{N}, \Delta \mathbf{n} \rangle = 1 + 2 \langle \mathbf{N}, \Delta \mathbf{n} \rangle$ ist $\mathbf{N} \perp \Delta \mathbf{n}$. Da \mathbf{N} gemäß (2-170) zu $\boldsymbol{\Gamma}$ parallel ist, gilt auch $\Delta \mathbf{n} \perp \boldsymbol{\Gamma}$. ■

(2-265) liefert drei Randbedingungen. Darüber hinaus existiert eine Randbedingung für das inkrementelle Schwerepotential, die i.allg. jedoch nicht lokal darstellbar ist. Mit Hilfe der dritten Green'schen Identität findet man beispielsweise für das inkrementelle Gravitationspotential

$$\delta v(\mathbf{X}_P) \approx -\frac{1}{2\pi} \iint_{\partial \mathcal{V}_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q|} \frac{d\delta v}{dn}(\mathbf{X}_Q)_+ - \delta v(\mathbf{X}_Q) \frac{d}{dn} \frac{1}{|\mathbf{X}_P - \mathbf{x}_Q|} \right] d^2 \mathbf{X}_Q \quad \mathbf{X}_P \in \partial \mathcal{V}_0$$

$$\text{wobei} \quad \left. \frac{d\delta v}{dn} \right|_+ \approx \left. \frac{d\delta v}{dn} \right|_- - 4\pi g \varrho_0 \langle \mathbf{u}(\mathbf{X}_P), \mathbf{N}_P \rangle - 4\pi g \kappa(\mathbf{X}_P)$$

Wir verzichten hier darauf, diese Linie weiterzuverfolgen; statt dessen verweisen wir auf das Kapitel 3, wo sämtliche beteiligten Feldgrößen in Kugelflächenfunktionen entwickelt werden und sich die gesuchte Randbedingung zwanglos ergibt: Das inkrementelle Gravitationspotential im Innern eines Körpers lässt sich zerlegen in einen *Schalen-* und einen *Kern-*Anteil, wobei der erstere durch Störmassen oberhalb des Aufpunktes, der letztere durch Störmassen unterhalb des Aufpunktes verursacht wird. (In der Kugelfunktionsentwicklung entspricht dem Schalenanteil eine Reihe mit ansteigenden Potenzen von R , dem Kernanteil eine Reihe mit absteigenden

Potenzen von R . Die Koeffizienten dieser Reihen sind i.allg. selbst noch von R abhängig; ist der Körper inkompressibel geschichtet, so sind die Koeffizienten innerhalb einer Schicht konstant.) Am Rand der äußersten Schicht (Erdoberfläche) wird der Schalenanteil nur durch die Auflast sowie durch die Normalkomponente des Verschiebungsvektors am Rand erzeugt (siehe hierzu auch (2-206)). Die Trennung von Schalen- und Kernanteil ist aber nicht mit lokalen Größen möglich.

2-8.2 Randbedingungen an inneren Schichtgrenzen

Um die unbekanntenen Zustandsgrößen der verschiedenen Schichten miteinander in Beziehung setzen zu können, werden Randbedingungen auch an den inneren Schichtgrenzen benötigt.

1.) Es liegt nahe zu fordern, dass zumindest der Normalanteil des Verschiebungsvektors stetig sein soll. (Wäre diese Bedingung verletzt, so könnten im Erdinneren entweder Hohlräume oder Bereiche entstehen, in denen sich Materie durchdringt.) Einige Autoren untersuchen den Fall, dass nicht der Normalanteil des Verschiebungsvektors selbst, sondern dessen Produkt mit der Massendichte stetig ist, vgl. *V. Corrieu et al. (1995)*, *A.M. Forte und W.R. Peltier (1991)*. Dieses Modell könnte angebracht sein, wenn Material während der Bewegung seine Phase ändert, beispielsweise aufschmilzt.

2.) Was den Tangentialanteil des Verschiebungsvektors betrifft, so muss unterschieden werden, ob Haft- oder Gleitreibung vorliegt (vgl. *Z. Martinec (1984)*). Bei den meisten Grenzen mag das erstere zutreffen, jedoch kommt gelegentlich auch das letztere vor, insbesondere an Schichtgrenzen zwischen festem und flüssigem oder flüssigem und flüssigem Material. So unterscheiden sich die Winkelgeschwindigkeitsvektoren von Mantel und Kern (vgl. *H. Jochmann (1991)*), und auch am Meeresboden tritt Gleitreibung auf. Diese Schichtgrenzen, an denen der Verschiebungsvektor i. allg. unstetig ist, verursachen bei der Modellierung erhebliche Schwierigkeiten. (Bereits die Existenz eines Ozeans, der die Erde nicht gleichmäßig bedeckt, führt zu Problemen, da sie zu lateralen Inhomogenitäten im Grundzustand führt.) Geht man von Haftreibung an der Schichtgrenze aus, so muss auch der Tangentialanteil des Verschiebungsvektors stetig sein. In der vorliegenden Arbeit fordern wir für sämtliche inneren Schichtgrenzen die Stetigkeit des Verschiebungsvektors \mathbf{u} .

3.) Wie in Abschnitt 2-6.1 ausgeführt, ist sowohl das Euler'sche als auch das Lagrange'sche Inkrement des Gravitationspotentials überall stetig. Dasselbe gilt für die Inkremente des Schwerepotentials.

4.) Die lineare Näherung des Euler'schen Inkrements des Gravitationsvektors ist auch an inneren Schichtgrenzen i.allg. unstetig; in Abschnitt 2-6.1 wurde die entsprechende Sprungrelation angegeben. Darin kommt nur der deformatorische Anteil zum Tragen, da wir annehmen, dass nur an der Erdoberfläche eine Auflast vorhanden ist. In Kapitel 3 wird diese Unstetigkeitsbedingung noch etwas modifiziert.

5.) Aus dem Prinzip "actio gleich reactio" ergibt sich die Stetigkeit des Spannungsvektors $\mathbf{t}_{(n)}$ sowie seines Lagrange'schen Inkrementes an der Schichtgrenze.

Wir setzen für sämtliche Schichten von der Erdoberfläche bis zur Kern-Mantel-Grenze viskoelastisches Verhalten mit nichtverschwindenden Relaxationsfunktion $\mu(t)$ voraus. In der Literatur wird häufig die Erdkruste als elastisch angenommen. Wir setzen hier auch die Erdkruste viskoelastisch mit sehr kleiner inverser Relaxationszeit α im Maxwell-Modell an. Das führt auf nahezu dieselben Ergebnisse, jedoch wird der Rechengang dadurch übersichtlicher, und es ergeben sich zusätzliche Möglichkeiten der Rechenkontrolle.

Zusammengefasst lauten also die Randbedingungen zunächst

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}(\mathbf{X})]_{\pm} &= 0 & [\Delta t_{(n)}(\mathbf{X})]_{\pm} &= 0 & [\delta w(\mathbf{X})]_{\pm} &= 0 \\ [\text{GRAD } \delta w(\mathbf{X})]_{\pm} &\approx -4\pi g[\varrho_0]_{\mp} < \mathbf{u}(\mathbf{X}), \mathbf{N}_P > \mathbf{N}_P. & \mathbf{X} \in S_i \end{aligned} \quad (2-268)$$

2-8.3 Randbedingungen an der Kern-Mantel-Grenze

Der untere Mantel ist die tiefste Schicht, die in der einschlägigen Literatur und auch in der vorliegenden Arbeit bei der Berechnung auflastinduzierter Deformationen modelliert wird. Der flüssige Kern würde eine gesonderte Behandlung erfordern: Wegen der fehlenden viskoelastischen Rückstellkräfte kann nicht mehr angenommen werden, dass die Verschiebungen materieller Teilchen gegenüber dem Referenzzustand "klein" bleiben. Die Lagrange'sche Betrachtungsweise wäre also nicht mehr zulässig. Eine dynamische Behandlung des flüssigen Kerns

wird wegen der damit verbundenen Schwierigkeiten mit Hilfe gewisser vereinfachender Annahmen in der Regel umgangen, siehe z.B. *M.A. Chinnery (1975)*. In der vorliegenden Arbeit verwenden wir die folgenden Annahmen:

- 1.) Die Kern-Mantel-Grenze ist die unterste Schichtgrenze, die durch die Oberflächenlast bzw. die durch sie verursachte inkrementelle Gravitationskraft eine Deformation erleidet.
- 2.) Im flüssigen Kern besteht zu jeder Zeit hydrostatisches Gleichgewicht.

Unter diesen Annahmen können Randbedingungen formuliert werden, welche nur noch die unbekanntes Feldgrößen des unteren Mantels, nicht aber die des flüssigen Kerns enthalten. Aus der ersten Annahme lässt sich eine Randbedingung herleiten, die den "Kern"-Anteil des inkrementellen Potentials im unteren Mantel beschreibt. Diese Bedingung kann nicht lokal formuliert werden; wir geben sie deshalb in Kapitel 3 an.

Die zweite Annahme ermöglicht es, eine Stetigkeitsbedingung für den Normalanteil der Spannung zu formulieren: Aus (2-168) folgt für den Kern

$$\text{GRAD } \delta\tilde{p}(s) = \varrho_0 \delta\tilde{\mathbf{f}} \implies \delta\tilde{p} = \varrho_0 \delta\tilde{w}$$

(Die Integrationskonstante verschwindet, weil es sich um inkrementelle Größen handelt und mit $\varrho_0 \delta\tilde{w} \equiv 0$ auch $\delta\tilde{p} \equiv 0$ gelten muss.) Aufgrund der zweiten Annahme gilt aber auch

$$\Delta\tilde{\mathbf{t}}_{(n)} = -\Delta\tilde{p}\mathbf{N} = -\delta\tilde{p}\mathbf{N} - \varrho_0 < \text{GRAD } W, \tilde{\mathbf{u}} > \mathbf{N} = -\varrho_0 \delta\tilde{w}\mathbf{N} - \varrho_0 < \text{GRAD } W, \tilde{\mathbf{u}} > \mathbf{N} \quad (2-269)$$

Aufgrund der Stetigkeit des Lagrange'schen Inkrementes der Normalspannung, der Stetigkeit des Störpotentials und der Stetigkeit des Normalanteils der Radialverschiebung lässt sich diese Gleichung auch durch die entsprechenden Größen des unteren Mantels an der Kern-Mantel-Grenze ausdrücken. Die Größen des Kerns (mit Ausnahme der bekannten Massendichte) können also vollständig aus der Gleichung eliminiert werden.

Eine weitere Randbedingung ergibt sich aus dem Verschwinden der Tangentialspannung an der Kern-Mantel-Grenze.

Die erste Annahme stellt eine starke Einschränkung dar, obwohl die Auflast am meisten die Erdkruste, die tieferliegenden Schichten aber in abnehmendem Maße beeinflussen wird. Die zweite Annahme unterbindet die Trägheitskräfte mit Ausnahme der Zentrifugalkraft an der Kern-Mantel-Grenze. Inwieweit die Lösungen für die Verschiebungen und das inkrementelle Gravitationspotential sowie die inkrementelle Rotation durch die Annahmen beeinträchtigt werden, sollte in zukünftigen Untersuchungen näher geklärt werden. Eine Auswirkung besteht darin, dass eine Resonanzstelle der Erdrotation, der "nearly diurnal free wobble", im beschriebenen Modell nicht erscheint.

2-9 Globale Drehimpulsbilanz

2-9.1 Defekte der quasistatischen Bewegungsgleichungen

Durch die Vernachlässigung des Trägheitsterms treten in den quasistatischen Bewegungsgleichungen Defekte auf (siehe hierzu das Beispiel in Abschnitt 2-7.6). Sowohl die Darstellung der inkrementellen Flächenkräfte als auch die der inkrementellen Gravitationskräfte in einem "körperfesten" Koordinatensystem hängt nur vom Verzerrungszustand, nicht etwa von der Position und der Orientierung des Körpers im inertialen Raum ab. Das bedeutet, im Gegensatz zu den originalen Bewegungsgleichungen unterscheiden die quasistatischen nicht zwischen Zuständen mit demselben Verzerrungszustand; werden die "quasistatischen" Feldgleichungen durch ein bestimmtes Verschiebungsfeld gelöst, so erhält man weitere Lösungen durch Superposition starrer Translationen und Rotationen. Um diese Defekte zu beheben, müssen die erwähnten Defekte durch Hinzunahme weiterer Gleichungen behoben werden (wodurch allerdings die gesamte Formulierung inkonsistent wird).

Zum ersten gehen wir im folgenden davon aus, dass sich die Lage des Massenmittelpunktes durch eine angreifende Auflast nicht verändert. Mit dieser Annahme ist der "translative Defekt" behoben. Dass sie nicht ganz der Realität entspricht, zeigt der folgende Satz:

Satz 2-48 :

Im Rahmen der obengenannten Näherungen ist die Summe der von den aufliegenden Massen erzeugten Kräfte auf den Erdkörper gerade gleich dem Randintegral über die Flächenbelegung κ multipliziert mit der Zentrifugalbeschleunigung. ■

Beweis von Satz 2-48 :

Die Kräftesumme, die nach dem Impulssatz der Gesamtmasse mal der Beschleunigung des Massenmittelpunktes gleicht, ist hier durch die Summe der beiden Integrale in (2-154) gegeben:

$$M\mathbf{a}^M = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathbf{t}_{(n)}(\mathbf{x}, t) d^2\mathbf{x}. \quad (2-270)$$

Wir setzen hier gemäß (2-264) die Randspannung

$$\mathbf{t}_{(n)}(\mathbf{x}_P) = \kappa(\mathbf{x}_P)\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_P) = \kappa(\mathbf{x}_P)\left(g \int_{\mathcal{V}} \varrho(\mathbf{x}_Q) \operatorname{grad}_P \frac{1}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|} d^3\mathbf{x}_Q + \operatorname{grad}_P V_{Zent}(\mathbf{x}_P)\right)$$

und als Volumenkraftdichte die von den aufliegenden Massen erzeugte Gravitationskraft

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_P) = g \int_{\partial\mathcal{V}} \kappa(\mathbf{x}_Q) \operatorname{grad}_P \frac{1}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|} d^2\mathbf{x}_Q$$

ein. Berücksichtigt man $\operatorname{grad}_P = -\operatorname{grad}_Q$ und vertauscht in dem ersten Summanden in (2-154) das Volumen- und das Flächenintegral, so ergibt sich

$$M\mathbf{a}^M = \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \kappa(\mathbf{x}) \operatorname{grad} V_{Zent}(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x}. \quad (2-271)$$

■

Zur tatsächlichen Änderung des Massenmittelpunktes siehe z.B. *D. Dong et al. 1997*.

Der “rotatorische Defekt” wird üblicherweise behoben, indem man die ersten integralen Momente der originalen Bewegungsgleichungen bildet. Die drei antisymmetrischen Momente, die durch Integration des Kreuzproduktes des Ortsvektors mit den Bewegungsgleichungen entstehen, heißen *Drehimpulsgleichungen*. Noch einmal sei betont: Bei Verwendung der originalen Bewegungsgleichungen mit geeigneten Rand- und Anfangsbedingungen sind die Drehimpulsgleichungen überflüssig.

Die Hinzunahme dieser Gleichungen hat freilich den Vorteil, dass sich daraus der Winkelgeschwindigkeitsvektor des jeweiligen “körperfesten” Systems ergibt, der sonst in einem weiteren Schritt aus den Definitionsgleichungen des gewählten Systems berechnet werden müsste, siehe Abschnitt 2-3. Diese Definitionsgleichungen gehen über die spezielle Form des relativen Drehimpulses \mathbf{H}^{Rel} implizit in die Drehimpulsgleichungen ein.

2-9.2 Linearisierung der Drehimpulsbilanz, Euler-Liouville-Gleichungen

In Abschnitt 2-3.3 wurden verschiedene rotierende Systeme eingeführt, deren Orientierung bzw. Winkelgeschwindigkeitsvektor bezüglich des Inertialsystems als Funktional des (von vornherein unbekanntem) Geschwindigkeitsfeldes definiert ist. Mit Hilfe von vereinfachenden Annahmen lassen sich jedoch für einen Teil der Systeme aus Abschnitt 2-3.3 die Winkelgeschwindigkeitsvektoren aus der globalen Drehimpulsbilanz berechnen, ohne dass hierzu die Kenntnis des Geschwindigkeitsfeldes notwendig wäre; es genügt vielmehr die Kenntnis der Trägheitsmomente und ihrer zeitlichen Änderungen sowie der angreifenden äußeren Momente. Wir setzen hier wieder voraus, dass alle Systeme orthonormiert sind.

Wir zerlegen den Drehimpulsvektor \mathbf{H} gemäß

$$\mathbf{H} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}^{Rel} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} \times \mathbf{v}^{Rel}) d^3 \mathbf{x}, \quad (2-272)$$

wobei der erste Teil einer starren Rotation entspricht. Gemäß (2-114) lässt sich die Zeitableitung von \mathbf{H} bezüglich des Inertialsystems wiederum mit

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{H}}{dt} &= \frac{d'\mathbf{H}}{dt'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \frac{d'}{dt'} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}^{Rel}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}^{Rel}) \\ &= \frac{d'\mathbf{J}}{dt'} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J} \cdot \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt'} + \frac{d'\mathbf{H}^{Rel}}{dt'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}^{Rel} \end{aligned} \quad (2-273)$$

in das körperfeste System überführen. Wir linearisieren diese Gleichung bezüglich eines ungestörten Zustandes:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{J}_0 + \delta \mathbf{J} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{J}}_0 = \text{diag}(A, B, C), \\ \boldsymbol{\omega} &= \Omega \bar{\mathbf{e}}_3 + \delta \boldsymbol{\omega} =: \Omega(m_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + m_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + (1 + m_3) \bar{\mathbf{e}}_3). \end{aligned} \quad (2-274)$$

m_i sollte nicht mit den Momentendichten aus Abschnitt 2-5.1 verwechselt werden. m_3 gibt die Änderung der polaren Komponente der Winkelgeschwindigkeit, also der Tageslänge an; aus m_1, m_2 lässt sich die Richtungsänderung des Winkelgeschwindigkeitsvektors bezüglich des mitrotierenden Systems, also die Polbewegung ableiten.

Im ungestörten Zustand wird also der Trägheitstensor im rotierenden System durch eine Diagonalmatrix mit den Hauptträgheitsmomenten A, B, C dargestellt; der Winkelgeschwindigkeitsvektor ist im ungestörten Zustand konstant, hat die Richtung der $\bar{\mathbf{e}}_3$ -Achse und den Betrag Ω . Bezüglich des rotierenden Systems lautet die Drehimpulsbilanz, aufgelöst in kartesischen Koordinaten (wir lassen ab hier jeweils die oberen Querstriche weg):

Satz 2-49 (nichtlineare Drehimpulsbilanz):

$$\begin{aligned} &\Omega \begin{bmatrix} \delta \dot{J}_{13} + A \dot{m}_1 + \Omega(C - B)m_2 - \Omega \delta J_{23} + \dot{H}_1^{Rel} - \Omega H_2^{Rel} \\ \delta \dot{J}_{23} + B \dot{m}_2 + \Omega(A - C)m_1 + \Omega \delta J_{13} + \dot{H}_2^{Rel} + \Omega H_1^{Rel} \\ \delta \dot{J}_{33} + C \dot{m}_3 + \dot{H}_3^{Rel} \end{bmatrix} + \\ &+ \Omega \begin{bmatrix} (\delta \dot{J}_{11} m_1 + \delta \dot{J}_{12} m_2 + \delta \dot{J}_{13} m_3) + (\delta J_{11} \dot{m}_1 + \delta J_{12} \dot{m}_2 + \delta J_{13} \dot{m}_3) - \Omega(\delta J_{21} m_1 + \delta J_{22} m_2 + \delta J_{23} m_3) \\ (\delta \dot{J}_{21} m_1 + \delta \dot{J}_{22} m_2 + \delta \dot{J}_{23} m_3) + (\delta J_{21} \dot{m}_1 + \delta J_{22} \dot{m}_2 + \delta J_{23} \dot{m}_3) + \Omega(\delta J_{11} m_1 + \delta J_{12} m_2 + \delta J_{13} m_3) \\ + (\delta \dot{J}_{31} m_1 + \delta \dot{J}_{32} m_2 + \delta \dot{J}_{33} m_3) + (\delta J_{31} \dot{m}_1 + \delta J_{32} \dot{m}_2 + \delta J_{33} \dot{m}_3) \end{bmatrix} + \\ &+ \Omega \begin{bmatrix} \Omega m_2 m_3 (C - B) + \Omega(\delta J_{33} m_2 - \delta J_{23} m_3) + (m_2 H_3^{Rel} - m_3 H_2^{Rel}) \\ \Omega m_3 m_1 (A - C) + \Omega(\delta J_{13} m_3 - \delta J_{33} m_1) + (m_3 H_1^{Rel} - m_1 H_3^{Rel}) \\ \Omega m_1 m_2 (B - A) + \Omega(\delta J_{23} m_1 - \delta J_{13} m_2) + (m_1 H_2^{Rel} - m_2 H_1^{Rel}) \end{bmatrix} + \\ &+ \Omega^2 \begin{bmatrix} \delta J_{31} m_1 m_2 + \delta J_{32} m_2^2 + \delta J_{33} m_2 m_3 - \delta J_{21} m_1 m_3 - \delta J_{22} m_2 m_3 - \delta J_{23} m_3^2 \\ \delta J_{11} m_1 m_3 + \delta J_{12} m_2 m_3 + \delta J_{13} m_3^2 - \delta J_{31} m_1^2 - \delta J_{32} m_1 m_2 - \delta J_{33} m_1 m_3 \\ \delta J_{21} m_1^2 + \delta J_{22} m_1 m_2 + \delta J_{23} m_3 m_1 - \delta J_{11} m_1 m_2 - \delta J_{12} m_2^2 - \delta J_{13} m_2 m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-275)$$

■

Dabei bedeuten M_1, M_2, M_3 die Komponenten des Gesamtmomentes, dargestellt im rotierenden System.

Betrachten wir $\delta \mathbf{J}$ und $\delta \boldsymbol{\omega}$ als kleine Größen 1. Ordnung, so ergibt die oberste Spaltenmatrix des Systems gerade die linke Seite der Drehimpulsbilanz in linearer Näherung .

Je nach Wahl des bewegten Systems lässt sich der lineare Anteil der Gleichungen (2-275) noch weiter vereinfachen. Für die 4. Variante in Abschnitt 2-3.3 (Tisserand-System) gilt $\mathbf{H}^{Rel} = d'\mathbf{H}^{Rel}/dt' = 0$, daher in linearer Näherung

Satz 2-50 :

Für das Tisserand-System gilt:

$$\begin{aligned}
 A\Omega \frac{d'm_1}{dt'} + (C - B)\Omega^2 m_2 + \Omega \frac{d'\delta J_{13}}{dt'} - \Omega^2 \delta J_{23} &\approx M_1 \\
 B\Omega \frac{d'm_2}{dt'} + (A - C)\Omega^2 m_1 + \Omega \frac{d'\delta J_{23}}{dt'} + \Omega^2 \delta J_{13} &\approx M_2 \\
 C\Omega \frac{d'm_3}{dt'} + \Omega \frac{d'\delta J_{33}}{dt'} &\approx M_3 \quad ,
 \end{aligned} \tag{2-276}$$

■

für die 5. Variante (Hauptachsen-System) ist $\delta J_{ij} \equiv 0$, also

$$\begin{aligned}
 A\Omega \frac{d'm_1}{dt'} + (C - B)\Omega^2 m_2 + \frac{d'H_1^{Rel}}{dt'} - \Omega H_2^{Rel} &= M_1 \\
 B\Omega \frac{d'm_2}{dt'} + (A - C)\Omega^2 m_1 + \frac{d'H_2^{Rel}}{dt'} + \Omega H_1^{Rel} &= M_2 \\
 C\Omega \frac{d'm_3}{dt'} + \frac{d'H_3^{Rel}}{dt'} &= M_3 \quad .
 \end{aligned} \tag{2-277}$$

In der vorliegenden Arbeit wird hauptsächlich das Tisserandssystem benutzt; wir gehen von einer im Grundzustand *rotationssymmetrischen* Erde aus, so dass $A = B$ gilt. Führt man die komplexen Größen $m := m_1 + im_2$, $\delta J := \delta J_{13} + i\delta J_{23}$ sowie $M := M_1 + iM_2$ ein (i ist die imaginäre Einheit), so lassen sich die ersten beiden Gleichungen der linearisierten Drehimpulsbilanz in einfacher Weise zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
 A\Omega \frac{d'm}{dt'} - i(C - A)\Omega^2 m + \Omega \frac{d'\delta J}{dt'} + i\Omega^2 \delta J &= M \\
 C\Omega \frac{d'm_3}{dt'} + \Omega \frac{d'\delta J_{33}}{dt'} &= M_3
 \end{aligned} \tag{2-278}$$

In linearer Näherung sind offensichtlich die Gleichungen für die Tageslängenänderung und die Polbewegung entkoppelt.

Wir werden in den folgenden Abschnitten die Impuls- und Drehimpulsbilanz im Laplace-Bereich lösen. Die wichtigsten Rechenregeln der Laplace-Transformation sind im Anhang C zusammengefasst. Für die Laplace-Transformierte einer Funktion $f(t)$ schreiben wir $\mathcal{L}(f)(s)$ oder kürzer $\tilde{f}(s)$. Die Laplace-Transformation der Drehimpulsbilanz ergibt

$$\begin{aligned}
 As\Omega\tilde{m} - i(C - A)\Omega^2\tilde{m} + s\Omega\tilde{\delta J} + i\Omega^2\delta\tilde{J} &= \tilde{M} \\
 Cs\Omega\tilde{m}_3 + s\Omega\delta\tilde{J}_{33} &= \tilde{M}_3
 \end{aligned} \tag{2-279}$$

2-9.3 Änderung des Trägheitstensors und äußere Momente

Wird die Rotation einer gleichförmig rotierenden, viskoelastischen Erde durch Einwirkung von Auflasten (z.B. Eis) gestört, so erlauben die Gleichungen der Drehimpulsbilanz zwei verschiedene Interpretationen:

1.) Eine mögliche Modellannahme ist, bei der Auflast handele es sich um eine *äußere Randspannung*, die ein zugehöriges *äußeres Moment* erzeugt. Da ja die Auflast aus einer *Massenumlagerung* nahe der Erdoberfläche entsteht (beispielsweise verdunstet Wasser aus den Ozeanen und wird auf dem Festland als Schnee oder Eis abgelagert), treten positive und negative Randspannungen auf. Durch die Auflast werden Spannungen und dadurch Verschiebungen erzeugt, so dass sich auch der Trägheitstensor ändert. Jedoch wird die Auflast selbst gemäß dieser Modellvorstellung nicht in die Änderung des Trägheitstensors einbezogen.

2.) Die Auflast wird als zum Erdkörper gehörig betrachtet und daher ihr Effekt in der Änderung des Trägheitstensors berücksichtigt – zusätzlich zu der Änderung, die durch Verschiebungen im Erdinneren entstehen. Nach dieser Modellvorstellung gibt es keine äußeren Momente (falls nicht zusätzlich die Gezeitenwirkungen der Himmelskörper betrachtet werden), die Euler-Liouville-Gleichungen sind in diesem Sinne homogen.

Diese Annahme wird nur für die Drehimpulsbilanz getroffen; in der linearisierten Impulsbilanz muss die Auflast also durch eine äußere Randspannung approximiert werden.

Beide Interpretationen lassen offen, welche Übertragungen von Drehimpuls – beispielsweise zwischen Sonne und Erde oder zwischen Ozean und Atmosphäre – *während der Umlagerung selbst* stattfinden. Es handelt sich dabei um einen komplexen meteorologischen Vorgang, der in der vorliegenden Arbeit nicht weiter betrachtet werden soll. Wir nehmen hier an, dass die Last momentan umgelagert wird und sich am neuen Ort (zumindest eine kurze Zeit lang) in Ruhe befindet. Es stellt sich jedoch die Frage, ob die beiden genannten Interpretationen der Drehimpulsbilanz auf dasselbe Ergebnis führen. Antwort darauf gibt ein Satz, der die Gleichheit der entsprechenden Ausdrücke in der Drehimpulsbilanz sicherstellt:

Satz 2-51 :

Für die Drehimpulsbilanz ist es in linearer Näherung gleichbedeutend, ob die Auflast in den inkrementellen Trägheitstensor einbezogen wird oder ob die Auflast als momenterzeugende äußere Kraftdichte behandelt wird. Ebenso ist die Definition des Tisserandsystems von dieser Entscheidung in linearer Näherung unabhängig. ■

Beweis von Satz 2-51 :

Wie vorher näher erläutert, modellieren wir die Auflast als *Flächendichte* $\kappa(\mathbf{X})$ mit der Dimension Masse pro Flächeneinheit. Betrachten wir das Moment der Auflast, so haben wir den Anteil der Flächenkraft (Auflast drückt auf die Erdoberfläche) und den gravitativen Anteil (Auflast zieht die Massenelemente der Erde an) zu berücksichtigen.

Der von der Auflast erzeugte Gravitationsvektor in einem beliebigen Massenelement der Erde lautet

$$\boldsymbol{\gamma}^{Last}(\mathbf{X}) = \int_{\partial\mathcal{V}'} \frac{\kappa(\mathbf{X}') (\mathbf{X}' - \mathbf{X})}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}'|^3} d^2\mathbf{X}' \quad (2-280)$$

Das dadurch erzeugte äußere Moment ist

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{Grav} &= g \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{X}) \mathbf{X} \times \boldsymbol{\gamma}^{Last}(\mathbf{X}) d^3\mathbf{X} = g \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{X}) \mathbf{X} \times \left[\int_{\partial\mathcal{V}'} \frac{\kappa(\mathbf{X}') (\mathbf{X}' - \mathbf{X})}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}'|^3} d^2\mathbf{X}' \right] d^3\mathbf{X} \\ &= - \int_{\partial\mathcal{V}'} \kappa(\mathbf{X}') \mathbf{X}' \times \left[g \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{X}) \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}')}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}'|^3} d^3\mathbf{X} \right] d^2\mathbf{X}' = - \int_{\partial\mathcal{V}'} \kappa(\mathbf{X}') \mathbf{X}' \times \boldsymbol{\gamma}_{Grav}(\mathbf{X}') d^2\mathbf{X}' \end{aligned} \quad (2-281)$$

Die Kraft pro Flächeneinheit, welche die Auflast erzeugt, ist in linearer Näherung $\kappa\boldsymbol{\gamma}$, das zugehörige Moment lautet

$$\mathbf{M}_{Randspannung} = \int_{\partial\mathcal{V}} \kappa(\mathbf{X}) \mathbf{X} \times \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{X}) d^2\mathbf{X} \quad (2-282)$$

Im resultierenden Moment als der Summe aus gravitativem Moment und Flächenkraft-Moment verbleibt somit gerade das Moment des Zentrifugal-Anteils des Schwerevektors:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{Grav} + \mathbf{M}_{Randspannung} \approx \int_{\partial\mathcal{V}} \kappa(\mathbf{X}) \mathbf{X} \times \boldsymbol{\gamma}_{Zent}(\mathbf{X}) d^2\mathbf{X} \quad (2-283)$$

In linearer Näherung genügt es, den Term 0-ter Ordnung für $\boldsymbol{\gamma}_{Zent}$ einzuführen, der einem konstanten Winkelgeschwindigkeitsvektor entspricht; wir wählen wieder $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_z$. Damit wird

$\boldsymbol{\Gamma}_{Zent} = \Omega^2\mathbf{X} - \langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{X} \rangle \boldsymbol{\Omega} = \Omega^2(\mathbf{X} - Z\mathbf{e}_z)$ und

$$\mathbf{M} \approx \Omega^2 \int_{\partial\mathcal{V}} \kappa(\mathbf{X}) (-Y Z \mathbf{e}_x + X Z \mathbf{e}_y) d^2\mathbf{X} \quad (2-284)$$

Wir vergleichen diesen Ausdruck mit dem Term, den wir in der Drehimpulsbilanz erhalten, wenn wir statt dessen die Auflast als zum Körper gehörig betrachten. Auf der linken Seite der Gleichungen (2-276) erscheinen die Ausdrücke $\Omega \frac{d'}{dt'} \delta J_{13} - \Omega^2 \delta J_{23}$ in der ersten Zeile (x-Komponente) bzw. $\Omega \frac{d'}{dt'} \delta J_{23} + \Omega^2 \delta J_{13}$ in der zweiten Zeile

(y-Komponente). Mit der Definition (2-137) wird

$$\delta J_{23} = \int_{\partial \mathcal{V}} \kappa(\mathbf{X}) (-YZ) d^2 \mathbf{X}, \quad \delta J_{13} = \int_{\partial \mathcal{V}} \kappa(\mathbf{X}) (-XZ) d^2 \mathbf{X},$$

so dass diese Ausdrücke bis auf das Vorzeichen gerade gleich den Momenten M_x bzw. M_y sind. Die Terme mit den relativen Zeitableitungen der Trägheitsmomente verschwinden in linearer Näherung, denn gemäß dem Durchziehsatz ist beispielsweise

$$\frac{d' \delta J_{13}}{dt'} = \int_{\partial \mathcal{V}} \kappa(\mathbf{X}) (-Xv_y - Yv_x) d^2 \mathbf{X},$$

wobei sowohl κ als auch v_x, v_y kleine Größen sind. Entsprechend ist auch das Tisserand-System in linearer Näherung unabhängig davon, ob die Auflast bei der Definition berücksichtigt wird oder nicht. ■

3. Kontinuumsmechanische Elemente eines viskoelastischen, homogen geschichteten, sphäroidischen Erdmodells – dargestellt in Kugelflächenfunktionen

Wir entwickeln die im Kapitel 2 auftretenden Feldgrößen in skalaren, vektoriellen bzw. tensoriellen Kugelflächenfunktionen (im folgenden abgekürzt mit Kff). Die Definitionen der Kff sind im Anhang A aufgeführt. Die skalaren und vektoriellen Kff werden jeweils alternativ reell und komplex definiert. Die Zahl der Kff – ebenso wie die der zugehörigen Koeffizienten – eines bestimmten Grades ist bei der reellen und der komplexen Definition dieselbe. Die Trennung der komplexen Kff-Koeffizienten eines Grades in Real- und Imaginärteile ergibt eine redundante Information: Die Real- und Imaginärteile der Koeffizienten von negativer Ordnung m lassen sich durch die Real- und Imaginärteile der Koeffizienten der positiven Ordnung $|m|$ ausdrücken. Die negativen Ordnungen können daher bei den komplexen Kff weggelassen oder zur Rechenkontrolle verwendet werden.

Während die reellen Kff einfacher zu berechnen und zu interpretieren sind, erlauben die komplexen Kff eine einfachere Rekombination: Produkte von Kff lassen sich i. allg. wieder als endliche gewichtete Summe von Kff darstellen. Die zugehörigen Koeffizienten besitzen im Falle der komplexen Kff angenehme Symmetrieeigenschaften, welche insbesondere die Berechnung nichtsphärischer Erdmodelle erleichtern. Zudem lässt sich die Polbewegung bzw. Polwanderung durch nur einen einzigen komplexen Kff-Koeffizienten darstellen (nämlich denjenigen vom Grad 2 und der Ordnung ± 1). Wir benutzen daher in dieser Arbeit im wesentlichen die komplexen Kff (die skalaren komplexen Kff werden hier mit $Y_{l,m}$ bezeichnet). Neben den im Anhang A angegebenen Definitionen sind in der Literatur noch alternative Definitionen gebräuchlich, die sich aber meist nur durch die Normierung (also einen konstanten Faktor) unterscheiden.

Fast alle Formeln dieses und der folgenden Abschnitte gelten nur in linearer, sphäroidischer Approximation. Wir verzichten im folgenden auf das Näherungszeichen \approx und verwenden das Gleichheitszeichen.

3–1 Das sphärische Koordinatensystem $\{R, \Lambda, \Phi\}$ und das quasisphärische System $\{\bar{R}, \bar{\Lambda}, \bar{\Phi}\}$

Wir benutzen im folgenden häufig das sphärische Koordinatensystem. Da wir stets im Lagrange-Bild arbeiten, notieren wir die Koordinaten mit Großbuchstaben. Es bedeuten wie üblich Λ die zentrische Länge, Φ die zentrische Breite, R den zentrischen Abstand.

Zusätzlich führen wir ein Koordinatensystem ein, das sich besser als das Kugelkoordinatensystem zur Darstellung der Randbedingungen eignet. Die Äquipotentialflächen des Schwerepotentials im hydrostatischen Grundzustand sowie die Grenzflächen der Dichte (die, wie im Abschnitt 2-5.2 gezeigt, mit Äquipotentialflächen zusammenfallen) sind für den Fall eines rotierenden Erdmodells keine Kugeln, sondern Rotations-Sphäroide. In linearer Näherung ergeben sich Flächen, deren zentrischer Abstand durch eine Linearkombination der zonalen Kff vom Grad 2 und vom Grad 0 als Funktion der zentrischen Breite dargestellt werden kann. Insbesondere ist im hydrostatischen Grundzustand die Erdoberfläche ein Rotations-Sphäroid. Die Sphäroide unterscheiden sich von Rotationsellipsoiden nur durch Terme quadratischer und höherer Ordnung in der Exzentrizität bzw. Abplattung.

Für die Darstellung der Randbedingungen ist es von Vorteil, wenn die Rand- bzw. Grenzflächen gerade mit Koordinatenflächen zusammenfallen. Bei den Kugelkoordinaten gilt dies i. allg. nicht. Wir behalten die zentrische Länge und Breite als Koordinaten $\bar{\Lambda}$, $\bar{\Phi}$ bei, ersetzen jedoch den Abstand vom Ursprung R durch eine Koordinate \bar{R} , welche auf sphäroidischen Koordinatenflächen konstant ist. Für beliebige Punkte gilt $\bar{\Lambda} = \Lambda$, $\bar{\Phi} = \Phi$. Wir benutzen verschiedene Symbole, weil sich beispielsweise die partiellen Ableitungen nach Φ und $\bar{\Phi}$ unterscheiden. (Bei den partiellen Ableitungen nach Φ werden Λ und R , bei den partiellen Ableitungen nach $\bar{\Phi}$ werden $\bar{\Lambda}$ und \bar{R} festgehalten.) So liegt etwa der Basisvektor \mathbf{G}_Φ in der Tangentialebene an eine zentrische Kugel, der Basisvektor $\mathbf{G}_{\bar{\Phi}}$ dagegen in der Tangentialebene an ein zentrisches Sphäroid.

Das gewählte Koordinatensystem hat den Nachteil, dass es i. allg. nicht orthogonal ist, dass sich also die Koordinatenlinien nicht senkrecht schneiden und die Matrix des Metriktensors auch nichtverschwindende Außerdiagonalelemente besitzt. In der Geodäsie sind durchaus auch ellipsoidische orthogonale Koordinatensysteme gebräuchlich, vgl. *N.C. Thong, E.W. Grafarend (1989)* sowie die dort aufgeführte Literatur. Bei diesen Systemen kann aber jeweils nur *ein* Parameter frei gewählt werden, beispielsweise die Exzentrizität einer bestimmten Rand- bzw. Grenzfläche. Damit liegen dann die Exzentrizitäten sämtlicher Koordinatenflächen fest. I. allg. kann damit also nur erreicht werden, dass eine einzige Grenzfläche Koordinatenfläche ist. Diese Einschränkung ist beispielsweise bei den geodätischen Randwertproblemen für den Außenraum der Erde ohne Belang, da nur eine Randfläche

auftritt. Dagegen sind bei realistischen Erdmodellen eine Vielzahl von inneren Grenzflächen zu beachten, deren Exzentrizität durch den hydrostatischen Grundzustand festgelegt wird.

Wir wählen \bar{R} als den mittleren Abstand der sphäroidischen Koordinatenflächen vom Ursprung im Sinne von (A-106). Mit (A-107) lautet die Transformation zwischen den Kugel- und den quasisphärischen Koordinaten:

$$\Lambda = \bar{\Lambda} \quad \Phi = \bar{\Phi} \quad R = R(\bar{\Phi}, \bar{R}) = \bar{R} \left(1 - \frac{e^2(\bar{R})}{3\sqrt{5}} Y_{2,0}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi}) \right). \quad (3-1)$$

Dabei ist die Exzentrizität e^2 der sphäroidischen Koordinatenflächen i. allg. selbst eine Funktion von \bar{R} . Die Jacobi-Matrix \underline{J}_{qk} der Transformation zwischen quasisphärischen und kartesischen Koordinaten lautet

$$\underline{J}_{qk} = \begin{bmatrix} -R \cos \bar{\Phi} \sin \bar{\Lambda} & \frac{\partial R}{\partial \bar{\Phi}} \cos \bar{\Phi} \cos \bar{\Lambda} - R \sin \bar{\Phi} \cos \bar{\Lambda} & \frac{\partial R}{\partial \bar{R}} \cos \bar{\Phi} \cos \bar{\Lambda} \\ R \cos \bar{\Phi} \cos \bar{\Lambda} & \frac{\partial R}{\partial \bar{\Phi}} \cos \bar{\Phi} \sin \bar{\Lambda} - R \sin \bar{\Phi} \sin \bar{\Lambda} & \frac{\partial R}{\partial \bar{R}} \cos \bar{\Phi} \sin \bar{\Lambda} \\ 0 & \frac{\partial R}{\partial \bar{\Phi}} \sin \bar{\Phi} + R \cos \bar{\Phi} & \frac{\partial R}{\partial \bar{R}} \sin \bar{\Phi} \end{bmatrix}, \quad (3-2)$$

die Jacobi-Matrix \underline{J}_{sq} der Transformation zwischen quasisphärischen und Kugel-Koordinaten ist

$$\underline{J}_{sq} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Lambda}{\partial \bar{\Lambda}} & \frac{\partial \Lambda}{\partial \bar{\Phi}} & \frac{\partial \Lambda}{\partial \bar{R}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\Lambda}} & \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\Phi}} & \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{R}} \\ \frac{\partial R}{\partial \bar{\Lambda}} & \frac{\partial R}{\partial \bar{\Phi}} & \frac{\partial R}{\partial \bar{R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{R}e^2}{3\sqrt{5}} \frac{\partial Y_{2,0}}{\partial \bar{\Phi}} & 1 - \frac{Y_{2,0}}{3\sqrt{5}} (e^2 + \bar{R} \frac{de^2}{d\bar{R}}) \end{bmatrix}. \quad (3-3)$$

Die Gauß'schen Basisvektoren lauten:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\bar{\Lambda}} &:= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{\Lambda}} = \bar{R} \left(1 - \frac{e^2 Y_{2,0}}{3\sqrt{5}} \right) \cos \bar{\Phi} \mathbf{e}_{\Lambda} & \mathbf{G}_{\bar{\Lambda}} &= \left(1 + \frac{e^2 Y_{2,0}}{3\sqrt{5}} \right) \frac{1}{\bar{R} \cos \bar{\Phi}} \mathbf{e}_{\Lambda} \\ \mathbf{G}_{\bar{\Phi}} &:= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{\Phi}} = -\frac{\bar{R}e^2}{3\sqrt{5}} \frac{\partial Y_{2,0}}{\partial \bar{\Phi}} \mathbf{e}_R + \bar{R} \left(1 - \frac{e^2 Y_{2,0}}{3\sqrt{5}} \right) \mathbf{e}_{\Phi} & \mathbf{G}_{\bar{\Phi}} &= \frac{1}{\bar{R}} \left(1 + \frac{e^2 Y_{2,0}}{3\sqrt{5}} \right) \mathbf{e}_{\Phi} \\ \mathbf{G}_{\bar{R}} &:= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{R}} = \left(1 - \frac{Y_{2,0}}{3\sqrt{5}} (e^2 + \bar{R} \frac{de^2}{d\bar{R}}) \right) \mathbf{e}_R & \mathbf{G}_{\bar{R}} &= \left(1 + \frac{Y_{2,0}}{3\sqrt{5}} (e^2 + \bar{R} \frac{de^2}{d\bar{R}}) \right) \mathbf{e}_R + \frac{e^2}{3\sqrt{5}} \frac{\partial Y_{2,0}}{\partial \bar{\Phi}} \mathbf{e}_{\Phi} \\ & & & = \mathbf{R}_{00} + (e^2 + \bar{R} \frac{de^2}{d\bar{R}}) \frac{\mathbf{R}_{2,0}}{3\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{2}{15}} e^2 \mathbf{S}_{2,0} \end{aligned} \quad (3-4)$$

Das quasisphärische System ist i. allg. nicht orthogonal. Die Koordinatendarstellung des kovarianten Metrik-tensors lautet

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} R^2 \cos^2 \bar{\Phi} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial R}{\partial \bar{\Phi}} \right)^2 + R^2 & \frac{\partial R}{\partial \bar{R}} \frac{\partial R}{\partial \bar{\Phi}} \\ 0 & \frac{\partial R}{\partial \bar{R}} \frac{\partial R}{\partial \bar{\Phi}} & \left(\frac{\partial R}{\partial \bar{R}} \right)^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} R^2 \cos^2 \bar{\Phi} & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & \frac{\partial R}{\partial \bar{\Phi}} \\ 0 & \frac{\partial R}{\partial \bar{\Phi}} & \left(\frac{\partial R}{\partial \bar{R}} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

Daraus folgt in linearer Näherung das Volumenelement

$$d^3 \mathbf{X} = R^2 \frac{\partial R}{\partial \bar{R}} \cos \bar{\Phi} d\bar{\Lambda} d\bar{\Phi} d\bar{R} = R^2 \left(1 - \frac{e^2}{3\sqrt{5}} Y_{2,0} - \frac{\bar{R}}{3\sqrt{5}} \frac{de^2}{d\bar{R}} Y_{2,0} \right) \cos \bar{\Phi} d\bar{\Lambda} d\bar{\Phi} d\bar{R} \quad (3-6)$$

Der Normalenvektor \mathbf{N} eines Koordinaten-Sphäroids ist in linearer Näherung

$$\mathbf{N} = \mathbf{G}_{\bar{R}}^{\bar{R}} / |\mathbf{G}_{\bar{R}}^{\bar{R}}| = \mathbf{R}_{00} - \sqrt{\frac{2}{15}} e^2 \mathbf{S}_{2,0} \quad (3-7)$$

3–2 Modifizierte vektorielle Kugelfunktionen (vektorielle Sphäroidfunktionen)

Bei der Betrachtung radialsymmetrischer Erdmodelle und ihrer Deformationen erweisen sich die vektoriellen Kugelfunktionen $\{\mathbf{R}_{l,m}, \mathbf{S}_{l,m}, \mathbf{T}_{l,m}\}$, wie sie in Anhang A-2 definiert sind, als mächtiges Hilfsmittel. Wird beispielsweise ein Verschiebungsfeld als Summe vektorieller Kugelfunktionen dargestellt, so lassen sich zum einen die flächennormalen und die tangentialen Anteile des Verschiebungsfeldes direkt ablesen; zum anderen führt die Anwendung des Divergenz- und des Rotationsoperators auf die Bewegungsgleichungen zu teilweise entkoppelten Gleichungssystemen. Dank der letztgenannten Eigenschaft können die vektoriellen Kugelfunktionen auch im Fall eines Erdmodells mit homogenen sphäroidischen Schichten benutzt werden, um die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen zu konstruieren. Die Abweichung des Modells von der Radialsymmetrie kann dabei mittels einer Störungsrechnung berücksichtigt werden.

Dennoch erscheint es wünschenswert, zusätzlich vektorielle Basisfunktionen zur Verfügung zu haben, die sich an der Richtung der Flächennormalenvektoren der sphäroidischen Koordinatenflächen $\bar{R} = \text{const}$ orientieren. Zum einen möchte man Vektorfelder zur geophysikalischen Interpretation in normale und tangentiale Anteile zerlegen können, zum anderen vereinfachen sich dadurch in manchen Fällen die Randbedingungen an den Schichtgrenzen. Dies gilt z.B. an der Grenze zwischen dem Mantel und dem flüssigen Kern, wo die Scherspannung verschwindet, oder an der Erdoberfläche, wo im Fall einer Belastung durch aufliegende Massen ebenfalls nur Normalspannungen vorhanden sind.

Aus diesen Gründen definieren wir in diesem Abschnitt Basisfunktionen $\{\bar{\mathbf{R}}_{l,m}, \bar{\mathbf{S}}_{l,m}, \bar{\mathbf{T}}_{l,m}\}$. Insbesondere fordern wir, dass die ‘‘Sphäroidfunktionen’’ $\bar{\mathbf{R}}_{l,m}$ orthogonal zum jeweiligen Koordinaten-Sphäroid $\bar{R} = \text{const}$ des quasi-sphärischen Systems stehen und dass die Sphäroidfunktionen $\bar{\mathbf{S}}_{l,m}, \bar{\mathbf{T}}_{l,m}$ tangential zum Koordinaten-Sphäroid sein sollen. Dadurch wird folgende zu (A-30) analoge Definition nahegelegt:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{R}}_{l,m}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi}) &:= Y_{l,m}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi}) \mathbf{N} \\ \bar{\mathbf{S}}_{l,m}(\Lambda, \Phi) &:= \frac{-R}{\sqrt{l(l+1)}} \text{GRAD}_S Y_{l,m}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi}) \\ \bar{\mathbf{T}}_{l,m}(\Lambda, \Phi) &:= \mathbf{N} \times \bar{\mathbf{S}}_{l,m}\end{aligned}\tag{3-8}$$

Dabei bezeichnet GRAD_S den *Flächengradienten* bezüglich der jeweiligen Sphäroidfläche. (Der Flächengradient wird analog zum räumlichen Gradienten durch

$$\text{GRAD}_S F(y^\alpha) := F_{,\beta} G^{\beta\gamma} \mathbf{G}_\gamma$$

definiert, wobei jedoch $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\}$ gilt. y^α sind die Gauß’schen Parameter der jeweiligen Fläche, auf die sich der Flächengradient bezieht, im vorliegenden Falle also $y^1 = \bar{\Lambda}, y^2 = \bar{\Phi}$. Die Matrix $[G^{\beta\gamma}]$ enthält die kontravarianten Metrikoeffizienten der Fläche, ergibt sich im vorliegenden Fall somit als die Inverse der linken oberen 2×2 -Untermatrix von (3-5). Der Flächengradient liegt in der Tangentialebene des jeweiligen Koordinatensphäroids.

Die drei Basisfunktionen mit gleichem Grad l und gleicher Ordnung m sind orthogonal. Analog zum sphärischen Fall gilt auch

$$\bar{\mathbf{S}}_{l,m} = -\mathbf{N} \times \bar{\mathbf{T}}_{l,m}$$

Abgesehen von Gliedern der Ordnung e^4 ergibt sich aus den obigen Definitionen mit Hilfe von (A-87), (A-93), (A-95) :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{R}}_{l,m}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi}) &:= Y_{l,m}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi})\mathbf{N} = Y_{l,m}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi})[\mathbf{e}_R - \sqrt{\frac{2}{15}}e^2\mathbf{S}_{2,0}] \\
&= \mathbf{R}_{l,m}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi}) + \sqrt{\frac{2}{15}}e^2 \left\{ \sqrt{\frac{2(l-2)}{3(l-1)}}C(l, 2, l-2; m, 0)\mathbf{S}_{l-2,m} + \sqrt{\frac{5}{2}}\frac{im}{\sqrt{l(l-1)}}C(l, 1, l-1; m, 0)\mathbf{T}_{l-1,m} - \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\frac{3}{2l(l+1)}}C(l, 2, l; m, 0)\mathbf{S}_{l,m} + \sqrt{\frac{5}{2}}\frac{im}{\sqrt{(l+1)(l+2)}}C(l, 1, l+1; m, 0)\mathbf{T}_{l+1,m} - \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\frac{2(l+3)}{3(l+2)}}C(l, 2, l+2; m, 0)\mathbf{S}_{l+2,m} \right\} \\
\bar{\mathbf{S}}_{l,m}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi}) &:= \frac{-R}{\sqrt{l(l+1)}} \text{GRAD}_S Y_{l,m} = \mathbf{S}_{l,m} + \sqrt{\frac{2}{15}}e^2 \langle \mathbf{S}_{l,m}, \mathbf{S}_{2,0} \rangle \mathbf{e}_R = \\
&= \mathbf{S}_{l,m} + \sqrt{\frac{2}{15}}e^2 \left\{ \sqrt{\frac{2(l+1)}{3l}}C(l, 2, l-2; m, 0)\mathbf{R}_{l-2,m} + \sqrt{\frac{3}{2l(l+1)}}C(l, 2, l; m, 0)\mathbf{R}_{l,m} - \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\frac{2l}{3(l+1)}}C(l, 2, l+2; m, 0)\mathbf{R}_{l+2,m} \right\} \\
\bar{\mathbf{T}}_{l,m}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi}) &:= \mathbf{N} \times \bar{\mathbf{S}}_{l,m} = \mathbf{T}_{l,m} - \sqrt{\frac{2}{15}}e^2(\mathbf{S}_{2,0} \times \mathbf{S}_{l,m}) = \mathbf{T}_{l,m} + \frac{ime^2}{\sqrt{3l(l+1)}}Y_{1,0}\mathbf{R}_{l,m} = \\
&= \mathbf{T}_{l,m} + \frac{ime^2}{\sqrt{3l(l+1)}}[C(l, 1, l-1; m, 0)\mathbf{R}_{l-1,m} + C(l, 1, l+1; m, 0)\mathbf{R}_{l+1,m}]
\end{aligned} \tag{3-9}$$

Eine genauere Berechnung (mit Gliedern der Ordnung e^4) erübrigt sich, da das quasisphärische Koordinatensystem selbst nur bis zur Ordnung e^2 festgelegt wurde.

Man kann im übrigen $\bar{\mathbf{S}}_{l,m}$ bzw. $\bar{\mathbf{T}}_{l,m}$ auch so definieren, dass man von $\mathbf{S}_{l,m}$ bzw. $\mathbf{T}_{l,m}$ die Anteile abzieht, die in Richtung des Normalenvektors des Sphäroids zeigen:

$$\bar{\mathbf{S}}_{l,m} = \mathbf{S}_{l,m} - \langle \mathbf{S}_{l,m}, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{l,m} = \mathbf{T}_{l,m} - \langle \mathbf{T}_{l,m}, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}$$

Wie man leicht nachrechnet, kommt man damit auf dasselbe Ergebnis wie vorher.

3-3 Hydrostatischer Grundzustand und Normalschwerefeld

Die Bestimmung der Feldgrößen des hydrostatischen Grundzustandes lässt sich in linearer Näherung auf die Lösung der *Clairaut'schen Differentialgleichung* zurückführen. Wir verweisen auf die ausführlichen Darstellungen in *A.C. Clairaut (1743)*, *Z. Kopal (1960)*, *H.W. Mikolajski (1989)*, *J. Wahr (1980)*, *F.A.Dahlen (1972)* und beschränken uns hier darauf, die wichtigsten Ergebnisse aufzuführen und ihre Herleitung kurz zu skizzieren. Im Detail betrachten wir einen Spezialfall, nämlich das Modell eines ellipsoidisch geschichteten Körpers, dessen Schichten konstante Massendichte aufweisen.

Das hydrostatische Gleichgewicht ist durch die Gleichungen (2-167), (2-170) sowie (2-194) charakterisiert:

$$\begin{aligned}
V^{Grav}(\mathbf{X}) &= G \int_{R^3} \frac{\varrho_0(\mathbf{X}_Q)}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_Q|} d^3 \mathbf{X}_Q \\
V^{Zent}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{2}(\Omega^2 R^2 - \langle \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{X} \rangle^2) \\
\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{X}) &= \text{GRAD } W(\mathbf{X}) = \text{GRAD } (V^{Grav}(\mathbf{X}) + V^{Zent}(\mathbf{X})) \\
\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{P}, t_0) &= \boldsymbol{\tau}_0(\mathbf{P}, t_0) = -p_0(\mathbf{P}, t_0) \mathbf{I} \\
&\quad -\text{GRAD } p_0 + \varrho_0 \boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3-10}$$

Als Randbedingung kann gefordert werden, dass der Druck p_0 an der Erdoberfläche verschwindet. Da die Abhängigkeit der Massendichte der Erde vom Radius aus seismischen Beobachtungen relativ gut bekannt ist, liegt es nahe, die Massendichte ϱ_0 als bekannt vorzugeben. Aus der abgeleiteten Gleichung (2-170)

$$\text{GRAD } \varrho_0 \times \boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{0} \tag{3-11}$$

geht jedoch hervor, dass die Funktion $\varrho_0(\Lambda, \Phi, R)$ nicht frei gewählt werden kann, da bei bekannter Winkelgeschwindigkeit der Schwerevektor nur noch von der Massenverteilung im Erdinneren abhängt.

Für eine “nichtrotierende” Erde mit radialsymmetrischer Massenverteilung ist (2-170) offensichtlich erfüllt, da in diesem Fall sowohl die Flächen gleicher Dichte als auch die Äquipotentialflächen Kugeln sind. Somit sind Dichtegradient und Schwerevektor parallel. Es bietet sich daher bei der Konstruktion einer hydrostatischen Gleichgewichtsfigur an, von einem radialsymmetrischen Modell für die Dichte und das Potential auszugehen:

$$\begin{aligned}
\varrho_r &:= \bar{\varrho}(R) \\
W_r &:= \bar{W}(R) = \frac{4\pi G}{R} \int_0^R \bar{\varrho}(R_Q) R_Q^2 dR_Q + 4\pi G \int_R^{R_E} \bar{\varrho}(R_Q) R_Q dR_Q + \frac{\Omega^2 R^2}{3} \\
p_r &:= \bar{p}(R) = - \int_R^{R_E} \bar{\varrho}(R_Q) \frac{d\bar{W}(R_Q)}{dR_Q} dR_Q
\end{aligned} \tag{3-12}$$

R_E bedeutet den Erdradius. Im Schwerepotential dieses fiktiven Modells ist der radialsymmetrische Teil des Zentrifugalpotentials (der Term vom Grad 0 in der Kugelfunktionsentwicklung des Zentrifugalpotentials) bereits enthalten (insofern ist der Ausdruck “nichtrotierend” unzutreffend). Das Zentrifugalpotential V^{Zent} eines mit dem konstanten Winkelgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_Z$ rotierenden Systems lautet gemäß (2-213)

$$V^{Zent} = \frac{1}{2} \Omega^2 R^2 \cos^2 \Phi = \frac{\Omega^2 R^2}{3} \left(1 - \frac{Y_{2,0}(\Phi)}{\sqrt{5}}\right) \tag{3-13}$$

(Die Entwicklung der Trägheitskraftdichten in Kugelfunktionen findet sich in Abschnitt 3-4.2)

Die Massendichte $\varrho_r = \bar{\varrho}(R)$ wird als Funktion des Radius vorgegeben; ein häufig verwendetes Modell ist PREM von *A. Dziewonski, D. Anderson (1981)*. Das Schwerepotential W_r und die Dichte p_r ergeben sich dann aus der gewählten Dichteverteilung gemäß (3-12).

Die Abweichung von der Kugelsymmetrie wird (in der Natur wie im Modell) durch die Rotation der Erde bzw. der daraus resultierenden Zentrifugalkraft erzeugt. Sie wird mit Hilfe einer Störungsrechnung modelliert:

Durch den störenden Anteil der Zentrifugalkraft werden die sphärischen Isoflächen der Feldgrößen zu Rotationsphäroiden deformiert. Aus (2-168) und (2-170) geht hervor, dass die Flächen gleicher Dichte auch Flächen gleichen Potentials und Flächen gleichen Drucks sind. Jedes Sphäroid ist also eine Isofläche aller drei Feldgrößen. Man definiert nun das quasisphärische Koordinatensystem in der Weise, dass die gestörten Isoflächen der Feldgrößen die Koordinatenflächen $\bar{R} = \text{const}$ sind. Daraus folgt, dass die Feldgrößen ϱ_0 , p_0 und W als Funktionen nur der Veränderlichen \bar{R} dargestellt werden können. Die Aufgabe besteht dann im wesentlichen darin, die Abweichungen der Isoflächen von Kugeln, i.e. die Exzentrizität der Rotationsphäroide zu bestimmen.

Lemma 3-1 :

Es sei die Massendichte $\varrho_0 = \bar{\varrho}(\bar{R})$ als Funktion der quasispährischen Koordinate \bar{R} vorgegeben. Dann erfüllt die Exzentrizität der sphäroidischen Isoflächen von Dichte, Schwerepotential und Druck die Clairaut'sche Differentialgleichung

$$\bar{R}^2 \frac{d^2 e^2}{d\bar{R}^2} + 6 \frac{\bar{\varrho}(\bar{R})}{\bar{\varrho}_m(\bar{R})} \left(\bar{R} \frac{de^2}{d\bar{R}} + e^2(\bar{R}) \right) - 6e^2(\bar{R}) = 0 \quad (3-14)$$

mit den Randbedingungen

$$GM \left\{ \frac{2e^2(R_E)}{R_E^3} + \frac{1}{R_E^2} \frac{de^2}{dR} \Big|_{R_E} \right\} = 5\Omega^2, \quad \frac{de^2}{dR} \Big|_{\bar{R}=0} = 0. \quad (3-15)$$

Dabei ist

$$M := 4\pi \int_0^{R_E} \bar{\varrho}(R) R^2 dR,$$

die Gesamtmasse des Modells und

$$\bar{\varrho}_m(\bar{R}) := \frac{3}{\bar{R}^3} \int_0^{\bar{R}} \bar{\varrho}(R_Q) R_Q^2 dR_Q$$

ein Mittelwert der Dichte zwischen Mittelpunkt und aktueller Koordinatenfläche \bar{R} . Für das Schwerepotential und den Druck gilt:

$$p_0 = \bar{p}(\bar{R}), \quad W = \bar{W}(\bar{R}) \quad (3-16)$$

(wobei die Funktionen \bar{p} , \bar{W} durch (3-12) definiert sind). ■

Der Beweis des Lemmas findet sich in der zu Anfang des Unterabschnitts angegebenen Literatur.

Beweisskizze:

Das Newton-Integral der vorgegebenen Dichteverteilung $\varrho_0 = \bar{\varrho}(\bar{R})$ wird als Kugelfunktions-Entwicklung dargestellt, indem der reziproke Abstand gemäß (A-19), (A-20) entwickelt wird. Das Ergebnis wird mit Hilfe von (3-1) in linearer Näherung auf quasispährische Koordinaten transformiert. Es folgt

$$\begin{aligned} W(\bar{R}_P) = & 4\pi G \left\{ \frac{1}{\bar{R}_P} \int_0^{\bar{R}_P} \bar{\varrho}(\bar{R}_Q) \bar{R}_Q^2 d\bar{R}_Q + \int_{\bar{R}_P}^{R_E} \bar{\varrho}(\bar{R}_Q) \bar{R}_Q d\bar{R}_Q \right\} + \frac{\Omega^2 \bar{R}^2}{3} + \\ & + 4\pi G \frac{Y_{2,0}(\Phi_P)}{3\sqrt{5}} \left\{ \frac{e_P^2}{\bar{R}_P} \int_0^{\bar{R}_P} \bar{\varrho}(\bar{R}_Q) \bar{R}_Q^2 d\bar{R}_Q - \frac{1}{\bar{R}_P^3} \int_0^{\bar{R}_P} \bar{\varrho}(\bar{R}_Q) \bar{R}_Q^4 \left(e_Q^2 + \frac{\bar{R}_Q}{5} \frac{de_Q^2}{d\bar{R}_Q} \right) d\bar{R}_Q - \right. \\ & \left. - \frac{\bar{R}_P^2}{5} \int_{\bar{R}_P}^{R_E} \bar{\varrho}(\bar{R}_Q) \frac{de_Q^2}{d\bar{R}_Q} d\bar{R}_Q \right\} - \Omega^2 \bar{R}^2 \frac{Y_{2,0}(\Phi_P)}{3\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Da das Ergebnis nicht von Φ , sondern nur von \bar{R} abhängen darf, muss die Summe der Ausdrücke in der zweiten und der dritten Zeile verschwinden. Dies ergibt eine Integro-Differentialgleichung für e^2 , die durch geeignetes Differenzieren in die Clairaut-Gleichung überführt werden kann. Als Ergebnis für das Schwerepotential verbleibt die erste Zeile, die offensichtlich mit $\bar{W}(\bar{R})$ übereinstimmt. Die Randbedingung an der Erdoberfläche folgt aus der ursprünglichen Integro-Differentialgleichung, die zweite Randbedingung aus der Clairaut'schen Dgl. und der Differenzierbarkeit von ϱ_0 im Erdmittelpunkt.

Das Ergebnis für den Druck ergibt sich unmittelbar aus (2-168) und der Randbedingung $p_0(\bar{R} = R_E) = 0$. ■

Aus den Gleichungen (3-1), (3-16) folgt, dass der mittlere Radius der Isoflächen im Sinne von (A-106) durch die Störung des radialsymmetrischen Modells nicht geändert wird. Dies gilt nur, falls das "radialsymmetrische" Schwerepotential gemäß (3-12) bereits den radialsymmetrischen Anteil des Zentrifugalpotentials enthält.

Selbstverständlich kann auf die physikalische Interpretation der Herleitung des Referenzzustandes ("Anschalten der Rotation und Berechnung deren Auswirkung auf das radialsymmetrische Modell") ganz verzichtet werden.

Falls die Funktion $e^2(\bar{R})$ die Clairaut'sche Gleichung erfüllt, ist mit $\varrho_0 = \bar{\varrho}(\bar{R})$ ein hydrostatischer Grundzustand gegeben, was sich durch Einsetzen in das Newton-Integral beweisen lässt.

Die Zusatzterme $\varrho_0 - \varrho_r$ usw, die sich infolge der Zentrifugalkraft ergeben, lassen sich durch eine Taylor-Entwicklung der Lösung (3-16) isolieren. In linearer Näherung folgt

$$\varrho_0 = \varrho_0(\Lambda, \Phi, R) = \bar{\varrho}(\bar{R}) = \bar{\varrho}(R) + \frac{\partial \bar{\varrho}(R)}{\partial R} (\bar{R} - R) \quad \text{usw,}$$

und durch Kombination mit (3-1) erhält man

$$\begin{aligned} \varrho_0(\Lambda, \Phi, R) &= \bar{\varrho}(R) + \frac{\partial \bar{\varrho}(R)}{\partial R} R \frac{e^2(R)}{3\sqrt{5}} Y_{2,0}(\bar{\Phi}) \\ p_0(\Lambda, \Phi, R) &= \bar{p}(R) + \frac{\partial \bar{p}(R)}{\partial R} R \frac{e^2(R)}{3\sqrt{5}} Y_{2,0}(\bar{\Phi}) \\ W(\Lambda, \Phi, R) &= \bar{W}(R) + \frac{\partial \bar{W}(R)}{\partial R} R \frac{e^2(R)}{3\sqrt{5}} Y_{2,0}(\bar{\Phi}), \end{aligned} \quad (3-17)$$

vgl. *J. Wahr (1980, Seite 11 Formel 2.4)*. Diese Formel versagt allerdings in der Nähe von Sprungstellen der Massendichte, da dort die Massendichte nicht differenzierbar und damit eine Taylor-Entwicklung nicht zulässig ist. Bei der quasisphärischen Darstellung tritt dieses Problem nicht auf. An den Formeln (3-17) wird deutlich, dass es sich bei $\bar{\varrho}(R)$, $\bar{W}(R)$, $\bar{p}(R)$ usw. tatsächlich um die Mittelwerte der Feldgrößen ϱ_0 , W , p_0 im Sinne von (A-106) entlang der Kugel mit Radius R handelt.

Die Clairaut'sche Differentialgleichung wurde für das PREM-Modell in *Mikolajski (1989)* numerisch gelöst; eine Entwicklung dieser Lösung nach kubischen Polynomen findet sich in *J. Engels (1991)*.

Wir betrachten im folgenden das Schwerfeld, das von einem rotationssphäroidisch geschichteten Erdmodell erzeugt wird. Wir nehmen an, innerhalb der n Schichten sei die Dichte jeweils konstant; die sphäroidischen Grenzflächen besitzen denselben Mittelpunkt und dieselbe Rotationsachse, aber unterschiedliche Exzentrizitäten. Für diesen Fall braucht die Clairaut'sche Dgl. nicht gelöst zu werden; man erhält vielmehr ein lineares Gleichungssystem für die Exzentrizitäten der einzelnen Schichtgrenzen.

Lemma 3-2 :

Unter den genannten Voraussetzungen lauten das Potential und die Feldstärke der Eigengravitation in der j -ten Schicht ($1 \leq j \leq n$, $\bar{R}_{j-1} \leq \bar{R} \leq \bar{R}_j$):

$$\begin{aligned} V^{Grav} &= \frac{4\pi g}{3} \sum_{i=1}^{j-1} \left\{ (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \left[\frac{\bar{R}_i^3}{R} - \frac{e_i^2 \bar{R}_i^5}{5\sqrt{5}R^3} Y_{2,0} \right] \right\} - 2\pi g \varrho_j \frac{R^2}{3} + 2\pi g \sum_{i=j}^n \left\{ (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \left[\bar{R}_i^2 - \frac{2R^2 e_i^2}{15\sqrt{5}} Y_{2,0} \right] \right\} = \\ &= \frac{4\pi g}{3} \sum_{i=1}^{j-1} (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \frac{\bar{R}_i^3}{R} - 2\pi g \varrho_j \frac{\bar{R}^2}{3} + 2\pi g \sum_{i=j}^n (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \bar{R}_i^2 + \\ &\quad + \frac{4\pi g}{3} \frac{Y_{2,0}}{\sqrt{5}} \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \left[\frac{e_i^2 \bar{R}_i^3}{3R} - \frac{e_i^2 \bar{R}_i^5}{5R^3} \right] + \varrho_j \frac{e^2 \bar{R}^2}{3} - \frac{\bar{R}^2}{5} \sum_{i=j}^n (\varrho_i - \varrho_{i+1}) e_i^2 \right\} \\ \text{GRAD } V^{Grav} &= \frac{4\pi g}{3} \sum_{i=1}^{j-1} \left\{ (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \left[-\frac{\bar{R}_i^3}{R^2} \mathbf{R}_{00} + \frac{e_i^2 \bar{R}_i^5}{5\sqrt{5}R^4} (3\mathbf{R}_{2,0} + \sqrt{6}\mathbf{S}_{2,0}) \right] \right\} - \\ &\quad - \frac{4\pi g R}{3} \left\{ \varrho_j \mathbf{R}_{00} + \left(\frac{2\mathbf{R}_{2,0} - \sqrt{6}\mathbf{S}_{2,0}}{5\sqrt{5}} \right) \sum_{i=j}^n [(\varrho_i - \varrho_{i+1}) e_i^2] \right\} \end{aligned} \quad (3-18)$$

■

Beweis von Lemma 3-2 :

Das Potential eines homogenen Rotationsellipsoides sowie sein Gradient lauten bis auf Terme der Ordnung e^4 (vgl. *F.R. Helmert 1884, p. 124, J. Engels 1991, p. 68*, mit \bar{R}_E ist wieder der mittlere Radius des Ellipsoids im Sinne von (A-106) bezeichnet):

außerhalb desselben:

$$\begin{aligned} V^{Grav} &= \frac{4\pi g \varrho}{3} \left\{ \frac{\bar{R}_E^3}{R} - \frac{e^2 \bar{R}_E^5}{5\sqrt{5}R^3} Y_{2,0} \right\} \\ \text{GRAD } V^{Grav} &= \frac{4\pi g \varrho}{3} \left\{ -\frac{\bar{R}_E^3}{R^2} \mathbf{R}_{00} + \frac{e^2 \bar{R}_E^5}{5\sqrt{5}R^4} (3\mathbf{R}_{2,0} + \sqrt{6}\mathbf{S}_{2,0}) \right\}, \end{aligned} \quad (3-19)$$

innerhalb desselben

$$\begin{aligned} V^{Grav} &= 2\pi g \varrho \left\{ \bar{R}_E^2 - R^2 \left[\frac{1}{3} + \frac{2e^2}{15\sqrt{5}} Y_{2,0} \right] \right\} \\ \text{GRAD } V^{Grav} &= -\frac{4\pi g \varrho R}{3} \left\{ \mathbf{R}_{00} + \frac{e^2}{5\sqrt{5}} (2\mathbf{R}_{2,0} - \sqrt{6}\mathbf{S}_{2,0}) \right\}. \end{aligned} \quad (3-20)$$

Daraus entsteht (3-18), wenn die Anteile superponiert werden, welche von den einzelnen ellipsoidischen Schichten erzeugt werden. Die alternative Darstellung von V^{Grav} in (3-18) entsteht durch Einsetzen von (3-1). ■

Das ungestörte Zentrifugalpotential und sein Gradient lauten

$$V^{Zent} = \frac{\Omega^2}{3} R^2 \left(1 - \frac{Y_{2,0}}{\sqrt{5}} \right) \quad \text{GRAD } V^{Zent} = \frac{\Omega^2 R}{3} \left\{ 2\mathbf{R}_{00} - \frac{1}{\sqrt{5}} (2\mathbf{R}_{2,0} - \sqrt{6}\mathbf{S}_{2,0}) \right\} \quad (3-21)$$

Wir erhalten das gesamte Referenz-Schwerepotential in quasisphärischen Koordinaten, wenn wir zur zweiten Darstellung von V^{Grav} in (3-18) das Zentrifugalpotential addieren:

$$\begin{aligned} W &= \frac{4\pi g}{3} \sum_{i=1}^{j-1} (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \frac{\bar{R}_i^3}{R} - 2\pi g \varrho_j \frac{\bar{R}^2}{3} + 2\pi g \sum_{i=j}^n (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \bar{R}_i^2 + \frac{\Omega^2 \bar{R}^2}{3} + \\ &+ \frac{4\pi g}{3} \frac{Y_{2,0}}{\sqrt{5}} \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \left[\frac{e^2 \bar{R}_i^3}{3R} - \frac{e_i^2 \bar{R}_i^5}{5\bar{R}^3} \right] + \varrho_j \frac{e^2 \bar{R}^2}{3} - \frac{\bar{R}^2}{5} \sum_{i=j}^n (\varrho_i - \varrho_{i+1}) e_i^2 \right\} - \frac{\Omega^2 R^2}{3} \frac{Y_{2,0}}{\sqrt{5}} \end{aligned} \quad (3-22)$$

Da wir von einem hydrostatischen Referenzzustand ausgehen, bei dem die Äquipotentialflächen auch Flächen gleicher Dichte sind, darf im Potential keine Abhängigkeit von $\bar{\Phi}$ auftreten. Wir erhalten daher das Referenzpotential sowie mit Hilfe von (3-4) dessen Gradienten in der j -ten Schicht zu

$$\begin{aligned} W &= \frac{4\pi g}{3\bar{R}} \sum_{i=1}^{j-1} [(\varrho_i - \varrho_{i+1}) \bar{R}_i^3] - 2\pi g \varrho_j \frac{\bar{R}^2}{3} + 2\pi g \sum_{i=j}^n [(\varrho_i - \varrho_{i+1}) \bar{R}_i^2] + \frac{\Omega^2 \bar{R}^2}{3} \\ \text{GRAD } W &= \frac{\partial}{\partial \bar{R}} (W) \mathbf{G}^{\bar{R}} = \\ &= -\frac{4\pi g}{3\bar{R}^2} \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} [(\varrho_i - \varrho_{i+1}) \bar{R}_i^3] + \varrho_j \bar{R}^3 \right\} \left(\mathbf{R}_{00} + (e^2 + \bar{R} \frac{de^2}{d\bar{R}}) \frac{\mathbf{R}_{2,0}}{3\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{2}{15}} e^2 \mathbf{S}_{2,0} \right) + \frac{2\Omega^2 \bar{R}}{3} \mathbf{R}_{00} \\ &=: -\frac{gM(\bar{R})}{\bar{R}^2} \left(\mathbf{R}_{00} + (e^2 + \bar{R} \frac{de^2}{d\bar{R}}) \frac{\mathbf{R}_{2,0}}{3\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{2}{15}} e^2 \mathbf{S}_{2,0} \right) + \frac{2\Omega^2 \bar{R}}{3} \mathbf{R}_{00}. \end{aligned} \quad (3-23)$$

Dabei ist $M(\bar{R})$ die Masse, welche die Koordinatenfläche $\bar{R} = const$ einschließt.

Dagegen muss die von $Y_{2,0}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi})$ abhängige Komponente im Potential verschwinden:

$$\sum_{i=1}^{j-1} (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \left[\frac{\bar{R}_i^3 e^2}{3\bar{R}^3} - \frac{e_i^2 \bar{R}_i^5}{5\bar{R}^5} \right] + \frac{\varrho_j e^2}{3} - \sum_{i=j}^n (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \frac{e_i^2}{5} - \frac{\Omega^2}{4\pi g} = 0 \quad (3-24)$$

Wir können die Bedingung (3-24) nutzen, um ein Gleichungssystem zur Berechnung der Exzentrizitäten der Grenzflächen zu erzeugen, indem wir die Bedingung an den Grenzflächen spezialisieren, also statt e^2 , \bar{R} die Randgrößen e_j^2 , \bar{R}_j einsetzen. Indem man der Reihe nach $j = 1, 2, \dots, n$ wählt, erhält man n Gleichungen für die n Unbekannten e_j^2 . Ist dieses Gleichungssystem gelöst und sind damit die Exzentrizitäten e_i^2 an den Grenzflächen bekannt, so können wir (3-24) nach e^2 auflösen und erhalten die Exzentrizität e^2 für einen beliebigen mittleren Radius:

$$e^2(\bar{R}) = \frac{3 \sum_{i=1}^{j-1} [(\varrho_i - \varrho_{i+1}) e_i^2 \bar{R}_i^5] + 3 \bar{R}^5 \sum_{i=j}^n [(\varrho_i - \varrho_{i+1}) e_i^2] + \frac{15 \bar{R}^5 \Omega^2}{4\pi g}}{5 \bar{R}^2 \sum_{i=1}^{j-1} [(\varrho_i - \varrho_{i+1}) \bar{R}_i^3] + 5 \bar{R}^5 \varrho} \quad (3-25)$$

Insbesondere gilt bei einem *homogenen* Erdmodell (das nur aus einer einzigen Schicht besteht) für die Exzentrizität $e^2(\bar{R}_E)$ an der Erdoberfläche

$$e^2(\bar{R}_E) =: e_E^2 = \frac{15\Omega^2}{8\pi g \varrho} = \frac{5R_E \Omega^2}{2\Gamma_{0,0}}. \quad (3-26)$$

Die Bedingung (3-24) lässt sich auch auf einem anderen Weg herleiten: Wegen des hydrostatischen Gleichgewichts gilt allgemein

$$\text{GRAD } W = \text{GRAD } (V^{\text{Grav}} + V^{\text{Zent}}) = \mathbf{\Gamma} = -\mathbf{\Gamma N} = -\mathbf{\Gamma}(\mathbf{R}_{0,0} - \sqrt{\frac{2}{15}} e^2 \mathbf{S}_{2,0}) \quad (3-27)$$

Der Normalenvektor \mathbf{N} steht auf dem Gauß'schen Tangentenvektor $\mathbf{G}_{\bar{\Phi}}$ senkrecht. Setzen wir $\text{GRAD } W$ aus den Gradientendarstellungen in (3-18) und (3-21) zusammen und setzen das Innenprodukt zwischen $\text{GRAD } W$ und $\mathbf{G}_{\bar{\Phi}}$ gleich null, so erhalten wir wieder (3-24).

Der Betrag des Schwerevektors Γ lässt sich aus

$$\Gamma = - \langle \text{GRAD } W, \mathbf{N} \rangle \quad (3-28)$$

berechnen. Wenn wir (3-23) für die Bestimmung von Γ heranziehen, erhalten wir einen einfachen Ausdruck, der jedoch die Ableitung $de^2/d\bar{R}$ enthält. Um dies zu vermeiden, benutzen wir (3-18) und (3-21).

$$\begin{aligned} \Gamma &= - \left\{ \frac{4\pi g}{3} \sum_{i=1}^{j-1} (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \left[-\frac{\bar{R}_i^3}{R^2} + \frac{3e_i^2 \bar{R}_i^5 Y_{2,0}}{5\sqrt{5} R^4} \right] - \frac{4\pi g R}{3} \left[\varrho_j + \frac{2Y_{2,0}}{5\sqrt{5}} \sum_{i=j}^n (\varrho_i - \varrho_{i+1}) e_i^2 \right] + \frac{2\Omega^2 R}{3} \left(1 - \frac{Y_{2,0}}{\sqrt{5}} \right) \right\} = \\ &= \frac{4\pi g}{3} \sum_{i=1}^{j-1} (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \frac{\bar{R}_i^3}{R^2} + \frac{4\pi g \varrho_j \bar{R}}{3} - \frac{2\Omega^2 \bar{R}}{3} + \\ &+ \left\{ \frac{4\pi g}{3} \sum_{i=1}^{j-1} (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \left[\frac{2e^2(\bar{R}) \bar{R}_i^3}{3\sqrt{5} R^2} - \frac{3e_i^2 \bar{R}_i^5}{5\sqrt{5} R^4} \right] + \frac{4\pi g \bar{R}}{3} \left[-\frac{\varrho_j e^2(\bar{R})}{3\sqrt{5}} + \frac{2}{5\sqrt{5}} \sum_{i=j}^n (\varrho_i - \varrho_{i+1}) e_i^2 \right] + \frac{2\Omega^2 \bar{R}}{3\sqrt{5}} \right\} Y_{2,0} = \\ &=: \Gamma_{0,0}^{(j)}(\bar{R}) + \Gamma_{2,0}^{(j)}(\bar{R}) Y_{2,0} \end{aligned} \quad (3-29)$$

Insbesondere ergibt sich an den Schichtgrenzen von innen und von außen derselbe Grenzwert. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} W_j^{(1)} &:= \frac{4\pi g}{3} \sum_{i=1}^{j-1} (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \bar{R}_i^3 & W_j^{(2)} &:= -\frac{4\pi g}{3} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{e_i^2 \bar{R}_i^5}{5\sqrt{5}} (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \\ W_j^{(3)} &:= -\frac{2\pi g \varrho_j}{3} + \frac{\Omega^2}{3} & W_j^{(4)} &:= -2\pi g \sum_{i=j}^n (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \frac{2e_i^2}{15\sqrt{5}} - \frac{\Omega^2}{3\sqrt{5}} & W_j^{(5)} &:= 2\pi g \sum_{i=j}^n (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \bar{R}_i^2 \end{aligned} \quad (3-30)$$

folgen die Darstellungen (wieder gültig für die j -te Schicht)

$$\begin{aligned}
W &= W_j^{(1)} \frac{1}{R} + W_j^{(2)} \frac{Y_{2,0}}{R^3} + W_j^{(3)} R^2 + W_j^{(4)} R^2 Y_{2,0} + W_j^{(5)} = W_j^{(1)} \frac{1}{\bar{R}} + W_j^{(3)} \bar{R}^2 + W_j^{(5)} \\
\Gamma &= W_j^{(1)} \frac{1}{R^2} - 2W_j^{(3)} R + Y_{2,0}(\Phi) \left\{ 3 \frac{W_j^{(2)}}{R^4} - 2W_j^{(4)} R \right\} = \\
&= W_j^{(1)} \frac{1}{\bar{R}^2} - 2W_j^{(3)} \bar{R} + Y_{2,0}(\Phi) \left\{ 3 \frac{W_j^{(2)}}{\bar{R}^4} - 2W_j^{(4)} \bar{R} + \frac{2e^2(\bar{R})}{3\sqrt{5}} \left(\frac{W_j^{(1)}}{\bar{R}^2} + W_j^{(3)} \bar{R} \right) \right\} \quad (3-31) \\
\Rightarrow \Gamma_{0,0}^{(j)}(\bar{R}) &= W_j^{(1)} \frac{1}{\bar{R}^2} - 2W_j^{(3)} \bar{R} \\
\Gamma_{2,0}^{(j)}(\bar{R}) &= 3 \frac{W_j^{(2)}}{\bar{R}^4} - 2W_j^{(4)} \bar{R} + \frac{2e^2(\bar{R})}{3\sqrt{5}} \left(\frac{W_j^{(1)}}{\bar{R}^2} + W_j^{(3)} \bar{R} \right)
\end{aligned}$$

Im Falle eines homogenen Erdmodells (das aus einer einzigen Schicht besteht) gilt an der Erdoberfläche

$$\Gamma_{0,0}(R_E) = \frac{4\pi g \varrho R_E}{3} - \frac{2\Omega^2 R_E}{3}, \quad \Gamma_{2,0}(R_E) = \frac{4\pi g R_E}{45\sqrt{5}} \varrho e_E^2 + \frac{2\Omega^2 R_E}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\Omega^2 R_E}{6} = \Gamma_{00}(R_E) \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} \quad (3-32)$$

Die letzten beiden Beziehungen folgen aus (3-26).

Die Parameter sind so zu wählen, dass das Modell die Gesamtmasse der Erde sowie ihr äquatoriales und polares Trägheitsmoment reproduziert. Die Gesamtmasse der Modellerde erhält man durch Integration über die Massendichte mit dem Volumenelement (3-6)

$$M = \int_{Erde} \varrho_0(\bar{R}) d^3\mathbf{X} = \frac{4\pi}{3} \sum_{i=1}^n \varrho_i (\bar{R}_i^3 - \bar{R}_{i-1}^3) \quad (3-33)$$

Schließlich berechnen wir die Trägheitsmomente. Es ist $J_{Pol} = C = J_{ZZ}$. Aus Symmetriegründen gibt es nur ein äquatoriales Trägheitsmoment $J_{Aeq} = A = J_{XX} = J_{YY} = (J_{XX} + J_{YY})/2$. Es erweist sich hier als günstig, die Integration in Kugelkoordinaten und nicht in quasisphärischen Koordinaten durchzuführen, da bei den letzteren das Volumenelement den unhandlichen Ausdruck $de^2/d\bar{R}$ enthält; dagegen ist die etwas kompliziertere Darstellung der Integralgrenzen bei den Kugelkoordinaten kein Problem. Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned}
J_{Aeq} &= \sum_{i=1}^n \varrho_i \int_{D_i} \left[\frac{(X^2 + Y^2)}{2} + Z^2 \right] d^3\mathbf{X} = \frac{4\pi}{45} \sum_{i=1}^n (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \bar{R}_i^5 (6 - e_i^2) \\
J_{Pol} &= \sum_{i=1}^n \varrho_i \int_{D_i} (X^2 + Y^2) d^3\mathbf{X} = \frac{8\pi}{45} \sum_{i=1}^n (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \bar{R}_i^5 (3 + e_i^2)
\end{aligned} \quad (3-34)$$

Die Differenz dieser Trägheitsmomente sowie das mittlere Trägheitsmoment sind

$$J_D := J_{Pol} - J_{Aeq} = C - A = \frac{4\pi}{15} \sum_{i=1}^n (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \bar{R}_i^5 e_i^2 \quad (3-35)$$

$$J_M := \frac{J_{Pol} + 2J_{Aeq}}{3} = \frac{C + 2A}{3} = \frac{8\pi}{15} \sum_{i=1}^n (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \bar{R}_i^5$$

Insbesondere ist beim homogenen Modell

$$C - A = \frac{4\pi}{15} \varrho R_E^5 e_E^2 = \frac{4\pi}{3} \varrho \frac{R_E^6 \Omega^2}{2\Gamma_{0,0}} = \frac{R_E^5 \Omega^2}{2g} \quad (3-36)$$

3-4 Die quasistatischen Bewegungsgleichungen eines inkompressiblen Materials und ihre Lösung in vektoriellen Kugelfunktionen

In Abschnitt 2-7.7 wurden die linearisierten Bewegungsgleichungen für ein isotropes, viskoelastisches, homogen geschichtetes Kontinuum angegeben. Wir stellen nun diese Gleichungen in vektoriellen Kff dar und leiten die allgemeine Lösung für die radiusabhängigen Koeffizientenfunktionen her. Zur Lösung der Gleichungen werden wir deren Divergenz und Rotation bilden, weil sich dadurch die Gleichungen trotz der Erhöhung der Differentiationsordnung vereinfachen (da die Unbekannten entkoppeln). Wir übertragen daher auch diese Ausdrücke in vektorielle Kff. Dabei vernachlässigen wir die relative Beschleunigung, betrachten also die *quasistatische Näherung*. Von den eingepägten Kräften berücksichtigen wir nur die Schwerkraft.

Die Laplace-transformierten Gleichungen für ein homogen geschichtetes, isotropes viskoelastisches Medium lauten in linearer, quasistatischer Näherung gemäß (2-263), (2-148), (2-194), (2-214) und (2-217):

$$\begin{aligned} - \text{GRAD } \delta \tilde{p}(s) - s \tilde{\mu}(s) \text{ROT ROT } \tilde{\mathbf{u}} + \rho_0 \delta \tilde{\mathbf{f}} &= \mathbf{0} \\ \text{DIV } \tilde{\mathbf{u}} &= 0 \\ \text{DIV GRAD } \delta \tilde{w} &= 4 \langle \mathbf{\Omega}, \delta \tilde{\boldsymbol{\omega}} \rangle \end{aligned} \quad (3-37)$$

Die Störkraftdichten $\rho_0 \delta \tilde{\mathbf{f}}$ werden wieder aufgespalten in

$$\rho_0 \delta \tilde{\mathbf{f}} = \rho_0 \delta \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{Last} + \rho_0 \delta \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{Def} + \rho_0 \delta \tilde{\mathbf{f}}^T = \rho_0 \text{GRAD } \delta \tilde{w} + \rho_0 \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Cor} + \rho_0 \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Euler} \quad (3-38)$$

wobei die Trägheitskraftdichten in linearer Näherung durch (2-216), die von der Last erzeugte Gravitation durch den Gradienten von (2-197) und die deformatrische Gravitation durch den Gradienten von (2-206) gegeben sind. Durch Anwenden des Rotations- bzw. des Divergenzoperators auf die erste Gleichung von (3-37) erhalten wir

$$\begin{aligned} -\tilde{\mu}(s) \text{ROT ROT ROT } \tilde{\mathbf{u}} - 2\rho\delta \tilde{\boldsymbol{\omega}} + 2\rho \text{GRAD } \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{\Omega} &= \mathbf{0} \\ -\text{DIV GRAD } \delta \tilde{p} + 2\rho s \langle \mathbf{\Omega}, \text{ROT } \tilde{\mathbf{u}} \rangle + 4\rho \langle \mathbf{\Omega}, \delta \tilde{\boldsymbol{\omega}} \rangle &= 0 \\ \text{DIV } \tilde{\mathbf{u}} &= 0 \\ \text{DIV GRAD } \delta \tilde{w} &= 4 \langle \mathbf{\Omega}, \delta \tilde{\boldsymbol{\omega}} \rangle \end{aligned} \quad (3-39)$$

Offensichtlich fällt die inkrementelle Gravitation aus den quasistatischen Bewegungsgleichungen heraus. Infolge der Inkompressibilität und der Homogenität der betrachteten Schicht ist die gravitative Kraftdichte im Inneren der Schicht quellenfrei – inkrementelle Gravitation entsteht nur durch ein Nach-außen-dringen oder Zurückweichen der Massen an den Schichtgrenzen; durch die Massenverlagerungen im Inneren der Schicht wird keine Gravitation erzeugt (vgl. Abschnitt 2-6.1). Die Last war ebenfalls als flächenhafte Verteilung vorausgesetzt. Hier erweist sich die Annahme der Inkompressibilität als entscheidende Vereinfachung. Eine Inhomogenität entsteht nur durch den “Tageslängenanteil” des inkrementellen Zentrifugalpotentials.

Der zweite Summand der ersten Gleichung ergibt sich aus der Andrehkraft, der dritte aus der Corioliskraft. In der zweiten Gleichung stammt der zweite Summand von der Corioliskraft, der dritte von der Zentrifugalkraft. Diese Terme können als “kleine Größen” aufgefasst werden. Sie werden durch eine Störungsrechnung berücksichtigt, die wir im folgenden Unterabschnitt kurz erläutern. (Mit der Methode der Störungsrechnung wird später auch der Einfluss des nichtsphärischen Randes behandelt.) In der Literatur findet von den genannten “Störgrößen” in der Regel nur die Zentrifugalkraftdichte Beachtung.

Da die erste Gleichung in (3-39) vektorwertig ist, haben wir mit (3-39) sechs Gleichungen für die fünf unbekanntenen Feldgrößen $\tilde{\mathbf{u}}$, $\delta \tilde{p}$, $\delta \tilde{w}$ zur Verfügung. Es wird sich jedoch herausstellen, dass nur fünf dieser Gleichungen linear unabhängig sind. Zudem kann, wie bereits in Abschnitt 2-9.1 ausgeführt wurde, die ortsunabhängige Unbekannte $\delta \tilde{\boldsymbol{\omega}}$ nicht allein mit Hilfe einer geeigneten Systemdefinition bestimmt werden; aufgrund des Defektes durch die quasistatische Näherung wird auch die Drehimpulsbilanz benötigt.

3-4.1 Die Methode der Störungsrechnung

Wir benutzen für alle Schichten jeweils einen Lösungsansatz der Form

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}(\Lambda, \Phi, R, s) &= \tilde{r}_{l,m}(R, s)\mathbf{R}_{l,m}(\Lambda, \Phi) + \tilde{s}_{l,m}(R, s)\mathbf{S}_{l,m}(\Lambda, \Phi) + \tilde{t}_{l,m}(R, s)\mathbf{T}_{l,m}(\Lambda, \Phi) \\ \delta\tilde{p}(\Lambda, \Phi, R, s) &= \delta\tilde{p}_{l,m}(R, s)Y_{l,m}(\Lambda, \Phi) \\ \delta\tilde{w}(\Lambda, \Phi, R, s) &= \delta\tilde{w}_{l,m}(R, s)Y_{l,m}(\Lambda, \Phi)\end{aligned}\quad (3-40)$$

Für eine beliebige aber feste Frequenz s erhalten wir Differentialgleichungen für die Koeffizientenfunktionen $\tilde{r}_{l,m}$, $\tilde{s}_{l,m}$, $\tilde{t}_{l,m}$. Infolge des Coriolisterms entstehen hier Kopplungen zwischen den Koeffizientenfunktionen, welche eine analytische Lösung aussichtslos erscheinen lassen. Da es sich dabei jedoch um vergleichsweise "kleine" Terme handelt, führen wir eine Störungsrechnung durch: Wir sammeln die unbekanntenen Koeffizientenfunktionen in einem Spaltenarray $\underline{y} = [\tilde{r}_{l,m}, \tilde{s}_{l,m}, \tilde{t}_{l,m}, \delta\tilde{p}_{l,m}, \delta\tilde{w}_{l,m}]^T$, $0 \leq l \leq lmax$, $-l \leq m \leq l$. Dann lässt sich das System der Differentialgleichungen und der Rand- bzw. Zusatzbedingungen in der Form

$$\underline{A}\underline{y} = \underline{a} \quad \underline{B}\underline{y} = \underline{b} \quad (3-41)$$

darstellen. Dabei sind \underline{A} , \underline{B} Matrizen, deren Koeffizienten Differentialoperatoren sind, \underline{a} , \underline{b} sind Spaltenmatrizen. Wir zerlegen diese Arrays in einen sphärischen, nichtrotatorischen und einen sphäroidischen bzw. rotatorischen Zusatzterm. Ebenso wird die Spaltenmatrix der Unbekannten in einen sphärischen und einen Störterm zerlegt:

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \underline{A}_0 + \delta\underline{A}, \quad \underline{B} = \underline{B}_0 + \delta\underline{B}, \quad \underline{a} = \underline{a}_0 + \delta\underline{a}, \quad \underline{b} = \underline{b}_0 + \delta\underline{b}, \quad \underline{y} = \underline{y}_0 + \delta\underline{y} \\ \text{mit} \quad \underline{A}_0\underline{y}_0 &= \underline{a}_0 \quad \underline{B}_0\underline{y}_0 = \underline{b}_0.\end{aligned}\quad (3-42)$$

Insbesondere verwenden wir die Bezeichnungen

$$\tilde{r}_{l,m}(R, s) = \tilde{r}_{l,m}^{(0)}(R, s) + \delta\tilde{r}_{l,m}(R, s) \quad \tilde{p}_{l,m}(R, s) = \tilde{p}_{l,m}^{(0)}(R, s) + \delta\tilde{p}_{l,m}(R, s) \quad (3-43)$$

Das System $\underline{A}_0\underline{y}_0 = \underline{a}_0$ lässt sich analytisch lösen; die konstanten Koeffizienten, die in dieser Lösung auftreten, können aus dem System $\underline{B}_0\underline{y}_0 = \underline{b}_0$ numerisch bestimmt werden. Setzen wir (3-42) in (3-41) ein, so ergibt die lineare Störungsrechnung

$$\underline{A}_0\delta\underline{y} = \delta\underline{a} - \delta\underline{A}\underline{y}_0 \quad \underline{B}_0\delta\underline{y} = \delta\underline{b} - \delta\underline{B}\underline{y}_0. \quad (3-44)$$

Die Drehimpulsbilanz wird zunächst nicht in diese Störungsrechnung einbezogen. Die inkrementelle Rotation $\delta\tilde{\omega}$ wird zunächst als bekannt angesehen. Erst wenn die Lösungen der übrigen Unbekannten in Abhängigkeit vom Lastpotential $\delta\tilde{v}^{Last}$ und von $\delta\tilde{\omega}$ gefunden sind, werden sie in die Drehimpulsbilanz eingesetzt.

3-4.2 Darstellung der Trägheitsterme in vektoriellen Kugelfunktionen

Wir entwickeln die Störungen der Trägheitsterme gemäß (2-215) nach vektoriellen Kugelfunktionen. Wir nehmen dabei an, dass die Z-Achse die Richtung des ungestörten Rotationsvektors $\mathbf{\Omega}$ besitzt. Mit Hilfe von (A-44), (A-45), (A-40), (A-95), (A-69)-(A-71) und (A-81)-(A-83) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\mathbf{f}}^{Euler} &= sR\mathbf{e}_R \times (\delta\tilde{\omega}_{1,m}^R \mathbf{R}_{1,m} + \delta\tilde{\omega}_{1,m}^S \mathbf{S}_{1,m}) = sR\delta\tilde{\omega}_{1,m}^S \mathbf{T}_{1,m} = -\sqrt{2}sR\delta\tilde{\omega}_{1,m}^R \mathbf{T}_{1,m} \quad (3-45) \\ \delta\tilde{\mathbf{f}}^{Cor} &= -2s\Omega \left\{ \frac{im}{\sqrt{l(l+1)}}\tilde{s}_{l,m} - \sqrt{\frac{l+2}{3(l+1)}}C(l, 1, l+1; m, 0)\tilde{t}_{l+1,m} + \sqrt{\frac{l-1}{3l}}C(l, 1, l-1; m, 0)\tilde{t}_{l-1,m} \right\} \mathbf{R}_{l,m} - \\ &\quad -2s\Omega \left\{ \frac{im}{\sqrt{l(l+1)}}\tilde{r}_{l,m} - \frac{im}{l(l+1)}\tilde{s}_{l,m} - \frac{\sqrt{l(l+2)}}{\sqrt{3}(l+1)}C(l, 1, l+1; m, 0)\tilde{t}_{l+1,m} - \right. \\ &\quad \quad \left. - \frac{\sqrt{(l-1)(l+1)}}{\sqrt{3}l}C(l, 1, l-1; m, 0)\tilde{t}_{l-1,m} \right\} \mathbf{S}_{l,m} - \\ &\quad -2s\Omega \left\{ -\frac{im}{l(l+1)}\tilde{t}_{l,m} + \frac{\sqrt{l(l+2)}}{\sqrt{3}(l+1)}C(l, 1, l+1; m, 0)\tilde{s}_{l+1,m} + \frac{\sqrt{(l-1)(l+1)}}{\sqrt{3}l}C(l, 1, l-1; m, 0)\tilde{s}_{l-1,m} - \right. \\ &\quad \quad \left. - \sqrt{\frac{l}{3(l+1)}}C(l, 1, l+1; m, 0)\tilde{r}_{l+1,m} + \sqrt{\frac{l+1}{3l}}C(l, 1, l-1; m, 0)\tilde{r}_{l-1,m} \right\} \mathbf{T}_{l,m}\end{aligned}\quad (3-46)$$

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{\mathbf{f}}^{Zent} &= \frac{4}{3} \Omega R \delta \tilde{\omega}_Z \mathbf{R}_{00} - \frac{2\Omega R}{\sqrt{3}} C(1, 1, 2; m, 0) \delta \tilde{\omega}_{1,m}^R \mathbf{R}_{2,m} + \sqrt{2} \Omega R C(1, 1, 2; m, 0) \delta \tilde{\omega}_{1,m}^R \mathbf{S}_{2,m} = \\
&= \Omega R \delta \tilde{\omega}_Z \left[\frac{4}{3} \mathbf{R}_{0,0} - \frac{2}{3\sqrt{5}} (2\mathbf{R}_{2,0} - \sqrt{6}\mathbf{S}_{2,0}) \right] - \frac{\Omega R}{\sqrt{5}} [\delta \tilde{\omega}_{1,1}^R (2\mathbf{R}_{2,1} - \sqrt{6}\mathbf{S}_{2,1}) + \delta \tilde{\omega}_{1,-1}^R (2\mathbf{R}_{2,-1} - \sqrt{6}\mathbf{S}_{2,-1})] \\
&= \text{GRAD} \left[R^2 \Omega \left(\frac{2}{3} \delta \tilde{\omega}_Z - \frac{2}{3\sqrt{5}} \delta \tilde{\omega}_Z Y_{2,0} - \frac{1}{\sqrt{5}} \delta \tilde{\omega}_{1,-1}^R Y_{2,-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \delta \tilde{\omega}_{1,1}^R Y_{2,1} \right) \right] \\
&= \text{GRAD} \left[R^2 \Omega^2 \left(\frac{2}{3} \tilde{m}_Z - \frac{2}{3\sqrt{5}} \tilde{m}_Z Y_{2,0} - \frac{1}{\sqrt{30}} \tilde{m}_Z Y_{2,-1} + \frac{1}{\sqrt{30}} \tilde{m}^* Y_{2,1} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3-47}$$

Offensichtlich ergibt sich hier die Trennung zwischen Tageslängenänderung und Polbewegung von selbst. m_Z entspricht der ersteren, m der letzteren. Die Anwendung der Operatoren DIV bzw. ROT auf die Trägheitsterme ergibt die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\text{DIV } \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Euler} &= 0 \\
\text{DIV } \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Cor} &= 2s < \Omega, \text{ ROT } \tilde{\mathbf{u}} > = \\
&= \frac{2s\Omega}{R\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{\frac{l+2}{l+1}} C(l, 1, l+1; m, 0) ((l+2)\tilde{t}_{l+1,m} + R \frac{d\tilde{t}_{l+1,m}}{dR}) + \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{l-1}{l}} C(l, 1, l-1; m, 0) ((l-1)\tilde{t}_{l-1,m} - R \frac{d\tilde{t}_{l-1,m}}{dR}) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{im\sqrt{3}}{\sqrt{l(l+1)}} (\sqrt{l(l+1)}\tilde{r}_{l,m} + \tilde{s}_{l,m} + R \frac{d\tilde{s}_{l,m}}{dR}) \right\} Y_{l,m}
\end{aligned} \tag{3-48}$$

$$\text{DIV } \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Zent.} = 4\Omega \delta \tilde{\omega}_Z$$

$$\text{ROT } \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Euler} = -2s \delta \tilde{\boldsymbol{\omega}}$$

$$\text{ROT } \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Cor} = -2s (\Omega \text{ DIV } \tilde{\mathbf{u}} - \text{GRAD } \tilde{\mathbf{u}} \cdot \Omega) = 2s \Omega \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial Z}$$

$$\text{ROT } \delta \tilde{\mathbf{f}}^{Zent.} = \mathbf{0}.$$

Der Ausdruck $\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial Z}$, dargestellt in vektoriellen Kugelfunktionen, findet sich in (A-68).

3-4.3 Die Bewegungsgleichungen nach Anwendung der Operatoren DIV und ROT in vektoriellen Kugelfunktionen

Wir entwickeln die Gleichungen (3-39) mit Hilfe von (A-57), (A-43) und (A-53) in komplexe vektorielle Kugelfunktionen; insbesondere wählen wir das Koordinatensystem so, dass die Z-Achse die Richtung des ungestörten Rotationsvektors Ω besitzt. Unter dieser Annahme kann der Coriolisterm $2\rho \text{GRAD } \tilde{\mathbf{u}} \cdot \Omega = 2\rho \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial Z}$ mit (A-68) konstruiert werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R^2} \left[\frac{l(l+1)}{R} \tilde{t}_{l,m} - 2 \frac{d\tilde{t}_{l,m}}{dR} - R \frac{d^2 \tilde{t}_{l,m}}{dR^2} \right] - \right. \\
&\quad - \frac{2\rho\Omega}{\tilde{\mu}(s)} \left[\frac{l+2}{R} \tilde{r}_{l+1,m} + \frac{d\tilde{r}_{l+1,m}}{dR} + \sqrt{\frac{l+2}{l+1}} \frac{\tilde{s}_{l+1,m}}{R} \right] \frac{1}{\sqrt{3}} C(l, 1, l+1; m, 0) + \frac{im}{\sqrt{l(l+1)}} \frac{\tilde{t}_{l,m}}{R} + \\
&\quad \left. + \left[\frac{-(l-1)}{R} \tilde{r}_{l-1,m} + \frac{d\tilde{r}_{l-1,m}}{dR} - \sqrt{\frac{l-1}{l}} \frac{\tilde{s}_{l-1,m}}{R} \right] \frac{1}{\sqrt{3}} C(l, 1, l-1; m, 0) \right\} \mathbf{R}_{l,m} = -\frac{2\rho}{\tilde{\mu}(s)} \delta \tilde{\omega}_{1,m}^R \mathbf{R}_{1,m}
\end{aligned} \tag{3-49}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ -\frac{1}{R} \left[-\frac{l(l+1)}{R^2} \tilde{t}_{l,m} + \frac{l(l+1)}{R} \frac{d\tilde{t}_{l,m}}{dR} - 3 \frac{d^2 \tilde{t}_{l,m}}{dR^2} - R \frac{d^3 \tilde{t}_{l,m}}{dR^3} \right] - \right. \\
& -\frac{2\varrho\Omega}{\tilde{\mu}(s)} \left[\left[\sqrt{\frac{l}{l+1}} \frac{\tilde{r}_{l+1,m}}{R} + \frac{\sqrt{l(l+2)}}{l+1} \left((l+2) \frac{\tilde{s}_{l+1,m}}{R} + \frac{d\tilde{s}_{l+1,m}}{dR} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{3}} C(l, 1, l+1; m, 0) - \frac{im}{l(l+1)} \left[\frac{\tilde{t}_{l,m}}{R} + \frac{d\tilde{t}_{l,m}}{dR} \right] - \right. \\
& \left. \left. - \left[\sqrt{\frac{l+1}{l}} \frac{\tilde{r}_{l-1,m}}{R} + \frac{\sqrt{(l-1)(l+1)}}{l} \left((l-1) \frac{\tilde{s}_{l-1,m}}{R} - \frac{d\tilde{s}_{l-1,m}}{dR} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{3}} C(l, 1, l-1; m, 0) \right] \right\} \mathbf{S}_{l,m} = -\frac{2\varrho}{\tilde{\mu}(s)} \delta\tilde{\omega}_{1,m}^S \mathbf{S}_{1,m}
\end{aligned} \tag{3-50}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[\frac{(l(l+1))^{3/2}}{R^3} \tilde{r}_{l,m} - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} \frac{d^2 \tilde{r}_{l,m}}{dR^2} + \frac{l(l+1)}{R^3} \tilde{s}_{l,m} + \frac{l(l+1)}{R^2} \frac{d\tilde{s}_{l,m}}{dR} - \frac{3}{R} \frac{d^2 \tilde{s}_{l,m}}{dR^2} - \frac{d^3 \tilde{s}_{l,m}}{dR^3} \right] - \right. \\
& -\frac{2\varrho\Omega}{\tilde{\mu}(s)} \left[\left[(l+2) \frac{\tilde{t}_{l+1,m}}{R} + \frac{d\tilde{t}_{l+1,m}}{dR} \right] \frac{\sqrt{l(l+2)}}{\sqrt{3}(l+1)} C(l, 1, l+1; m, 0) + \frac{im}{l(l+1)} \left[\sqrt{l(l+1)} \frac{\tilde{r}_{l,m}}{R} + \frac{\tilde{s}_{l,m}}{R} + \frac{d\tilde{s}_{l,m}}{dR} \right] + \right. \\
& \left. \left. + \left[-(l-1) \frac{\tilde{t}_{l-1,m}}{R} + \frac{d\tilde{t}_{l-1,m}}{dR} \right] \frac{\sqrt{(l-1)(l+1)}}{l\sqrt{3}} C(l, 1, l-1; m, 0) \right] \right\} \mathbf{T}_{l,m} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3-51}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{d^2 \delta\tilde{p}_{l,m}}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d\delta\tilde{p}_{l,m}}{dR} - \frac{l(l+1)}{R^2} \delta\tilde{p}_{l,m} - \frac{2s\varrho\Omega}{R\sqrt{3}} \left[\sqrt{\frac{l+2}{l+1}} C(l, 1, l+1; m, 0) \left((l+2) \tilde{t}_{l+1,m} + R \frac{d\tilde{t}_{l+1,m}}{dR} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{\frac{l-1}{l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \left((l-1) \tilde{t}_{l-1,m} - R \frac{d\tilde{t}_{l-1,m}}{dR} \right) - \frac{im\sqrt{3}}{\sqrt{l(l+1)}} \left(\sqrt{l(l+1)} \tilde{r}_{l,m} + \tilde{s}_{l,m} + R \frac{d\tilde{s}_{l,m}}{dR} \right) \right] \right\} Y_{l,m} = 4\varrho\Omega \delta\tilde{\omega}_Z
\end{aligned} \tag{3-52}$$

$$\left(\frac{2}{R} \tilde{r}_{l,m} + \frac{d\tilde{r}_{l,m}}{dR} + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} \tilde{s}_{l,m} \right) Y_{l,m} = 0 \tag{3-53}$$

In den Gleichungen (3-49)-(3-52) sind die von den Coriolistermen hervorgerufenen Kopplungen der verschiedenen Grade offensichtlich.

Wir setzen die Koeffizienten der linear unabhängigen Basisfunktionen $\mathbf{R}_{l,m}$, $\mathbf{S}_{l,m}$, $\mathbf{T}_{l,m}$ und $Y_{l,m}$ gleich. Zunächst nutzen wir (3-53), um die Funktionen $\tilde{s}_{l,m}$ aus dem System (3-49)-(3-52) zu eliminieren. Dabei erweist sich, dass die Komponenten von $\mathbf{R}_{l,m}$ und $\mathbf{S}_{l,m}$ linear abhängig sind. Das vereinfachte System lautet:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{d^2 \tilde{t}_{l,m}}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d\tilde{t}_{l,m}}{dR} - \frac{l(l+1)}{R^2} \tilde{t}_{l,m} \right\} + \\
& + \frac{2\varrho\Omega R}{\tilde{\mu}(s)} \left[\frac{1}{(l+1)} \sqrt{\frac{l}{3(l+1)}} \left[(l+3) \frac{\tilde{r}_{l+1,m}}{R} + \frac{d\tilde{r}_{l+1,m}}{dR} \right] C(l, 1, l+1; m, 0) + \right. \\
& \left. + \frac{im}{l(l+1)} \frac{\tilde{t}_{l,m}}{R} + \frac{1}{l} \sqrt{\frac{l+1}{3l}} \left[-(l-2) \frac{\tilde{r}_{l-1,m}}{R} + \frac{d\tilde{r}_{l-1,m}}{dR} \right] C(l, 1, l-1; m, 0) \right] = \frac{\sqrt{2}\varrho R}{\tilde{\mu}(s)} \delta\tilde{\omega}_{1,m}^R \delta_{l,1}
\end{aligned} \tag{3-54}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{l(l+1)}{R^4} (l+2)(l-1) \tilde{r}_{l,m} - 4 \frac{l(l+1)}{R^3} \frac{d\tilde{r}_{l,m}}{dR} - 2 \frac{(l+3)(l-2)}{R^2} \frac{d^2 \tilde{r}_{l,m}}{dR^2} + \frac{8}{R} \frac{d^3 \tilde{r}_{l,m}}{dR^3} + \frac{d^4 \tilde{r}_{l,m}}{dR^4} \right\} - \\
& - \frac{2\varrho\Omega}{R\tilde{\mu}(s)} \left[\left[(l+2) \frac{\tilde{t}_{l+1,m}}{R} + \frac{d\tilde{t}_{l+1,m}}{dR} \right] \frac{l\sqrt{l(l+2)}}{\sqrt{3}(l+1)} C(l, 1, l+1; m, 0) + \frac{im}{l(l+1)} \left[(l+2)(l-1) \frac{\tilde{r}_{l,m}}{R} - 4 \frac{d\tilde{r}_{l,m}}{dR} - R \frac{d^2 \tilde{r}_{l,m}}{dR^2} \right] + \right. \\
& \left. + \left[-(l-1) \frac{\tilde{t}_{l-1,m}}{R} + \frac{d\tilde{t}_{l-1,m}}{dR} \right] \frac{(l+1)\sqrt{l-1}}{\sqrt{3}l} C(l, 1, l-1; m, 0) \right] = 0
\end{aligned} \tag{3-55}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{d^2 \delta \tilde{p}_{l,m}}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d \delta \tilde{p}_{l,m}}{dR} - \frac{l(l+1)}{R^2} \delta \tilde{p}_{l,m} \right\} - \\
& - \frac{2s\varrho\Omega}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{\frac{l+2}{l+1}} C(l, 1, l+1; m, 0) \left((l+2) \frac{\tilde{t}_{l+1,m}}{R} + \frac{d\tilde{t}_{l+1,m}}{dR} \right) + \sqrt{\frac{l-1}{l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \left((l-1) \frac{\tilde{t}_{l-1,m}}{R} - \frac{d\tilde{t}_{l-1,m}}{dR} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{im\sqrt{3}}{l(l+1)} \left[(l+2)(l-1) \frac{\tilde{r}_{l,m}}{R} - 4 \frac{d\tilde{r}_{l,m}}{dR} - R \frac{d^2 \tilde{r}_{l,m}}{dR^2} \right] \right] = 4\varrho\Omega \delta \tilde{\omega}_Z \delta_{l,0}
\end{aligned} \tag{3-56}$$

$$\left(\frac{2}{R} \tilde{r}_{l,m} + \frac{d\tilde{r}_{l,m}}{dR} + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} \tilde{s}_{l,m} \right) = 0 \tag{3-57}$$

Diese Gleichungen müssen für alle Grade l gelten. Wir haben jeweils den Term, der dem "sphärischen, nichtrotierenden" Hauptteil \underline{A}_0 des Differentialoperators entspricht, in geschweifte Klammern gesetzt. Es treten dabei keine Absolutglieder auf, d.h. das "sphärische, nichtrotierende" Dgl-System ist homogen.

3-4.4 Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen nach Anwendung der Operatoren DIV und ROT mit Hilfe der Störungsrechnung

Bei dem "ungestörten" System $\underline{A}_0 \underline{y}_0 = \underline{a}_0 = \underline{0}$ handelt es sich im wesentlichen um *Euler'sche Differentialgleichungen*. Die allgemeine Lösung des Systems lautet

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_{l,m}^{(0)}(R) &= \tilde{c}_{l,m}^{(1)} R^{(l+1)} + \tilde{c}_{l,m}^{(2)} R^{(l-1)} + \tilde{c}_{l,m}^{(3)} R^{-l} + \tilde{c}_{l,m}^{(4)} R^{-(l+2)} \\
\tilde{s}_{l,m}^{(0)}(R) &= -\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left[(l+3) \tilde{c}_{l,m}^{(1)} R^{(l+1)} + (l+1) \tilde{c}_{l,m}^{(2)} R^{(l-1)} - (l-2) \tilde{c}_{l,m}^{(3)} R^{-l} - l \tilde{c}_{l,m}^{(4)} R^{-(l+2)} \right] \\
\tilde{t}_{l,m}^{(0)}(R) &= \tilde{c}_{l,m}^{t1} R^l + \tilde{c}_{l,m}^{t2} R^{-(l+1)}
\end{aligned} \tag{3-58}$$

$$\delta \tilde{p}_{l,m}^{(0)} = \tilde{c}_{l,m}^{p1} R^l + \tilde{c}_{l,m}^{p2} R^{-(l+1)}$$

$$\delta \tilde{w}_{l,m}^{(0)} = \tilde{c}_{l,m}^{(w1)} R^l + \tilde{c}_{l,m}^{(w2)} R^{-(l+1)}$$

Wir führen diese allgemeinen Lösung wiederum in die nichtsphärischen Glieder ein, um die Störung $\delta \underline{y}$ zu berechnen, welche gemäß (3-44) $\underline{A}_0 \delta \underline{y} = \delta \underline{a} - \delta \underline{A} \underline{y}_0$ erfüllen soll. Da \underline{y}_0 nunmehr - abgesehen von nur frequenz-abhängigen Koeffizienten $\tilde{c}_{l,m}$ - bekannt ist, kann der Term $\delta \underline{a} - \delta \underline{A} \underline{y}_0$ somit als Inhomogenität des Dgl-Systems (3-44) angesehen werden. Wenn wir die allgemeine Lösung (3-58) in die Störterme von (3-54)-(3-56) einsetzen, so erhalten wir das - nun ebenfalls entkoppelte - System

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{d^2 \delta \tilde{t}_{l,m}}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d \delta \tilde{t}_{l,m}}{dR} - \frac{l(l+1)}{R^2} \delta \tilde{t}_{l,m} \right\} \\
& = -\frac{2\varrho\Omega}{\tilde{\mu}(s)} \left[R^{l+2} \left[\frac{2l+5}{(l+1)} \sqrt{\frac{l}{3(l+1)}} C(l, 1, l+1; m, 0) \tilde{c}_{l+1,m}^{(1)} + R^l \left[\frac{2l+3}{(l+1)} \sqrt{\frac{l}{3(l+1)}} C(l, 1, l+1; m, 0) \tilde{c}_{l+1,m}^{(2)} + \right. \right. \right. \\
& + \frac{im}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(t1)} + \frac{2}{l} \sqrt{\frac{l+1}{3l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \tilde{c}_{l-1,m}^{(1)} \left. \right] + R^{-(l+1)} \left[\frac{2}{l+1} \sqrt{\frac{l}{3(l+1)}} C(l, 1, l+1; m, 0) \tilde{c}_{l+1,m}^{(3)} + \right. \\
& + \frac{im}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(t2)} - \frac{2l-1}{l} \sqrt{\frac{l+1}{3l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \tilde{c}_{l-1,m}^{(4)} \left. \right] + \\
& \left. + R^{-(l-1)} \left[-\frac{2l-3}{l} \sqrt{\frac{l+1}{3l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \tilde{c}_{l-1,m}^{(3)} \right] \right] + \frac{\sqrt{2}\varrho R}{\tilde{\mu}(s)} \delta \tilde{\omega}_{1,m}^R \delta_{l,1}
\end{aligned} \tag{3-59}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{l(l+1)}{R^4} (l+2)(l-1) \delta \tilde{r}_{l,m} - 4 \frac{l(l+1)}{R^3} \frac{d \delta \tilde{r}_{l,m}}{dR} - 2 \frac{(l+3)(l-2)}{R^2} \frac{d^2 \delta \tilde{r}_{l,m}}{dR^2} + \frac{8}{R} \frac{d^3 \delta \tilde{r}_{l,m}}{dR^3} + \frac{d^4 \delta \tilde{r}_{l,m}}{dR^4} \right\} = \\
& = \frac{2 \varrho \Omega}{\tilde{\mu}(s)} \left[R^{l-1} (2l+3) \left[\frac{l \sqrt{l+2}}{\sqrt{3(l+1)}} C(l, 1, l+1; m, 0) \tilde{c}_{l+1,m}^{(t1)} - \frac{2im}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(1)} \right] + \right. \\
& \left. + R^{-(l+2)} (2l-1) \left[-\frac{(l+1) \sqrt{l-1}}{\sqrt{3l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \tilde{c}_{l-1,m}^{(t2)} + \frac{2im}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(3)} \right] \right]
\end{aligned} \tag{3-60}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{d^2 \delta \delta \tilde{p}_{l,m}}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d \delta \delta \tilde{p}_{l,m}}{dR} - \frac{l(l+1)}{R^2} \delta \delta \tilde{p}_{l,m} \right\} = \\
& = \frac{2s \varrho \Omega}{\sqrt{3}} \left[(2l+3) R^l \left[\sqrt{\frac{l+2}{l+1}} C(l, 1, l+1; m, 0) \tilde{c}_{l+1,m}^{(t1)} + \frac{2im \sqrt{3}}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(1)} \right] + \right. \\
& \left. + (2l-1) R^{-(l+1)} \left[\sqrt{\frac{l-1}{l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \tilde{c}_{l-1,m}^{(t2)} - \frac{2im \sqrt{3}}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(3)} \right] \right] + 4 \varrho \Omega \delta \tilde{\omega}_Z \delta_{l,0}
\end{aligned} \tag{3-61}$$

Zur Lösung dieses Systems wenden wir die Methode der Variation der Konstanten an und erhalten:

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{r}_{l,m}(R) & = \delta \tilde{c}_{l,m}^{(1)} R^{l+1} + \delta \tilde{c}_{l,m}^{(2)} R^{l-1} + \delta \tilde{c}_{l,m}^{(3)} R^{-l} + \delta \tilde{c}_{l,m}^{(4)} R^{-(l+2)} + \\
& + \frac{\varrho \Omega}{4 \tilde{\mu}} \left\{ \frac{R^{l+3}}{2l+5} \left[\frac{l \sqrt{l+2}}{\sqrt{3(l+1)}} C(l, 1, l+1; m, 0) \tilde{c}_{l+1,m}^{(t1)} - \frac{2im}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(1)} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{R^{-(l-2)}}{2l-3} \left[-\frac{(l+1) \sqrt{l-1}}{\sqrt{3l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \tilde{c}_{l-1,m}^{(t2)} + \frac{2im}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(3)} \right] \right\} \\
& =: \delta \tilde{r}_{l,m}^{(hom)}(R) + \delta \tilde{r}_{l,m}^{(part)}(R)
\end{aligned} \tag{3-62}$$

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{s}_{l,m}(R) & = -\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} [(l+3) \delta \tilde{c}_{l,m}^{(1)} R^{l+1} + (l+1) \delta \tilde{c}_{l,m}^{(2)} R^{l-1} - (l-2) \delta \tilde{c}_{l,m}^{(3)} R^{-l} - l \delta \tilde{c}_{l,m}^{(4)} R^{-(l+2)}] - \\
& - \frac{\varrho \Omega}{4 \tilde{\mu} \sqrt{l(l+1)}} \left\{ \frac{(l+5) R^{l+3}}{2l+5} \left[\frac{l \sqrt{l+2}}{\sqrt{3(l+1)}} C(l, 1, l+1; m, 0) \tilde{c}_{l+1,m}^{(t1)} - \frac{2im}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(1)} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{(l-4) R^{-(l-2)}}{2l-3} \left[-\frac{(l+1) \sqrt{l-1}}{\sqrt{3l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \tilde{c}_{l-1,m}^{(t2)} + \frac{2im}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(3)} \right] \right\} \\
& =: \delta \tilde{s}_{l,m}^{(hom)}(R) + \delta \tilde{s}_{l,m}^{(part)}(R)
\end{aligned} \tag{3-63}$$

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{t}_{l,m}(R) & = \delta \tilde{c}_{l,m}^{(t1)} R^l + \delta \tilde{c}_{l,m}^{(t2)} R^{-(l+1)} - \\
& - \frac{2s \varrho \Omega}{s \tilde{\mu} \sqrt{l(l+1)}} \left\{ \frac{l C(l, 1, l+1; m, 0)}{4(l+1) \sqrt{3}} \tilde{c}_{l+1,m}^{(1)} R^{l+4} + \right. \\
& + \left[\frac{l C(l, 1, l+1; m, 0)}{2(l+1) \sqrt{3}} \tilde{c}_{l+1,m}^{(2)} + \frac{im}{2(2l+3) \sqrt{l(l+1)}} \tilde{c}_{l,m}^{(t1)} + \frac{(l+1) C(l, 1, l-1; m, 0)}{l(2l+3) \sqrt{3}} \tilde{c}_{l-1,m}^{(1)} \right] R^{l+2} - \\
& - \left[\frac{l C(l, 1, l+1; m, 0)}{(l+1)(2l-1) \sqrt{3}} \tilde{c}_{l+1,m}^{(3)} + \frac{im}{2(2l-1) \sqrt{l(l+1)}} \tilde{c}_{l,m}^{(t2)} - \frac{(l+1) C(l, 1, l-1; m, 0)}{2l \sqrt{3}} \tilde{c}_{l-1,m}^{(4)} \right] R^{-(l-1)} + \\
& \left. + \frac{(l+1) C(l, 1, l-1; m, 0)}{4l \sqrt{3}} \tilde{c}_{l-1,m}^{(3)} R^{-(l-3)} \right\} + \frac{\sqrt{2} \varrho}{10 \tilde{\mu}} \delta \tilde{\omega}_{1,m}^R R^3 \delta_{l,1} \\
& =: \delta \tilde{t}_{l,m}^{(hom)}(R) + \delta \tilde{t}_{l,m}^{(part)}(R)
\end{aligned} \tag{3-64}$$

$$\begin{aligned}
\delta\delta\tilde{p}_{l,m}(R) &= \delta\tilde{c}_{l,m}^{(p1)} R^l + \delta\tilde{c}_{l,m}^{(p2)} R^{-(l+1)} + \\
&+ \frac{s\rho\Omega}{\sqrt{3}} \left\{ R^{l+2} \left[\sqrt{\frac{l+2}{l+1}} C(l, 1, l+1; m, 0) \tilde{c}_{l+1,m}^{(t1)} + \frac{2im\sqrt{3}}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(1)} \right] - \right. \\
&\left. - R^{-(l-1)} \left[\sqrt{\frac{l-1}{l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \tilde{c}_{l-1,m}^{(t2)} - \frac{2im\sqrt{3}}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(3)} \right] \right\} + \frac{2\rho\Omega\delta\tilde{\omega}_Z R^2}{3} \delta_{l,0} \\
&=: \delta\delta\tilde{p}_{l,m}^{(hom)}(R) + \delta\delta\tilde{p}_{l,m}^{(part)}(R) \\
\delta\delta\tilde{w}_{l,m}(R) &= \delta\tilde{c}_{l,m}^{(w1)} R^l + \delta\tilde{c}_{l,m}^{(w2)} R^{-(l+1)} + \frac{2}{3} R^2 \Omega^2 \tilde{m}_Z \delta_{l,0} \\
&=: \delta\delta\tilde{w}_{l,m}^{(hom)}(R) + \delta\delta\tilde{w}_{l,m}^{(part)}(R)
\end{aligned} \tag{3-65}$$

$$\begin{aligned}
\delta\delta\tilde{w}_{l,m}(R) &= \delta\tilde{c}_{l,m}^{(w1)} R^l + \delta\tilde{c}_{l,m}^{(w2)} R^{-(l+1)} + \frac{2}{3} R^2 \Omega^2 \tilde{m}_Z \delta_{l,0} \\
&=: \delta\delta\tilde{w}_{l,m}^{(hom)}(R) + \delta\delta\tilde{w}_{l,m}^{(part)}(R)
\end{aligned} \tag{3-66}$$

Das inkrementelle Störpotential δw beinhaltet das Lastpotential, das deformatrische Potential und das inkrementelle Zentrifugalpotential. Das inkrementelle Zentrifugalpotential kann aus (3-47) bereits abgelesen werden; dabei zeigt sich, dass es bis auf den ersten Term formal dieselbe Gestalt besitzt wie die homogene Lösung des inkrementellen Schwerepotentials. Es besteht also die Möglichkeit, die restlichen Terme entweder in $\delta\delta\tilde{w}_{l,m}^{(part)}(R)$ oder im homogenen Teil aufzunehmen. Die letztere Möglichkeit bietet den Vorteil, dass später in den Randbedingungen der Koeffizient \tilde{m} des inkrementellen Winkelgeschwindigkeitsvektors nicht explizit erscheint. Aus noch zu erläuternden Gründen werden die "homogenen" Terme des Zentrifugalpotentials sogar als der ungestörten Lösung $\delta\tilde{w}^{(0)}$ zugehörig betrachtet. Der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten des inkrementellen Gravitations- und des inkrementellen Schwerepotentials lautet somit

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{l,m}^{w1} &= \tilde{c}_{l,m}^{v1(grav)} + \tilde{c}_{l,m}^{v1(Zent)} = \tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)} + \tilde{c}_{l,m}^{v1(Def)} + \tilde{c}_{l,m}^{v1(Zent)} & \tilde{c}_{l,m}^{w2} &= \tilde{c}_{l,m}^{v2(grav)} = \tilde{c}_{l,m}^{v2(Last)} + \tilde{c}_{l,m}^{v2(Def)} \\
\tilde{c}_{2,0}^{v1(Zent)} &= -\frac{2\Omega^2}{3\sqrt{5}} \tilde{m}_Z & \tilde{c}_{2,-1}^{v1(Zent)} &= -\frac{\Omega^2}{\sqrt{30}} \tilde{m} & \tilde{c}_{2,1}^{v1(Zent)} &= \frac{\Omega^2}{\sqrt{30}} \tilde{m}^* \\
\tilde{c}_{2,-2}^{v1(Zent)} &= \tilde{c}_{2,2}^{v1(Zent)} = 0 & \tilde{c}_{l,m}^{v1(Zent)} &= 0 & \forall l \neq 2
\end{aligned} \tag{3-67}$$

Diese Zusammenhänge werden später benötigt, wenn die inkrementellen Trägheitsmomente mit den Koeffizienten des inkrementellen Gravitationspotentials ausgedrückt werden.

3-4.5 Die originalen Bewegungsgleichungen in vektoriiellen Kugelfunktionen

Durch die Anwendung der Operatoren DIV und ROT auf die Bewegungsgleichungen wurde die Lösung erleichtert, aber auch die Lösungsmenge vergrößert. Mit Hilfe der originalen Bewegungsgleichungen schränken wir die gefundene Lösungsmenge daher wieder ein. Als Komponenten der Basisfunktionen $\mathbf{R}_{l,m}$, $\mathbf{S}_{l,m}$, $\mathbf{T}_{l,m}$ finden wir:

Komponente von $\mathbf{R}_{l,m}$:

$$\begin{aligned}
&-\frac{d\delta\tilde{p}_{l,m}}{dR} - s\tilde{\mu} \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R^2} \left[\sqrt{l(l+1)} \tilde{r}_{l,m} + \tilde{s}_{l,m} + R \frac{d\tilde{s}_{l,m}}{dR} \right] + \varrho \frac{d\delta\tilde{w}_{l,m}}{dR} - \\
&- 2s\rho\Omega \left[\frac{im}{\sqrt{l(l+1)}} \tilde{s}_{l,m} - \sqrt{\frac{l+2}{3(l+1)}} C(l, 1, l+1; m, 0) \tilde{t}_{l+1,m} + \sqrt{\frac{l-1}{3l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \tilde{t}_{l-1,m} \right] = 0
\end{aligned} \tag{3-68}$$

Komponente von $\mathbf{S}_{l,m}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} \delta \tilde{p}_{l,m} - \frac{s\tilde{\mu}}{R} \left[-\sqrt{l(l+1)} \frac{d\tilde{r}_{l,m}}{dR} - 2 \frac{d\tilde{s}_{l,m}}{dR} - R \frac{d^2 \tilde{s}_{l,m}}{dR^2} \right] - \varrho \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} \delta \tilde{w}_{l,m} - 2s\varrho\Omega \left[\frac{im}{\sqrt{l(l+1)}} \tilde{r}_{l,m} - \right. \\ & \left. - \frac{im}{l(l+1)} \tilde{s}_{l,m} - \frac{\sqrt{l(l+2)}}{(l+1)\sqrt{3}} C(l, 1, l+1; m, 0) \tilde{t}_{l+1,m} - \frac{\sqrt{(l-1)(l+1)}}{l\sqrt{3}} C(l, 1, l-1; m, 0) \tilde{t}_{l-1,m} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3-69)$$

Komponente von $\mathbf{T}_{l,m}$:

$$\begin{aligned} & -\frac{s\tilde{\mu}}{R^2} \left[l(l+1) \tilde{t}_{l,m} - 2R \frac{d\tilde{t}_{l,m}}{dR} - R^2 \frac{d^2 \tilde{t}_{l,m}}{dR^2} \right] - \\ & -2s\varrho\Omega \left[-\frac{im}{l(l+1)} \tilde{t}_{l,m} + \frac{\sqrt{l(l+2)}}{(l+1)\sqrt{3}} C(l, 1, l+1; m, 0) \tilde{s}_{l+1,m} + \frac{\sqrt{(l-1)(l+1)}}{l\sqrt{3}} C(l, 1, l-1; m, 0) \tilde{s}_{l-1,m} - \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{l}{3(l+1)}} C(l, 1, l+1; m, 0) \tilde{r}_{l+1,m} + \sqrt{\frac{l+1}{3l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \tilde{r}_{l-1,m} \right] - \sqrt{2} s R \varrho \delta \tilde{\omega}_{l,m}^R \delta_{l,1} = 0 \end{aligned} \quad (3-70)$$

Wir setzen die allgemeinen Lösungen (3-58) bzw.(3-62), (3-63), (3-64), (3-65) in diese Gleichungen ein und erhalten die Zusatzbedingungen

$$\begin{aligned} l\tilde{c}_{l,m}^{(p1)} &= l\varrho\tilde{c}_{l,m}^{(w1)} + 2(2l+3)s\tilde{\mu}\tilde{c}_{l,m}^{(1)} + 2\frac{im}{l}s\varrho\Omega\tilde{c}_{l,m}^{(2)} - 2s\varrho\Omega\sqrt{\frac{l-1}{3l}}C(l, 1, l-1; m, 0)\tilde{c}_{l-1,m}^{(t1)} \\ (l+1)\tilde{c}_{l,m}^{(p2)} &= (l+1)\varrho\tilde{c}_{l,m}^{(w2)} + 2(2l-1)s\tilde{\mu}\tilde{c}_{l,m}^{(3)} + 2\frac{im}{l+1}s\varrho\Omega\tilde{c}_{l,m}^{(4)} - 2s\varrho\Omega\sqrt{\frac{l+2}{3(l+1)}}C(l, 1, l+1; m, 0)\tilde{c}_{l+1,m}^{(t2)} \end{aligned} \quad (3-71)$$

Wir werden diese Zusatzbedingungen benutzen, um die Koeffizienten des Druckinkrementes $\delta\tilde{p}$ aus den Randbedingungen zu eliminieren.

3-4.6 Transformation der Lösungen auf quasisphärische Koordinaten

Wir transformieren die allgemeine Lösung (3-58) in linearer Näherung auf quasisphärische Koordinaten:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}} &= \bar{r}_{l,m}(\bar{R})\bar{\mathbf{R}}_{l,m}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi}) + \bar{s}_{l,m}(\bar{R})\bar{\mathbf{S}}_{l,m}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi}) + \bar{t}_{l,m}(\bar{R})\bar{\mathbf{T}}_{l,m}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi}) \\ \delta\tilde{p} &= \delta\bar{p}_{l,m}(\bar{R})Y_{l,m}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi}) \\ \delta\tilde{w} &= \delta\bar{w}_{l,m}(\bar{R})Y_{l,m}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi}).\end{aligned}\tag{3-72}$$

Um diese Darstellung zu erreichen, ersetzen wir zunächst mit Hilfe von (3-9) die vektoriellen Kugelfunktionen durch die vektoriellen Sphäroidfunktionen und sortieren die entstehenden Komponenten nach den Basisfunktionen (eventuell müssen die Summenindices verschoben werden). Weiterhin entwickeln wir die radiusabhängigen Koeffizientenfunktionen $r_{l,m}(R)$, $s_{l,m}(R)$, $t_{l,m}(R)$ usw. in Taylorreihen an der Stelle \bar{R} und brechen jeweils nach dem linearen Term ab. (Wegen (3-1) sind die linearen Terme jeweils auch von $Y_{2,0}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi})$ abhängig. Potenzen R^l usw. werden durch den linearen Term der Binomialentwicklung der Potenz von (3-1) approximiert: $R^l = \bar{R}^l(1 - le^2/(3\sqrt{5})Y_{2,0})$.) Nun werden diese Taylorentwicklungen jeweils mit den zugehörigen längen- und breitenabhängigen Basisfunktionen $\bar{\mathbf{R}}_{l,m}$, $\bar{\mathbf{S}}_{l,m}$, $\bar{\mathbf{T}}_{l,m}$ bzw. $Y_{l,m}$ multipliziert, so dass die Feldgrößen $\tilde{\mathbf{u}}$, $\delta\tilde{p}$, $\delta\tilde{w}$ rekonstruiert sind. Schließlich werden die auftretenden Produkte $Y_{20} \cdot \mathbf{R}_{l,m}$, $Y_{20} \cdot \mathbf{S}_{l,m}$, $Y_{20} \cdot \mathbf{T}_{l,m}$ gemäß (A-28), (A-75), (A-76), (A-77) wieder in skalaren bzw. vektoriellen Kff rekombiniert und die radiusabhängigen Koeffizienten nach den zugehörigen Basisfunktionen geordnet. Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned}\bar{r}_{l,m}(\bar{R}) &= \tilde{c}_{l,m}^{(1)}\bar{R}^{(l+1)} + \tilde{c}_{l,m}^{(2)}\bar{R}^{(l-1)} + \tilde{c}_{l,m}^{(3)}\bar{R}^{-l} + \tilde{c}_{l,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+2)} + \delta\tilde{r}_{l,m}^{(hom)}(\bar{R}) + \\ &+ \frac{s_{\varrho\Omega}}{4s\bar{\mu}} \left\{ \frac{R^{l+3}}{2l+5} \left[\frac{l\sqrt{l+2}}{\sqrt{3(l+1)}} C(l, 1, l+1; m, 0) \tilde{c}_{l+1,m}^{(t1)} - \frac{2im}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(1)} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{R^{-(l-2)}}{2l-3} \left[-\frac{(l+1)\sqrt{l-1}}{\sqrt{3l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \tilde{c}_{l-1,m}^{(t2)} + \frac{2im}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(3)} \right] \right\} + \\ &+ \frac{e^2}{3\sqrt{5}} \left\{ \left[-(l+3)\tilde{c}_{l+2,m}^{(1)}\bar{R}^{(l+3)} - (l+1)\tilde{c}_{l+2,m}^{(2)}\bar{R}^{(l+1)} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. (l+2)\tilde{c}_{l+2,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l+2)} + (l+4)\tilde{c}_{l+2,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+4)} \right] C(l+2, 2, l; m, 0) + \right. \\ &+ \left[-(l+1)\tilde{c}_{l,m}^{(1)}\bar{R}^{(l+1)} - (l-1)\tilde{c}_{l,m}^{(2)}\bar{R}^{(l-1)} + l\tilde{c}_{l,m}^{(3)}\bar{R}^{-l} + (l+2)\tilde{c}_{l,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+2)} \right] C(l, 2, l; m, 0) + \\ &+ \left. \left[-(l-1)\tilde{c}_{l-2,m}^{(1)}\bar{R}^{(l-1)} - (l-3)\tilde{c}_{l-2,m}^{(2)}\bar{R}^{(l-3)} + (l-2)\tilde{c}_{l-2,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l-2)} + l\tilde{c}_{l-2,m}^{(4)}\bar{R}^{-l} \right] C(l-2, 2, l; m, 0) \right\} + \\ &+ \frac{e^2}{3\sqrt{5}} \left\{ \frac{2C(l, 2, l+2; m, 0)}{(l+2)} [(l+5)\tilde{c}_{l+2,m}^{(1)}\bar{R}^{l+3} + (l+3)\tilde{c}_{l+2,m}^{(2)}\bar{R}^{l+1} - l\tilde{c}_{l+2,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l+2)} - (l+2)\tilde{c}_{l+2,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+4)}] + \right. \\ &+ \frac{3C(l, 2, l; m, 0)}{l(l+1)} [(l+3)\tilde{c}_{l,m}^{(1)}\bar{R}^{l+1} + (l+1)\tilde{c}_{l,m}^{(2)}\bar{R}^{l-1} - (l-2)\tilde{c}_{l,m}^{(3)}\bar{R}^{-l} - l\tilde{c}_{l,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+2)}] - \\ &- \left. \frac{2C(l, 2, l-2; m, 0)}{(l-1)} [(l+1)\tilde{c}_{l-2,m}^{(1)}\bar{R}^{l-1} + (l-1)\tilde{c}_{l-2,m}^{(2)}\bar{R}^{l-3} - (l-4)\tilde{c}_{l-2,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l-2)} - (l-2)\tilde{c}_{l-2,m}^{(4)}\bar{R}^{-l}] \right\} - \\ &- \frac{ime^2}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{C(l, 1, l+1; m, 0)}{\sqrt{(l+1)(l+2)}} \left[c_{l+1,m}^{(t1)}\bar{R}^{l+1} + c_{l+1,m}^{(t2)}\bar{R}^{-(l+2)} \right] + \frac{C(l, 1, l-1; m, 0)}{\sqrt{l(l-1)}} \left[c_{l-1,m}^{(t1)}\bar{R}^{l-1} + c_{l-1,m}^{(t2)}\bar{R}^{-l} \right] \right\} \\ &=: \tilde{r}_{l,m}^{(0)}(\bar{R}) + \delta\tilde{r}_{l,m}^{(hom)}(\bar{R}) + \delta\tilde{r}_{l,m}^{(part)}(\bar{R}) + \delta\tilde{r}_{l,m}^{(Ell)}(\bar{R})\end{aligned}\tag{3-73}$$

Innerhalb des Störterms $\delta\tilde{r}_{l,m}(\bar{R})$ durfte in linearer Näherung $R = \bar{R}$ gesetzt werden. Der erste e^2 enthaltende Term entsteht aus dem Übergang von R nach \bar{R} , der zweite aus dem Übergang von $\mathbf{R}_{l,m}$ nach $\bar{\mathbf{R}}_{l,m}$.

$$\begin{aligned}
\bar{s}_{l,m}(\bar{R}) = & -\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left[(l+3)\tilde{c}_{l,m}^{(1)}\bar{R}^{(l+1)} + (l+1)\tilde{c}_{l,m}^{(2)}\bar{R}^{(l-1)} - (l-2)\tilde{c}_{l,m}^{(3)}\bar{R}^{-l} - l\tilde{c}_{l,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+2)} \right] + \delta\tilde{s}_{l,m}^{(hom)}(\bar{R}) - \\
& -\frac{s\varrho\Omega}{4s\tilde{\mu}\sqrt{l(l+1)}} \left\{ \frac{(l+5)R^{l+3}}{2l+5} \left[\frac{l\sqrt{l+2}}{\sqrt{3(l+1)}} C(l, 1, l+1; m, 0)\tilde{c}_{l+1,m}^{(t1)} - \frac{2im}{l(l+1)}\tilde{c}_{l,m}^{(1)} \right] - \right. \\
& -\frac{(l-4)R^{-(l-2)}}{2l-3} \left[-\frac{(l+1)\sqrt{l-1}}{\sqrt{3l}} C(l, 1, l-1; m, 0)\tilde{c}_{l-1,m}^{(t2)} + \frac{2im}{l(l+1)}\tilde{c}_{l,m}^{(3)} \right] \left. \right\} + \\
& +\frac{e^2}{3\sqrt{5}} \left\{ \left[(l+5)(l+3)\tilde{c}_{l+2,m}^{(1)}\bar{R}^{(l+3)} + (l+1)(l+3)\tilde{c}_{l+2,m}^{(2)}\bar{R}^{(l+1)} + \right. \right. \\
& +l(l+2)\tilde{c}_{l+2,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l+2)} + (l+2)(l+4)\tilde{c}_{l+2,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+4)} \left. \right] \sqrt{\frac{l}{(l+1)}} \frac{C(l+2, 2, l; m, 0)}{l+2} - \\
& -\left[-(l+1)\tilde{c}_{l+1,m}^{(t1)}\bar{R}^{(l+1)} + (l+2)\tilde{c}_{l+1,m}^{(t2)}\bar{R}^{-(l+2)} \right] \sqrt{\frac{15}{l(l+2)}} \cdot \frac{im}{l+1} C(l+1, 1, l; m, 0) + \\
& +\left[(l+1)(l+3)\tilde{c}_{l,m}^{(1)}\bar{R}^{(l+1)} + (l-1)(l+1)\tilde{c}_{l,m}^{(2)}\bar{R}^{(l-1)} + l(l-2)\tilde{c}_{l,m}^{(3)}\bar{R}^{-l} + \right. \\
& +l(l+2)\tilde{c}_{l,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+2)} \left. \right] \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left(1 - \frac{3}{l(l+1)} \right) C(l, 2, l; m, 0) - \\
& -\left[-(l-1)\tilde{c}_{l-1,m}^{(t1)}\bar{R}^{(l-1)} + l\tilde{c}_{l-1,m}^{(t2)}\bar{R}^{-l} \right] \sqrt{\frac{15}{(l-1)(l+1)}} \cdot \frac{im}{l} C(l-1, 1, l; m, 0) + \\
& +\left[(l-1)(l+1)\tilde{c}_{l-2,m}^{(1)}\bar{R}^{(l-1)} + (l-1)(l-3)\tilde{c}_{l-2,m}^{(2)}\bar{R}^{(l-3)} + (l-2)(l-4)\tilde{c}_{l-2,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l-2)} + \right. \\
& +l(l-2)\tilde{c}_{l-2,m}^{(4)}\bar{R}^{-l} \left. \right] \sqrt{\frac{l+1}{l}} \frac{C(l-2, 2, l; m, 0)}{l-1} \left. \right\} + \\
& +\frac{e^2}{3\sqrt{5}} \left\{ -2\sqrt{\frac{l}{l+1}} C(l, 2, l+2; m, 0) \left[\tilde{c}_{l+2,m}^{(1)}\bar{R}^{(l+3)} + \tilde{c}_{l+2,m}^{(2)}\bar{R}^{(l+1)} + \tilde{c}_{l+2,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l+2)} + \tilde{c}_{l+2,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+4)} \right] + \right. \\
& +\frac{3}{\sqrt{l(l+1)}} C(l, 2, l; m, 0) \left[\tilde{c}_{l,m}^{(1)}\bar{R}^{(l+1)} + \tilde{c}_{l,m}^{(2)}\bar{R}^{(l-1)} + \tilde{c}_{l,m}^{(3)}\bar{R}^{-l} + \tilde{c}_{l,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+2)} \right] + \\
& +2\sqrt{\frac{l+1}{l}} C(l, 2, l-2; m, 0) \left[\tilde{c}_{l-2,m}^{(1)}\bar{R}^{(l-1)} + \tilde{c}_{l-2,m}^{(2)}\bar{R}^{(l-3)} + \tilde{c}_{l-2,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l-2)} + \tilde{c}_{l-2,m}^{(4)}\bar{R}^{-l} \right] \left. \right\} \\
= & : \tilde{s}_{l,m}^{(0)}(\bar{R}) + \delta\tilde{s}_{l,m}^{(hom)}(\bar{R}) + \delta\tilde{s}_{l,m}^{(part)}(\bar{R}) + \delta\tilde{s}_{l,m}^{(Ell)}(\bar{R})
\end{aligned}$$

(3-74)

$$\begin{aligned}
\bar{t}_{l,m}(\bar{R}) &= \tilde{c}_{l,m}^{t1} \bar{R}^l + \tilde{c}_{l,m}^{t2} \bar{R}^{-(l+1)} + \delta \tilde{t}_{l,m}^{(hom)}(\bar{R}) - \\
&- \frac{2s\varrho\Omega}{s\bar{\mu}\sqrt{l(l+1)}} \left\{ \frac{lC(l,1,l+1;m,0)}{4(l+1)\sqrt{3}} \tilde{c}_{l+1,m}^{(1)} R^{l+4} + \right. \\
&+ \left[\frac{lC(l,1,l+1;m,0)}{2(l+1)\sqrt{3}} \tilde{c}_{l+1,m}^{(2)} + \frac{im}{2(2l+3)\sqrt{l(l+1)}} \tilde{c}_{l,m}^{(t1)} + \frac{(l+1)C(l,1,l-1;m,0)}{l(2l+3)\sqrt{3}} \tilde{c}_{l-1,m}^{(1)} \right] R^{l+2} - \\
&- \left[\frac{lC(l,1,l+1;m,0)}{(l+1)(2l-1)\sqrt{3}} \tilde{c}_{l+1,m}^{(3)} + \frac{im}{2(2l-1)\sqrt{l(l+1)}} \tilde{c}_{l,m}^{(t2)} - \frac{(l+1)C(l,1,l-1;m,0)}{2l\sqrt{3}} \tilde{c}_{l-1,m}^{(4)} \right] R^{-(l-1)} + \\
&+ \left. \frac{(l+1)C(l,1,l-1;m,0)}{4l\sqrt{3}} \tilde{c}_{l-1,m}^{(3)} R^{-(l-3)} \right\} + \frac{\sqrt{2}\varrho}{10\bar{\mu}} \delta \tilde{\omega}_{1,m}^R R^3 \delta_{l,1} + \\
&+ \frac{e^2}{3\sqrt{5}} \left\{ \left[-(l+2)\tilde{c}_{l+2,m}^{(t1)} \bar{R}^{(l+2)} + (l+3)\tilde{c}_{l+2,m}^{(t2)} \bar{R}^{-(l+3)} \right] \sqrt{\frac{l(l+3)}{(l+1)(l+2)}} C(l+2,2,l;m,0) + \right. \\
&+ \left[(l+2)(l+4)\tilde{c}_{l+1,m}^{(1)} \bar{R}^{(l+2)} + l(l+2)\tilde{c}_{l+1,m}^{(2)} \bar{R}^l + (l-1)(l+1)\tilde{c}_{l+1,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l+1)} + \right. \\
&+ \left. (l+1)(l+3)\tilde{c}_{l+1,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+3)} \right] \sqrt{\frac{15}{l(l+2)^2(l+1)}} \frac{im}{l+1} C(l+1,1,l;m,0) + \\
&+ \left[-l\tilde{c}_{l,m}^{t1} \bar{R}^l + (l+1)\tilde{c}_{l,m}^{t2} \bar{R}^{-(l+1)} \right] \left(1 - \frac{3}{l(l+1)} \right) C(l,2,l;m,0) + \\
&+ \left[l(l+2)\tilde{c}_{l-1,m}^{(1)} \bar{R}^l + l(l-2)\tilde{c}_{l-1,m}^{(2)} \bar{R}^{l-2} + (l-1)(l-3)\tilde{c}_{l-1,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l-1)} + \right. \\
&+ \left. (l-1)(l+1)\tilde{c}_{l-1,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+1)} \right] \sqrt{\frac{15}{l(l-1)^2(l+1)}} \frac{im}{l} C(l-1,1,l;m,0) + \\
&+ \left. \left[-(l-2)\tilde{c}_{l-2,m}^{(t1)} \bar{R}^{(l-2)} + (l-1)\tilde{c}_{l-2,m}^{(t2)} \bar{R}^{-(l-1)} \right] \sqrt{\frac{(l+1)(l-2)}{l(l-1)}} C(l-2,2,l;m,0) \right\} - \\
&- \frac{im e^2}{\sqrt{3}l(l+1)} \left\{ C(l,1,l+1;m,0) \left[\tilde{c}_{l+1,m}^{(1)} \bar{R}^{(l+2)} + \tilde{c}_{l+1,m}^{(2)} \bar{R}^l + \tilde{c}_{l+1,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l+1)} + \tilde{c}_{l+1,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+3)} \right] + \right. \\
&+ \left. C(l,1,l-1;m,0) \left[\tilde{c}_{l-1,m}^{(1)} \bar{R}^l + \tilde{c}_{l-1,m}^{(2)} \bar{R}^{(l-2)} + \tilde{c}_{l-1,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l-1)} + \tilde{c}_{l-1,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+1)} \right] \right\} \\
&=: \tilde{t}_{l,m}^{(0)}(\bar{R}) + \delta \tilde{t}_{l,m}^{(hom)}(\bar{R}) + \delta \tilde{t}_{l,m}^{(part)}(\bar{R}) + \delta \tilde{t}_{l,m}^{(Ell)}(\bar{R})
\end{aligned} \tag{3-75}$$

$$\begin{aligned}
\delta \bar{p}_{l,m} &= \left[\tilde{c}_{l,m}^{(p1)} \bar{R}^l + \tilde{c}_{l,m}^{(p2)} \bar{R}^{-(l+1)} \right] + \delta \delta \bar{p}_{l,m}^{(hom)}(\bar{R}) + \delta \delta \bar{p}_{l,m}^{(part)}(\bar{R}) \\
&+ \frac{e^2(\bar{R})}{3\sqrt{5}} \left[C(l,2,l+2;m,0) (-l+2) \bar{R}^{l+2} c_{l+2,m}^{(p1)} + (l+3) \bar{R}^{-(l+3)} c_{l+2,m}^{(p2)} + \right. \\
&+ C(l,2,l;m,0) (-l \bar{R}^l c_{l,m}^{(p1)} + (l+1) \bar{R}^{-(l+1)} c_{l,m}^{(p2)}) + \\
&+ \left. C(l,2,l-2;m,0) (-l-2) \bar{R}^{l-2} c_{l-2,m}^{(p1)} + (l-1) \bar{R}^{-(l-1)} c_{l-2,m}^{(p2)} \right] \\
&=: \delta \bar{p}_{l,m}^{(0)}(\bar{R}) + \delta \delta \bar{p}_{l,m}^{(hom)}(\bar{R}) + \delta \delta \bar{p}_{l,m}^{(part)}(\bar{R}) + \delta \delta \bar{p}_{l,m}^{(Ell)}(\bar{R})
\end{aligned} \tag{3-76}$$

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{w}_{l,m} &= \left[\tilde{c}_{l,m}^{(w1)} \bar{R}^l + \tilde{c}_{l,m}^{(w2)} \bar{R}^{-(l+1)} \right] + \frac{2}{3} \bar{R}^2 \Omega^2 \tilde{m}_Z \delta_{l,0} + \\
&+ \frac{e^2(\bar{R})}{3\sqrt{5}} \left[C(l, 2, l+2; m, 0)(-l+2)\bar{R}^{l+2}\tilde{c}_{l+2,m}^{(w1)} + (l+3)\bar{R}^{-(l+3)}\tilde{c}_{l+2,m}^{(w2)} \right] + \\
&+ C(l, 2, l; m, 0)(-l\bar{R}^l\tilde{c}_{l,m}^{(w1)} + (l+1)\bar{R}^{-(l+1)}\tilde{c}_{l,m}^{(w2)}) + \\
&+ C(l, 2, l-2; m, 0)(-l-2)\bar{R}^{l-2}\tilde{c}_{l-2,m}^{(w1)} + (l-1)\bar{R}^{-(l-1)}\tilde{c}_{l-2,m}^{(w2)} \Big] \\
&=: \delta\tilde{w}_{l,m}(\bar{R}) + \delta\delta\tilde{w}_{l,m}^{(part)}(\bar{R}) + \delta\delta\tilde{w}_{l,m}^{(Ell)}(\bar{R})
\end{aligned} \tag{3-77}$$

3-5 Die Spannung an sphäroidischen Grenzflächen

In diesem Abschnitt berechnen wir die Spannung auf einer im Grundzustand sphäroidischen Grenzfläche als Funktion der Verschiebungskoeffizienten sowie des Druck- bzw. des Potentialinkrementes. Für diese Größe können Randbedingungen (an der Erdoberfläche) bzw. Stetigkeitsbedingungen (an inneren Grenzflächen) formuliert werden. Mit (2-265), (2-256) sowie (2-85), (2-168) findet man

$$\Delta\tilde{\mathbf{t}}_{(n)} = \Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{N} = -\delta\tilde{p}\mathbf{N} - \rho < \text{GRAD}(V + V_{Zent}), \tilde{\mathbf{u}} > \mathbf{N} + 2s\tilde{\mu}(s)\tilde{\mathbf{E}}(s) \cdot \mathbf{N} . \tag{3-78}$$

Wir betrachten die einzelnen Terme gesondert. Die Störung des Druckterms konstruieren wir mit (3-76), indem wir gemäß (3-71) die "Druckkoeffizienten" durch die "Potentialkoeffizienten" ersetzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
-\delta\tilde{p}\mathbf{N} &= \left\{ \delta\tilde{p}_{l,m}^{(0)} + \frac{e^2}{3\sqrt{5}} \{ \delta\tilde{p} \}_{l,m}^{(Ell)} + \delta\delta\tilde{p}_{l,m}^{(part)} \right\} \bar{\mathbf{R}}_{l,m} \\
&= - \left\{ \rho\delta\tilde{w}_{l,m} + 2s\tilde{\mu} \frac{(2l+3)}{l} \tilde{c}_{l,m}^{(1)} \bar{R}^l + 2s\tilde{\mu} \frac{(2l-1)}{(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l+1)} + \right. \\
&+ 2s\rho\Omega \frac{im}{l^2} \tilde{c}_{l,m}^{(2)} \bar{R}^l - \frac{2s\rho\Omega}{l} \sqrt{\frac{l-1}{3l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \tilde{c}_{l-1,m}^{(t1)} \bar{R}^l + \\
&+ 2s\rho\Omega \frac{im}{(l+1)^2} \tilde{c}_{l,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+1)} - \frac{2s\rho\Omega}{l+1} \sqrt{\frac{l+2}{3(l+1)}} C(l, 1, l+1; m, 0) \tilde{c}_{l+1,m}^{(t2)} \bar{R}^{-(l+1)} + \\
&+ \frac{s\rho\Omega}{\sqrt{3}} \left[\bar{R}^{l+2} \left[\sqrt{\frac{l+2}{l+1}} C(l, 1, l+1; m, 0) \tilde{c}_{l+1,m}^{(t1)} + \frac{2im\sqrt{3}}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(1)} \right] - \right. \\
&- \bar{R}^{-(l-1)} \left[\sqrt{\frac{l-1}{l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \tilde{c}_{l-1,m}^{(t2)} - \frac{2im\sqrt{3}}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(3)} \right] \Big] + \\
&+ \frac{e^2}{3\sqrt{5}} \left[C(l, 2, l+2; m, 0) [-2s\tilde{\mu}(2l+7)\tilde{c}_{l+2,m}^{(1)} \bar{R}^{l+2} + 2s\tilde{\mu}(2l+3)\tilde{c}_{l+2,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l+3)}] + \right. \\
&+ C(l, 2, l; m, 0) [-2s\tilde{\mu}(2l+3)\tilde{c}_{l,m}^{(1)} \bar{R}^l + 2s\tilde{\mu}(2l-1)\tilde{c}_{l,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l+1)}] + \\
&+ C(l, 2, l-2; m, 0) [-2s\tilde{\mu}(2l-1)\tilde{c}_{l-2,m}^{(1)} \bar{R}^{l-2} + 2s\tilde{\mu}(2l-5)\tilde{c}_{l-2,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l-1)}] \Big] \left. \right\} \bar{\mathbf{R}}_{l,m}
\end{aligned} \tag{3-79}$$

Wir berechnen den konvektiven Term $-\rho < \text{GRAD}(V + V_{Zent}), \tilde{\mathbf{u}} > \mathbf{N}$ mit Hilfe des Normalschwerefeldes

(3-27),(3-29) und der Darstellung des Verschiebungsfeldes in quasisphärischen Koordinaten (3-72), (3-73):

$$\begin{aligned}
& -\varrho < \text{GRAD} (V + V_{zent}), \tilde{\mathbf{u}} > = \varrho \Gamma < \mathbf{N}, \mathbf{u} > = \varrho \Gamma \tilde{r}_{l,m}(\bar{R}) Y_{l,m} = \\
& = \left\{ \varrho \Gamma_{0,0} \left[\tilde{c}_{l,m}^{(1)} \bar{R}^{l+1} + \tilde{c}_{l,m}^{(2)} \bar{R}^{l-1} + \tilde{c}_{l,m}^{(3)} \bar{R}^{-l} + \tilde{c}_{l,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+1)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \delta \tilde{r}_{l,m}^{(hom)}(\bar{R}) + \delta \tilde{r}_{l,m}^{(part)}(\bar{R}) + \delta \tilde{r}_{l,m}^{(Ell)}(\bar{R}) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \varrho \Gamma_{2,0} \left[C(l, 2, l+2; m, 0) [\tilde{c}_{l+2,m}^{(1)} \bar{R}^{l+3} + \tilde{c}_{l+2,m}^{(2)} \bar{R}^{l+1} + \tilde{c}_{l+2,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l+2)} + \tilde{c}_{l+2,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+4)}] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + C(l, 2, l; m, 0) [\tilde{c}_{l,m}^{(1)} \bar{R}^{l+1} + \tilde{c}_{l,m}^{(2)} \bar{R}^{l-1} + \tilde{c}_{l,m}^{(3)} \bar{R}^{-l} + \tilde{c}_{l,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+2)}] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + C(l, 2, l-2; m, 0) [\tilde{c}_{l-2,m}^{(1)} \bar{R}^{l-1} + \tilde{c}_{l-2,m}^{(2)} \bar{R}^{l-3} + \tilde{c}_{l-2,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l-2)} + \tilde{c}_{l-2,m}^{(4)} \bar{R}^{-l}] \right] \right\} \bar{\mathbf{R}}_{l,m}
\end{aligned} \tag{3-80}$$

Mit (A-100) und (A-103)-(A-105) findet man

$$\begin{aligned}
2s\tilde{\mu}(s)\tilde{\mathbf{E}}(s)\cdot\mathbf{N} = & 2s\tilde{\mu}(s) \left\{ \frac{dr_{l,m}}{dR} [\bar{\mathbf{R}}_{l,m} + \sqrt{\frac{2}{15}} e^2 Y_{l,m} \mathbf{S}_{2,0}] - \sqrt{\frac{2}{15}} e^2 \left(\frac{r_{l,m}}{R} + \sqrt{l(l+1)} \frac{s_{l,m}}{2R} \right) Y_{l,m} \mathbf{S}_{2,0} - \right. \\
& - \frac{1}{2} \left(\sqrt{l(l+1)} \frac{r_{l,m}}{R} - \frac{ds_{l,m}}{dR} + \frac{s_{l,m}}{R} \right) [\bar{\mathbf{S}}_{l,m} - 2\sqrt{\frac{2}{15}} e^2 < \mathbf{S}_{l,m}, \mathbf{S}_{2,0} > \mathbf{e}_R] + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{dt_{l,m}}{dR} - \frac{t_{l,m}}{R} \right) [\bar{\mathbf{T}}_{l,m} - 2\sqrt{\frac{2}{15}} e^2 < \mathbf{T}_{l,m}, \mathbf{S}_{2,0} > \mathbf{e}_R] + \\
& \left. + \sqrt{\frac{2}{15}} e^2 \sqrt{(l-1)(l+2)/2} \frac{s_{l,m}}{R} \mathbf{T}_{lm}^{E2} \cdot \mathbf{S}_{2,0} + \sqrt{\frac{2}{15}} e^2 \sqrt{(l-1)(l+2)/2} \frac{t_{l,m}}{R} \mathbf{T}_{lm}^{B2} \cdot \mathbf{S}_{2,0} \right\}
\end{aligned} \tag{3-81}$$

diese Terme lauten in der Darstellung in quasisphärischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
& \frac{dr_{l,m}}{dR} [\bar{\mathbf{R}}_{l,m} + \sqrt{\frac{2}{15}} e^2 Y_{l,m} \mathbf{S}_{2,0}] = \\
& = \left[(l+1) \tilde{c}_{l,m}^{(1)} \bar{R}^l + (l-1) \tilde{c}_{l,m}^{(2)} \bar{R}^{(l-2)} - l \tilde{c}_{l,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l+1)} - (l+2) \tilde{c}_{l,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+3)} \right] \bar{\mathbf{R}}_{l,m} + \\
& + \left[(l+1) \delta \tilde{c}_{l,m}^{(1)} \bar{R}^l + (l-1) \delta \tilde{c}_{l,m}^{(2)} \bar{R}^{(l-2)} - l \delta \tilde{c}_{l,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l+1)} - (l+2) \delta \tilde{c}_{l,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+3)} \right] \bar{\mathbf{R}}_{l,m} - \\
& - \frac{e^2}{3\sqrt{5}} \left\{ \left[(l+2)(l+3) \tilde{c}_{l+2,m}^{(1)} \bar{R}^{l+2} + l(l+1) \tilde{c}_{l+2,m}^{(2)} \bar{R}^l + \right. \right. \\
& + (l+2)(l+3) \tilde{c}_{l+2,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l+3)} + (l+4)(l+5) \tilde{c}_{l+2,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+5)} \left. \right] C(l, 2, l+2; m, 0) + \\
& + \left[l(l+1) \tilde{c}_{l,m}^{(1)} \bar{R}^l + (l-1)(l-2) \tilde{c}_{l,m}^{(2)} \bar{R}^{(l-2)} + \right. \\
& + l(l+1) \tilde{c}_{l,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l+1)} + (l+2)(l+3) \tilde{c}_{l,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+3)} \left. \right] C(l, 2, l; m, 0) + \\
& + \left[(l-2)(l-1) \tilde{c}_{l-2,m}^{(1)} \bar{R}^{l-2} + (l-3)(l-4) \tilde{c}_{l-2,m}^{(2)} \bar{R}^{l-4} + \right. \\
& \left. + (l-2)(l-1) \tilde{c}_{l-2,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l-1)} + l(l+1) \tilde{c}_{l-2,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+1)} \right] C(l, 2, l-2; m, 0) \left. \right\} \bar{\mathbf{R}}_{l,m} + \\
& + \frac{s\varrho\Omega}{4s\bar{\mu}} \left\{ \frac{(l+3) \bar{R}^{l+2}}{2l+5} \left[\frac{l\sqrt{l+2}}{\sqrt{3(l+1)}} C(l, 1, l+1; m, 0) \tilde{c}_{l+1,m}^{(t1)} - \frac{2im}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(1)} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{(l-2) \bar{R}^{-(l-1)}}{2l-3} \left[-\frac{(l+1)\sqrt{l-1}}{\sqrt{3l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \tilde{c}_{l-1,m}^{(t2)} + \frac{2im}{l(l+1)} \tilde{c}_{l,m}^{(3)} \right] \right\} \bar{\mathbf{R}}_{l,m} + \\
& + \sqrt{\frac{2}{15}} e^2 \left\{ -\sqrt{\frac{2l}{3(l+1)}} C(l, 2, l+2; m, 0) [(l+3) \tilde{c}_{l+2,m}^{(1)} \bar{R}^{l+2} + (l+1) \tilde{c}_{l+2,m}^{(2)} \bar{R}^l - \right. \\
& \left. - (l+2) \tilde{c}_{l+2,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l+3)} - (l+4) \tilde{c}_{l+2,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+5)}] + \right. \\
& + \sqrt{\frac{3}{2l(l+1)}} C(l, 2, l; m, 0) [(l+1) \tilde{c}_{l,m}^{(1)} \bar{R}^l + (l-1) \tilde{c}_{l,m}^{(2)} \bar{R}^{l-2} - l \tilde{c}_{l,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l+1)} - (l+2) \tilde{c}_{l,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+3)}] + \\
& + \sqrt{\frac{2(l+1)}{3l}} C(l, 2, l-2; m, 0) [(l-1) \tilde{c}_{l-2,m}^{(1)} \bar{R}^{l-2} + (l-3) \tilde{c}_{l-2,m}^{(2)} \bar{R}^{l-4} - \\
& \left. - (l-2) \tilde{c}_{l-2,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l-1)} - l \tilde{c}_{l-2,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+1)} \right] \left. \right\} \bar{\mathbf{S}}_{l,m} - \\
& - \frac{im e^2}{\sqrt{3l(l+1)}} \left\{ C(l, 1, l+1; m, 0) [(l+2) \tilde{c}_{l+1,m}^{(1)} \bar{R}^{l+1} + l \tilde{c}_{l+1,m}^{(2)} \bar{R}^{l-1} - (l+1) \tilde{c}_{l+1,m}^{(3)} \bar{R}^{-(l+2)} - (l+3) \tilde{c}_{l+1,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+4)}] + \right. \\
& \left. + C(l, 1, l-1; m, 0) [l \tilde{c}_{l-1,m}^{(1)} \bar{R}^{l-1} + (l-2) \tilde{c}_{l-1,m}^{(2)} \bar{R}^{l-3} - (l-1) \tilde{c}_{l-1,m}^{(3)} \bar{R}^{-l} - (l+1) \tilde{c}_{l-1,m}^{(4)} \bar{R}^{-(l+2)}] \right\} \bar{\mathbf{T}}_{l,m}
\end{aligned} \tag{3-82}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(\sqrt{l(l+1)}\frac{r_{l,m}}{R} - \frac{ds_{l,m}}{dR} + \frac{s_{l,m}}{R})[\bar{\mathbf{S}}_{l,m} - 2\sqrt{\frac{2}{15}}e^2 < \mathbf{S}_{l,m}, \mathbf{S}_{2,0} > \mathbf{e}_R] = \\
& = -\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left[l(l+2)(\tilde{c}_{l,m}^{(1)} + \delta\tilde{c}_{l,m}^{(1)})\bar{R}^l + (l-1)(l+1)(\tilde{c}_{l,m}^{(2)} + \delta\tilde{c}_{l,m}^{(2)})\bar{R}^{l-2} + \right. \\
& \quad \left. + (l-1)(l+1)(\tilde{c}_{l,m}^{(3)} + \delta\tilde{c}_{l,m}^{(3)})\bar{R}^{-(l+1)} + l(l+2)(\tilde{c}_{l,m}^{(4)} + \delta\tilde{c}_{l,m}^{(4)})\bar{R}^{-(l+3)} \right] \bar{\mathbf{S}}_{l,m} - \\
& -\frac{e^2}{3\sqrt{5}} \left\{ \sqrt{\frac{l}{l+1}} \frac{C(l, 2, l+2; m, 0)}{(l+2)} \left[-(l+2)^2(l+4)\tilde{c}_{l+2,m}^{(1)}\bar{R}^{l+2} - l(l+1)(l+3)\tilde{c}_{l+2,m}^{(2)}\bar{R}^l + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (l+3)^2(l+1)\tilde{c}_{l+2,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l+3)} + (l+2)(l+4)(l+5)\tilde{c}_{l+2,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+5)} \right] + \right. \\
& + (1 - \frac{3}{l(l+1)}) \frac{C(l, 2, l; m, 0)}{\sqrt{l(l+1)}} \left[-l^2(l+2)\tilde{c}_{l,m}^{(1)}\bar{R}^l - (l-2)(l-1)(l+1)\tilde{c}_{l,m}^{(2)}\bar{R}^{l-2} + \right. \\
& \quad \left. + (l+1)^2(l-1)\tilde{c}_{l,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l+1)} + l(l+2)(l+3)\tilde{c}_{l,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+3)} \right] + \\
& + \sqrt{\frac{l+1}{l}} \frac{C(l, 2, l-2; m, 0)}{(l-1)} \left[-l(l-2)^2\tilde{c}_{l-2,m}^{(1)}\bar{R}^{l-2} - (l-1)(l-3)(l-4)\tilde{c}_{l-2,m}^{(2)}\bar{R}^{l-4} + \right. \\
& \quad \left. + (l-1)^2(l-3)\tilde{c}_{l-2,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l-1)} + (l-2)l(l+1)\tilde{c}_{l-2,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+1)} \right] \left. \right\} \bar{\mathbf{S}}_{l,m} - \\
& -\frac{e^2}{3\sqrt{5}} \frac{im\sqrt{15}}{\sqrt{l(l+1)}} \left\{ \frac{C(l, 1, l+1; m, 0)}{(l+1)(l+2)} \left[-(l+1)^2(l+3)\tilde{c}_{l+1,m}^{(1)}\bar{R}^{l+1} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - l(l-1)(l+2)\tilde{c}_{l+1,m}^{(2)}\bar{R}^{l-1} + l(l+2)^2\tilde{c}_{l+1,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l+2)} + (l+1)(l+3)(l+4)\tilde{c}_{l+1,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+4)} \right] + \right. \\
& + \frac{C(l, 1, l-1; m, 0)}{l(l-1)} \left[-(l-1)^2(l+1)\tilde{c}_{l-1,m}^{(1)}\bar{R}^{l-1} - l(l-2)(l-3)\tilde{c}_{l-1,m}^{(2)}\bar{R}^{l-3} + \right. \\
& \quad \left. + l^2(l-2)\tilde{c}_{l-1,m}^{(3)}\bar{R}^{-l} + (l-1)(l+1)(l+2)\tilde{c}_{l-1,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+2)} \right] \left. \right\} \bar{\mathbf{T}}_{l,m} - \\
& -\frac{s\rho\Omega}{4s\tilde{\mu}\sqrt{l(l+1)}} \left\{ \frac{\bar{R}^{l+2}}{2l+5} (l^2+4l+5) \left[\frac{l\sqrt{l+2}}{\sqrt{3(l+1)}} C(l, 1, l+1; m, 0)\tilde{c}_{l+1,m}^{(t1)} - \frac{2im}{l(l+1)}\tilde{c}_{l,m}^{(1)} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\bar{R}^{-(l-1)}}{2l-3} (l^2-2l+2) \left[-\frac{(l+1)\sqrt{l-1}}{\sqrt{3l}} C(l, 1, l-1; m, 0)\tilde{c}_{l-1,m}^{(t2)} + \frac{2im}{l(l+1)}\tilde{c}_{l,m}^{(3)} \right] \right\} \mathbf{S}_{l,m} + \\
& + \frac{2e^2}{3\sqrt{5}} \left\{ \frac{2C(l, 2, l+2; m, 0)}{(l+2)} \left[(l+2)(l+4)\tilde{c}_{l+2,m}^{(1)}\bar{R}^{l+2} + (l+1)(l+3)\tilde{c}_{l+2,m}^{(2)}\bar{R}^l + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (l+3)(l+1)\tilde{c}_{l+2,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l+3)} + (l+2)(l+4)\tilde{c}_{l+2,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+5)} \right] + \right. \\
& + \frac{3C(l, 2, l; m, 0)}{l(l+1)} \left[l(l+2)\tilde{c}_{l,m}^{(1)}\bar{R}^l + (l-1)(l+1)\tilde{c}_{l,m}^{(2)}\bar{R}^{l-2} + (l+1)(l-1)\tilde{c}_{l,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l+1)} + l(l+2)\tilde{c}_{l,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+3)} \right] - \\
& - \frac{2C(l, 2, l-2; m, 0)}{(l-1)} \left[l(l-2)\tilde{c}_{l-2,m}^{(1)}\bar{R}^{l-2} + (l-1)(l-3)\tilde{c}_{l-2,m}^{(2)}\bar{R}^{l-4} + \right. \\
& \quad \left. + (l-1)(l-3)\tilde{c}_{l-2,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l-1)} + l(l-2)\tilde{c}_{l-2,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+1)} \right] \left. \right\} \bar{\mathbf{R}}_{l,m}
\end{aligned} \tag{3-83}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\frac{dt_{l,m}}{dR} - \frac{t_{l,m}}{R} \right) [\bar{\mathbf{T}}_{l,m} - 2\sqrt{\frac{2}{15}} e^2 \langle \mathbf{T}_{l,m}, \mathbf{S}_{2,0} \rangle \mathbf{e}_R] = \\
& = \frac{1}{2} \left[(l-1)(\tilde{c}_{l,m}^{(t1)} + \delta\tilde{c}_{l,m}^{(t1)})\bar{R}^{l-1} - (l+2)(\tilde{c}_{l,m}^{(t2)} + \delta\tilde{c}_{l,m}^{(t2)})\bar{R}^{-(l+2)} \right] \mathbf{T}_{l,m} - \\
& - \frac{e^2}{6\sqrt{5}} \left\{ \sqrt{\frac{l(l+3)}{(l+1)(l+2)}} C(l, 2, l+2; m, 0) \left[(l+1)^2 \tilde{c}_{l+2,m}^{(t1)} \bar{R}^{l+1} + (l+4)^2 \tilde{c}_{l+2,m}^{(t2)} \bar{R}^{-(l+4)} \right] + \right. \\
& + \left(1 - \frac{3}{l(l+1)} \right) C(l, 2, l; m, 0) \left[(l-1)^2 \tilde{c}_{l,m}^{(t1)} \bar{R}^{l-1} + (l+2)^2 \tilde{c}_{l,m}^{(t2)} \bar{R}^{-(l+2)} \right] \\
& + \left. \sqrt{\frac{(l-2)(l+1)}{l(l-1)}} C(l, 2, l-2; m, 0) \left[(l-3)^2 \tilde{c}_{l-2,m}^{(t1)} \bar{R}^{l-3} + l^2 \tilde{c}_{l-2,m}^{(t2)} \bar{R}^{-l} \right] \right\} \bar{\mathbf{T}}_{l,m} + \\
& + \frac{im e^2}{2\sqrt{3}} \left\{ \frac{C(l, 1, l+1; m, 0)}{(l+1)\sqrt{l(l+2)}} \left[l^2 \tilde{c}_{l+1,m}^{(t1)} \bar{R}^l + (l+3)^2 \tilde{c}_{l+1,m}^{(t2)} \bar{R}^{-(l+3)} \right] + \right. \\
& + \left. \frac{C(l, 1, l-1; m, 0)}{l\sqrt{(l-1)(l+1)}} \left[(l-2)^2 \tilde{c}_{l-1,m}^{(t1)} \bar{R}^{l-2} + (l+1)^2 \tilde{c}_{l-1,m}^{(t2)} \bar{R}^{-(l+1)} \right] \right\} \bar{\mathbf{S}}_{l,m} - \\
& - \frac{s\rho\Omega}{s\tilde{\mu}\sqrt{l(l+1)}} \left\{ \frac{lC(l, 1, l+1; m, 0)}{4(l+1)\sqrt{3}} \tilde{c}_{l+1,m}^{(1)} (l+3)\bar{R}^{l+3} + \left[\frac{lC(l, 1, l+1; m, 0)}{2(l+1)\sqrt{3}} \tilde{c}_{l+1,m}^{(2)} + \right. \right. \\
& + \frac{im}{2(2l+3)\sqrt{l(l+1)}} \tilde{c}_{l,m}^{(t1)} + \left. \frac{(l+1)C(l, 1, l-1; m, 0)}{l(2l+3)\sqrt{3}} \tilde{c}_{l-1,m}^{(1)} \right] (l+1)\bar{R}^{l+1} + \\
& + \left[\frac{lC(l, 1, l+1; m, 0)}{(l+1)(2l-1)\sqrt{3}} \tilde{c}_{l+1,m}^{(3)} + \frac{im}{2(2l-1)\sqrt{l(l+1)}} \tilde{c}_{l,m}^{(t2)} - \frac{(l+1)C(l, 1, l-1; m, 0)}{2l\sqrt{3}} \tilde{c}_{l-1,m}^{(4)} \right] l\bar{R}^{-l} - \\
& - \left. \frac{(l+1)C(l, 1, l-1; m, 0)}{4l\sqrt{3}} \tilde{c}_{l-1,m}^{(3)} (l-2)\bar{R}^{-(l-2)} \right\} \bar{\mathbf{T}}_{l,m} + \frac{\sqrt{2}\rho}{10\tilde{\mu}} \delta\tilde{\omega}_{1,m}^R \bar{R}^2 \delta_{l,1} \bar{\mathbf{T}}_{l,m} - \\
& - \frac{im e^2}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{C(l, 1, l+1; m, 0)}{\sqrt{(l+1)(l+2)}} \left[l\tilde{c}_{l+1,m}^{(t1)} \bar{R}^l - (l+3)\tilde{c}_{l+1,m}^{(t2)} \bar{R}^{-(l+3)} \right] + \right. \\
& + \left. \frac{C(l, 1, l-1; m, 0)}{\sqrt{l(l-1)}} \left[(l-2)\tilde{c}_{l-1,m}^{(t1)} \bar{R}^{l-2} - (l+1)\tilde{c}_{l-1,m}^{(t2)} \bar{R}^{-(l+1)} \right] \right\} \bar{\mathbf{R}}_{l,m}
\end{aligned} \tag{3-84}$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{\frac{2}{15}}e^2\left(\frac{r_{l,m}}{R} + \sqrt{l(l+1)}\frac{s_{l,m}}{2R}\right)Y_{l,m}\mathbf{S}_{2,0} = \\
& = \frac{e^2}{3\sqrt{5}}\left\{2\sqrt{\frac{l}{(l+1)}}C(l,2,l+2;m,0)\left(\frac{r_{l+2,m}}{R} + \sqrt{(l+2)(l+3)}\frac{s_{l+2,m}}{2R}\right) - \right. \\
& - \frac{3}{\sqrt{l(l+1)}}C(l,2,l;m,0)\left(\frac{r_{l,m}}{R} + \sqrt{l(l+1)}\frac{s_{l,m}}{2R}\right) - \\
& \left. - 2\sqrt{\frac{(l+1)}{l}}C(l,2,l-2;m,0)\left(\frac{r_{l-2,m}}{R} + \sqrt{(l-2)(l-1)}\frac{s_{l-2,m}}{2R}\right)\right\}\bar{\mathbf{S}}_{l,m} + \tag{3-85}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{im e^2}{\sqrt{3l(l+1)}}\left\{C(l,1,l+1;m,0)\left(\frac{r_{l+1,m}}{R} + \sqrt{(l+1)(l+2)}\frac{s_{l+1,m}}{2R}\right) + \right. \\
& \left. + C(l,1,l-1;m,0)\left(\frac{r_{l-1,m}}{R} + \sqrt{l(l-1)}\frac{s_{l-1,m}}{2R}\right)\right\}\bar{\mathbf{T}}_{l,m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{2}{15}}e^2\sqrt{(l-1)(l+2)/2}\frac{s_{l,m}}{R}\mathbf{T}_{lm}^{E2}\cdot\mathbf{S}_{2,0} = \\
& = \frac{e^2}{3\sqrt{5}}\left\{(l+4)\sqrt{\frac{l(l+3)}{(l+1)(l+2)}}C(l,2,l+2;m,0)\frac{s_{l+2,m}}{R} + \frac{9(l-1)(l+2)}{2l(l+1)}C(l,2,l;m,0)\frac{s_{l,m}}{R} - \right. \\
& - (l-3)\sqrt{\frac{(l+1)(l-2)}{l(l-1)}}C(l,2,l-2;m,0)\frac{s_{l-2,m}}{R}\left.\right\}\bar{\mathbf{S}}_{l,m} - \\
& - \frac{im e^2}{2\sqrt{3}}\left\{\frac{(l-2)(l+3)}{(l+1)\sqrt{l(l+2)}}C(l,1,l+1;m,0)\frac{s_{l+1,m}}{R} + \frac{(l-2)(l+3)}{l\sqrt{(l-1)(l+1)}}C(l,1,l-1;m,0)\frac{s_{l-1,m}}{R}\right\}\bar{\mathbf{T}}_{l,m}
\end{aligned}$$

(3-86)

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{2}{15}}e^2\sqrt{(l-1)(l+2)/2}\frac{t_{l,m}}{R}\mathbf{T}_{lm}^{B2}\cdot\mathbf{S}_{2,0} = \\
& = \frac{e^2}{3\sqrt{5}}\left\{(l+4)\sqrt{\frac{l(l+3)}{(l+1)(l+2)}}C(l,2,l+2;m,0)\frac{t_{l+2,m}}{R} + \frac{9(l-1)(l+2)}{2l(l+1)}C(l,2,l;m,0)\frac{t_{l,m}}{R} - \right. \\
& - (l-3)\sqrt{\frac{(l+1)(l-2)}{l(l-1)}}C(l,2,l-2;m,0)\frac{t_{l-2,m}}{R}\left.\right\}\bar{\mathbf{T}}_{l,m} + \\
& + \frac{im e^2}{2\sqrt{3}}\left\{\frac{(l-2)(l+3)}{(l+1)\sqrt{l(l+2)}}C(l,1,l+1;m,0)\frac{t_{l+1,m}}{R} + \frac{(l-2)(l+3)}{l\sqrt{(l-1)(l+1)}}C(l,1,l-1;m,0)\frac{t_{l-1,m}}{R}\right\}\bar{\mathbf{S}}_{l,m}
\end{aligned}$$

Die letzten drei Terme, die alle klein von der Ordnung e^2 sind, fassen wir zusammen:

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{\frac{2}{15}}e^2\left(\frac{r_{l,m}}{R} + \sqrt{l(l+1)}\frac{s_{l,m}}{2R}\right)Y_{l,m}\mathbf{S}_{2,0}+ \\
& +\sqrt{\frac{2}{15}}e^2\sqrt{(l-1)(l+2)/2}\frac{s_{l,m}}{R}\mathbf{T}_{lm}^{E2}\cdot\mathbf{S}_{2,0}+ \\
& +\sqrt{\frac{2}{15}}e^2\sqrt{(l-1)(l+2)/2}\frac{t_{l,m}}{R}\mathbf{T}_{lm}^{B2}\cdot\mathbf{S}_{2,0}= \\
& -\sqrt{\frac{2}{15}}e^2\left\{-\left[\sqrt{\frac{2l}{3(l+1)}}\frac{r_{l+2,m}}{R} + (l+3)\sqrt{\frac{2l(l+3)}{3(l+1)(l+2)}}\frac{s_{l+2,m}}{R}\right]C(l,2,l+2;m,0)-\right. \\
& -im\frac{(l-2)(l+3)\sqrt{5}}{2(l+1)\sqrt{2l(l+2)}}C(l,1,l+1;m,0)\frac{t_{l+1,m}}{R}+ \\
& +\left[\sqrt{\frac{3}{2l(l+1)}}\frac{r_{l,m}}{R} - \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{(l^2+l-3)}{l(l+1)}\frac{s_{l,m}}{R}\right]C(l,2,l;m,0)- \\
& -im\frac{(l-2)(l+3)\sqrt{5}}{2l\sqrt{2(l+1)(l-1)}}C(l,1,l-1;m,0)\frac{t_{l-1,m}}{R}+ \\
& \left. +\left(\sqrt{\frac{2(l+1)}{3l}}\frac{r_{l-2,m}}{R} + (l-2)\sqrt{\frac{2(l-2)(l+1)}{3l(l-1)}}\frac{s_{l-2,m}}{R}\right)C(l,2,l-2;m,0)\right\}\bar{\mathbf{S}}_{l,m}- \\
& -\sqrt{\frac{2}{15}}e^2\left\{-(l+4)\sqrt{\frac{l(l+3)}{6(l+1)(l+2)}}C(l,2,l+2;m,0)\frac{t_{l+2,m}}{R}-\right. \\
& -im\sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{r_{l+1,m}}{R} + \frac{(l+4)}{(l+1)\sqrt{l(l+2)}}\frac{s_{l+1,m}}{R}\right)C(l,1,l+1;m,0)- \\
& -\frac{9}{2\sqrt{6}}\frac{(l-1)(l+2)}{l(l+1)}\frac{t_{l,m}}{R}C(l,2,l;m,0)+ \\
& +im\sqrt{\frac{5}{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{r_{l-1,m}}{R} + \frac{(l-3)}{l\sqrt{(l+1)(l-1)}}\frac{s_{l-1,m}}{R}\right)C(l,1,l-1;m,0)+ \\
& \left. + (l-3)\sqrt{\frac{(l+1)(l-2)}{6l(l-1)}}C(l,2,l-2;m,0)\frac{t_{l-2,m}}{R}\right\}\bar{\mathbf{T}}_{l,m}
\end{aligned} \tag{3-87}$$

Einsetzen der sphärischen Lösung ergibt

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{\frac{2}{15}}e^2\left(\frac{r_{l,m}}{R} + \sqrt{l(l+1)}\frac{s_{l,m}}{2R}\right)Y_{l,m}\mathbf{S}_{2,0})+ \\
& +\sqrt{\frac{2}{15}}e^2\sqrt{(l-1)(l+2)/2}\frac{s_{l,m}}{R}\mathbf{T}_{lm}^{E2}\cdot\mathbf{S}_{2,0}+ \\
& +\sqrt{\frac{2}{15}}e^2\sqrt{(l-1)(l+2)/2}\frac{t_{l,m}}{R}\mathbf{T}_{lm}^{B2}\cdot\mathbf{S}_{2,0}= \\
& -\sqrt{\frac{2}{15}}e^2\left\{\frac{1}{(l+2)}\sqrt{\frac{2l}{3(l+1)}}\left[(l^2+7l+13)\tilde{c}_{l+2,m}^{(1)}\bar{R}^{l+2}+(l^2+5l+7)\tilde{c}_{l+2,m}^{(2)}\bar{R}^l-\right. \right. \\
& \left. \left. -(l^2+4l+2)\tilde{c}_{l+2,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l+3)}-(l+2)(l+4)\tilde{c}_{l+2,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+5)}\right]C(l,2,l+2;m,0)- \right. \\
& \left. -im\frac{(l-2)(l+3)\sqrt{5}}{2(l+1)\sqrt{2l(l+2)}}C(l,1,l+1;m,0)[\tilde{c}_{l+1,m}^{t1}\bar{R}^l+\tilde{c}_{l+1,m}^{t2}\bar{R}^{-(l+3)}]\right. \\
& \left. +\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{C(l,2,l;m,0)}{l(l+1)\sqrt{l(l+1)}}\left[(l^3+5l^2+l-9)\tilde{c}_{l,m}^{(1)}\bar{R}^l+\right. \right. \\
& \left. \left. +(l-1)(l+1)(l+3)\tilde{c}_{l,m}^{(2)}\bar{R}^{l-2}-(l^3-2l^2-6l+6)\tilde{c}_{l,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l+1)}-l(l-2)(l+2)\tilde{c}_{l,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+3)}\right]- \\
& \left. -im\frac{(l-2)(l+3)\sqrt{5}}{2l\sqrt{2(l+1)(l-1)}}C(l,1,l-1;m,0)[\tilde{c}_{l-1,m}^{t1}\bar{R}^{l-2}+\tilde{c}_{l-1,m}^{t2}\bar{R}^{-(l+1)}]\right. \\
& \left. +\frac{1}{(l-1)}\sqrt{\frac{2(l+1)}{3l}}\left[-(l^2-2l-1)\tilde{c}_{l-2,m}^{(1)}\bar{R}^{l-2}-(l-1)(l-3)\tilde{c}_{l-2,m}^{(2)}\bar{R}^{l-4}+\right. \right. \\
& \left. \left. +(l^2-5l+7)\tilde{c}_{l-2,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l-1)}+(l^2-3l+3)\tilde{c}_{l-2,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+1)}\right]C(l,2,l-2;m,0)\right\}\bar{\mathbf{S}}_{l,m}- \\
& -\sqrt{\frac{2}{15}}e^2\left\{-(l+4)\sqrt{\frac{l(l+3)}{6(l+1)(l+2)}}C(l,2,l+2;m,0)[\tilde{c}_{l+2,m}^{t1}\bar{R}^{l+1}+\tilde{c}_{l+2,m}^{t2}\bar{R}^{-(l+4)}]- \right. \\
& \left. -im\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{1}{(l+1)(l+2)\sqrt{l(l+1)}}\left[-(5l+14)\tilde{c}_{l+1,m}^{(1)}\bar{R}^{l+1}-3(l+2)\tilde{c}_{l+1,m}^{(2)}\bar{R}^{l-1}+\right. \right. \\
& \left. \left. +2(l^2+3l-1)\tilde{c}_{l+1,m}^{(3)}\bar{R}^{-(l+2)}+2(l+1)(l+3)\tilde{c}_{l+1,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+4)}\right]C(l,1,l+1;m,0)- \right. \\
& \left. -\frac{9}{2\sqrt{6}}\frac{(l-1)(l+2)}{l(l+1)}C(l,2,l;m,0)[\tilde{c}_{l,m}^{t1}\bar{R}^{l-1}+\tilde{c}_{l,m}^{t2}\bar{R}^{-(l+2)}]- \right. \\
& \left. -im\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{1}{l(l-1)\sqrt{l(l+1)}}\left[2(l^2-l-3)\tilde{c}_{l-1,m}^{(1)}\bar{R}^{l-1}+2l(l-2)\tilde{c}_{l-1,m}^{(2)}\bar{R}^{l-3}+\right. \right. \\
& \left. \left. +(5l-9)\tilde{c}_{l-1,m}^{(3)}\bar{R}^{-l}+3(l-1)\tilde{c}_{l-1,m}^{(4)}\bar{R}^{-(l+2)}\right]C(l,1,l-1;m,0)+ \right. \\
& \left. +(l-3)\sqrt{\frac{(l+1)(l-2)}{6l(l-1)}}C(l,2,l-2;m,0)[\tilde{c}_{l-2,m}^{t1}\bar{R}^{l-3}+\tilde{c}_{l-2,m}^{t2}\bar{R}^{-l}]\right\}\bar{\mathbf{T}}_{l,m}
\end{aligned} \tag{3-88}$$

3-6 Das inkrementelle Schwerfeld eines sphäroidisch geschichteten Erdmodells

3-6.1 Der deformatorische Anteil des inkrementellen Gravitationsfeldes

Wir stellen hier den deformatorischen Anteil des inkrementellen Gravitationspotentials δv_{Def} gemäß (2-203) sowie dessen Gradienten in Kff dar. Dabei setzen wir wieder voraus, dass inkompressibles Material und eine homogene Schichtung vorliegt. Von den drei Integralen in (2-205) kommt daher nur das erste zum Tragen. Wir betrachten hier den Beitrag einer einzigen Schichtgrenze S_i ; der gesamte Effekt ist dann wieder aus den Einzelbeiträgen sämtlicher Schichtgrenzen zu summieren.

Der reziproke Abstand lautet in quasisphärischen Koordinaten:

$$\frac{1}{|\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q|} = Y_{l,m}^*(Q) \left\{ \frac{R_P^l}{\bar{R}_Q^{l+1}} \frac{Y_{l,m}(P)}{2l+1} + \frac{e^2(\bar{R}_Q)}{3\sqrt{5}} \left[\frac{R_P^{l+2}}{\bar{R}_Q^{l+3}} \frac{l+3}{2l+5} C(l, 2, l+2; m, 0) Y_{l+2,m}(P) + \frac{R_P^l}{\bar{R}_Q^{l+1}} \frac{l+1}{2l+1} C(l, 2, l; m, 0) Y_{l,m}(P) + \frac{R_P^{l-2}}{\bar{R}_Q^{l-1}} \frac{l-1}{2l-3} C(l, 2, l-2; m, 0) Y_{l-2,m}(P) \right] \right\} \quad (3-89)$$

für $\bar{R}_Q > \bar{R}_P$

$$\frac{1}{|\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q|} = Y_{l,m}^*(Q) \left\{ \frac{\bar{R}_Q^l}{R_P^{l+1}} \frac{Y_{l,m}(P)}{2l+1} - \frac{e^2(\bar{R}_Q)}{3\sqrt{5}} \left[\frac{\bar{R}_Q^{l+2}}{R_P^{l+3}} \frac{l+2}{2l+5} C(l, 2, l+2; m, 0) Y_{l+2,m}(P) + \frac{\bar{R}_Q^l}{R_P^{l+1}} \frac{l}{2l+1} C(l, 2, l; m, 0) Y_{l,m}(P) + \frac{\bar{R}_Q^{l-2}}{R_P^{l-1}} \frac{l-2}{2l-3} C(l, 2, l-2; m, 0) Y_{l-2,m}(P) \right] \right\} \quad (3-90)$$

für $\bar{R}_Q < \bar{R}_P$

Speziell für $\bar{R}_Q = \bar{R}_P = \bar{R}$ gilt

$$\frac{1}{|\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q|} = \frac{Y_{l,m}^*(Q)}{\bar{R}} \left\{ \frac{Y_{l,m}(P)}{2l+1} + \frac{e^2(\bar{R})}{3\sqrt{5}} \left[\frac{2l+3}{(2l+1)(2l+5)} C(l, 2, l+2; m, 0) Y_{l+2,m}(P) + \frac{1}{2l+1} C(l, 2, l; m, 0) Y_{l,m}(P) + \frac{(2l-1)}{(2l+1)(2l-3)} C(l, 2, l-2; m, 0) Y_{l-2,m}(P) \right] \right\}. \quad (3-91)$$

Diese Formeln folgen aus der Transformationsformel (A-107) und der Binomialentwicklung von (A-20). Es erweist sich in der Regel als günstig, eine gemischte Darstellung zu verwenden, nämlich den Integrationspunkt in quasisphärischen, den Berechnungspunkt dagegen in sphärischen Koordinaten darzustellen. Eine Ausnahme davon ist der Fall $\bar{R}_P = \bar{R}_Q$, d.h. der Aufpunkt liegt auf der Schichtgrenze selbst. (3-91) folgt in gleicher Weise aus (3-89) mit dem Grenzübergang $\bar{R}_P \rightarrow \bar{R}_Q - 0$ wie aus (3-90) mit dem Grenzübergang $\bar{R}_P \rightarrow \bar{R}_Q + 0$. Die unendliche Reihe in (3-91) ist im übrigen nicht unbedingt konvergent; (3-91) gilt nur im distributionellen Sinne.

Multipliziert mit dem Flächenelement der sphäroidischen Schicht gemäß (A-109) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{X}_Q}{|\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q|} = & Y_{l,m}^*(Q) \left\{ \frac{R_P^l}{\bar{R}_Q^{l+1}} \frac{Y_{l,m}(P)}{2l+1} + \frac{e^2(\bar{R}_Q)}{3\sqrt{5}} \left[\frac{R_P^{l+2}}{\bar{R}_Q^{l+3}} \frac{l+1}{2l+5} C(l, 2, l+2; m, 0) Y_{l+2,m}(P) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{R_P^l}{\bar{R}_Q^{l+1}} \frac{l-1}{2l+1} C(l, 2, l; m, 0) Y_{l,m}(P) + \frac{R_P^{l-2}}{\bar{R}_Q^{l-1}} \frac{l-3}{2l-3} C(l, 2, l-2; m, 0) Y_{l-2,m}(P) \right] \right\} \bar{R}_Q^2 \cos \Phi_Q d\bar{\Phi}_Q d\bar{\Lambda}_Q \\ & \text{für } \bar{R}_Q > \bar{R}_P \end{aligned} \quad (3-92)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{X}_Q}{|\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q|} = & Y_{l,m}^*(Q) \left\{ \frac{\bar{R}_Q^l}{R_P^{l+1}} \frac{Y_{l,m}(P)}{2l+1} - \frac{e^2(\bar{R}_Q)}{3\sqrt{5}} \left[\frac{\bar{R}_Q^{l+2}}{R_P^{l+3}} \frac{l+4}{2l+5} C(l, 2, l+2; m, 0) Y_{l+2,m}(P) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\bar{R}_Q^l}{R_P^{l+1}} \frac{l+2}{2l+1} C(l, 2, l; m, 0) Y_{l,m}(P) + \frac{\bar{R}_Q^{l-2}}{R_P^{l-1}} \frac{l}{2l-3} C(l, 2, l-2; m, 0) Y_{l-2,m}(P) \right] \right\} \bar{R}_Q^2 \cos \Phi_Q d\bar{\Phi}_Q d\bar{\Lambda}_Q \\ & \text{für } \bar{R}_Q < \bar{R}_P \end{aligned} \quad (3-93)$$

Das Innenprodukt $\langle \mathbf{u}, \mathbf{N} \rangle$ kann mit Hilfe von (3-73) gebildet werden. Da $\langle \bar{\mathbf{S}}_{l,m}, \mathbf{N} \rangle = \langle \bar{\mathbf{T}}_{l,m}, \mathbf{N} \rangle = 0$, gilt

$$\langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{N} \rangle = \langle \bar{r}_{l,m} \bar{\mathbf{R}}_{l,m} + \bar{s}_{l,m} \bar{\mathbf{S}}_{l,m} + \bar{t}_{l,m} \bar{\mathbf{T}}_{l,m}, \mathbf{N} \rangle = \bar{r}_{l,m}(\bar{R}) Y_{l,m} \quad (3-94)$$

Wir berechnen damit das Integral

$$\delta v_{S_i}^{Def}(\mathbf{X}_P) = g[\varrho_i - \varrho_{i+1}] \int_{S_i} \frac{\langle \mathbf{u}(\mathbf{X}_Q), \mathbf{N}(\mathbf{X}_Q) \rangle}{|\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q|} d^2 \mathbf{X}_Q.$$

Mit Hilfe von (3-73), (3-89)- (3-91), (3-94) findet man für das Integral über eine Grenzschicht

$$\delta v_{S_i}^{Def}(\mathbf{X}_P) = 4\pi g(\varrho_i - \varrho_{i+1}) \frac{R_P^l}{\bar{R}_i^{l-1}} \frac{Y_{l,m}(P)}{2l+1} \left[\bar{r}_{l,m}(\bar{R}_i) + \frac{e_i^2}{3\sqrt{5}}(l-1)r_{l,m;2,0}^{RR}(\bar{R}_i) \right] \quad \text{für } \bar{R}_P < \bar{R}_i \quad (3-95)$$

$$\delta v_{S_i}^{Def}(\mathbf{X}_P) = 4\pi g(\varrho_i - \varrho_{i+1}) \frac{\bar{R}_i^{l+2}}{R_P^{l+1}} \frac{Y_{l,m}(P)}{2l+1} \left[\bar{r}_{l,m}(\bar{R}_i) - \frac{e_i^2}{3\sqrt{5}}(l+2)r_{l,m;2,0}^{RR}(\bar{R}_i) \right] \quad \text{für } \bar{R}_P > \bar{R}_i \quad (3-96)$$

$$\begin{aligned} \delta v_{S_i}^{Def}(\mathbf{X}_P) = & 4\pi g \bar{R}(\varrho_i - \varrho_{i+1}) \frac{Y_{l,m}(P)}{2l+1} \left\{ \bar{r}_{l,m}(\bar{R}_i) - \frac{e^2(\bar{R})}{3\sqrt{5}(2l+1)} \left[\frac{(2l-5)}{(2l-3)} C(l, 2, l-2; m, 0) \bar{r}_{l-2,m}(\bar{R}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + C(l, 2, l; m, 0) \bar{r}_{l,m}(\bar{R}) + \frac{2l+7}{2l+5} C(l, 2, l+2; m, 0) \bar{r}_{l+2,m}(\bar{R}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3-97)$$

$$\text{für } \bar{R}_P = \bar{R}_Q = \bar{R}$$

Um das gesamte deformatrische Gravitationspotential zu erhalten, müssen die Anteile der einzelnen Grenzschichten aufaddiert werden. Es ist hierbei jeweils zu unterscheiden, ob der Aufpunkt oberhalb oder unterhalb der jeweiligen Grenzschicht liegt. Wir erhalten für einen Aufpunkt in der j -ten Schicht

$$\begin{aligned} \delta \tilde{v}^{Def}(\mathbf{X}_P) = & (\tilde{c}_{l,m}^{v1(Def)} R_P^l + \tilde{c}_{l,m}^{v2(Def)} R_P^{-(l+1)}) Y_{l,m}(\Lambda, \Phi) = \\ = & \sum_{i=1}^{j-1} 4\pi g(\varrho_i - \varrho_{i+1}) \frac{\bar{R}_i^{l+2}}{R_P^{l+1}} \frac{Y_{l,m}(P)}{2l+1} \left\{ \bar{r}_{l,m}(\bar{R}_i) - \frac{e_i^2}{3\sqrt{5}}(l+2)r_{l,m;2,0}^{RR}(\bar{R}_i) \right\} + \\ & + \sum_{i=j}^n 4\pi g(\varrho_i - \varrho_{i+1}) \frac{R_P^l}{\bar{R}_i^{l-1}} \frac{Y_{l,m}(P)}{2l+1} \left\{ \bar{r}_{l,m}(\bar{R}_i) + \frac{e_i^2}{3\sqrt{5}}(l-1)r_{l,m;2,0}^{RR}(\bar{R}_i) \right\} \end{aligned} \quad (3-98)$$

Aus (3-95)-(3-97) folgen die Gravitationsvektoren als Gradienten der entsprechenden Schichtpotentiale:

$$\text{GRAD } \delta v_{S_i}^{Def}(\mathbf{X}_P) = 4\pi g (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \frac{R_P^{l-1} Y_{l,m}(P)}{\bar{R}_i^{l-1} 2l+1} \left\{ \bar{r}_{l,m}(\bar{R}_i) + \frac{e_i^2}{3\sqrt{5}}(l-1)r_{l,m;2,0}^{RR}(\bar{R}_i) \right\} [l\mathbf{R}_{l,m}(P) - \sqrt{l(l+1)}\mathbf{S}_{l,m}(P)]$$

für $\bar{R}_P < \bar{R}_i$

(3-99)

$$\text{GRAD } \delta v_{S_i}^{Def}(\mathbf{X}_P) = -4\pi g (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \frac{\bar{R}_i^{l+2} Y_{l,m}(P)}{R_P^{l+2} 2l+1} \left\{ \bar{r}_{l,m}(\bar{R}_i) - \frac{e_i^2}{3\sqrt{5}}(l+2)r_{l,m;2,0}^{RR}(\bar{R}_i) \right\} [(l+1)\mathbf{R}_{l,m}(P) + \sqrt{l(l+1)}\mathbf{S}_{l,m}(P)]$$

für $\bar{R}_P > \bar{R}_i$

(3-100)

Wie im Abschnitt 2-6.1 ausgeführt, ist der linearisierte inkrementelle Gravitationsvektor $\delta\boldsymbol{\gamma}_{Def}$ im Gegensatz zum Potential nicht stetig; es gelten die Sprungrelationen (2-207). (3-99) und (3-100) liefern für $\bar{R}_P = \bar{R}_Q$ verschiedene Ergebnisse.

3-6.2 Das gesamte inkrementelle Schwerepotential im Innenraum

Das gesamte inkrementelle Schwerepotential setzt sich aus dem Deformationspotential, dem Potential der Auflast und dem inkrementellen Zentrifugalpotential zusammen; bei den beiden letzteren Potentialen treten nur die ansteigenden Potenzen von R in Erscheinung. Wir setzen die Koeffizienten des Lastpotentials zunächst als bekannt voraus. Die Koeffizienten des Deformationspotentials folgen aus (3-98) durch Koeffizientenvergleich; die Koeffizienten des Zentrifugalpotentials sind durch (3-67) gegeben. Wir erhalten damit im Erdinneren (in der j -ten Schicht)

$$\tilde{c}_{l,m}^{w1(j)} = \tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)} + \tilde{c}_{l,m}^{v1(Zent)} + \sum_{i=j}^n \frac{4\pi g (\varrho_i - \varrho_{i+1})}{\bar{R}_i^{l-1} (2l+1)} \left\{ \bar{r}_{l,m}(\bar{R}_i) + \frac{e_i^2}{3\sqrt{5}}(l-1)r_{l,m;2,0}^{RR}(\bar{R}_i) \right\}$$
(3-101)

$$\tilde{c}_{l,m}^{w2(j)} = \sum_{i=1}^{j-1} 4\pi g (\varrho_i - \varrho_{i+1}) \frac{\bar{R}_i^{l+2}}{2l+1} \left\{ \bar{r}_{l,m}(\bar{R}_i) - \frac{e_i^2}{3\sqrt{5}}(l+2)r_{l,m;2,0}^{RR}(\bar{R}_i) \right\}$$

In (3-98) treten i. allg. die Verschiebungskoeffizienten *aller* Schichten auf, also nicht nur die Verschiebungskoeffizienten derjenigen Schicht, in der gerade das Deformationspotential berechnet werden soll. Dies stellt für praktische Berechnungen einen erheblichen Nachteil dar. Für $j = n$, also in der äußersten Schicht, hängt wenigstens der Koeffizient $\tilde{c}_{l,m}^{w1}$ nur von den Verschiebungskoeffizienten derselben Schicht ab. Die erste Gleichung in (3-101) kann daher als Randbedingung genutzt werden.

3-6.3 Die Stetigkeitsbedingung für das inkrementelle Schwerepotential an einer Schichtgrenze

Das Störpotential ist im ganzen \mathbb{R}^3 stetig. Wir können dies als Randbedingung an den Schichtgrenzen nutzen. Gemäß (3-77) gilt

$$\begin{aligned} \delta\tilde{w}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi}, \bar{R}) &= \delta\tilde{w}_{l,m}(\bar{R})Y_{l,m}(\bar{\Lambda}, \bar{\Phi}) = \\ &= \left\{ \tilde{c}_{l,m}^{(w1)} \bar{R}^l + \tilde{c}_{l,m}^{(w2)} \bar{R}^{-(l+1)} + \frac{2}{3} \bar{R}^2 \Omega^2 \tilde{m}_Z \delta_{l,0} + \right. \\ &\quad + \frac{e^2(\bar{R})}{3\sqrt{5}} \left[C(l, 2, l+2; m, 0) [-(l+2)\tilde{c}_{l+2,m}^{(w1)} \bar{R}^{l+2} + (l+3)\tilde{c}_{l+2,m}^{(w2)} \bar{R}^{-(l+3)}] + \right. \\ &\quad + C(l, 2, l; m, 0) [-l\tilde{c}_{l,m}^{(w1)} \bar{R}^l + (l+1)\tilde{c}_{l,m}^{(w2)} \bar{R}^{-(l+1)}] + \\ &\quad \left. \left. + C(l, 2, l-2; m, 0) [-(l-2)\tilde{c}_{l-2,m}^{(w1)} \bar{R}^{l-2} + (l-1)\tilde{c}_{l-2,m}^{(w2)} \bar{R}^{-(l-1)}] \right] \right\} Y_{l,m} \end{aligned}$$
(3-102)

Die Stetigkeitsbedingung an den Schichtgrenzen lautet

$$\delta\tilde{w}_{l,m}(\bar{R}_j + 0) = \delta\tilde{w}_{l,m}(\bar{R}_j - 0)$$
(3-103)

3-6.4 Das gesamte inkrementelle Gravitationspotential im Außenraum

Das inkrementelle Gravitationspotential im Außenraum lautet außerhalb einer Kugel, welche ihren Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems (in unserem Fall also im Massenmittelpunkt der Erde) hat und die gesamte Erde umschließt (*Brillouin-Kugel*):

$$\delta v(\mathbf{X}_P) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{l,m}^{vA} \frac{1}{R_P^{l+1}} Y_{l,m}(\Lambda_P, \Phi_P) = g \int_{Erde} \delta \varrho(\mathbf{X}_Q) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{R_Q^l}{R_P^{l+1}} \frac{Y_{l,m}(\Lambda_P, \Phi_P) Y_{l,m}^*(\Lambda_Q, \Phi_Q)}{(2l+1)} d^3 \mathbf{X}_Q$$

$$\Rightarrow c_{l,m}^{vA} = g \int_{Erde} \delta \varrho(\mathbf{X}_Q) \frac{R_Q^l}{(2l+1)} Y_{l,m}^*(\Lambda_Q, \Phi_Q) d^3 \mathbf{X}_Q$$

(3-104)

Wir benutzen (3-102), um von den Koeffizienten der Außenraum-Potentialdarstellung auf die Koeffizienten der äußersten Schicht überzugehen. Im Außenraum gibt es keinen Anteil mit aufsteigenden Potenzen von R . Aus (3-102) folgt daher

$$\begin{aligned} c_{l,m}^{v1(grav)(n)} \bar{R}_E^l - \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} \left[(l+2)C(l, 2, l+2; m, 0) c_{l+2,m}^{v1(grav)(n)} \bar{R}_E^{l+2} + lC(l, 2, l; m, 0) c_{l,m}^{v1(grav)(n)} \bar{R}_E^l + \right. \\ \left. + (l-2)C(l, 2, l-2; m, 0) c_{l-2,m}^{v1(grav)(n)} \bar{R}_E^{l-2} \right] + \\ + c_{l,m}^{v2(grav)(n)} \bar{R}_E^{-(l+1)} + \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} \left[(l+3)C(l, 2, l+2; m, 0) c_{l+2,m}^{v2(grav)(n)} \bar{R}_E^{-(l+3)} + (l+1)C(l, 2, l; m, 0) c_{l,m}^{v2(grav)(n)} \bar{R}_E^{-(l+1)} + \right. \\ \left. + (l-1)C(l, 2, l-2; m, 0) c_{l-2,m}^{v2(grav)(n)} \bar{R}_E^{-(l-1)} \right] = \\ = c_{l,m}^{vA} \bar{R}_E^{-(l+1)} + \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} \left[(l+3)C(l, 2, l+2; m, 0) c_{l+2,m}^{vA} \bar{R}_E^{-(l+3)} + (l+1)C(l, 2, l; m, 0) c_{l,m}^{vA} \bar{R}_E^{-(l+1)} + \right. \\ \left. + (l-1)C(l, 2, l-2; m, 0) c_{l-2,m}^{vA} \bar{R}_E^{-(l-1)} \right] \end{aligned} \quad (3-105)$$

In erster Näherung gilt

$$c_{l,m}^{vA} = c_{l,m}^{v2(grav)(n)} + c_{l,m}^{v1(grav)(n)} \bar{R}_E^{2l+1} \quad (3-106)$$

Diese Beziehung wird in die sphäroidischen Terme von (3-105) eingesetzt; damit lautet die zweite Näherung

$$\begin{aligned} c_{l,m}^{vA} \bar{R}_E^{-(l+1)} = c_{l,m}^{v2(grav)(n)} \bar{R}_E^{-(l+1)} + c_{l,m}^{v1(grav)(n)} \bar{R}_E^l - \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} \left[(2l+5)C(l, 2, l+2; m, 0) c_{l+2,m}^{v1(grav)(n)} \bar{R}_E^{l+2} + \right. \\ \left. + (2l+1)C(l, 2, l; m, 0) c_{l,m}^{v1(grav)(n)} \bar{R}_E^l + (2l-3)C(l, 2, l-2; m, 0) c_{l-2,m}^{v1(grav)(n)} \bar{R}_E^{l-2} \right] \end{aligned} \quad (3-107)$$

3-6.5 Die Unstetigkeitsbedingung für die Normalableitung des inkrementellen Gravitationspotentials an einer inneren Schichtgrenze

Zur Konstruktion einer weiteren Randbedingung an inneren Grenzschichten nutzen wir die Sprungrelation (2-207) für den Gradienten des inkrementellen Schwerepotentials. (In (2-199) war die Sprungrelation für den Gradienten des inkrementellen Gravitationspotentials angegeben; diese Sprungrelation ist aber für den inkrementellen Schwerevektor ebenso gültig, da das inkrementelle Zentrifugalpotential stetig ist.) Wir betrachten die Differenz der Grenzwerte der Normalableitungen des Schwerepotentials. Durch Bildung des Innenprodukts mit \mathbf{N} auf beiden Seiten von (2-207) finden wir

$$\begin{aligned} \frac{d\delta w}{dN} \Big|_{\bar{R}_j+0} - \frac{d\delta w}{dN} \Big|_{\bar{R}_j-0} = -4\pi g(\varrho_j - \varrho_{j+1}) \langle \mathbf{u}, \mathbf{N} \rangle \Big|_{\bar{R}_j} \\ \Rightarrow \frac{d\delta w}{dN} \Big|_{\bar{R}_j+0} - 4\pi g \varrho_{j+1} \langle \mathbf{u}, \mathbf{N} \rangle \Big|_{\bar{R}_j+0} = \frac{d\delta w}{dN} \Big|_{\bar{R}_j-0} - 4\pi g \varrho_j \langle \mathbf{u}, \mathbf{N} \rangle \Big|_{\bar{R}_j-0} \end{aligned} \quad (3-108)$$

Der Ausdruck $\langle \mathbf{u}, \mathbf{N} \rangle$ steht mit (3-94) bereits zur Verfügung; die Ableitung $d\delta w/dN$ kann aus (3-58), (3-66) konstruiert werden. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta\tilde{w}}{dN} &= \langle \text{GRAD } \delta\tilde{w}, \mathbf{N} \rangle = \langle \frac{d\delta\tilde{w}_{l,m}}{dR} \mathbf{R}_{l,m} - \sqrt{l(l+1)} \frac{\delta\tilde{w}_{l,m}}{R} \mathbf{S}_{l,m}, \mathbf{e}_R - \sqrt{\frac{2}{15}} e^2 \mathbf{S}_{2,0} \rangle = \\
&= \left\{ \left[l \bar{R}^{l-1} \tilde{c}_{l,m}^{(w1)} - (l+1) \bar{R}^{-(l+2)} \tilde{c}_{l,m}^{(w2)} \right] + \frac{4}{3} \bar{R} \Omega^2 \tilde{m}_Z \delta_{l,0} - \right. \\
&\quad - \frac{e^2}{3\sqrt{5}} \left[C(l, 2, l+2; m, 0) \left[(l^2 + l - 4) \bar{R}^{l+1} \tilde{c}_{l+2,m}^{(w1)} + (l+3)(l+2) \bar{R}^{-(l+4)} \tilde{c}_{l+2,m}^{(w2)} \right] + \right. \\
&\quad \quad + C(l, 2, l; m, 0) \left[(l^2 - l - 3) \bar{R}^{l-1} \tilde{c}_{l,m}^{(w1)} + (l^2 + 3l - 1) \bar{R}^{-(l+2)} \tilde{c}_{l,m}^{(w2)} \right] + \\
&\quad \quad \left. \left. + C(l, 2, l-2; m, 0) \left[(l-2)(l-1) \bar{R}^{l-3} \tilde{c}_{l-2,m}^{(w1)} + (l^2 + l - 4) \bar{R}^{-l} \tilde{c}_{l-2,m}^{(w2)} \right] \right] \right\} Y_{l,m}
\end{aligned} \tag{3-109}$$

Um die Koeffizienten $\tilde{c}_{l,m}^{w2}$ aus dem ‘‘sphärischen Teil’’ dieser Gleichung zu eliminieren, kann der (ebenfalls überall stetige) Ausdruck $(l+1) \delta\tilde{w}_{l,m} / \bar{R} \cdot Y_{l,m}$ gemäß (3-77) addiert werden. Das Ergebnis bleibt ebenso stetig. Dies gibt Anlass zur Definition

$$\begin{aligned}
\bar{q}_{l,m}(\bar{R}) &:= (2l+1) \bar{R}^{l-1} \tilde{c}_{l,m}^{w1} - 4\pi g \varrho \bar{r}_{l,m} + 2\bar{R} \Omega^2 \tilde{m}_Z \delta_{l,0} - \\
&\quad - \frac{e^2}{3\sqrt{5}} \left[C(l, 2, l+2; m, 0) \left[2(l^2 + 2l - 1) \bar{R}^{l+1} \tilde{c}_{l+2,m}^{w1} + (l+3) \bar{R}^{-(l+4)} \tilde{c}_{l+2,m}^{w2} \right] + \right. \\
&\quad \quad + C(l, 2, l; m, 0) \left[(2l^2 - 3) \bar{R}^{l-1} \tilde{c}_{l,m}^{w1} + (l-2) \bar{R}^{-(l+2)} \tilde{c}_{l,m}^{w2} \right] + \\
&\quad \quad \left. + C(l, 2, l-2; m, 0) \left[2l(l-2) \bar{R}^{l-3} \tilde{c}_{l-2,m}^{w1} + (l-3) \bar{R}^{-l} \tilde{c}_{l-2,m}^{w2} \right] \right]
\end{aligned} \tag{3-110}$$

Die so definierte Größe $\bar{q}_{l,m}(\bar{R}_j)$ ist überall stetig. Ihr Wert am Rand ist bekannt: Setzt man (3-101) in die Definition von $\bar{q}_{l,m}$ ein und berücksichtigt $j = n$ so folgt

$$\begin{aligned}
\bar{q}_{l,m}(\bar{R}_E) &:= (2l+1) \bar{R}_E^{l-1} \tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)} + (2l+1) \bar{R}_E^{l-1} \tilde{c}_{l,m}^{v1(Zent)} + 2\bar{R} \Omega^2 \tilde{m}_Z \delta_{l,0} + 4\pi g \varrho_n \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} (l-1) r_{l,m;2,0}^{RR} - \\
&\quad - \frac{e^2}{3\sqrt{5}} \left[C(l, 2, l+2; m, 0) \left[2(l^2 + 2l - 1) R_E^{l+1} \tilde{c}_{l+2,m}^{w1} + (l+3) R_E^{-(l+4)} \tilde{c}_{l+2,m}^{w2} \right] + \right. \\
&\quad \quad + C(l, 2, l; m, 0) \left[(2l^2 - 3) R_E^{l-1} \tilde{c}_{l,m}^{w1} + (l-2) R_E^{-(l+2)} \tilde{c}_{l,m}^{w2} \right] + \\
&\quad \quad \left. + C(l, 2, l-2; m, 0) \left[2l(l-2) R_E^{l-3} \tilde{c}_{l-2,m}^{w1} + (l-3) R_E^{-l} \tilde{c}_{l-2,m}^{w2} \right] \right]
\end{aligned} \tag{3-111}$$

Die Störgrößen der Ordnung e^2 sind als bekannt anzusehen: es brauchen darin nämlich nur die Koeffizienten 0-ter Ordnung berücksichtigt werden, die ihrerseits im ersten Schritt der Störungsrechnung berechnet werden können.

3-7 Auflastpotential und Randspannung an der Erdoberfläche

Gemäß (2-264) und (2-265) gilt für die Randspannung an der Erdoberfläche

$$\Delta \mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{\Gamma} \varrho_{Last} h_{Last} = \Delta \kappa \mathbf{\Gamma} \tag{3-112}$$

wobei für $\Delta \kappa$ die Kugelflachenfunktionsentwicklung

$$\Delta \kappa = \Delta \kappa_{l,m} Y_{l,m} \tag{3-113}$$

angesetzt werden kann. Mit Hilfe von (3-29) ergibt sich:

$$\Delta \mathbf{t}_{(n)} = -(\Gamma_{0,0} \Delta \kappa_{l,m} + \Gamma_{2,0} r_{l,m;2,0}^{\Delta \kappa Y}) \bar{\mathbf{R}}_{l,m}, \tag{3-114}$$

$$\text{mit } r_{lm20}^{\Delta \kappa Y} := C(l, 2, l+2; m, 0) \Delta \kappa_{l+2,m} + C(l, 2, l; m, 0) \Delta \kappa_{l,m} + C(l, 2, l-2; m, 0) \Delta \kappa_{l-2,m}$$

Für den viskoelastischen Fall ist die Randspannung in den Frequenzbereich zu transformieren. Offensichtlich tragen in ellipsoidischer Näherung auch solche Lastkoeffizienten zu einem Spannungskoeffizienten bei, die nicht

denselben Grad l besitzen; in sphärischer Approximation dagegen steht zwischen den Last- und Spannungskoeffizienten eine Diagonalmatrix, deren Elemente zudem nur vom Grad l , nicht von der Ordnung m abhängen.

Das Gravitationspotential der Auflast beträgt

$$\delta v^{Last}(\mathbf{x}_P) = g \int_{\partial V_0} \frac{(\varrho_{Eis} h_{Eis}(Q) - \varrho_W h_W(Q))}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|} d^2 \mathbf{x}_Q = g \int_{\partial V_0} \frac{\Delta \kappa}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|} d^2 \mathbf{x}_Q; \quad (3-115)$$

in Analogie zu (3-95) und (3-96) erhalten wir

$$\delta v^{Last}(\mathbf{X}_P) = 4\pi g \frac{R_P^l}{\bar{R}_E^{l-1}} \frac{Y_{l,m}(P)}{2l+1} \left[\Delta \kappa_{l,m} + \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} (l-1) r_{l,m;2,0}^{\Delta \kappa Y} \right] \quad \text{für } \bar{R}_P < \bar{R}_E \quad (3-116)$$

$$\delta v^{Last}(\mathbf{X}_P) = 4\pi g \frac{\bar{R}_E^{l+2}}{R_P^{l+1}} \frac{Y_{l,m}(P)}{2l+1} \left[\Delta \kappa_{l,m} - \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} (l+2) r_{l,m;2,0}^{\Delta \kappa Y} \right] \quad \text{für } \bar{R}_P > \bar{R}_E \quad (3-117)$$

Hieraus sind die Potentialkoeffizienten $c_{l,m}^{v(Last)}$ der Darstellung

$$\delta v^{Last} = c_{l,m}^{v1(Last)} R^l Y_{l,m} \text{ (Innenraum)} \quad \text{bzw.} \quad \delta v^{Last} = c_{l,m}^{v2(Last)} R^{-(l+1)} Y_{l,m} \text{ (Außenraum)} \quad (3-118)$$

abzulesen:

$$c_{l,m}^{v1(Last)} = \frac{4\pi g \bar{R}_E^{-(l-1)}}{(2l+1)} \left[\Delta \kappa_{l,m} + (l-1) \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} r_{lm20}^{\Delta \kappa Y} \right] =: c_{l,m}^{v1(Last)(0)} + \delta c_{l,m}^{v1(Last)} \quad (3-119)$$

und

$$c_{l,m}^{v2(Last)} = \frac{4\pi g \bar{R}_E^{l+2}}{2l+1} \left[\Delta \kappa_{l,m} - (l+2) \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} r_{lm20}^{\Delta \kappa Y} \right] =: c_{l,m}^{v2(Last)(0)} + \delta c_{l,m}^{v2(Last)} \quad (3-120)$$

Durch eine Inversion dieser Beziehungen erhalten wir in linearer Näherung

$$\begin{aligned} \Delta \kappa_{l,m} &= \frac{1}{4\pi g} \left\{ (2l+1) \bar{R}_E^{l-1} c_{l,m}^{v1(Last)} - (l-1) \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} [C(l, 2, l+2; m, 0)(2l+5) \bar{R}_E^{l+1} c_{l+2,m}^{v1(Last)} + \right. \\ &\quad \left. + C(l, 2, l; m, 0)(2l+1) \bar{R}_E^{l-1} c_{l,m}^{v1(Last)} + C(l, 2, l-2; m, 0)(2l-3) \bar{R}_E^{l-3} c_{l-2,m}^{v1(Last)}] \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi g} \left\{ (2l+1) \bar{R}_E^{-(l+2)} c_{l,m}^{v2(Last)} + (l+2) \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} [C(l, 2, l+2; m, 0)(2l+5) \bar{R}_E^{-(l+4)} c_{l+2,m}^{v2(Last)} + \right. \\ &\quad \left. + C(l, 2, l; m, 0)(2l+1) \bar{R}_E^{-(l+2)} c_{l,m}^{v2(Last)} + C(l, 2, l-2; m, 0)(2l-3) \bar{R}_E^{-l} c_{l-2,m}^{v2(Last)}] \right\} \end{aligned} \quad (3-121)$$

Um die Reaktion eines sphärischen und eines sphäroidischen Erdmodells auf eine Auflast miteinander vergleichen zu können, nehmen wir in beiden Fällen dieselbe Verteilung von $\Delta \kappa$ bzw. $\Delta \kappa_{l,m}$ an. Eingangsgröße in die Randgleichungen ist jedoch üblicherweise nicht $\Delta \kappa$, sondern $c_{l,m}^{v1(Last)}$. Wie (3-119) zeigt, ist diese Größe (im Gegensatz zu $\Delta \kappa$) im sphärischen und im sphäroidischen Fall unterschiedlich. Um dennoch in beiden Fällen dieselbe Eingangsgröße benutzen zu können, drücken wir mit Hilfe von (3-121) $c_{l,m}^{v1(Last)}$ durch $c_{l,m}^{v1(Last)(0)}$ aus:

$$\begin{aligned} c_{l,m}^{v1(Last)} &= c_{l,m}^{v1(Last)(0)} + (l-1) \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} \left[C(l, 2, l-2; m, 0) \frac{(2l-3)}{(2l+1)} c_{l-2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{-2} + C(l, 2, l; m, 0) c_{l,m}^{v1(Last)(0)} + \right. \\ &\quad \left. + C(l, 2, l+2; m, 0) \frac{(2l+5)}{(2l+1)} c_{l+2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^2 \right] \\ c_{l,m}^{v2(Last)} &= c_{l,m}^{v2(Last)(0)} - (l+2) \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} \left[C(l, 2, l-2; m, 0) \frac{(2l-3)}{(2l+1)} c_{l-2,m}^{v2(Last)(0)} R_E^2 + C(l, 2, l; m, 0) c_{l,m}^{v2(Last)(0)} + \right. \\ &\quad \left. + C(l, 2, l+2; m, 0) \frac{(2l+5)}{(2l+1)} c_{l+2,m}^{v2(Last)(0)} R_E^{-2} \right] \end{aligned} \quad (3-122)$$

Aus (3-119), (3-120) folgt im übrigen

$$c_{l,m}^{v2(Last)(0)} R_E^{-(l+1)} = c_{l,m}^{v1(Last)(0)} R_E^l \quad (3-123)$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten der beiden Gleichungen in (3-121) erhalten wir Beziehungen zwischen $c_{l,m}^{v1(Last)}$ und $c_{l,m}^{v2(Last)}$:

$$\begin{aligned} c_{l,m}^{v1(Last)} &= \frac{c_{l,m}^{v2(Last)}}{R_E^{2l+1}} + \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} \left[C(l, 2, l-2; m, 0)(2l-3) \frac{c_{l-2,m}^{v2(Last)}}{R_E^{2l-1}} + C(l, 2, l; m, 0)(2l+1) \frac{c_{l,m}^{v2(Last)}}{R_E^{2l+1}} + \right. \\ &\quad \left. + C(l, 2, l+2; m, 0)(2l+5) \frac{c_{l+2,m}^{v2(Last)}}{R_E^{2l+3}} \right] \\ c_{l,m}^{v2(Last)} &= c_{l,m}^{v1(Last)} R_E^{2l+1} - \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} \left[C(l, 2, l-2; m, 0)(2l-3) c_{l-2,m}^{v1(Last)} R_E^{2l-1} + C(l, 2, l; m, 0)(2l+1) c_{l,m}^{v1(Last)} R_E^{2l+1} + \right. \\ &\quad \left. + C(l, 2, l+2; m, 0)(2l+5) c_{l+2,m}^{v1(Last)} R_E^{2l+3} \right] \end{aligned} \quad (3-124)$$

Mit (3-121) können wir die Randspannung auch in Abhängigkeit der Potentialkoeffizienten ausdrücken. Durch Einsetzen von (3-121) in (3-114) erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{t}_{(n)} &= - \left\{ \frac{\Gamma_{00}}{4\pi g} \left[(2l+1) \bar{R}_E^{l-1} c_{l,m}^{v1(Last)} - (l-1) \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} [C(l, 2, l+2; m, 0)(2l+5) \bar{R}_E^{l+1} c_{l+2,m}^{v1(Last)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C(l, 2, l; m, 0)(2l+1) \bar{R}_E^{l-1} c_{l,m}^{v1(Last)} + C(l, 2, l-2; m, 0)(2l-3) \bar{R}_E^{l-3} c_{l-2,m}^{v1(Last)}] \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma_{2,0}}{4\pi g} \left[C(l, 2, l+2; m, 0)(2l+5) c_{l+2,m}^{v1(Last)} \bar{R}_E^{l+1} + C(l, 2, l; m, 0)(2l+1) c_{l,m}^{v1(Last)} \bar{R}_E^{l-1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C(l, 2, l-2; m, 0)(2l-3) c_{l-2,m}^{v1(Last)} \bar{R}_E^{l-3} \right] \right\} \bar{\mathbf{R}}_{l,m} \\ &= - \left\{ \frac{\Gamma_{00}}{4\pi g} \left[(2l+1) c_{l,m}^{v2(Last)} \bar{R}_E^{-(l+2)} + (l+2) \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} [C(l, 2, l+2; m, 0)(2l+5) c_{l+2,m}^{v2(Last)} \bar{R}_E^{-(l+4)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C(l, 2, l; m, 0)(2l+1) c_{l,m}^{v2(Last)} \bar{R}_E^{-(l+2)} + C(l, 2, l-2; m, 0)(2l-3) c_{l-2,m}^{v2(Last)} \bar{R}_E^{-l}] \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma_{2,0}}{4\pi g} \left[C(l, 2, l+2; m, 0)(2l+5) c_{l+2,m}^{v2(Last)} \bar{R}_E^{-(l+4)} + C(l, 2, l; m, 0)(2l+1) c_{l,m}^{v2(Last)} \bar{R}_E^{-(l+2)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C(l, 2, l-2; m, 0)(2l-3) c_{l-2,m}^{v2(Last)} \bar{R}_E^{-l}] \right] \right\} \bar{\mathbf{R}}_{l,m} \end{aligned} \quad (3-125)$$

Speziell bei einem homogenen Erdmodell gilt gemäß (3-125), (3-26) und (3-32)

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{t}_{(n)} &= - \frac{\Gamma_{00}}{4\pi g} \left[(2l+1) \bar{R}_E^{l-1} c_{l,m}^{v1(Last)} - (l-2) \frac{\sqrt{5} \bar{R}_E \Omega^2}{6\Gamma_{00}} [C(l, 2, l+2; m, 0)(2l+5) \bar{R}_E^{l+1} c_{l+2,m}^{v1(Last)} + \right. \\ &\quad \left. + C(l, 2, l; m, 0)(2l+1) \bar{R}_E^{l-1} c_{l,m}^{v1(Last)} + C(l, 2, l-2; m, 0)(2l-3) \bar{R}_E^{l-3} c_{l-2,m}^{v1(Last)}] \right] \bar{\mathbf{R}}_{l,m} \\ &= - \frac{\Gamma_{00}}{4\pi g} \left[(2l+1) c_{l,m}^{v2(Last)} \bar{R}_E^{-(l+2)} + (l+3) \frac{\sqrt{5} \bar{R}_E \Omega^2}{6\Gamma_{00}} [C(l, 2, l+2; m, 0)(2l+5) c_{l+2,m}^{v2(Last)} \bar{R}_E^{-(l+4)} + \right. \\ &\quad \left. + C(l, 2, l; m, 0)(2l+1) c_{l,m}^{v2(Last)} \bar{R}_E^{-(l+2)} + C(l, 2, l-2; m, 0)(2l-3) c_{l-2,m}^{v2(Last)} \bar{R}_E^{-l}] \right] \bar{\mathbf{R}}_{l,m} \end{aligned} \quad (3-126)$$

Schließlich drücken wir die Randspannung noch mit den "sphärischen Potentialkoeffizienten" als Eingangsgrößen aus:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{t}_{(n)} &= - \left\{ \frac{\Gamma_{00}}{4\pi g} \left[(2l+1)c_{l,m}^{v1(Last)(0)} \bar{R}_E^{l-1} \right] + \frac{\Gamma_{2,0}}{4\pi g} \left[C(l,2,l+2;m,0)(2l+5)c_{l+2,m}^{v1(Last)(0)} \bar{R}_E^{l+1} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + C(l,2,l;m,0)(2l+1)c_{l,m}^{v1(Last)(0)} \bar{R}_E^{l-1} + C(l,2,l-2;m,0)(2l-3)c_{l-2,m}^{v1(Last)(0)} \bar{R}_E^{l-3} \right] \right\} \bar{\mathbf{R}}_{l,m} \\
&= - \left\{ \frac{\Gamma_{00}}{4\pi g} \left[(2l+1)c_{l,m}^{v2(Last)(0)} \bar{R}_E^{-(l+2)} \right] + \frac{\Gamma_{2,0}}{4\pi g} \left[C(l,2,l+2;m,0)(2l+5)c_{l+2,m}^{v2(Last)(0)} \bar{R}_E^{-(l+4)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + C(l,2,l;m,0)(2l+1)c_{l,m}^{v1(Last)(0)} \bar{R}_E^{-(l+2)} + C(l,2,l-2;m,0)(2l-3)c_{l-2,m}^{v1(Last)(0)} \bar{R}_E^{-l} \right] \right\} \bar{\mathbf{R}}_{l,m}
\end{aligned} \tag{3-127}$$

3-8 Randbedingungen an der Kern-Mantel-Grenze

Wir konstruieren hier die Randbedingungen an der Kern-Mantel-Grenze gemäß den Voraussetzungen und Prinzipien, die im Abschnitt 2-8.3 diskutiert wurden. Wir nennen den Schichtindex des unteren Mantels M , denjenigen des flüssigen Kerns K . Der mittlere Radius der Kern-Mantel-Grenze ist also \bar{R}_K .

Gemäß der ersten Voraussetzung in Abschnitt 2-8.3 ist $\bar{r}_{l,m}(\bar{R}_i) = 0 \forall i < K$. Infolgedessen wird aus der zweiten Gleichung in (3-101):

$$\tilde{c}_{l,m}^{w2(M)} = 4\pi g(\varrho_K - \varrho_M) \frac{\bar{R}_K^{l+2}}{2l+1} \left\{ \bar{r}_{l,m}(\bar{R}_K) - \frac{e_K^2}{3\sqrt{5}}(l+2)r_{l,m;2,0}^{RR}(\bar{R}_K) \right\} \tag{3-128}$$

Aus der zweiten Voraussetzung in Abschnitt 2-8.3 folgt mit (2-269), (3-72), (3-77), (3-80) wegen der Stetigkeit der inkrementellen Normalspannung:

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{\mathbf{t}}_{\bar{R}} &:= \langle \Delta \tilde{\mathbf{t}}_{(n)}, \mathbf{N} \rangle |_{\bar{R}_K+0} \mathbf{N} = -\Delta \tilde{p}(\bar{R}_K) \mathbf{N} = \\
&= \left\{ -\varrho_K \delta \bar{w}_{l,m}^K(\bar{R}_K) + \varrho_K \Gamma_{0,0}(\bar{R}_K) \bar{r}_{l,m}^K + \right. \\
&\quad \left. + \varrho_K \Gamma_{2,0}(\bar{R}_K) \left[C(l,2,l+2;m,0) \bar{r}_{l+2,m}^K + C(l,2,l;m,0) \bar{r}_{l,m}^K + C(l,2,l-2;m,0) \bar{r}_{l-2,m}^K \right] \right\} \bar{\mathbf{R}}_{l,m}
\end{aligned} \tag{3-129}$$

Schließlich folgt aus dem Verschwinden des Schermoduls im Kern auch das Verschwinden der Scherspannung an der Kern-Mantel-Grenze:

$$[\Delta \tilde{\mathbf{t}}_{(n)} - \langle \Delta \tilde{\mathbf{t}}_{(n)}, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}]_{\bar{R}_K+0} = \mathbf{0} \tag{3-130}$$

Das bedeutet, dass die Koeffizienten der $\bar{\mathbf{S}}_{l,m}$ und der $\bar{\mathbf{T}}_{l,m}$ in den Ausdrücken (3-81) - (3-88) gleich null sind.

In der Gleichung (3-130) erscheinen von vornherein nur die unbekanntenen Koeffizienten des unteren Mantels. In den Gleichungen (3-128), (3-129) erscheinen auf der rechten Seite zwar die Koeffizienten der Radialverschiebung (bzw. Normalverschiebung) und die Koeffizienten des inkrementellen Schwerepotentials im Kern. Da diese beiden Größen jedoch an der Kern-Mantel-Grenze stetig sind, dürfen sie durch die entsprechenden Ausdrücke im Mantel ersetzt werden. Damit treten in allen drei Gleichungen als Unbekannte nur noch die Koeffizienten $\tilde{c}_{l,m}^{1(M)}$, $\tilde{c}_{l,m}^{2(M)}$, $\tilde{c}_{l,m}^{3(M)}$, $\tilde{c}_{l,m}^{4(M)}$, $\tilde{c}_{l,m}^{w1(M)}$, $\tilde{c}_{l,m}^{w2(M)}$ des unteren Mantels auf; die Unbekannten des Kerns sind damit eliminiert. Wegen des Umfangs der auftretenden Ausdrücke verzichten wir hier darauf, die Gleichungen (3-128) - (3-130) explizit anzugeben.

Alternativ zu den Gleichungen (3-128) - (3-130) lassen sich auch acht Gleichungen für die Größen $\bar{r}_{l,m}$, $\bar{s}_{l,m}$, $\bar{t}_{l,m}$, $\delta \bar{w}_{l,m}$, $\bar{q}_{l,m}$, $\Delta \tilde{t}_{l,m}^{\bar{R}}$, $\Delta \tilde{t}_{l,m}^{\bar{S}}$, $\Delta \tilde{t}_{l,m}^{\bar{T}}$ angeben, die noch vier Unbekannte $\bar{r}_{l,m}^K$, $\bar{s}_{l,m}^K$, $\tilde{c}_{l,m}^{(w1K)}$, $\bar{t}_{l,m}^K$ enthalten. (Mit $\Delta \tilde{t}_{l,m}^{\bar{R}}$, $\Delta \tilde{t}_{l,m}^{\bar{S}}$, $\Delta \tilde{t}_{l,m}^{\bar{T}}$ haben wir hier die Koeffizienten des inkrementellen Spannungsvektors $\Delta \tilde{\mathbf{t}}_{(n)}$ in Richtung der sphäroidalen Basisvektoren $\bar{R}_{l,m}$, $\bar{S}_{l,m}$, $\bar{T}_{l,m}$ bezeichnet; die Unbekannten $\bar{r}_{l,m}^K$, $\bar{s}_{l,m}^K$, $\bar{t}_{l,m}^K$ sind gerade die Koeffizienten des Verschiebungsvektors des Mantels für $\bar{R} = \bar{R}_K$.)

In den ersten beiden Gleichungen werden lediglich die normalen bzw. sphäroidalen Verschiebungskoeffizienten durch die genannten Unbekannten dargestellt. Die dritte Gleichung drückt die Stetigkeit des Potentials aus; Die vierte Gleichung (Stetigkeit der $q_{l,m}$) folgt aus (3-110). In der fünften Gleichung ist die Normalspannung an der Kern-Mantel-Grenze bzw. dessen Grenzwert von der Kern-Seite her dargestellt. Wegen der in Abschnitt 2-8.3 getroffenen Annahme des hydrostatischen Gleichgewichts und des Verschwindens des Schermoduls im Kern kann das Druckinkrement gemäß (2-269) mit den beiden Unbekannten $\bar{r}_{l,m}(\bar{R} = R_K)$ und $\tilde{c}_{l,m}^{(w1K)}$ ausgedrückt werden. Das tangential Spannungskrement, dessen sphäroidaler Teil in der sechsten Gleichung erscheint, ist wegen des Verschwindens des Schermoduls im Kern identisch null. Schließlich verbleiben eine Gleichung für die toroidalen Verschiebungsanteile (die durch die Unbekannte $\bar{t}_{l,m}^K$ dargestellt werden) sowie eine Gleichung für den verschwindenden toroidal-tangentialen Anteil der Randspannung.

Es sei nochmals betont, dass es sich abgesehen von $\tilde{c}_{l,m}^{(w1K)}$ bei den Unbekannten um Größen handelt, die das Verhalten des *Mantels* an der Kern-Mantel-Grenze charakterisieren (ungeachtet der oberen Indices \cdot^K). Allerdings ist die Normalkomponente des Verschiebungsvektors $\bar{r}_{l,m}$ an der Kern-Mantel-Grenze stetig. Die anderen beiden Komponenten sind (wegen des Verschwindens des Schermoduls im Kern) unstetig.

Aufgrund der in Abschnitt 2-8 erläuterten Voraussetzungen besitzt das inkrementelle Gravitationspotential im Kern keinen Anteil mit $\tilde{c}_{l,m}^{(w2)} \bar{R}^{-(l+1)} Y_{l,m}$; es gilt somit

$$\begin{aligned} \delta \bar{w}_{l,m}^{Kern} = & \tilde{c}_{l,m}^{(w1K)} \bar{R}^l + \frac{e^2(\bar{R})}{3\sqrt{5}} \left[-C(l, 2, l+2; m, 0)(l+2)\bar{R}^{l+2}\tilde{c}_{l+2,m}^{(w1K)} - C(l, 2, l; m, 0)l\bar{R}^l\tilde{c}_{l,m}^{(w1K)} - \right. \\ & \left. - C(l, 2, l-2; m, 0)(l-2)\bar{R}^{l-2}\tilde{c}_{l-2,m}^{(w1K)} \right] \end{aligned} \quad (3-131)$$

Die Größe $\bar{q}_{l,m}$ ist an der Kern-Mantel-Grenze ebenso stetig wie das Potential; der innere Grenzwert ist laut (3-110)

$$\begin{aligned} \bar{q}_{l,m}^K = & (2l+1)\bar{R}_K^{l-1}\tilde{c}_{l,m}^{w1K} - 4\pi g \varrho_K \bar{r}_{l,m}^K - \\ & - \frac{e^2}{3\sqrt{5}} \left\{ C(l, 2, l+2; m, 0)2(l^2+2l-1)\bar{R}_K^{l+1}\tilde{c}_{l+2,m}^{w1K} + C(l, 2, l; m, 0)(2l^2-3)\bar{R}_K^{l-1}\tilde{c}_{l,m}^{w1K} + \right. \\ & \left. + C(l, 2, l-2; m, 0)2l(l-2)\bar{R}_K^{l-3}\tilde{c}_{l-2,m}^{w1K} \right\} \end{aligned} \quad (3-132)$$

Schließlich ist auch die Anomalie der Normalspannung an der Kern-Mantel-Grenze stetig. Aufgrund der in Abschnitt 2-8.3 getroffenen Annahmen ist der innere Grenzwert

$$\begin{aligned} \Delta \bar{t}_{l,m}^{\bar{R}}(\bar{R}_K) = & -\varrho_K \delta \bar{w}_{l,m}^K(\bar{R}_K) + \varrho_K \Gamma_{0,0}(\bar{R}_K) \bar{r}_{l,m}^K + \\ & + \varrho_K \Gamma_{2,0}(\bar{R}_K) \left[C(l, 2, l+2; m, 0) \bar{r}_{l+2,m}^K + C(l, 2, l; m, 0) \bar{r}_{l,m}^K + C(l, 2, l-2; m, 0) \bar{r}_{l-2,m}^K \right] \end{aligned} \quad (3-133)$$

Somit stehen alle acht Randgleichungen zur Verfügung (vgl. hierzu auch *R. Sabadini et al. 1982 Seite 2893 Formel (63)*). Der Vorteil dieser alternativen Vorgehensweise wird sich im Kapitel 4 zeigen, wenn wir die Gleichungssysteme für die unbekanntenen Koeffizientenfunktionen aufstellen.

3-9 Die Systemdefinition des Tisserandsystems

In den Euler-Liouville-Gleichungen (Drehimpulsbilanz des deformierbaren Körpers, vgl. Abschnitt 2-9.1) erscheint der relative inkrementelle Drehimpuls \mathbf{H}^{Rel} , der durch die Bewegung der Massenelemente des Körpers relativ zu dem gewählten Koordinatensystem entsteht. Beim starren Körper kann ein mitrotierendes System in der Weise gewählt werden, dass keinerlei Relativbewegung auftritt. Jedoch ist es auch beim deformierbaren Körper möglich, ein System zu wählen, in dem kein relativer Drehimpuls auftritt, nämlich das *Tisserandsystem*, vgl. Abschnitt 2-3.3. Das Verschwinden des relativen Drehimpulses bildet gerade die Definition dieses Systems. Wir stellen den relativen Drehimpuls in linearer Näherung in vektoriellen Kugelfunktionen dar. Zunächst leiten wir eine allgemeine Integralformel her, in der die Koeffizientenfunktionen $r_{l,m}$, $s_{l,m}$, $t_{l,m}$ noch nicht näher spezifiziert sind. Danach setzen wir für diese Funktionen die in den Abschnitten 3-3.4, 3-3.5 gefundene Lösung ein.

$$\mathbf{H}^{Rel} = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} d^3\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0(\mathbf{X}) (\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \times \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)) d^3\mathbf{X} = \int_{\mathcal{V}_0} \varrho(\mathbf{X}) \mathbf{X} \times \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) d^3\mathbf{X} \quad (3-134)$$

Durch Laplace-Transformation dieses Ausdrucks erhalten wir:

$$\tilde{\mathbf{H}}^{Rel} = s \int_{\mathcal{V}_0} \varrho_0(\mathbf{X}) \mathbf{X} \times \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, s) d^3\mathbf{X} \quad (3-135)$$

Wir betrachten den Anteil \mathbf{H}_j^{Rel} der Schicht zwischen \bar{R}_{j-1} und \bar{R}_j . Mit dem Ansatz (3-40) des Verschiebungsvektors in vektoriellen Kugelfunktionen sowie der Darstellung (A-107) des Ellipsoids erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_j^{Rel} &= s \varrho_j \iint_{\sigma} \int_{\bar{R}_{j-1}(1-\frac{e_j^2 Y_{2,0}}{3\sqrt{5}})}^{\bar{R}_j(1-\frac{e_j^2 Y_{2,0}}{3\sqrt{5}})} \mathbf{R} \mathbf{e}_R \times (\tilde{r}_{l,m}(R) \mathbf{R}_{l,m} + \tilde{s}_{l,m}(R) \mathbf{S}_{l,m} + \tilde{t}_{l,m}(R) \mathbf{T}_{l,m}) R^2 dR d\sigma \\ &= s \varrho_j \iint_{\sigma} \int_{\bar{R}_{j-1}(1-\frac{e_j^2 Y_{2,0}}{3\sqrt{5}})}^{\bar{R}_j(1-\frac{e_j^2 Y_{2,0}}{3\sqrt{5}})} R^3 (\tilde{s}_{l,m}(R) \mathbf{T}_{l,m} - \tilde{t}_{l,m}(R) \mathbf{S}_{l,m}) dR d\sigma \end{aligned} \quad (3-136)$$

(Hier wurde die Darstellung des Verschiebungsvektors in Kugelkoordinaten gewählt.) Durch Einsetzen der allgemeinen Lösung (3-58), (3-62)- (3-64) für den Verschiebungsvektor \mathbf{u} in vektoriellen Kugelfunktionen und Ausführen der Integrationen erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_j^{Rel} &= -4\pi \varrho_j s \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{e}_m \left\{ -\frac{e^2(\bar{R})}{6\sqrt{6}} (5\tilde{c}_{2,m}^{(1)} \bar{R}^7 + 3\tilde{c}_{2,m}^{(2)} \bar{R}^5 - 2\tilde{c}_{2,m}^{(4)}) im C(2, 1, 1; m, 0) - \right. \\ &\quad - \left[\tilde{c}_{1,m}^{(t1)} \frac{\bar{R}^5}{5} + \tilde{c}_{1,m}^{(t2)} \frac{\bar{R}^2}{2} - \frac{2\varrho_j \Omega}{\tilde{\mu} \sqrt{2}} \left(\frac{C(1, 1, 2; m, 0)}{8\sqrt{3}} \tilde{c}_{2,m}^{(1)} \frac{\bar{R}^9}{9} + \left[\frac{C(1, 1, 2; m, 0)}{4\sqrt{3}} \tilde{c}_{2,m}^{(2)} + \frac{im}{10\sqrt{2}} \tilde{c}_{1,m}^{(t1)} \right] \frac{\bar{R}^7}{7} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left[\frac{C(1, 1, 2; m, 0)}{2\sqrt{3}} \tilde{c}_{2,m}^{(3)} + \frac{im}{2\sqrt{2}} \tilde{c}_{1,m}^{(t2)} \right] \frac{\bar{R}^4}{4} \right) + \frac{\sqrt{2}\varrho_j}{10\tilde{\mu}} \delta\tilde{\omega}_{1,m}^R \frac{\bar{R}^7}{7} \right] + \\ &\quad \left. + \frac{e^2(\bar{R})}{3\sqrt{5}} \left[(\tilde{c}_{3,m}^{(t1)} \bar{R}^7 + \tilde{c}_{3,m}^{(t2)}) \frac{2}{\sqrt{6}} C(3, 2, 1; m, 0) - \frac{1}{2} (\tilde{c}_{1,m}^{(t1)} \bar{R}^5 + \tilde{c}_{1,m}^{(t2)} \bar{R}^2) C(1, 2, 1; m, 0) \right] \right\}_{\bar{R}_{j-1}}^{\bar{R}_j}. \end{aligned} \quad (3-137)$$

Wir haben hier (A-35) benutzt; die Vektoren \mathbf{e}_m sind in (A-36) definiert. Im kartesischen System aufgelöst

lautet der relative Drehimpuls

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{H}}_j^{Rel} = & -\frac{4\pi\rho_j s}{\sqrt{3}} \mathbf{e}_x \left\{ \frac{ie^2(\bar{R})}{6\sqrt{10}} (5(\tilde{c}_{2,-1}^{(1)} + \tilde{c}_{2,1}^{(1)})\bar{R}^7 + 3(\tilde{c}_{2,-1}^{(2)} + \tilde{c}_{2,1}^{(2)})\bar{R}^5 - 2(\tilde{c}_{2,-1}^{(4)} + \tilde{c}_{2,1}^{(4)})) - \right. \\
& - \left[(\tilde{c}_{1,-1}^{(t1)} - \tilde{c}_{1,1}^{(t1)})\frac{\bar{R}^5}{5} + (\tilde{c}_{1,-1}^{(t2)} - \tilde{c}_{1,1}^{(t2)})\frac{\bar{R}^2}{2} - \frac{\sqrt{2}\rho_j\Omega}{\bar{\mu}} \left(\frac{1}{8\sqrt{5}}(\tilde{c}_{2,-1}^{(1)} - \tilde{c}_{2,1}^{(1)})\frac{\bar{R}^9}{9} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \left[\frac{1}{4\sqrt{5}}(\tilde{c}_{2,-1}^{(2)} - \tilde{c}_{2,1}^{(2)}) - \frac{i}{10\sqrt{2}}(\tilde{c}_{1,-1}^{(t1)} + \tilde{c}_{1,1}^{(t1)}) \right] \frac{\bar{R}^7}{7} - \right. \right. \\
& - \left. \left. \left[\frac{1}{2\sqrt{5}}(\tilde{c}_{2,-1}^{(3)} - \tilde{c}_{2,1}^{(3)}) - \frac{i}{2\sqrt{2}}(\tilde{c}_{1,-1}^{(t2)} + \tilde{c}_{1,1}^{(t2)}) \right] \frac{\bar{R}^4}{4} \right) + \frac{\sqrt{2}\rho_j}{10\bar{\mu}} (\delta\tilde{\omega}_{1,-1}^R - \delta\tilde{\omega}_{1,1}^R) \frac{\bar{R}^7}{7} \right] + \\
& + \frac{e^2(\bar{R})}{3\sqrt{5}} \left[\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{35}} ((\tilde{c}_{3,-1}^{(t1)} - \tilde{c}_{3,1}^{(t1)})\bar{R}^7 + (\tilde{c}_{3,-1}^{(t2)} - \tilde{c}_{3,1}^{(t2)})) + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2\sqrt{5}} ((\tilde{c}_{1,-1}^{(t1)} - \tilde{c}_{1,1}^{(t1)})\bar{R}^5 + (\tilde{c}_{1,-1}^{(t2)} - \tilde{c}_{1,1}^{(t2)})\bar{R}^2) \right] \Bigg\}_{\bar{R}_{j-1}} - \\
& - \frac{4\pi\rho_j s}{\sqrt{3}} \mathbf{e}_y \left\{ \frac{e^2(\bar{R})}{6\sqrt{10}} (5(\tilde{c}_{2,-1}^{(1)} - \tilde{c}_{2,1}^{(1)})\bar{R}^7 + 3(\tilde{c}_{2,-1}^{(2)} - \tilde{c}_{2,1}^{(2)})\bar{R}^5 - 2(\tilde{c}_{2,-1}^{(4)} - \tilde{c}_{2,1}^{(4)})) + \right. \\
& + \left[i(\tilde{c}_{1,-1}^{(t1)} + \tilde{c}_{1,1}^{(t1)})\frac{\bar{R}^5}{5} + i(\tilde{c}_{1,-1}^{(t2)} + \tilde{c}_{1,1}^{(t2)})\frac{\bar{R}^2}{2} - \frac{\sqrt{2}\rho_j\Omega}{\bar{\mu}} \left(\frac{i}{8\sqrt{5}}(\tilde{c}_{2,-1}^{(1)} + \tilde{c}_{2,1}^{(1)})\frac{\bar{R}^9}{9} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \left[\frac{i}{4\sqrt{5}}(\tilde{c}_{2,-1}^{(2)} + \tilde{c}_{2,1}^{(2)}) + \frac{1}{10\sqrt{2}}(\tilde{c}_{1,-1}^{(t1)} - \tilde{c}_{1,1}^{(t1)}) \right] \frac{\bar{R}^7}{7} - \right. \right. \\
& - \left. \left. \left[\frac{i}{2\sqrt{5}}(\tilde{c}_{2,-1}^{(3)} + \tilde{c}_{2,1}^{(3)}) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\tilde{c}_{1,-1}^{(t2)} - \tilde{c}_{1,1}^{(t2)}) \right] \frac{\bar{R}^4}{4} \right) + \frac{\sqrt{2}i\rho_j}{10\bar{\mu}} (\delta\tilde{\omega}_{1,-1}^R + \delta\tilde{\omega}_{1,1}^R) \frac{\bar{R}^7}{7} \right] - \\
& - \frac{e^2(\bar{R})}{3\sqrt{5}} \left[\frac{2i\sqrt{3}}{\sqrt{35}} ((\tilde{c}_{3,-1}^{(t1)} + \tilde{c}_{3,1}^{(t1)})\bar{R}^7 + (\tilde{c}_{3,-1}^{(t2)} + \tilde{c}_{3,1}^{(t2)})) + \right. \\
& + \left. \frac{i}{2\sqrt{5}} ((\tilde{c}_{1,-1}^{(t1)} + \tilde{c}_{1,1}^{(t1)})\bar{R}^5 + i(\tilde{c}_{1,-1}^{(t2)} + \tilde{c}_{1,1}^{(t2)})\bar{R}^2) \right] \Bigg\}_{\bar{R}_{j-1}} - \\
& - 4\pi\rho_j s \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{e}_z \left\{ -\tilde{c}_{1,0}^{(t1)}\frac{\bar{R}^5}{5} - \tilde{c}_{1,0}^{(t2)}\frac{\bar{R}^2}{2} + \frac{\sqrt{2}\rho_j\Omega}{\bar{\mu}} \left(\frac{1}{36\sqrt{15}}\tilde{c}_{2,0}^{(1)}\bar{R}^9 + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{2\sqrt{15}}\tilde{c}_{2,0}^{(2)} - \frac{1}{4\sqrt{15}}\tilde{c}_{2,0}^{(3)}\bar{R}^4 \right) - \frac{\rho_j}{35\sqrt{2}\bar{\mu}} \delta\tilde{\omega}_{1,0}^R \bar{R}^7 + \right. \\
& + \left. \frac{e^2(\bar{R})}{15} \left[3\sqrt{\frac{2}{7}}(\tilde{c}_{3,0}^{(t1)}\bar{R}^7 + \tilde{c}_{3,0}^{(t2)}) - (\tilde{c}_{1,0}^{(t1)}\bar{R}^5 + \tilde{c}_{1,0}^{(t2)}\bar{R}^2) \right] \right\}_{\bar{R}_{j-1}}
\end{aligned} \tag{3-138}$$

Wie man leicht nachprüft, ist dieser Ausdruck reell. Aus $\tilde{\mathbf{H}}_j^{Rel} = 0$ folgt insbesondere für ein homogenes Erdmodell

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{1,-1}^{(t1)} \frac{\bar{R}_E^5}{5} = & \frac{ie^2(\bar{R}_E)}{6\sqrt{10}} (5\tilde{c}_{2,-1}^{(1)}\bar{R}_E^7 + 3\tilde{c}_{2,-1}^{(2)}\bar{R}_E^5) + \frac{\sqrt{2}\rho_j\Omega}{\bar{\mu}} \left(\frac{1}{72\sqrt{5}}\tilde{c}_{2,-1}^{(1)}\bar{R}_E^9 + \right. \\
& + \left. \left[\frac{1}{4\sqrt{5}}\tilde{c}_{2,-1}^{(2)} - \frac{i}{10\sqrt{2}}\tilde{c}_{1,-1}^{(t1)} \right] \frac{\bar{R}_E^7}{7} \right) - \frac{\rho_j}{\sqrt{2}\bar{\mu}} \delta\tilde{\omega}_{1,-1}^R \frac{\bar{R}_E^7}{35} + \frac{e^2(\bar{R}_E)}{15} \left[2\sqrt{\frac{3}{7}}\tilde{c}_{3,-1}^{(t1)}\bar{R}_E^7 + \frac{1}{2}\tilde{c}_{1,-1}^{(t1)}\bar{R}_E^5 \right]
\end{aligned} \tag{3-139}$$

In nullter Näherung gilt also

$$\tilde{c}_{1,-1}^{(t1)} \frac{\bar{R}_E^5}{5} = 0 \tag{3-140}$$

Dieser Koeffizient kann nicht aus den Randbedingungen bestimmt werden: Das System der Randbedingungen ist für den Grad $l = 1$ singular. Durch die Systemdefinition haben wir eine Gleichung zur Verfügung, die zusammen mit der Drehimpulsbilanz diesen Defekt hebt. Als wichtiges Ergebnis halten wir fest, dass bezüglich des Tisserandsystems in sphärischer Näherung keine toroidale Verschiebungen vom Grad $l = 1$ existieren – physikalisch bedeutet dies, dass bezüglich des Tisserandsystems keine starren Drehungen möglich sind, vgl. (A-46). Diese Aussage wurde hier nur für ein homogenes Modell gezeigt, lässt sich aber durch Propagation geeigneter Randbedingungen auch auf geschichtete sphärische Modelle übertragen. (3-139) zeigt, dass im Falle ellipsoidischer Modelle gewisse (wenn auch geringe) toroidale Verschiebungen auftreten können.

4. Halbanalytische Berechnung der unbekannt Koeffizientenfunktionen, Lösungspropagation und Partialbruchzerlegungen

Wir benutzen die im Abschnitt 3 erläuterten Rand- und Stetigkeitsbedingungen, um die unbekannt Koeffizienten der Lösungen in den einzelnen Schichten zu bestimmen. Pro Grad und Ordnung stehen den vier Randbedingungen an der Erdoberfläche acht unbekannt Koeffizienten in der äußersten Schicht gegenüber, so dass ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem vorliegt. Mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen können die vier Randbedingungen der Erdoberfläche von Schicht zu Schicht nach unten propagiert werden, bis an der Kern-Mantel-Grenze schließlich auf der rechten Seite der Stetigkeitsbedingungen nur noch vier Unbekannte stehen. Das resultierende Gleichungssystem, das noch vom Laplace-Parameter s abhängt, kann halbanalytisch gelöst werden.

Wir betrachten ab hier nur noch Terme vom Grad $l \geq 2$. Die Terme nullten Grades im Last- und im Deformationspotential verschwinden wegen der Massenerhaltung. Nur das Zentrifugalpotential enthält einen Term nullter Ordnung, der einer Tageslängenänderung entspricht. Anregungsterme vom Grad 0 würden bei einer inkompressiblen Erde auch zu keinerlei Deformationen führen: Ein Term nullten Grades in den Verschiebungen kann nur bei den "radialen" Koeffizientenfunktionen auftreten, würde aber eine Volumenänderung bewirken, was der Annahme der Inkompressibilität widerspräche. Die Terme vom Grad 1 weisen einen Defekt auf, der, wie schon ausgeführt, durch die Unbestimmtheit des Massenmittelpunkts infolge der quasistatischen Näherung zustandekommt.

Im Falle der sphärischen, nichtrotierenden Erde sind die Rand- und Stetigkeitsbedingungen teilweise entkoppelt: Die "toroidalen" Koeffizienten $\tilde{c}_{l,m}^{(t1)}$, $\tilde{c}_{l,m}^{(t2)}$ treten nicht gemeinsam mit den den anderen Koeffizienten in den Gleichungen auf. Das System kann daher in zwei Teile aufgespalten werden. Wir untersuchen in der vorliegenden Arbeit die toroidalen Koeffizienten nicht weiter, da sie keinen Einfluss auf den inkrementellen Trägheitstensor haben und daher in der Drehimpulsbilanz nicht auftreten (siehe Kapitel 5). Es kann leicht gezeigt werden, dass die toroidalen Komponenten im sphärischen Fall verschwinden. Bei den Termen vom Grad $l = 1$ tritt wiederum ein Defekt auf. Dieser Defekt kann mit den Gleichungen der Systemdefinition behoben werden, die im Abschnitt 3-9 aufgestellt wurden.

Bei den Randbedingungen an der Erdoberfläche unterscheiden wir zwischen dem "Lastfall" und dem "Gezeitenfall" – das bedeutet, dass wir die bekannten Randgrößen entsprechend aufspalten. Beim Lastfall tritt als Störpotential außer dem Deformationspotential, das durch die Umlagerung der Massen im Erdinneren entsteht, das Potential δv^{Last} der aufliegenden Massen in Erscheinung. Diese aufliegenden Massen erzeugen Randspannungen. Beim Gezeitenfall existiert außer dem Deformationspotential nur noch ein harmonisches Störpotential, das mit keinerlei Randspannungen verbunden ist. Dieses könnte durch extraterrestrische Himmelskörper erzeugt sein, im vorliegenden Fall handelt es sich um die $2,m$ -Terme des Zentrifugalpotentials, die formal die Gestalt von Gezeitenpotential-Termen besitzen.

Im ersten Unterabschnitt betrachten wir das Gleichungssystem nullter Ordnung, das einer kugelförmigen, nichtrotierenden Erde entspricht; im zweiten Unterabschnitt folgt die Störungsrechnung für die ellipsoidischen Terme.

4-1 Lösungen für das sphärische, nichtrotierende Erdmodell

Wir erhalten für jede Schichtgrenze \bar{R}_i sechs Gleichungen, welche die sechs Unbekannten $\tilde{c}_{l,m}^{(1)}$, $\tilde{c}_{l,m}^{(2)}$, $\tilde{c}_{l,m}^{(3)}$, $\tilde{c}_{l,m}^{(4)}$, $\tilde{c}_{l,m}^{w1}$ und $\tilde{c}_{l,m}^{w2}$ jeweils beider angrenzender Gebiete, also insgesamt zwölf Unbekannte enthalten. Für innere Schichtgrenzen sind die Stetigkeitsbedingungen in der Form

$$\underline{Y}_i(\bar{R}_i) \underline{c}_i = \underline{Y}_{i+1}(\bar{R}_i) \underline{c}_{i+1} \quad (4-1)$$

darstellbar. Mit \underline{Y} ist die Matrix der Randbedingungen bezeichnet. Das Argument \bar{R}_i bezieht sich auf die Schichtgrenze, der Index (i) bzw. ($i + 1$) zeigt an, ob der innere (i) oder der äußere ($i + 1$) Grenzwert der jeweiligen Feldgrößen gebildet wird; entsprechend sind in \underline{Y}_i die Parameter der i -ten Schicht, in \underline{Y}_{i+1} die Parameter der $i + 1$ -ten Schicht einzusetzen. Die Abhängigkeit der Matrizen \underline{Y} , \underline{c} von s , dem Parameter der Laplace-Transformation, vom Grad l und der Ordnung m ist der Übersichtlichkeit halber nicht notiert. Ebenso lassen wir die oberen Indices ⁽⁰⁾ weg, die anzeigen sollten, dass es sich vom Standpunkt der Störungsrechnung jeweils um die Gleichungen nullter Ordnung handelt.

In der Spaltenmatrix $\underline{c}_i = [\tilde{c}_{l,m}^{(i,w1)}, \tilde{c}_{l,m}^{(i,w2)}, \tilde{c}_{l,m}^{(i,1)}, \tilde{c}_{l,m}^{(i,2)}, \tilde{c}_{l,m}^{(i,3)}, \tilde{c}_{l,m}^{(i,4)}]^T$ sind die Unbekannten der i -ten Schicht angeordnet.

Die Matrix \underline{Y} lautet (vgl. G. Spada et al. 1992 mit etwas anders normierten und angeordneten Unbekannten):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{R}^{(l+1)} & \bar{R}^{(l-1)} & \bar{R}^{-l} & \bar{R}^{-(l+2)} \\ 0 & 0 & -(l+3)\bar{R}^{(l+1)} & -(l+1)\bar{R}^{(l-1)} & (l-2)\bar{R}^{-l} & l\bar{R}^{-(l+2)} \\ \bar{R}^l & \bar{R}^{-(l+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (2l+1)\bar{R}^{(l-1)} & 0 & -4\pi g \varrho \bar{R}^{(l+1)} & -4\pi g \varrho \bar{R}^{(l-1)} & -4\pi g \varrho \bar{R}^{-l} & -4\pi g \varrho \bar{R}^{-(l+2)} \\ -\varrho \bar{R}^l & -\varrho \bar{R}^{-(l+1)} & (\varrho \Gamma_{0,0} \bar{R} + 2s\bar{\mu} \frac{(l^2-l-3)}{l}) \bar{R}^l & (\varrho \Gamma_{0,0} \bar{R} + 2s\bar{\mu}(l-1)) \bar{R}^{(l-2)} & (\varrho \Gamma_{0,0} \bar{R} - 2s\bar{\mu} \frac{(l^2+3l-1)}{l+1}) \bar{R}^{-(l+1)} & (\varrho \Gamma_{0,0} \bar{R} - 2s\bar{\mu}(l+2)) \bar{R}^{-(l+3)} \\ 0 & 0 & -2s\bar{\mu}l(l+2)\bar{R}^l & -2s\bar{\mu}(l-1)(l+1)\bar{R}^{(l-2)} & -2s\bar{\mu}(l-1)(l+1)\bar{R}^{-(l+1)} & -2s\bar{\mu}l(l+2)\bar{R}^{-(l+3)} \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

(Selbstverständlich ist $\Gamma_{0,0}$ ebenfalls von \bar{R} abhängig.) Die erste Zeile in \underline{Y} entspricht der Radialverschiebung $\bar{r}_{l,m}$ gemäß (3-73), die zweite der sphäroidalen Tangentialverschiebung $\bar{s}_{l,m}$ gemäß (3-74), die dritte dem Potential $\delta\tilde{w}_{l,m}$ gemäß (3-77) bzw. (3-102), die vierte der Größe $\bar{q}_{l,m}$, welche die Normalableitung des Potentials enthält, gemäß (3-110), die fünfte der Normalspannung an der Schichtgrenze, schließlich die sechste der sphäroidalen Tangentialspannung gemäß (3-78) - (3-88). In der zweiten und sechsten Zeile wurde noch jeweils der Faktor $\sqrt{l(l+1)}$ angebracht.

Die letzten drei dieser Größen sind an der Erdoberfläche bekannt; die ersten drei sind unbekannt. Die letzten drei Zeilen der Matrix $\underline{Y}_n(\bar{R}_E)$ bilden die 3×6 -Matrix \underline{A} . Die 3×1 -Spaltenmatrix der bekannten Randwerte bezeichnen wir mit \underline{r} ; es gilt also $\underline{A}\underline{c}^{(n)} = \underline{r}$.

Die Spaltenmatrix \underline{r} lautet gemäß (3-111), (3-127) in nullter Näherung für den Lastfall

$$\underline{r}_{l,m}^{Last(0)} = \left[(2l+1)\bar{R}_E^{(l-1)}, -\frac{\Gamma_{0,0}}{4\pi g}(2l+1)\bar{R}_E^{l-1}, 0 \right]^T \tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)} \quad (4-3)$$

bzw.

$$\underline{r}_{l,m}^{(tid)} = [(2l+1)\bar{R}_E^{l-1}, 0, 0]^T \tilde{c}_{l,m}^{tid} \quad (4-4)$$

für den "Gezeitenfall" (wobei hier die Koeffizienten $\tilde{c}_{l,m}^{tid}$ mit den $\tilde{c}_{l,m}^{Zent}$ gemäß (3-67) identifiziert werden können.

Die Randbedingungen an der Kern-Mantel-Grenze bilden das System

$$\underline{Y}_M(\bar{R}_K) \underline{c}_M = \underline{B} \underline{c}_K \quad (4-5)$$

Dabei sind $\underline{Y}_M(\bar{R}_K) \underline{c}_M$ die bereits erläuterten 6×6 - bzw. 6×1 -Matrizen. \underline{B} ist eine 6×3 - und \underline{c}_K eine 3×1 -Matrix, welche die Unbekannten an der Kern-Mantel-Grenze enthält. Die drei Unbekannten sind: 1) die normalen Verschiebungskomponenten $\bar{r}_{l,m}(\bar{R} = R_K)$ des Mantels, 2) die sphäroidalen tangentialen Verschiebungskomponenten des Mantels $\bar{s}_{l,m}(\bar{R} = R_K)$ und 3) die Potentialkoeffizienten $\tilde{c}_{l,m}^{(w1K)}$ des flüssigen Kerns.

Die Matrix \underline{B} lautet

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_K^l \\ -4\pi g \varrho_K & 0 & (2l+1)R_K^{l-1} \\ \varrho_K \Gamma_{0,0} & 0 & -\varrho_K R_K^l \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

In den ersten beiden Zeilen werden lediglich die normalen bzw. sphäroidalen Verschiebungskoeffizienten durch die genannten Unbekannten dargestellt. Das Potential in der dritten Zeile weist wegen der in Abschnitt 2-83 genannten Voraussetzungen gemäß (3-101) nur die Terme mit aufsteigenden Potenzen in R auf. Die vierte Zeile folgt aus (3-110). In der fünften Zeile ist das normale Druckinkrement an der Kern-Mantel-Grenze bzw. dessen Grenzwert von der Kern-Seite her dargestellt. Wegen der in Abschnitt 2-83 getroffenen Annahme des hydrostatischen Gleichgewichts und des Verschwindens des Schermoduls im Kern kann das Druckinkrement gemäß (2-269) mit den beiden Unbekannten $\bar{r}_{l,m}(\bar{R} = R_K)$ und $\bar{c}_{l,m}^{(w1K)}$ ausgedrückt werden. Das tangentielle Spannungsinkrement, dessen sphäroidaler Teil in der sechsten Spalte erscheint, ist wegen des Verschwindens des Schermoduls im Kern identisch null.

Die Matrix \underline{B} entspricht der in *R. Sabadini et al. 1982 p.2893* angegebenen Matrix \mathbf{I}_C ; da dort Linearkombinationen der hier eingeführten Unbekannten benutzt werden, muss allerdings dort die mit dem Faktor c^{l-1}/A_C multiplizierte dritte Spalte zur ersten addiert werden, um sie mit der Matrix \underline{B} zu vergleichen; des weiteren ist zu beachten, dass dort die Reihenfolge der Zeilen und der Spalten von der hier benutzten abweicht und dass außerdem das Potential und die Größe q_{lm} mit umgekehrtem Vorzeichen eingeführt wurden.

Löst man (4-1) nach \underline{c}_{i+1} auf, so kann man sukzessive die unbekanntenen Koeffizienten der Schicht $i+1$ durch die Koeffizienten der tiefergelegenen Schicht i ersetzen:

$$\underline{c}_{i+1} = \underline{Y}_{i+1}^{-1}(\bar{R}_i) \underline{Y}_i(\bar{R}_i) \underline{c}_i \quad \text{für } i = M, M+1, \dots, n-1 \quad \underline{c}_M = \underline{Y}_M^{-1}(R_K) \underline{B} \underline{c}_K \quad (4-7)$$

Die Inverse der Matrix \underline{Y} wird üblicherweise multiplikativ in eine nur vom Radius abhängige Diagonalmatrix \underline{D} und eine Matrix $\underline{\bar{Y}}$ aufgespalten (vgl. *Spada et al. 1992*):

$$\underline{Y}^{-1}(\bar{R}) = \underline{D}(\bar{R}) \underline{\bar{Y}}; \quad (4-8)$$

wobei:

$$\underline{\bar{Y}} = \begin{bmatrix} 4\pi g \varrho & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4\pi g \varrho & 0 & -\frac{(2l+1)}{\bar{R}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\varrho \Gamma_{00} \bar{R}}{2s\bar{\mu}} - (l+2) & -\frac{(l+2)}{(l+1)} & -\frac{\varrho \bar{R}}{2s\bar{\mu}} & 0 & -\frac{\bar{R}}{2s\bar{\mu}} & -\frac{\bar{R}}{2(l+1)s\bar{\mu}} \\ -\frac{\varrho \Gamma_{00} \bar{R}}{2s\bar{\mu}} + \frac{(l^2+3l-1)}{l+1} & \frac{(l-1)}{l} & \frac{\varrho \bar{R}}{2s\bar{\mu}} & 0 & \frac{\bar{R}}{2s\bar{\mu}} & \frac{(l-2)\bar{R}}{2l(l+1)s\bar{\mu}} \\ \frac{\varrho \Gamma_{00} \bar{R}}{2s\bar{\mu}} + (l-1) & -\frac{(l-1)}{l} & -\frac{\varrho \bar{R}}{2s\bar{\mu}} & 0 & -\frac{\bar{R}}{2s\bar{\mu}} & \frac{\bar{R}}{2ls\bar{\mu}} \\ -\frac{\varrho \Gamma_{00} \bar{R}}{2s\bar{\mu}} - \frac{(l^2-l-3)}{l} & \frac{(l+2)}{(l+1)} & \frac{\varrho \bar{R}}{2s\bar{\mu}} & 0 & \frac{\bar{R}}{2s\bar{\mu}} & -\frac{(l+3)\bar{R}}{2l(l+1)s\bar{\mu}} \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

mit

$$\underline{D} := \text{diag}\left[\frac{\bar{R}^{-(l-1)}}{(2l+1)}, -\frac{\bar{R}^{(l+2)}}{(2l+1)}, \frac{l(l+1)\bar{R}^{-(l+1)}}{(2l+1)(2l+3)}, \frac{l(l+1)\bar{R}^{-(l-1)}}{(2l+1)(2l-1)}, \frac{l(l+1)\bar{R}^l}{(2l+1)(2l-1)}, \frac{l(l+1)\bar{R}^{(l+2)}}{(2l+1)(2l+3)}\right]$$

Ersetzen wir $s\tilde{\mu}(s)$ in \underline{Y} , $\bar{\underline{Y}}$ gemäß (2-257) durch $s\tilde{\mu}(s) = s\mu_e/(s+\alpha)$, so erhalten wir die weiteren Zerlegungen

$$\underline{Y} = \frac{1}{s+\alpha} \underline{P} \underline{E}$$

mit

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (s+\alpha) & (s+\alpha) & (s+\alpha) & (s+\alpha) \\ 0 & 0 & -(l+3)(s+\alpha) & -(l+1)(s+\alpha) & (l-2)(s+\alpha) & l(s+\alpha) \\ (s+\alpha) & (s+\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(2l+1)}{R}(s+\alpha) & 0 & -4\pi g \varrho(s+\alpha) & -4\pi g \varrho(s+\alpha) & -4\pi g \varrho(s+\alpha) & -4\pi g \varrho(s+\alpha) \\ -\varrho(s+\alpha) & -\varrho(s+\alpha) & (\varrho\Gamma_{0,0}(s+\alpha) + \frac{2s\mu_e(l^2-l-3)}{R}) & (\varrho\Gamma_{0,0}(s+\alpha) + \frac{2s\mu_e(l-1)}{R}) & (\varrho\Gamma_{0,0}(s+\alpha) - \frac{2s\mu_e(l^2+3l-1)}{R}) & (\varrho\Gamma_{0,0}(s+\alpha) - \frac{2s\mu_e(l+2)}{R}) \\ 0 & 0 & -\frac{2s\mu_e}{R}l(l+2) & -\frac{2s\mu_e}{R}(l^2-1) & -\frac{2s\mu_e}{R}(l^2-1) & -\frac{2s\mu_e}{R}l(l+2) \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

$$\underline{E} := \text{diag}[\bar{R}^l, \bar{R}^{-(l+1)}, \bar{R}^{(l+1)}, \bar{R}^{(l-1)}, \bar{R}^{-l}, \bar{R}^{-(l+2)}]$$

$$\underline{Y}^{-1} = \frac{1}{s} \underline{D} \bar{\underline{P}}$$

mit

$$\bar{\underline{P}} = \frac{1}{2\mu_e} \begin{bmatrix} 8\pi g \varrho s \mu_e & 0 & 0 & 2s\mu_e & 0 & 0 & 0 \\ 8\pi g \varrho s \mu_e & 0 & -\frac{(2l+1)}{R}2s\mu_e & 2s\mu_e & 0 & 0 & 0 \\ \varrho\Gamma_{0,0}\bar{R}(s+\alpha) - (l+2)2s\mu_e & -\frac{(l+2)}{(l+1)}2s\mu_e & -\varrho\bar{R}(s+\alpha) & 0 & -\bar{R}(s+\alpha) & -\frac{\bar{R}}{(l+1)}(s+\alpha) \\ -\varrho\Gamma_{0,0}\bar{R}(s+\alpha) + \frac{(l^2+3l-1)}{l+1}2s\mu_e & \frac{(l-1)}{l}2s\mu_e & \varrho\bar{R}(s+\alpha) & 0 & \bar{R}(s+\alpha) & \frac{(l-2)\bar{R}}{l(l+1)}(s+\alpha) \\ \varrho\Gamma_{0,0}\bar{R}(s+\alpha) + (l-1)2s\mu_e & -\frac{(l-1)}{l}2s\mu_e & -\varrho\bar{R}(s+\alpha) & 0 & -\bar{R}(s+\alpha) & \frac{\bar{R}}{l}(s+\alpha) \\ -\varrho\Gamma_{0,0}\bar{R}(s+\alpha) - \frac{(l^2-l-3)}{l}2s\mu_e & \frac{(l+2)}{(l+1)}2s\mu_e & \varrho\bar{R}(s+\alpha) & 0 & \bar{R}(s+\alpha) & -\frac{(l+3)\bar{R}}{l(l+1)}(s+\alpha) \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

In ähnlicher Weise zerlegen wir auch die Rechteck-Matrix \underline{A} in

$$\underline{A} =: \frac{1}{s+\alpha_n} \underline{P}_n^*(\bar{R}_n) \underline{E}(\bar{R}_n), \quad (4-12)$$

wobei die 3×6 -Matrix \underline{P}_n^* durch Streichen der ersten drei Zeilen in $\underline{P}_n(\bar{R}_n)$ entsteht.

Mit den Zerlegungen (4-10) und (4-11) formulieren wir die Rekursionsgleichungen (4-7) um, wobei wir noch die Abkürzung

$$\underline{Z}_i := \underline{D}(\bar{R}_i) \underline{\bar{P}}_{i+1}(\bar{R}_i) \underline{P}_i(\bar{R}_i) \underline{E}(\bar{R}_i) \quad (4-13)$$

benutzen. Die neue Art der Darstellung hat den Vorteil, dass die Abhängigkeit vom Parameter s klar ersichtlich ist: die Elemente von \underline{P} und $\underline{\bar{P}}$ sind jeweils linear in s .

$$\underline{c}_{i+1} = \frac{1}{s(s + \alpha_i)} \underline{Z}_i \underline{c}_i \quad \text{für } i = M, M + 1, \dots, n - 1 \quad \underline{c}_M = \frac{1}{s} \underline{D}(R_K) \underline{\bar{P}}_M(R_K) \underline{B} \underline{c}_K \quad (4-14)$$

Ausgehend von den Randgleichungen an der Erdoberfläche

$$\underline{A} \underline{c}_n = \underline{r} \quad (4-15)$$

ersetzen wir sukzessive gemäß (4-7) bzw. (4-14) die Unbekannten \underline{c}_i durch \underline{c}_{i-1} und erhalten

$$\underline{T} \underline{c}_K = \underline{r} \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} \underline{T} &:= \underline{A} \underline{Y}_n^{-1}(R_{n-1}) \underline{Y}_{n-1}(R_{n-1}) \underline{Y}_{n-1}^{-1}(R_{n-2}) \underline{Y}_{n-2}(R_{n-2}) \cdots \underline{Y}_{M+1}^{-1}(R_M) \underline{Y}_M(R_M) \underline{Y}_M^{-1}(R_K) \underline{B} \\ &= \frac{1}{s^{n-M+1} \prod_{i=M}^n (s + \alpha_i)} \underline{P}_n^*(R_E) \underline{E}(R_E) \left[\prod_{i=M}^{n-1} \underline{Z}_i \right] \underline{D}(R_K) \underline{\bar{P}}_M(R_K) \underline{B} =: \frac{1}{s^{n-M+1} \prod_{i=M}^n (s + \alpha_i)} \underline{T}_Z \end{aligned} \quad (4-16)$$

Hier zeigt sich, dass die Einführung der Unbekannten \underline{c}_K an der Kern-Mantel-Grenze zu einem 3×3 -System führt. Würde man statt dessen die Bedingungen an der Kern-Mantel-Grenze nur mit den Unbekannten des unteren Mantels ausdrücken (was, wie in Abschnitt 3-8 erläutert wurde, durchaus möglich wäre), so wäre zwar ein Propagationsschritt weniger zu vollziehen, es müssten aber diese Bedingungen zusätzlich zu (4-16) angegeben werden. Man hätte also ein sechsdimensionales Gleichungssystem zu lösen.

Wie aus den Definitionen der Matrizen \underline{P} , $\underline{\bar{P}}$ usw. ersichtlich ist, enthalten die Elemente der Matrix \underline{T}_Z Polynome in s vom Grad $2(n - M + 1)$. Die *Säkularmatrix* \underline{T}_Z bildet gewissermaßen den Zähler von \underline{T} . \underline{T} selbst ist also gebrochen-rational in s vom gleichen Grad $2(n - M + 1)$ im Zähler wie im Nenner.

Um das Gleichungssystem (4-16) zu lösen, bilden wir die Inverse der Matrix \underline{T} . Nach der Cramer'schen Regel gilt

$$\underline{T}^{-1} = s^{n-M+1} \prod_{i=M}^n (s + \alpha_i) \frac{1}{\det \underline{T}_Z} \cdot \text{Adj}(\underline{T}_Z^T) \quad (4-17)$$

Dabei ist $\text{Adj}(\underline{T}_Z^T)$ die Adjunkte der transponierten Matrix zu \underline{T}_Z . Die Elemente von \underline{T}^{-1} sind ebenfalls gebrochen-rational in s , und zwar sind Zähler und Nenner jeweils vom Polynomgrad $6(n - M + 1)$, denn die Determinante der Matrix \underline{T}_Z besitzt den dreifachen Polynomgrad eines ihrer Elemente. Allerdings treten in Zähler und Nenner teilweise dieselben Nullstellen auf.

Lemma 4-1 :

Die Säkulardeterminante $\det \underline{T}_Z$ weist die mindestens $[2(n - M) + 3]$ -fache Nullstelle $s = 0$ auf. ■

Beweis von Lemma 4-1 (wir geben hier nur eine Beweisskizze):

Um die Anzahl der Nullstellen $s = 0$ zu finden, spalten wir von der Matrix \underline{T}_Z bzw. von einer Matrix, die aus Linearkombinationen ihrer Zeilen besteht, sukzessive $[2(n - M) + 1]$ -fach den Zeilenfaktor s ab. Wenn nämlich eine 3×3 -Matrix \underline{T}_Z sich als $\underline{T}_Z = \underline{U}_{3 \times 6} \cdot \underline{V}_{6 \times 3}$ zerlegen lässt und eine Zeile der Matrix \underline{U} den gemeinsamen

Faktor s besitzt, so besitzt auch die entsprechende Zeile der Matrix \underline{T}_Z diesen Faktor – und ein gemeinsamer Faktor in einer Zeile führt dazu, dass dieser Faktor auch in der Determinanten erscheint. Es genügt also zu zeigen, dass eine Zeile der linken Faktormatrix

$$\underline{U}_k = \underline{P}_n^* \underline{E} \underline{Z}_{n-1} \cdots \underline{Z}_k$$

bzw. eine Linearkombination ihrer Zeilen den Faktor s aufweist.

Die Matrix \underline{Z}_i lässt sich in folgender Form darstellen:

$$\underline{Z}_i = \frac{1}{2\mu_{i+1}} \begin{bmatrix} sy_{11} & 0 & -sy_{13} & -sy_{13}\bar{R}_i^{-2} & -sy_{13}\bar{R}_i^{-(2l+1)} & -sy_{13}\bar{R}_i^{-(2l+3)} \\ 0 & sy_{11} & sy_{13}\bar{R}_i^{(2l+1)} & sy_{13}\bar{R}_i^{(2l-1)} & sy_{13} & sy_{13}\bar{R}_i^{-2} \\ \underline{a} & \bar{R}_i^{-(2l+1)}\underline{a} & -\Gamma_i\bar{R}_i\underline{a} + s\underline{\Xi} & -\Gamma_i/\bar{R}_i\underline{a} + s\underline{\Theta} & -\Gamma_i\bar{R}_i^{-2l}\underline{a} + s\underline{\Psi} & -\Gamma_i\bar{R}_i^{-(2l+2)}\underline{a} + s\underline{\Phi} \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

Dabei wurden folgende Abkürzungen benutzt:

$$\begin{aligned} y_{11} &:= 2\mu_{i+1}(s + \alpha_i) \\ y_{13} &:= \frac{4\pi g(\varrho_i - \varrho_{i+1})}{2l+1} \bar{R}_i^2 \cdot 2\mu_{i+1}(s + \alpha_i) \\ \underline{a}_{4 \times 1} &:= \frac{l(l+1)}{(2l+1)}(\varrho_i - \varrho_{i+1})(s + \alpha_i)(s + \alpha_{i+1}) \left[\frac{1}{2l+3}, -\frac{\bar{R}_i^2}{2l-1}, \frac{\bar{R}_i^{(2l+1)}}{2l-1}, -\frac{\bar{R}_i^{2l+3}}{2l+3} \right]^T \\ \underline{\Xi}_{4 \times 1} &:= \frac{2\mu_{i+1}(s + \alpha_i)}{2l+1} \left[\frac{2l(l+2)}{2l+3}, \frac{3\bar{R}_i^2}{2l-1}, \frac{(l^2-1)(2l+3)\bar{R}_i^{2l+1}}{2l-1}, -\frac{(2l^3+5l^2+2l-3)\bar{R}_i^{2l+3}}{2l+3} \right]^T + \\ &+ \frac{2\mu_i(s + \alpha_{i+1})}{2l+1} \left[\frac{2l^2+4l+3}{2l+3}, -\frac{3\bar{R}_i^2}{2l-1}, -\frac{(l^2-1)(2l+3)\bar{R}_i^{2l+1}}{2l-1}, \frac{(2l^3+5l^2+2l-3)\bar{R}_i^{2l+3}}{2l+3} \right]^T \\ \underline{\Theta}_{4 \times 1} &:= \frac{2\mu_{i+1}(s + \alpha_i)}{2l+1} \left[0, \frac{2l^2+1}{2l-1}, \frac{(l^2-1)(2l+1)\bar{R}_i^{2l-1}}{2l-1}, -(l^2-1)\bar{R}_i^{2l+1} \right]^T + \\ &+ \frac{2\mu_i(s + \alpha_{i+1})}{2l+1} \left[0, \frac{2(l^2-1)}{2l-1}, -\frac{(l^2-1)(2l+1)\bar{R}_i^{2l-1}}{2l-1}, (l^2-1)\bar{R}_i^{2l+1} \right]^T \\ \underline{\Psi}_{4 \times 1} &:= \frac{2\mu_{i+1}(s + \alpha_i)}{2l+1} \left[-\frac{l(l+2)(2l-1)}{2l+3} \bar{R}_i^{-(2l+1)}, \frac{(2l^3+l^2-2l+2)}{2l-1} \bar{R}_i^{-(2l-1)}, \frac{2(l^2-1)}{2l-1}, \frac{3\bar{R}_i^2}{2l+3} \right]^T + \\ &+ \frac{2\mu_i(s + \alpha_{i+1})}{2l+1} \left[\frac{l(l+2)(2l-1)}{2l+3} \bar{R}_i^{-(2l+1)}, -\frac{(2l^3+l^2-2l+2)}{2l-1} \bar{R}_i^{-(2l-1)}, \frac{2(l^2+1)}{2l-1}, -\frac{3\bar{R}_i^2}{2l+3} \right]^T \\ \underline{\Phi}_{4 \times 1} &:= \frac{2\mu_{i+1}(s + \alpha_i)}{2l+1} \left[-\frac{l(l+2)(2l+1)}{2l+3} \bar{R}_i^{-(2l+3)}, l(l+2)\bar{R}_i^{-(2l+1)}, 0, \frac{(2l^2+4l+3)}{2l+3} \right]^T + \\ &+ \frac{2\mu_i(s + \alpha_{i+1})}{2l+1} \left[\frac{l(l+2)(2l+1)}{2l+3} \bar{R}_i^{-(2l+3)}, -l(l+2)\bar{R}_i^{-(2l+1)}, 0, \frac{2l(l+2)}{2l+3} \right]^T \end{aligned} \quad (4-19)$$

Die Matrix $\underline{P}_n^*(\bar{R}_n)\underline{E}(\bar{R}_n)$ weist in der letzten Zeile den gemeinsamen Faktor s auf; dieser Faktor verursacht in der Säkular determinanten eine Nullstelle $s = 0$. Wir lassen diesen Zeilenfaktor im folgenden weg. Durch Addition der mit dem Faktor $\Gamma_n/4\pi g$ multiplizierten ersten Zeile von \underline{A} zur zweiten Zeile erzielt man eine Matrix von der folgenden Form (vergleiche Formel (4-10))

$$\underline{A}_{Komb} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \underline{u}^T \\ x_{21} & x_{22} & s\underline{v}^T \\ x_{31} & 0 & \underline{w}^T \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

Dabei repräsentieren die x_{kl} (irgendwelche) Polynome in s ; die Elemente der 4×1 -Spaltenmatrizen \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} sind ebenfalls Polynome in s . Multipliziert man nun die Matrix \underline{A}_{Komb} (oder eine beliebige andere Matrix, welche in der obigen Form dargestellt werden kann) mit \underline{Z}_i gemäß (4-18), so enthält die zweite Zeile den gemeinsamen Faktor s . Spalten wir diesen Faktor ab und addieren anschließend die mit dem Faktor $(x_{22}\bar{R}_i^{2l+1} - x_{21} - \Gamma_i\bar{R}_i\underline{v}^T\underline{a})/(\Gamma_i\bar{R}_i\underline{u}^T\underline{a})$ versehene erste Zeile zur zweiten Zeile sowie die mit dem Faktor $-\underline{w}^T\underline{a}/(\underline{u}^T\underline{a})$ versehene erste Zeile zur dritten Zeile, so kann in der dritten Zeile erneut der Faktor s abgespalten werden; die verbleibende Matrix hat wiederum die Gestalt von \underline{A}_{Komb} ! Mit jeder der $(n - M)$ Matrizen \underline{Z}_i , die von rechts hinzumultipliziert wird, kommt also zweifach die Nullstelle $s = 0$ hinzu. Damit haben wir $2(n - M) + 1$ Nullstellen $s = 0$ gefunden.

Bilden wir das Produkt der beiden äußersten rechten Matrizen in \underline{T}_Z , so erhalten wir:

$$\bar{P}_M(R_K)\underline{B} = \begin{bmatrix} -8\pi g s \mu_M (\varrho_K - \varrho_M) & 0 & 2s\mu_M(2l+1)R_K^{l-1} \\ -8\pi g s \mu_M (\varrho_K - \varrho_M) & 0 & 0 \\ -\Gamma_K R_K(s + \alpha_M)(\varrho_K - \varrho_M) - 2s\mu_M(l+2) & -2s\mu_M \frac{(l+2)}{(l+1)} & R_K^{l+1}(s + \alpha_M)(\varrho_K - \varrho_M) \\ \Gamma_K R_K(s + \alpha_M)(\varrho_K - \varrho_M) + 2s\mu_M \frac{l^2 + 3l - 1}{l+1} & 2s\mu_M \frac{(l-1)}{l} & -R_K^{l+1}(s + \alpha_M)(\varrho_K - \varrho_M) \\ -\Gamma_K R_K(s + \alpha_M)(\varrho_K - \varrho_M) + 2s\mu_M(l-1) & -2s\mu_M \frac{(l-1)}{l} & R_K^{l+1}(s + \alpha_M)(\varrho_K - \varrho_M) \\ \Gamma_K R_K(s + \alpha_M)(\varrho_K - \varrho_M) - 2s\mu_M \frac{l^2 - l - 3}{l} & 2s\mu_M \frac{(l+2)}{(l+1)} & -R_K^{l+1}(s + \alpha_M)(\varrho_K - \varrho_M) \end{bmatrix} \quad (4-21)$$

Diese Matrix bildet den äußersten rechten Faktor in \underline{T}_Z . Multiplizieren wir die dritte Spalte mit dem Faktor $R_K^{-(l+1)}$ und addieren sie zur ersten Spalte, so besitzen die Elemente der entstehenden ersten und der zweiten Spalte den gemeinsamen Faktor s , was nochmals die doppelte Nullstelle $s = 0$ in der Säkulardeterminanten ergibt. Insgesamt hat die Säkulardeterminante somit $2(n - M) + 3$ Nullstellen $s = 0$. ■

Von den $6(n - M + 1)$ Nullstellen der Determinanten der Matrix \underline{T}_Z können also $2(n - M) + 3$ analytisch bestimmt werden. Bei der numerischen Bestimmung der restlichen $J := 4(n - M) + 3$ Nullstellen zeigt sich, dass unabhängig von den gewählten Parametern auch $s = -\alpha_i$, $i = M, \dots, n$ Nullstellen sind (dies sollte auch analytisch bewiesen werden können)! Damit verbleiben noch $3(n - M) + 2$ "signifikante" Nullstellen, die numerisch bestimmt werden müssen. Sie entsprechen den einzelnen Moden bzw. den inversen Relaxationszeiten, die das Abklingverhalten der unbekanntenen Koeffizienten bestimmen. Gehen wir von einem Zweischichtenmodell mit einem Mantel und einem flüssigen Kern aus, so gibt es nur zwei "signifikante" Nullstellen. Mit jeder Schichtgrenze, die neu in das Modell eingefügt wird, kommen drei "signifikante" Nullstellen hinzu, vorausgesetzt, die Parameter der beiden angrenzenden Schichten unterscheiden sich. Ist allerdings $\varrho_i = \varrho_{i+1}$, so besitzt offensichtlich die Matrix \underline{Z}_i als Ganze den Faktor s , und eine der drei "signifikanten" Nullstellen entartet zu $s = 0$. Ist $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, so besitzt \underline{Z}_i den Faktor $(s + \alpha_i)$, und zwei der drei Nullstellen entarten zu $s = -\alpha_i$. Eine etwaige Übereinstimmung $\mu_i = \mu_{i+1}$ ändert nichts an der Existenz dreier "signifikanter" Nullstellen (selbstverständlich sind ihre Werte von μ_i, μ_{i+1} abhängig). Manche Autoren setzen in ihren Modellen die inverse Relaxationszeit α_n in der obersten Schicht zu null. Dies entspricht einer rein elastischen Erdkruste. In diesem Fall kommen zwei Nullstellen $s = 0$ hinzu, zusätzlich zu der bereits in Rechnung gestellten Nullstelle $s = -\alpha_n = 0$. Es fallen also ebenfalls zwei "signifikante" Nullstellen weg.

In der Literatur finden sich umfangreiche Ausführungen über die Nullstellen der Säkulardeterminanten und ihre physikalische Interpretation, so z.B. in *P. Wu 1990*. Bei der numerischen Berechnung zeigt sich, dass die Nullstellen s_j alle reell und negativ sind. Physikalisch bedeutet dies, dass die Lösungen im Zeitbereich monoton abklingen.

Das Lemma lässt offen, ob die Nullstelle $s = 0$ nicht noch mehrfach vorhanden ist. Bei den numerischen Berechnungen zeigt es sich jedoch, dass die $4(n - M) + 3$ Nullstellen mit $s \neq 0$ tatsächlich vorhanden sind.

Bezeichnen wir mit α den höchsten Koeffizienten des Polynoms der Säkulardeterminanten, so ist

$$\det \underline{T}_Z = \alpha s^{2(n-M)+3} \prod_{j=1}^J (s - s_j) \quad (4-22)$$

Wir setzen (4-22) in (4-17) ein und stellen damit die Lösung des Gleichungssystems (4-16) in folgender Weise dar:

$$\underline{c}_K = \frac{\prod_{i=M}^n (s + \alpha_i) \text{Adj}(\underline{T}_Z^T) \underline{r}}{\alpha s^{n-M+2} \prod_{j=1}^J (s - s_j)} =: \frac{\prod_{i=M}^n (s + \alpha_i) \underline{c}_K^{(Z)}}{\alpha s^{n-M+2} \prod_{j=1}^J (s - s_j)} \quad (4-23)$$

Es verbleibt also noch eine Potenz von s als Faktor im Nenner; bei der numerischen Rechnung zeigt sich jedoch, dass auch die Adjunkte $\text{Adj}(\underline{T}_Z^T)$ genügend Nullstellen $s = 0$ besitzt, welche diesen Faktor wieder auffangen. Auch dies sollte analytisch bewiesen werden können.

Der Faktor α könnte numerisch durch eine Punktprobe bestimmt werden, wenn alle Nullstellen $s = s_j$ bekannt sind. Jedoch enthalten die Elemente sämtlicher Matrizen \underline{P} und $\bar{\underline{P}}$, aus denen \underline{T}_Z zusammengesetzt ist, entweder s oder $s + \alpha_i$ als Faktor. α kann daher auch in der Weise ermittelt werden, dass man alle α_i gleich null setzt; die Säkular determinante entartet dann zu $\det \underline{T}_Z = \alpha s^{6(n-M+1)}$. Man braucht also nur mit diesen Parametern den Wert der Säkular determinanten bei $s = 1$ bestimmen, das Ergebnis ist α .

Ist das lineare Gleichungssystem (4-16) gelöst und sind damit die Koeffizienten \underline{c}_K bekannt, so kann mit Hilfe von (4-14) die Lösung nach oben propagiert werden. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} \underline{c}_i &= \frac{1}{s^{i-M+1} \prod_{k=M}^{i-1} (s + \alpha_k)} \left[\prod_{k=M}^{i-1} \underline{Z}_k \right] \underline{D}(R_K) \bar{\underline{P}}_M(R_K) \underline{B} \underline{c}_K =: \frac{1}{s^{i-M+1} \prod_{k=M}^{i-1} (s + \alpha_k)} \underline{T}_i \underline{c}_K \\ &= \frac{\prod_{k=i}^n (s + \alpha_k) \left[\prod_{k=M}^{i-1} \underline{Z}_k \right] \underline{D}(R_K) \bar{\underline{P}}_M(R_K) \underline{B} \text{Adj}(\underline{T}_Z^T) \underline{r}}{\alpha s^{n+i-2M+3} \prod_{j=1}^J (s - s_j)} =: \frac{\prod_{k=i}^n (s + \alpha_k) \underline{c}_i^{(Z)}}{\alpha s^{n+i-2M+3} \prod_{j=1}^J (s - s_j)} \end{aligned} \quad (4-24)$$

Auch hier stellt man fest, dass die Zählerpolynome jeweils mindestens dieselbe Anzahl von Nullstellen $s = 0$ sowie $s = -\alpha_k$ aufweisen wie der Nenner.

Nachdem die Nullstellen $s = s_j$ numerisch bestimmt sind, führt man Partialbruchzerlegungen für die Lösungen durch. Sei $Z_m(s)/N(s)$ ein gebrochen-rationaler Ausdruck in s ; der Zähler $Z_m(s)$ sei ebenso wie der Nenner $N(s)$ ein Polynom m -ten Grades in s . Die Nullstellen von $N(s)$ seien bekannt, so dass sich $N(s)$ in der Form $N(s) = \alpha \prod_{k=1}^m (s - s_k)$ darstellen lässt. Dann ist folgende Partialbruchzerlegung möglich:

$$\frac{Z_m(s)}{\alpha \prod_{k=1}^m (s - s_k)} = \beta_0 + \sum_{k=1}^m \frac{\beta_k}{s - s_k} \quad (4-25)$$

Multipliziert man die Gleichung mit $\prod_{k=1}^m (s - s_k)$ durch und setzt dann $s = s_j$ ein, so folgt

$$\beta_j = \frac{Z_m(s_j)}{\alpha \prod_{k=1, k \neq j}^m (s_j - s_k)} \quad (4-26)$$

Der absolute Term β_0 kann durch eine Punktprobe bestimmt werden.

Diese Methode kann auf die Lösungen \underline{c}_i angewendet werden. Da die Elemente aller beteiligten Matrizen, aus denen die Zählerpolynome gebildet werden, in gleicher Weise entweder den Faktor s oder den Faktor $s + \alpha_i$ enthalten, können die Absolutglieder β_0 so bestimmt werden, dass man die Zählerpolynome an der Stelle $s = 1$, $\alpha_i = 0 \forall i$ bestimmt und noch durch α teilt.

Die geschilderte Methode versagt, wenn Nullstellen mehrfach auftreten oder wenn Nullstellen zu nahe beieinander liegen; dieser Fall trat jedoch bei keiner der durchgeführten Testrechnungen auf.

4-2 Lösungen für das sphäroidische, rotierende Erdmodell

Sind die sphärischen Näherungen der Koeffizientenfunktionen $c_{l,m}^{(1)}(s)$ usw. in den einzelnen Schichten bekannt, können mittels des in Abschnitt 3-41 erläuterten Störungsansatzes sphäroidische Verbesserungen dieser Funktionen berechnet werden. Mit den Bezeichnungen des vorigen Abschnitts lauten die Störgleichungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned}
 \text{an der Erdoberfläche:} \quad & \underline{A} \delta \underline{c}_n + \delta \underline{A} \underline{c}_n = \delta r \\
 \text{an einer inneren Schichtgrenze } \bar{R} = \bar{R}_i : \quad & \underline{Y}_{i+1}(\bar{R}_i) \delta \underline{c}_{i+1} + \delta \underline{Y}_{i+1}(\bar{R}_i) \underline{c}_{i+1} = \underline{Y}_i(\bar{R}_i) \delta \underline{c}_i + \delta \underline{Y}_i(\bar{R}_i) \underline{c}_i \\
 \text{an der Kern-Mantel-Grenze } \bar{R} = R_K : \quad & \underline{Y}_M(R_K) \delta \underline{c}_M + \delta \underline{Y}_M(R_K) \underline{c}_M = \underline{B} \delta \underline{c}_K + \delta \underline{B} \underline{c}_K
 \end{aligned} \tag{4-27}$$

Wie im vorigen Abschnitt werden auch hier die Unbekannten “nach unten propagiert”. Rekursives Einsetzen von $\delta \underline{c}_{i+1}$ ergibt:

$$\begin{aligned}
 \underline{T} \delta \underline{c}_K = \quad & \delta r - \delta \underline{A} \underline{c}_n - \underline{A} \sum_{i=M}^{n-1} \left[\prod_{k=i+1}^{n-1} \underline{Y}_{k+1}^{-1}(\bar{R}_k) \underline{Y}_k(\bar{R}_k) \right] \underline{Y}_{i+1}^{-1}(\bar{R}_i) [\delta \underline{Y}_i(\bar{R}_i) \underline{c}_i - \delta \underline{Y}_{i+1}(\bar{R}_i) \underline{c}_{i+1}] - \\
 & - \underline{A} \left[\prod_{k=M}^{n-1} \underline{Y}_{k+1}^{-1}(\bar{R}_k) \underline{Y}_k(\bar{R}_k) \right] \underline{Y}_M^{-1}(\bar{R}_K) [\delta \underline{B} \underline{c}_K - \delta \underline{Y}_M(\bar{R}_K) \underline{c}_M]
 \end{aligned} \tag{4-28}$$

Die Produkte sind von links nach rechts mit absteigendem Index k zu bilden. Wir haben hier wieder auf den Index (0) bei den Größen nullter Ordnung verzichtet. Während die “sphärischen” Beziehungen des vorigen Abschnitts in den Graden l und Ordnungen m entkoppelt waren, treten hier Kopplungen in den Graden auf, so dass die entsprechenden Indizes hier mitgeführt werden müssen. In den Gleichungen, welche die Stör-Koeffizienten $\delta \underline{c}_{i,l,m}$ enthalten, treten die Koeffizienten nullter Ordnung $\underline{c}_{i;l-2,m}$, $\underline{c}_{i;l,m}$ und $\underline{c}_{i;l+2,m}$ auf. Die Größen $\delta \underline{c}$ enthalten hier nur die “homogenen” Teile der Lösungen; die Partikulärterme sind in den Größen $\delta \underline{Y}_i(\bar{R}_i)$ usw. enthalten, die sich somit in vier Teile zerlegen lassen:

$$\begin{aligned}
 \delta \underline{Y}_i(\bar{R}) \underline{c}_i := \quad & \frac{e^2}{3\sqrt{5}} C(l, 2, l+2; m, 0) \delta \underline{Y}_{i;l,m}^{(+)}(\bar{R}) \underline{c}_{i;l+2,m} + \frac{e^2}{3\sqrt{5}} C(l, 2, l; m, 0) \delta \underline{Y}_{i;l,m}^{(0)}(\bar{R}) \underline{c}_{i;l,m} + \\
 & + \frac{e^2}{3\sqrt{5}} C(l, 2, l-2; m, 0) \delta \underline{Y}_{i;l,m}^{(-)}(\bar{R}) \underline{c}_{i;l-2,m} + \delta \underline{Y}_{i;l,m}^{(part)}(\bar{R}) \underline{c}_{i;l,m} \\
 = \quad & \frac{e^2}{3\sqrt{5}} \frac{C(l, 2, l+2; m, 0)}{s + \alpha_i} \delta \underline{P}_{i;l,m}^{(+)}(\bar{R}) \underline{E}_{l+2}(\bar{R}) \underline{c}_{i;l+2,m} + \frac{e^2}{3\sqrt{5}} \frac{C(l, 2, l; m, 0)}{s + \alpha_i} \delta \underline{P}_{i;l,m}^{(0)}(\bar{R}) \underline{E}_l(\bar{R}) \underline{c}_{i;l,m} + \\
 & + \frac{e^2}{3\sqrt{5}} \frac{C(l, 2, l-2; m, 0)}{s + \alpha_i} \delta \underline{P}_{i;l,m}^{(-)}(\bar{R}) \underline{E}_{l-2}(\bar{R}) \underline{c}_{i;l-2,m} + \frac{1}{s + \alpha_i} \delta \underline{P}_{i;l,m}^{(part)}(\bar{R}) \underline{E}_l(\bar{R}) \underline{c}_{i;l,m}
 \end{aligned} \tag{4-29}$$

Der Ausdruck $\delta \underline{Y}_i(\bar{R}) \underline{c}_i$ bezeichnet hier also ausnahmsweise kein Matrixprodukt, sondern die in (4-29) angegebene Summe von vier Matrixprodukten. Die drei “Störungsmatrizen” $\delta \underline{P}_{i;l,m}^{(+)}$, $\delta \underline{P}_{i;l,m}^{(0)}$, $\delta \underline{P}_{i;l,m}^{(-)}$ entstehen durch die Elliptizität des Modells; die vierte Störungsmatrix $\delta \underline{P}_{i;l,m}^{(part)}$ beinhaltet die Partikulärlösungen der gestörten Bewegungsdifferentialgleichungen, die infolge der Berücksichtigung der Trägheitsbeschleunigungen auftreten.

Die Störungsmatrizen lauten

$$\frac{\delta P_{l,m}^{(+)}}{s+\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{(l-1)(l+4)}{(l+2)} & -\frac{l^2+l-4}{(l+2)} & \frac{l^2+2l+4}{(l+2)} & (l+2) \\ 0 & 0 & \frac{l(l^2+6l+11)}{l+2} & \frac{l(l^2+2l-1)}{l+2} & l(l-2) & l(l+2) \\ -(l+2) & (l+3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2(l^2+2l-1)}{\bar{R}} & -\frac{(l+3)}{\bar{R}} & 4\pi g e \frac{(l-1)(l+4)}{(l+2)} & 4\pi g e \frac{l^2+l-4}{(l+2)} & -4\pi g e \frac{l^2+2l+4}{(l+2)} & -4\pi g e (l+2) \\ \varrho(l+2) & -\varrho(l+3) & -\varrho\Gamma \frac{(l-1)(l+4)}{(l+2)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho\Gamma_{2,0} - \frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} [l^2-l-17] & -\varrho\Gamma \frac{l^2+l-4}{(l+2)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho\Gamma_{2,0} - \frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \left[\frac{(l+1)}{(l+2)} \cdot (l^2-2l-12) \right] & \varrho\Gamma \frac{l^2+2l+4}{(l+2)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho\Gamma_{2,0} - \frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \left[\frac{l^3+5l^2+7l+6}{(l+2)} \right] & \varrho\Gamma(l+2) + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho\Gamma_{2,0} - \frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} [(l+4)(l+1)] \\ 0 & 0 & \frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \left[\frac{l}{(l+2)} \cdot (l^3+4l^2-4l-22) \right] & \frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \frac{l(l^3-13l-18)}{(l+2)} & -\frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \left[\frac{l(l^3+3l^2-l-3)}{(l+2)} \right] & -\frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} l(l+1)(l+4) \end{bmatrix} \quad (4-30)$$

$$\frac{\delta P_{l,m}^{(0)}}{s+\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{(l^3+2l^2-2l-9)}{l(l+1)} & -\frac{(l^2-l-3)}{l} & \frac{l^3+l^2-3l+6}{l(l+1)} & \frac{l^2+3l-1}{(l+1)} \\ 0 & 0 & \frac{l^3+4l^2+3l-9}{l} & \frac{l^3-l+3}{l} & \frac{l^3-l^2-2l+9}{(l+1)} & \frac{l^3+3l^2+2l-3}{(l+1)} \\ -l & (l+1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(2l^2-3)}{\bar{R}} & -\frac{(l-2)}{\bar{R}} & 4\pi g e \frac{(l^3+2l^2-2l-9)}{l(l+1)} & 4\pi g e \frac{(l^2-l-3)}{l} & -4\pi g e \frac{l^3+l^2-3l+6}{l(l+1)} & -4\pi g e \frac{l^2+3l-1}{(l+1)} \\ \varrho l & -\varrho(l+1) & -\varrho\Gamma \frac{(l^3+2l^2-2l-9)}{l(l+1)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho\Gamma_{2,0} - \frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \left[\frac{l^3-10l-15}{(l+1)} \right] & -\varrho\Gamma \frac{(l^2-l-3)}{l} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho\Gamma_{2,0} - \frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \left[\frac{l^3-3l^2-4l+6}{l} \right] & \varrho\Gamma \frac{(l^3+l^2-3l+6)}{l(l+1)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho\Gamma_{2,0} - \frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \left[\frac{l^3+3l^2-7l+6}{l} \right] & \varrho\Gamma \frac{(l^2+3l-1)}{(l+1)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho\Gamma_{2,0} - \frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \left[\frac{l^3+6l^2+5l-6}{(l+1)} \right] \\ 0 & 0 & \frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \left[\frac{l^5+3l^4-l^3-15l^2+27}{l(l+1)} \right] & \frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \left[\frac{l^4-2l^3-4l^2+2l+3}{l} \right] & -\frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \left[\frac{l^5+2l^4-3l^3+4l^2+20l-15}{l(l+1)} \right] & -\frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \left[\frac{l^2(l^2+6l+8)}{(l+1)} \right] \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

$$\frac{\delta P_{l,m}^{(-)}}{s+\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{(l^2+3)}{(l-1)} & -(l-1) & \frac{(l-3)(l+2)}{(l-1)} & \frac{l^2+l-4}{(l-1)} \\ 0 & 0 & (l+1)(l+3) & (l+1)(l-1) & \frac{(l+1)(l^2-4l+6)}{l-1} & \frac{(l+1)(l^2+2)}{l-1} \\ -(l-2) & (l-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2l(l-2)}{\bar{R}} & -\frac{(l-3)}{\bar{R}} & 4\pi g\varrho \frac{(l^2+3)}{(l-1)} & 4\pi g\varrho(l-1) & -4\pi g\varrho \frac{(l-3)(l+2)}{(l-1)} & -4\pi g\varrho \frac{l^2+l-4}{(l-1)} \\ \varrho(l-2) & -\varrho(l-1) & -\varrho\Gamma \frac{(l^2+3)}{(l-1)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2}\varrho\Gamma_{2,0}- & -\varrho\Gamma(l-1) + \frac{3\sqrt{5}}{e^2}\varrho\Gamma_{2,0}- & \varrho\Gamma \frac{(l-3)(l+2)}{(l-1)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2}\varrho\Gamma_{2,0}- & \varrho\Gamma \frac{l^2+l-4}{(l-1)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2}\varrho\Gamma_{2,0}- \\ & & -\frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \left[\frac{l^3-2l^2-3}{(l-1)} \right] & -\frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} [l(l-3)] & -\frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} [l^2+3l-15] & -\frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \left[\frac{l(l^2+4l-9)}{(l-1)} \right] \\ 0 & 0 & \frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \left[\frac{l(l+1)}{(l-1)} \cdot (l+2)(l-2) \right] & \frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} [l(l+1)(l-3)] & -\frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \left[\frac{(l+1)}{(l-1)} \cdot (l^3-l^2-9l+15) \right] & -\frac{2s\bar{\mu}}{\bar{R}} \left[\frac{(l+1)}{(l-1)} \cdot (l^3+3l^2-10l+6) \right] \end{bmatrix} \quad (4-32)$$

128

$$\frac{\delta P_{l,m}^{(part)}}{s+\alpha} = \frac{\varrho\Omega im}{l(l+1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{\bar{R}^2}{(2l+5)} & 0 & \frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{\bar{R}^2}{(2l-3)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{(l+5)\bar{R}^2}{(2l+5)} & 0 & \frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{(l-4)\bar{R}^2}{(2l-3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\pi g\varrho}{2\bar{\mu}} \frac{\bar{R}^2}{(2l+5)} & 0 & -\frac{4\pi g\varrho}{2\bar{\mu}} \frac{\bar{R}^2}{(2l-3)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{s\bar{R}(5l+13)}{(2l+5)} - \frac{s\varrho\Gamma\bar{R}^2}{2s\bar{\mu}(2l+5)} & -\frac{2s\bar{R}(l+1)}{l} & -\frac{s\bar{R}(5l-8)}{(2l-3)} + \frac{s\varrho\Gamma\bar{R}^2}{2s\bar{\mu}(2l-3)} & -\frac{2s\bar{R}l}{(l+1)} \\ 0 & 0 & \frac{s\bar{R}(l^2+4l+5)}{(2l+5)} & 0 & -\frac{s\bar{R}(l^2-2l+2)}{(2l-3)} & 0 \end{bmatrix} \quad (4-33)$$

In ähnlicher Weise wie die “Störungsmatrizen” $\delta \underline{P}$ für die Randbedingungen an den inneren Schichtgrenzen werden auch die “Randgrößen” $\delta \underline{r} - \delta \underline{A} \underline{c}_n$ dargestellt. Da die eigentliche Eingangsgröße bei der Berechnung auflastinduzierter Deformationen die Belegung $\delta \kappa$ (und nicht das Auflastpotential) ist, beziehen wir uns hier auf die Koeffizienten $\tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)}$, die zu den $\Delta \kappa_{l,m}$ proportional sind, siehe (3-119). Damit können die Vernachlässigungen im Fall der sphärischen Näherung identifiziert werden.

Weiterhin ist zu beachten, dass die 3×1 -Spaltenmatrix $\delta \underline{r}$ in der ersten Zeile auch noch Terme mit den Koeffizienten \underline{c}_n der sphärischen Lösung enthält, siehe Gleichung (3-111). Wir sortieren die “homogenen” und die “inhomogenen” Anteile von $\delta \underline{r} - \delta \underline{A} \underline{c}_n$, d.h. wir trennen von dieser Spaltenmatrix die Terme ab, die frei von den \underline{c}_n sind:

$$\begin{aligned}
(\delta \underline{r} - \delta \underline{A} \underline{c}_n) = & \frac{e^2}{3\sqrt{5}} C(l, 2, l+2; m, 0) \left[\delta^* \underline{r}^{(+)} - \frac{\delta^* \underline{P}_{n;l,m}^{(+)} \underline{E}_{l+2}(\bar{R}_E)}{s + \alpha_n} \underline{c}_{n;l+2,m} \right] + \\
& + \frac{e^2}{3\sqrt{5}} C(l, 2, l; m, 0) \left[\delta^* \underline{r}^{(0)} - \frac{\delta^* \underline{P}_{n;l,m}^{(0)} \underline{E}_l(\bar{R}_E)}{s + \alpha_n} \underline{c}_{n;l,m} \right] + \\
& + \frac{e^2}{3\sqrt{5}} C(l, 2, l-2; m, 0) \left[\delta^* \underline{r}^{(-)} - \frac{\delta^* \underline{P}_{n;l,m}^{(-)} \underline{E}_{l-2}(\bar{R}_E)}{s + \alpha_n} \underline{c}_{n;l-2,m} \right] - \\
& - \frac{1}{s + \alpha_n} \delta \underline{P}_{n;l,m}^{(part)}(\bar{R}_E) \underline{E}_l(\bar{R}_E) \underline{c}_{n;l,m}
\end{aligned} \tag{4-34}$$

mit

$$\begin{aligned}
\delta^* \underline{r}^{(+)} = & (2l+5) \left[(l-1), -\frac{3\sqrt{5} \Gamma_{2,0}}{4\pi g e_E^2}, 0 \right]^T c_{l+2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l+1} \\
\delta^* \underline{r}^{(0)} = & (2l+1) \left[(l-1), -\frac{3\sqrt{5} \Gamma_{2,0}}{4\pi g e_E^2}, 0 \right]^T c_{l,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l-1} \\
\delta^* \underline{r}^{(-)} = & (2l-3) \left[(l-1), -\frac{3\sqrt{5} \Gamma_{2,0}}{4\pi g e_E^2}, 0 \right]^T c_{l-2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l-3}
\end{aligned} \tag{4-35}$$

für den Lastfall. Für den Gezeitenfall gilt

$$\delta^* \underline{r}^{(+)} = \delta^* \underline{r}^{(0)} = \delta^* \underline{r}^{(-)} = 0 \tag{4-36}$$

Das ist formal der einzige Unterschied zwischen Last- und Gezeitenfall bei der Störungsrechnung. Allerdings ist zu beachten, dass jeweils die entsprechenden Größen \underline{c}_i eingesetzt werden (die sich für den Last- und den Gezeitenfall selbstverständlich unterscheiden). Die Störmatrizen $\delta^* \underline{P}_{l,m}^{(+)}$ usw. lauten:

$$\frac{\delta^* P_{l,m}^{(+)}}{s + \alpha_n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4\pi g \varrho \frac{2(l-1)}{(l+2)} & -4\pi g \varrho \frac{2}{(l+2)} & -4\pi g \varrho \frac{2l^2 + 3l + 2}{(l+2)} & -4\pi g \varrho (2l + 1) \\ \varrho(l+2) & -\varrho(l+3) & -\varrho \Gamma \frac{(l-1)(l+4)}{(l+2)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho \Gamma_{2,0} - & -\varrho \Gamma \frac{l^2 + l - 4}{(l+2)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho \Gamma_{2,0} - & \varrho \Gamma \frac{l^2 + 2l + 4}{(l+2)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho \Gamma_{2,0} - & \varrho \Gamma(l+2) + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho \Gamma_{2,0} - \\ & & -\frac{2s\bar{\mu}}{R_E} [l^2 - l - 17] & -\frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \left[\frac{(l+1)}{(l+2)} \cdot (l^2 - 2l - 12) \right] & -\frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \left[\frac{l^3 + 5l^2 + 7l + 6}{(l+2)} \right] & -\frac{2s\bar{\mu}}{R_E} [(l+4)(l+1)] \\ 0 & 0 & \frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \left[\frac{l}{(l+2)} \cdot (l^3 + 4l^2 - 4l - 22) \right] & \frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \frac{l(l^3 - 13l - 18)}{(l+2)} & -\frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \left[\frac{l(l^3 + 3l^2 - l - 3)}{(l+2)} \right] & -\frac{2s\bar{\mu}}{R_E} l(l+1)(l+4) \end{bmatrix} \quad (4-37)$$

$$\frac{\delta^* P_{l,m}^{(0)}}{s + \alpha_n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4\pi g \varrho \frac{(2l^2 - l - 9)}{l(l+1)} & -4\pi g \varrho \frac{3}{l} & -4\pi g \varrho \frac{2l^3 + l^2 - 4l + 6}{l(l+1)} & -4\pi g \varrho \frac{2l^2 + 3l - 2}{(l+1)} \\ \varrho l & -\varrho(l+1) & -\varrho \Gamma \frac{(l^3 + 2l^2 - 2l - 9)}{l(l+1)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho \Gamma_{2,0} - & -\varrho \Gamma \frac{(l^2 - l - 3)}{l} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho \Gamma_{2,0} - & \varrho \Gamma \frac{(l^3 + l^2 - 3l + 6)}{l(l+1)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho \Gamma_{2,0} - & \varrho \Gamma \frac{(l^2 + 3l - 1)}{(l+1)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho \Gamma_{2,0} - \\ & & -\frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \left[\frac{l^3 - 10l - 15}{(l+1)} \right] & -\frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \left[\frac{l^3 - 3l^2 - 4l + 6}{l} \right] & -\frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \left[\frac{l^3 + 3l^2 - 7l + 6}{l} \right] & -\frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \left[\frac{l^3 + 6l^2 + 5l - 6}{(l+1)} \right] \\ 0 & 0 & \frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \left[\frac{l^5 + 3l^4 - l^3 - 15l^2 + 27}{l(l+1)} \right] & \frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \left[\frac{l^4 - 2l^3 - 4l^2 + 2l + 3}{l} \right] & -\frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \left[\frac{l^5 + 2l^4 - 3l^3 + 4l^2 + 20l - 15}{l(l+1)} \right] & -\frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \left[\frac{l^2(l^2 + 6l + 8)}{(l+1)} \right] \end{bmatrix} \quad (4-38)$$

$$\frac{\delta^* \underline{P}_{l,m}^{(-)}}{s + \alpha_n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4\pi g \varrho \frac{2(l+1)}{(l-1)} & 0 & -4\pi g \varrho \frac{(2l^2 - 3l - 5)}{(l-1)} & -4\pi g \varrho \frac{l^2 - l - 3}{(l-1)} \\ \varrho(l-2) & -\varrho(l-1) & -\varrho \Gamma \frac{(l^2+3)}{(l-1)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho \Gamma_{2,0} - \frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \left[\frac{l^3 - 2l^2 - 3}{(l-1)} \right] & -\varrho \Gamma(l-1) + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho \Gamma_{2,0} - \frac{2s\bar{\mu}}{R_E} [l(l-3)] & \varrho \Gamma \frac{(l-3)(l+2)}{(l-1)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho \Gamma_{2,0} - \frac{2s\bar{\mu}}{R_E} [(l^2 + 3l - 15)] & \varrho \Gamma \frac{l^2 + l - 4}{(l-1)} + \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho \Gamma_{2,0} - \frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \left[\frac{l(l^2 + 4l - 9)}{(l-1)} \right] \\ 0 & 0 & \frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \left[\frac{l(l+1)}{(l-1)} \cdot (l+2)(l-2) \right] & \frac{2s\bar{\mu}}{R_E} [l(l+1)(l-3)] & -\frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \left[\frac{(l+1)}{(l-1)} \cdot (l^3 - l^2 - 9l + 15) \right] & -\frac{2s\bar{\mu}}{R_E} \left[\frac{(l+1)}{(l-1)} \cdot (l^3 + 3l^2 - 10l + 6) \right] \end{bmatrix} \quad (4-39)$$

$$\frac{\delta^* \underline{P}_{l,m}^{(part)}}{s + \alpha} = \frac{\varrho \Omega i m}{l(l+1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{4\pi g \varrho}{2\bar{\mu}} \frac{R_E^2}{(2l+5)} & 0 & -\frac{4\pi g \varrho}{2\bar{\mu}} \frac{R_E^2}{(2l-3)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{sR_E(5l+13)}{(2l+5)} - \frac{s\varrho \Gamma \bar{R}_E^2}{2s\bar{\mu}(2l+5)} & -\frac{2sR_E(l+1)}{l} & -\frac{sR_E(5l-8)}{(2l-3)} + \frac{s\varrho \Gamma \bar{R}_E^2}{2s\bar{\mu}(2l-3)} & -\frac{2sR_E l}{(l+1)} \\ 0 & 0 & \frac{sR_E(l^2 + 4l + 5)}{(2l+5)} & 0 & -\frac{sR_E(l^2 - 2l + 2)}{(2l-3)} & \end{bmatrix} \quad (4-40)$$

Schließlich müssen noch die Störglieder der Randbedingungen an der Kern-Mantel-Grenze formuliert werden, wobei hier nur drei Anteile auftreten (der partikuläre Anteil $\delta \underline{B}_{l,m}^{(part)}$ verschwindet):

$$\begin{aligned} \delta \underline{B}_{\underline{c}_K} = & \frac{e^2}{3\sqrt{5}} C(l, 2, l+2; m, 0) \delta \underline{B}_{l,m}^{(+)} \underline{c}_{K;l+2,m} + \frac{e^2}{3\sqrt{5}} C(l, 2, l; m, 0) \delta \underline{B}_{l,m}^{(0)} \underline{c}_{K;l,m} + \\ & + \frac{e^2}{3\sqrt{5}} C(l, 2, l-2; m, 0) \delta \underline{B}_{l,m}^{(-)} \underline{c}_{K;l-2,m} \end{aligned} \quad (4-41)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \delta \underline{B}_{l,m}^{(+)} = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(l+2)\bar{R}_K^{l+2} \\ 0 & 0 & -2(l^2+2l-1)\bar{R}_K^{l+1} \\ \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho_K \Gamma_{2,0} & 0 & \varrho_K(l+2)\bar{R}_K^{l+2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \delta \underline{B}_{l,m}^{(0)} = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l\bar{R}_K^l \\ 0 & 0 & -(2l^2-3)\bar{R}_K^{l-1} \\ \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho_K \Gamma_{2,0} & 0 & \varrho_K l \bar{R}_K^l \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \delta \underline{B}_{l,m}^{(-)} = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(l-2)\bar{R}_K^{l-2} \\ 0 & 0 & -2l(l-2)\bar{R}_K^{l-3} \\ \frac{3\sqrt{5}}{e^2} \varrho_K \Gamma_{2,0} & 0 & \varrho_K(l-2)\bar{R}_K^{l-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \delta \underline{B}_{l,m}^{(part)} = & \underline{0}. \end{aligned} \quad (4-42)$$

Damit können nun die Verbesserungen der Koeffizienten $\delta \underline{c}$ ebenfalls als gebrochen-rationale Funktionen in s dargestellt werden. Mit Hilfe von (4-29) usw. wird aus (4-28):

$$\begin{aligned} \underline{T} \delta \underline{c}_K^{(x)} = & G_x \cdot \left\{ [\delta \underline{T}^{*(x)} - \frac{\delta \underline{P}_n^{*(x)}(\bar{R}_n) \underline{E}^{(x)}(\bar{R}_n)}{s + \alpha_n} \underline{c}_n^{(x)}] - \right. \\ & - \underline{P}_n^*(\bar{R}_n) \underline{E}(\bar{R}_n) \sum_{i=M}^{n-1} \frac{\prod_{k=i+1}^{n-1} \underline{Z}_k}{s^{n-i} \prod_{k=i}^n (s + \alpha_k)} \underline{D}_i \bar{P}_{i+1}(\bar{R}_i) \delta \underline{P}_i^{(x)}(\bar{R}_i) \underline{E}^{(x)}(\bar{R}_i) \underline{c}_i^{(x)} + \\ & + \underline{P}_n^*(\bar{R}_n) \underline{E}(\bar{R}_n) \sum_{i=K}^{n-1} \frac{\prod_{k=i+1}^{n-1} \underline{Z}_k}{s^{n-i} (s + \alpha_{i+1}) \prod_{k=i+1}^n (s + \alpha_k)} \underline{D}_i \bar{P}_{i+1}(\bar{R}_i) \delta \underline{P}_{i+1}^{(x)}(\bar{R}_i) \underline{E}^{(x)}(\bar{R}_i) \underline{c}_{i+1}^{(x)} - \\ & \left. - \underline{P}_n^*(\bar{R}_n) \underline{E}(\bar{R}_n) \frac{\prod_{k=M}^{n-1} \underline{Z}_k}{s^{n-K} \prod_{k=M}^n (s + \alpha_k)} \underline{D}_K \bar{P}_M(\bar{R}_K) \delta \underline{B}^{(x)} \underline{c}_K^{(x)} \right\} \end{aligned} \quad (4-43)$$

Dabei spezifiziert der Index x , um welchen der vier Anteile (+), (0), (-), (*part*) es sich handeln soll. Die Vorfaktoren G_x sind gemäß (4-29), (4-34) und (4-41):

$$G_{(+)} = \frac{e^2}{3\sqrt{5}} C(l, 2, l+2; m, 0) \quad G_{(0)} = \frac{e^2}{3\sqrt{5}} C(l, 2, l; m, 0) \quad G_{(-)} = \frac{e^2}{3\sqrt{5}} C(l, 2, l-2; m, 0) \quad G_{(part)} = 1 \quad (4-44)$$

Setzt man hierin die Lösungen nullter Ordnung (4-23) und (4-24) ein, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
\delta \underline{\underline{c}}_K^{(x)} = & G_x \frac{\prod_{k=M}^n (s + \alpha_k) \text{Adj}(\underline{\underline{T}}_Z^T)}{\alpha^{(0)} \prod_{j=1}^J [(s - s_j^{(0)})(s - s_j^{(x)})]} \left\{ \frac{\prod_{j=1}^J (s - s_j^{(x)})}{s^{(n-M+2)}} \delta^* \underline{\underline{r}}^{(x)} - \frac{\delta^* P_n^{(x)} \underline{\underline{E}}_n^{(x)} \underline{\underline{c}}_n^{(x)(Z)}}{\alpha^{(x)} s^{3n-3M+5}} \right. \\
& - P_n^* \underline{\underline{E}}_n \sum_{i=M}^{n-1} \left[\prod_{k=i+1}^{n-1} \underline{\underline{Z}}_k \right] \underline{\underline{D}}_i \bar{P}_{i+1}(\bar{R}_i) \delta P_i^{(x)}(\bar{R}_i) \underline{\underline{E}}_i^{(x)} \frac{\underline{\underline{c}}_i^{(x)(Z)}}{\alpha^{(x)} s^{3n-3M+5}} + \\
& + P_n^* \underline{\underline{E}}_n \sum_{i=K}^{n-1} \left[\prod_{k=i+1}^{n-1} \underline{\underline{Z}}_k \right] \underline{\underline{D}}_i \bar{P}_{i+1}(\bar{R}_i) \underline{\underline{H}}_{i+1} \cdot \frac{\underline{\underline{H}}_{i+1}^{-1} \delta P_{i+1}^{(x)}(\bar{R}_i) \underline{\underline{E}}_i^{(x)}}{(s + \alpha_{i+1})} \frac{\underline{\underline{c}}_{i+1}^{(x)(Z)}}{\alpha^{(x)} s^{3n-3M+6}} - \\
& \left. - P_n^* \underline{\underline{E}}_n \left[\prod_{k=M}^{n-1} \underline{\underline{Z}}_k \right] \underline{\underline{D}}_K \bar{P}_M(\bar{R}_K) \delta \underline{\underline{B}}^{(x)} \frac{\underline{\underline{c}}_K^{(x)(Z)}}{\alpha^{(x)} s^{3n-3M+5}} \right\}
\end{aligned} \tag{4-45}$$

Dabei ist $\underline{\underline{H}}_i = \text{diag}[1, 1, 1, 1, 1/(s + \alpha_i), 1/(s + \alpha_i)]$. Die inverse Matrix $\underline{\underline{H}}_i^{-1}$ dient hier dazu, den auftretenden Nenner $s + \alpha_{i+1}$ in der dritten Zeile von $\delta \underline{\underline{P}}_{i+1}^{(x)}$ zu kompensieren. Da die Matrix $\bar{P}_{i+1}(\bar{R}_i)$ in der fünften und sechsten Spalte diesen Faktor enthält, ist die Matrix $\underline{\underline{D}}_i \bar{P}_{i+1}(\bar{R}_i) \underline{\underline{H}}_{i+1} \cdot \frac{\underline{\underline{H}}_{i+1}^{-1} \delta P_{i+1}^{(x)}(\bar{R}_i)}{(s + \alpha_{i+1})}$ ein Polynom in s .

Zur numerischen Berechnung ist ein rekursiver Algorithmus geeignet. Mit den Definitionen

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\Delta}}_K^{(x)} &:= \prod_{j=1}^J (s - s_j^{(x)}) \underline{\underline{Y}}_M^{-1}(\bar{R}_K) [\delta \underline{\underline{Y}}_M^{(x)}(\bar{R}_K) \underline{\underline{c}}_M^{(x)} - \delta \underline{\underline{B}}^{(x)} \underline{\underline{c}}_K^{(x)}] \\
&= \frac{\prod_{k=M}^n (s + \alpha_k)}{\alpha^{(x)} s^{(n-M+4)}} \underline{\underline{D}}_K \bar{P}_M(\bar{R}_K) \left[\frac{\delta \underline{\underline{P}}_M^{(x)}(\bar{R}_K) \underline{\underline{E}}^{(x)}(\bar{R}_K) \underline{\underline{c}}_M^{(Z,x)}}{(s + \alpha_M)} - s \delta \underline{\underline{B}}^{(x)} \underline{\underline{c}}_K^{(Z,x)} \right] \\
\underline{\underline{\Delta}}_i^{(x)} &:= \prod_{j=1}^J (s - s_j^{(x)}) \underline{\underline{Y}}_{i+1}^{-1}(\bar{R}_i) [\delta \underline{\underline{Y}}_{i+1}^{(x)}(\bar{R}_i) \underline{\underline{c}}_{i+1}^{(x)} - \delta \underline{\underline{Y}}_i^{(x)}(\bar{R}_i) \underline{\underline{c}}_i^{(x)}] + \frac{\underline{\underline{Z}}_i}{s(s + \alpha_i)} \underline{\underline{\Delta}}_{i-1}^{(x)} \\
&= \frac{\prod_{k=i+1}^n (s + \alpha_k)}{\alpha^{(x)} s^{(n+i-2M+5)}} \underline{\underline{D}}_i \bar{P}_{i+1}(\bar{R}_i) \left[\frac{\delta \underline{\underline{P}}_{i+1}^{(x)}(\bar{R}_i) \underline{\underline{E}}^{(x)}(\bar{R}_i) \underline{\underline{c}}_{i+1}^{(Z,x)}}{(s + \alpha_{i+1})} - s \delta \underline{\underline{P}}_i^{(x)}(\bar{R}_i) \underline{\underline{E}}^{(x)}(\bar{R}_i) \underline{\underline{c}}_i^{(Z,x)} \right] + \\
&+ \frac{\underline{\underline{Z}}_i}{s(s + \alpha_i)} \underline{\underline{\Delta}}_{i-1}^{(x)}
\end{aligned} \tag{4-46}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\prod_{k=M}^{i-1} \left[\frac{\underline{\underline{Z}}_k}{s(s + \alpha_k)} \right] \underline{\underline{Y}}_M^{-1}(\bar{R}_K) \underline{\underline{B}} \delta \underline{\underline{c}}_K^{(x)} &= \delta \underline{\underline{c}}_i^{(x)} + \frac{G_x}{\prod_{j=1}^J (s - s_j^{(x)})} \underline{\underline{\Delta}}_{i-1}^{(x)} \\
\underline{\underline{T}} \delta \underline{\underline{c}}_K^{(x)} &= \underline{\underline{A}} \delta \underline{\underline{c}}_n^{(x)} + \frac{G_x}{\prod_{j=1}^J (s - s_j^{(x)})} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\Delta}}_{n-1}^{(x)} = G_x \delta^* \underline{\underline{r}}^{(x)} - \delta \underline{\underline{A}}^{(x)} \underline{\underline{c}}_n^{(x)} + \frac{G_x}{\prod_{j=1}^J (s - s_j^{(x)})} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\Delta}}_{n-1}^{(x)}
\end{aligned} \tag{4-47}$$

und mit der im vorigen Abschnitt erläuterten Inversen der Matrix $\underline{\underline{T}}$ folgt

$$\delta \underline{\underline{c}}_K^{(x)} = \frac{G_x \prod_{k=M}^n (s + \alpha_k) \text{Adj}(\underline{\underline{T}}_Z^T)}{\alpha^{(0)} s^{n-M+2} \prod_{j=1}^J (s - s_j^{(0)})(s - s_j^{(x)})} \left\{ \delta^* \underline{\underline{r}}^{(x)} \prod_{j=1}^J (s - s_j^{(x)}) - \frac{\delta P_n^*(x) \underline{\underline{E}}^{(x)}(\bar{R}_n) \underline{\underline{c}}_n^{(Z,x)}}{\alpha^{(x)} s^{2n-2M+3}} + \frac{P_n^* \underline{\underline{E}}^{(x)}(\bar{R}_n)}{(s + \alpha_n)} \underline{\underline{\Delta}}_{n-1}^{(x)} \right\} \tag{4-48}$$

Analog zum vorigen Abschnitt kann auch für die Inkremente zweiter Ordnung eine Partialbruchzerlegung durchgeführt werden. Für $\delta \underline{\mathcal{L}}_K^{(0)}$ ergibt sich hierbei die Besonderheit, dass sämtliche Nullstellen des Nenners quadratisch auftreten. In diesem Fall gilt

$$\frac{f(s)}{\prod_{j=1}^J (s - s_j)^2} = C_0 + \sum_{j=1}^J \left[\frac{C_{1,j}}{(s - s_j)} + \frac{C_{2,j}}{(s - s_j)^2} \right] \quad (4-49)$$

mit den Koeffizienten

$$C_{2,j} = \frac{f(s_j)}{\prod_{q \neq j} (s_j - s_q)^2} \quad C_{1,j} = \frac{f'(s_j)}{\prod_{q \neq j} (s_j - s_q)^2} - 2C_{2,j} \sum_{q \neq j} \frac{1}{(s_j - s_q)} \quad (4-50)$$

Die Konstante C_0 könnte durch eine Punktprobe bestimmt werden. Da im vorliegenden Fall aber die Elemente aller beteiligten Matrizen, aus denen die Zählerpolynome gebildet werden, in gleicher Weise entweder den Faktor s oder den Faktor $s + \alpha_i$ enthalten, werden die Absolutglieder C_0 wieder so bestimmt, dass man die Zählerpolynome an der Stelle $s = 1$, $\alpha_i = 0 \forall i$ bestimmt und noch durch α_0 teilt.

Das Auftreten quadratischer Nullstellen wird letztlich durch die Anwendung der Störungsrechnung hervorgerufen. Wie man sich anhand eines homogenen Erdmodells klarmachen kann, würde man bei strenger Lösung jeweils zwei verschiedene Nullstellen erhalten, die jedoch sehr nahe beieinanderliegen.

$\delta \underline{\mathcal{L}}_K^{(part)}$ bildet einen weiteren Sonderfall. Aus den Matrizen $\delta \underline{P}^{(part)}$ ersieht man, dass hier der Polynomgrad im Zähler um eines höher als der Polynomgrad des Nenners ist. Es muss somit vorausgesetzt werden, dass $\tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)}$ für anwachsende s genügend schnell abklingt.

5. Lovezahlen, Auflastzahlen und Drehimpulsbilanz

5–1 Love- und Auflastzahlen

Für beliebiges, aber festes \bar{R} hängen die Verschiebungs- bzw. Potentialkoeffizienten $\bar{r}_{l,m}$, $\bar{s}_{l,m}$ und $\delta\bar{w}_{l,m}$ linear von den Koeffizientenfunktionen $\tilde{c}_{l,m}^{(1)}(s)$, $\tilde{c}_{l,m}^{(2)}(s)$, $\tilde{c}_{l,m}^{(3)}(s)$, $\tilde{c}_{l,m}^{(4)}(s)$, $\tilde{c}_{l,m}^{w1}(s)$ und $\tilde{c}_{l,m}^{w2}(s)$ ab, deren Lösungen im letzten Abschnitt hergeleitet wurden. Diese Funktionen wiederum sind den Lastpotential- bzw. den Zentrifugalpotentialkoeffizienten proportional. Es muss daher möglich sein, die Funktionen $\bar{r}_{l,m}$, $\bar{s}_{l,m}$ und $\delta\bar{w}_{l,m}$ direkt als Linearkombinationen der Lastpotential- bzw. der Zentrifugalpotential-Koeffizienten darzustellen. Im Allgemeinen, also für eine Erde mit dreidimensionaler Verteilung von Massendichte und Viskoelastizitätsparametern, ist für den Lastfall eine Darstellung in folgender Form möglich:

$$\begin{aligned}\delta\bar{w}_{l,m}(\bar{R}, s) &= (1 + \tilde{K}_{l,m;n,p}^{Last}(\bar{R}, s)) \delta\bar{v}_{n,p}^{Last}(\bar{R}, s) \\ \bar{r}_{l,m}^{Last}(\bar{R}, s) &= \frac{1}{\gamma_E} \tilde{H}_{l,m;n,p}^{Last}(\bar{R}, s) \delta\bar{v}_{n,p}^{Last}(\bar{R}, s) \\ -\frac{\bar{s}_{l,m}^{Last}(\bar{R}, s)}{\sqrt{l(l+1)}} &= \frac{1}{\gamma_E} \tilde{I}_{l,m;n,p}^{Last}(\bar{R}, s) \delta\bar{v}_{n,p}^{Last}(\bar{R}, s)\end{aligned}\quad (5-1)$$

Eine analoge Darstellung ist für eine Anregung durch ein Zentrifugalpotential denkbar. Die ‘‘Verhältnissfunktionen’’ $\tilde{H}_{l,m;n,p}^{Last}(\bar{R}, s)$ usw. sind nur von den Parametern des Erdmodells, nicht von der Anregung abhängig, so dass eine klare Trennung zwischen Anregung und Systemeigenschaften erreicht werden kann. Schreibt man die Gleichungen in Matrix-Form, so sind für den Allgemeinfall die Matrizen $\tilde{H}^{Last}(\bar{R}, s)$ usw. vermutlich voll besetzt. Für den Fall der rotations-sphäroidischen Schichtung hängen – wie sich im letzten Abschnitt gezeigt hatte – die Störgrößen der linken Seite nur von den anregenden Potentialkoeffizienten vom selben Grad sowie von zwei Graden höher und niedriger ab. Die Hauptdiagonalelemente sind im übrigen von der Normierung der Kugelflächenfunktionen unabhängig, für die restlichen Elemente gilt das nicht mehr.

In der Geodäsie werden in der Regel nur die Gleichungen für \bar{R}_E (also für die Größen an der Erdoberfläche) bzw. das Potential-Inkrement im Außenraum benötigt. Wir benutzen in der vorliegenden Arbeit eine etwas modifizierte Darstellung, die sich wiederum auf die Eingangsgrößen $\tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)}$ bezieht:

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{c}_{l,m}^{vA}}{R_E^{l+1}} &=: \frac{\tilde{c}_{l,m}^{v2(Last)}}{R_E^{l+1}} + (\tilde{k}_l^{L(0)} + \delta\tilde{k}_{l,m;l}^L) \tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)} R_E^l + \delta\tilde{k}_{l,m;l-2}^L \tilde{c}_{l-2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l-2} + \delta\tilde{k}_{l,m;l+2}^L \tilde{c}_{l+2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l+2} + \\ &+ (\tilde{k}_2^{T(0)} + \delta\tilde{k}_{2,m;2}^T) R_E^2 \tilde{c}_{2,m}^{v1(Zent)} \delta_{l,2} \\ \bar{r}_{l,m}(R_E) &=: \frac{(\tilde{h}_l^{L(0)} + \delta\tilde{h}_{l,m;l}^L) \tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)} R_E^l + \delta\tilde{h}_{l,m;l-2}^L \tilde{c}_{l-2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l-2} + \delta\tilde{h}_{l,m;l+2}^L \tilde{c}_{l+2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l+2} + \\ &+ (\tilde{h}_2^{T(0)} + \delta\tilde{h}_{2,m;2}^T) R_E^2 \tilde{c}_{2,m}^{v1(Zent)} \delta_{l,2}}{\Gamma_E} \\ -\frac{\bar{s}_{l,m}(R_E)}{\sqrt{l(l+1)}} &=: \frac{(\tilde{l}_l^{L(0)} + \delta\tilde{l}_{l,m;l}^L) \tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)} R_E^l + \delta\tilde{l}_{l,m;l-2}^L \tilde{c}_{l-2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l-2} + \delta\tilde{l}_{l,m;l+2}^L \tilde{c}_{l+2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l+2} + \\ &+ (\tilde{l}_2^{T(0)} + \delta\tilde{l}_{2,m;2}^T) R_E^2 \tilde{c}_{2,m}^{v1(Zent)} \delta_{l,2}}{\Gamma_E}\end{aligned}\quad (5-2)$$

Durch diese Gleichungen sind implizit die dimensionslosen Verhältnissfunktionen $\tilde{k}_l^{L(0)}$ usw. definiert. Die Verhältnissfunktionen $\tilde{k}_l^{L(0)}$ heißen *Auflastzahlen*, \tilde{k}_l^T , \tilde{h}_l^T heißen *Lovezahlen*, \tilde{l}_l^T heißen *Shidazahlen* zu Ehren der Physiker, die den geschilderten Formalismus im Zusammenhang mit den Gezeitendeformationen einer elastischen Erde eingeführt hatten (*A.E.H. Love (1909, 1911), T. Shida (1912), T. Shida and M. Matsuyama (1912)*). Der obere Index ‘‘T’’ bei \tilde{k}_2^T ist eine Abkürzung für ‘‘tidal’’. (Das Zentrifugalpotential besitzt – abgesehen vom 0,0-Term – formal die Gestalt eines Gezeitenpotentials.) k_2^T ist die Love-Zahl k vom Grad 2 aus der Theorie der Gezeitendeformationen. Die hier eingeführten Verhältnissfunktionen sind vom Laplace-Parameter s abhängig. Die Beziehungen (5-2) sind nur im Laplace-Bereich, nicht im Zeitbereich gültig; Bei Transformation in den Zeitbereich ergeben sich Faltungsintegrale (siehe Anhang C), die Verhältnissfunktionen übernehmen dort die Rolle von *Faltungskernen*. Die Auflast- und Lovezahlen 0-ter Ordnung hängen nur vom Grad, nicht von der Ordnung ab.

Während die Definition der Love- und Lastzahlen nullter Ordnung standardmäßig in dieser Weise erfolgt (im sphärischen Fall ist es beispielsweise gleichbedeutend, ob man sich auf die Koeffizienten $\tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)}$ oder auf die Koeffizienten $\tilde{c}_{l,m}^{v2(Last)(0)}$ bezieht), wird die Definition für die ‘‘Störgrößen’’ $\delta\tilde{k}_{l,m;l}^L$ usw. nur als Konvention in der vorliegenden Arbeit verwendet. Den so definierten Störgrößen lässt sich nicht ohne weiteres eine physikalische Bedeutung zuordnen: Die Koeffizienten $\tilde{c}_{l,m}^{vA}$ beziehen sich auf Kugelfunktionen, die Koeffizienten $\tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)}$ dagegen gleichen bis auf einen Faktor den Lastkoeffizienten $\Delta\kappa_{l,m}$, welche die Last auf der Oberfläche des Sphäroids darstellen.

Anmerkung 5-1 :

Bei der Bestimmung der Lastzahlen $\tilde{k}_{l,m}^L$ aus den Lösungen der Gleichungssysteme des Kapitels 4 sind noch Umrechnungen durchzuführen. Aus der Lösung der Gleichungssysteme gehen zunächst die Koeffizienten $\tilde{c}_{l,m}^{v1(n)}$, $\tilde{c}_{l,m}^{v2(n)}$ der äußersten Schicht hervor, die linear von $\tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)}$ usw. abhängen:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{l,m}^{w1(n)} R_E^l &= \tilde{f}_l^{L1(0)} \tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)} R_E^l + \delta\tilde{f}_{l,m;l-2}^{L1} \tilde{c}_{l-2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l-2} + \delta\tilde{f}_{l,m;l}^{L1} \tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)} R_E^l + \delta\tilde{f}_{l,m;l+2}^{L1} \tilde{c}_{l+2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l+2} + \\ &+ \tilde{f}_2^{T1(0)} \tilde{c}_{2,m}^{v1(Zent)} R_E^2 \delta_{l,2} + \delta\tilde{f}_{2,m;2}^{T1} \tilde{c}_{2,m}^{v1(Zent)} R_E^2 \delta_{l,2} \\ \tilde{c}_{l,m}^{w2(n)} R_E^{-(l+1)} &= \tilde{f}_l^{L2(0)} \tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)} R_E^l + \delta\tilde{f}_{l,m;l-2}^{L2} \tilde{c}_{l-2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l-2} + \delta\tilde{f}_{l,m;l}^{L2} \tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)} R_E^l + \delta\tilde{f}_{l,m;l+2}^{L2} \tilde{c}_{l+2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l+2} + \\ &+ \tilde{f}_2^{T2(0)} \tilde{c}_{2,m}^{v1(Zent)} R_E^2 \delta_{l,2} + \delta\tilde{f}_{2,m;2}^{T2} \tilde{c}_{2,m}^{v1(Zent)} R_E^2 \delta_{l,2}\end{aligned}\tag{5-3}$$

Setzt man diese Beziehungen in (3-107) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{c}_{l,m}^{vA(grav)}}{R_E^{l+1}} &= \tilde{f}_l^{L1(0)} \tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)} R_E^l + \delta\tilde{f}_{l,m;l-2}^{L1} \tilde{c}_{l-2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l-2} + \delta\tilde{f}_{l,m;l}^{L1} \tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)} R_E^l + \delta\tilde{f}_{l,m;l+2}^{L1} \tilde{c}_{l+2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l+2} + \\ &+ \tilde{f}_{l,m}^{L2(0)} \tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)} R_E^l + \delta\tilde{f}_{l,m;l-2}^{L2} \tilde{c}_{l-2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l-2} + \delta\tilde{f}_{l,m;l}^{L2} \tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)} R_E^l + \delta\tilde{f}_{l,m;l+2}^{L2} \tilde{c}_{l+2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l+2} + \\ &+ (\tilde{f}_2^{T1(0)} + \delta\tilde{f}_{2,m;2}^{T1} - 1) \tilde{c}_{2,m}^{v1(Zent)} R_E^2 \delta_{l,2} + (\tilde{f}_2^{T2(0)} + \delta\tilde{f}_{2,m;2}^{T2}) \tilde{c}_{2,m}^{v1(Zent)} R_E^2 \delta_{l,2} - \\ &- \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} \left[(2l+5)C(l, 2, l+2; m, 0) \tilde{f}_{l+2}^{L1(0)} \tilde{c}_{l+2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l+2} + (2l+1)C(l, 2, l; m, 0) \tilde{f}_l^{L1(0)} \tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)} R_E^l + \right. \\ &\left. + (2l-3)C(l, 2, l-2; m, 0) \tilde{f}_{l-2}^{L1(0)} \tilde{c}_{l-2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l-2} \right] - \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} 5C(2, 2, 2; m, 0) (\tilde{f}_2^{T1(0)} - 1) \tilde{c}_{2,m}^{v1(Zent)} R_E^2 \delta_{l,2}\end{aligned}\tag{5-4}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich zwischen (5-2) und (5-4) unter Beachtung von (3-122) und (3-123) lassen sich die Auflast- und Love-Zahlen als Kombinationen der Lösungen der unbekanntenen Koeffizienten darstellen:

$$\begin{aligned}1 + \tilde{k}_l^{L(0)} &= \tilde{f}_l^{L1(0)} + \tilde{f}_l^{L2(0)} \\ \delta\tilde{k}_{l,m;l-2}^L &= \delta\tilde{f}_{l,m;l-2}^{L1} + \delta\tilde{f}_{l,m;l-2}^{L2} - \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} (2l-3)C(l, 2, l-2; m, 0) (\tilde{f}_{l-2}^{L1(0)} - \frac{l+2}{2l+1}) \\ \delta\tilde{k}_{l,m;l}^L &= \delta\tilde{f}_{l,m;l}^{L1} + \delta\tilde{f}_{l,m;l}^{L2} - \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} (2l+1)C(l, 2, l; m, 0) (\tilde{f}_l^{L1(0)} - \frac{l+2}{2l+1}) \\ \delta\tilde{k}_{l,m;l+2}^L &= \delta\tilde{f}_{l,m;l+2}^{L1} + \delta\tilde{f}_{l,m;l+2}^{L2} - \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} (2l+5)C(l, 2, l+2; m, 0) (\tilde{f}_{l+2}^{L1(0)} - \frac{l+2}{2l+1}) \\ \tilde{k}_2^{T(0)} &= \tilde{f}_2^{T1(0)} + \tilde{f}_2^{T2(0)} - 1 \\ \delta\tilde{k}_{2,m;2}^T &= \delta\tilde{f}_{2,m;2}^{T1} + \delta\tilde{f}_{2,m;2}^{T2} - \frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} 5C(2, 2, 2; m, 0) (\tilde{f}_2^{T1(0)} - 1)\end{aligned}\tag{5-5}$$

Es ist hier zu beachten, dass sich die Lastzahlen $\tilde{k}_{l,m}^L$ ebenso wie die Lovezahlen $\tilde{k}_{l,m}^T$ nur auf das Deformationspotential, nicht auf das gesamte inkrementelle Potential beziehen. Die Koeffizienten $\tilde{c}_{l,m}^{vA(grav)} R_E^{-(l+1)}$ beziehen sich auf das inkrementelle Gravitationspotential im Außenraum, welches sich aus dem Lastpotential und dem Deformationspotential (induziert durch Lastpotential und Zentrifugalpotential) zusammensetzt, also das Zentrifugalpotential selbst nicht enthält. In der Darstellung der Außenraum-Potentialkoeffizienten $\tilde{c}_{l,m}^{vA}$ erscheinen

daher noch die Lastpotentialkoeffizienten $\tilde{c}_{l,m}^{v2(Last)}$. Wir drücken diese noch mit Hilfe von (3-122) und (3-123) durch $\tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)}$ aus, so dass in der ersten Gleichung von (5-2) nur noch die letztere Art von Lastpotentialkoeffizienten erscheinen:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{c}_{l,m}^{vA}}{R_E^{l+1}} = & (1 + \delta g_{l,m;l}^L + \tilde{k}_l^{L(0)} + \delta \tilde{k}_{l,m;l}^L) \tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)} R_E^l + (\delta g_{l,m;l-2}^L + \delta \tilde{k}_{l,m;l-2}^L) \tilde{c}_{l-2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l-2} + \\ & + (\delta g_{l,m;l+2}^L + \delta \tilde{k}_{l,m;l+2}^L) \tilde{c}_{l+2,m}^{v1(Last)(0)} R_E^{l+2} + (\tilde{k}_2^{T(0)} + \delta \tilde{k}_{2,m;2}^T) R_E^2 \tilde{c}_{2,m}^{v1(Zent)} \delta_{l,2} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \delta g_{l,m;l+2}^L &:= -\frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} C(l, 2, l+2; m, 0) \frac{(l+2)(2l+5)}{2l+1} \\ \delta g_{l,m;l}^L &:= -\frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} C(l, 2, l; m, 0)(l+2) \\ \delta g_{l,m;l-2}^L &:= -\frac{e_E^2}{3\sqrt{5}} C(l, 2, l-2; m, 0) \frac{(l+2)(2l-3)}{2l+1} \end{aligned} \quad (5-6)$$

Die Verhältnisfunktionen $\tilde{g}_{l,m}^L$, die somit die Beziehung zwischen $\tilde{c}_{l,m}^{v1(Last)(0)}$ und $\tilde{c}_{l,m}^{v2(Last)}$ herstellen, sind von s unabhängig.

5-1.1 Rücktransformation der Lösungen in den Zeitbereich; Grenzwerte und Spezialfälle

Für die folgenden Betrachtungen, die nur das zeitliche Verhalten der Lösungen betreffen, beschränken wir uns auf einen einzigen Term der Gleichungen (5-2), ohne diesen näher zu spezifizieren:

$$c^{Def}(s) =: \tilde{k}(s) \tilde{c}^{Exc}(s) \quad (5-7)$$

Wir nehmen im folgenden an, dass zur Zeit $t = 0$ das anregende Potential ebenso wie das induzierte Deformationspotential noch gleich 0 ist. Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt mit Hilfe des Faltungssatzes (siehe Anhang C):

$$c^{Def}(t) =: \int_0^t k(t-t') c^{Exc}(t') dt' \quad (5-8)$$

Die Zeitfunktionen $k(t-t')$ klingen mit zunehmender Zeit gegen 0 ab.

Zur Interpretation des Faltungsintegrals sei angenommen, dass der anregende Potentialkoeffizient $c^{Exc}(t')$ zunächst gleich 0 sei, zu einem Zeitpunkt t_0 auf den Wert C springe und im weiteren Verlauf dann unverändert bleibe:

$$c^{Exc}(t') = C \cdot H(t' - t_0)$$

(H bezeichnet hier die Heaviside-Funktion.) Für diesen Fall muss allerdings die Störung durch die Trägheitskräfte außer Betracht bleiben, da diese im Fall der Heaviside-Anregung nicht beschränkt bleibt.

Die Lösung lautet für diesen Spezialfall

$$c^{Def}(t) =: C \int_{t_0}^t k(t-t') dt' \quad (5-9)$$

Das bedeutet physikalisch: Die Änderung des anregenden Potentials zum Zeitpunkt t_0 bewirkt nicht nur eine Änderung der Lösung zum selben Zeitpunkt, vielmehr verändert sich die Lösung immer weiter, obwohl das anregende Potential im weiteren Verlauf konstant bleibt. Zwei Grenzwerte sind von besonderem Interesse:

$$k_E := \lim_{t \rightarrow t_0+0} \int_{t_0}^t k(t-t') dt' = \lim_{t \rightarrow 0+0} \int_0^t k(t') dt' \quad (5-10)$$

heißt *elastische Lastzahl*. Sie charakterisiert die *momentane* Änderung der Lösung (die infolge einer gleichzeitigen, nicht: zu einem früheren Zeitpunkt eingetretenen Änderung der Anregung auftritt).

$$k_F := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t k(t-t') dt' = \int_0^{\infty} k(t') dt' \quad (5-11)$$

heißt *flüssige Lastzahl*. Sie charakterisiert das *asymptotische* Verhalten der Lösung für $t \rightarrow \infty$, wenn die Anregung konstant bleibt.

In Kapitel 4 haben wir das Verhalten der Koeffizientenfunktionen $\tilde{c}_{l,m}^{(1)}(s)$, $\tilde{c}_{l,m}^{(2)}(s)$, $\tilde{c}_{l,m}^{(3)}(s)$, $\tilde{c}_{l,m}^{(4)}(s)$, $\tilde{c}_{l,m}^{w1}(s)$ und $\tilde{c}_{l,m}^{w2}(s)$ als Funktionen des Laplace-Parameters s untersucht. Analog dazu ergeben sich auch für die Love- und Lastzahlen Darstellungen von der Form

$$\tilde{k}(s) = k_0 + \sum_{j=1}^J \left[\frac{k_j^{(1)}}{s-s_j} + \frac{k_j^{(2)}}{(s-s_j)^2} \right] \quad (5-12)$$

(Bei den δc^{part} tritt zusätzlich ein zu s proportionaler Term auf, der durch die in der Coriolis-Kraft eingehende Geschwindigkeit hervorgerufen wird; Terme mit quadratischen Polstellen erscheinen nur bei den $\delta c^{(0)}$.)

Anmerkung 5-2 : Wie erwähnt kommen die quadratischen Polstellen durch die Störungsrechnung zustande. Es darf vermutet werden, dass es sich tatsächlich um zwei nahe beieinanderliegende Polstellen handeln sollte. Beispielsweise gilt in linearer Näherung

$$\frac{c}{s-a} + \frac{d}{s-b} \approx \frac{c+d}{s-s_0} + \frac{c(a-s_0) + d(b-s_0)}{(s-s_0)^2} \quad \text{falls } a \approx b \approx s_0.$$

Rücktransformation von (5-12) und (5-7) in den Zeitbereich ergibt

$$k(t) = k_0 \delta(t) + \sum_{j=1}^J \left[k_j^{(1)} \exp(s_j t) + k_j^{(2)} t \exp(s_j t) \right] \quad (5-13)$$

$$c^{Def}(t) = k_0 c^{Exc}(t) + \sum_{j=1}^J \left[k_j^{(1)} \int_0^t \exp(s_j(t-t')) c^{Exc}(t') dt' + k_j^{(2)} \int_0^t (t-t') \exp(s_j(t-t')) c^{Exc}(t') dt' \right]$$

Dies sind die bereits angesprochenen Faltungsintegrale.

Setzen wir wieder eine Anregung der Form $c^{Exc}(t') = C \cdot H(t' - t_0)$ voraus, so finden wir für die Lösung

$$c^{Def}(t) = C H(t-t_0) \left\{ k_0 + \sum_j \left[-\frac{k_j^{(1)}}{s_j} (1 - \exp(s_j(t-t_0))) + \frac{k_j^{(2)}}{s_j^2} [\exp(s_j(t-t_0))(s_j(t-t_0) - 1) + 1] \right] \right\} \quad (5-14)$$

Daraus geht hervor, dass weniger die Größen $k_j^{(1)}$, $k_j^{(2)}$ als vielmehr $-k_j^{(1)}/s_j$ und $k_j^{(2)}/s_j^2$ als die Amplituden der Relaxationsfunktionen zu betrachten sind. Diese Größen sind im übrigen (im Gegensatz zu den $k_j^{(1)}$, $k_j^{(2)}$) dimensionslos.

Für die Grenzwerte folgt mit den Definitionen (5-10) und (5-11) und wegen $s_j < 0$

$$k_E = k_0 \quad \text{und} \quad k_F = k_0 + \sum_j \left[-\frac{k_j^{(1)}}{s_j} + \frac{k_j^{(2)}}{s_j^2} \right] \quad (5-15)$$

Damit haben wir folgenden Satz gezeigt:

Satz 5-1 :

Für Last- bzw. Love-Funktionen von der Form (5-12) gilt:

$$k_E = \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{k}(s) \quad k_F = \tilde{k}(s=0) \quad (5-16)$$

■

Wird eine Heaviside-Anregung auf den Körper aufgebracht, so springt also das Deformationspotential instantan auf den durch die elastische Last- bzw. Lovezahl implizierten Wert und nähert sich dann quasi-exponentiell dem der flüssigen Last- (Love-) zahl entsprechenden Wert an.

Die flüssige Lovezahl lässt sich für die einzelnen Fälle aus physikalischen Überlegungen vorhersagen. Da gemäß dem Maxwell-Modell die Scherspannungen innerhalb eines Körpers bei konstant gehaltener Verschiebung asymptotisch gegen 0 gehen, wird sich bei konstant gehaltener Anregung das hydrostatische Gleichgewicht wiederherstellen. Für den Lastfall bedeutet das, dass die Last so lange weiter in den Körper einsinkt, bis sie das verdrängte Material gleichsam völlig ersetzt hat. Daraus folgt zunächst für die Lastzahlen

$$k_{l;F}^{L(0)} = -1 \quad \delta k_{l,m;l-2;F}^L + \delta g_{l,m;l-2}^L = 0 \quad \delta k_{l,m;l;F}^L + \delta g_{l,m;l}^L = 0 \quad \delta k_{l,m;l+2;F}^L + \delta g_{l,m;l+2}^L = 0 \quad (5-17)$$

Für den Gezeitenfall bedeutet das hydrostatische Gleichgewicht, dass die materielle Erdoberfläche vollständig der gestörten Äquipotentialfläche folgt, die sich aus der Formel von Bruns errechnen lässt. Es gilt also

$$1 + k_{l;F}^{T(0)} - h_{l;F}^{T(0)} = 0 \quad (5-18)$$

Diese Gleichungen können als Kontrolle für die Modellrechnungen benutzt werden.

In der Literatur – besonders im Zusammenhang mit Gezeiteneffekten – ist häufig von komplexen Lovezahlen die Rede. Dabei wird bereits eine spezielle Art der Anregung vorausgesetzt, nämlich durch ein periodisches Gezeitenpotential. Wir beschränken uns hier auf einen einzigen Anregungsterm und auf “sphärische” Love-Zahlen: Sei

$$c^{Exc}(t') = C \exp(i\omega t') \quad k(t) = k_E \delta(t) + \sum_{j=1}^J k_j \exp(s_j t) \quad (5-19)$$

mit einer beliebigen Kreisfrequenz ω . Einsetzen in (5-8) und Integration ergibt:

$$\begin{aligned} c^{Def}(t) &= C \sum_{j=1}^J \frac{k_j}{s_j - i\omega} \exp(s_j t) + C \exp(i\omega t) \left[k_E - \sum_{j=1}^J \frac{k_j}{(s_j - i\omega)} \right] \\ &= C \sum_{j=1}^J k_j \frac{(s_j + i\omega)}{s_j^2 + \omega^2} \exp(s_j t) + C \exp(i\omega t) \left[\left(k_E - \sum_{j=1}^J \frac{k_j s_j}{(s_j^2 + \omega^2)} \right) - i\omega \sum_{j=1}^J \frac{k_j}{s_j^2 + \omega^2} \right] \end{aligned} \quad (5-20)$$

Der erste Ausdruck beschreibt einen transienten Einschwingvorgang, der zweite eine rein periodische Bewegung. Die Verhältniszahl

$$k_\omega := \left(k_E - \sum_{j=1}^J \frac{k_j s_j}{(s_j^2 + \omega^2)} \right) - i\omega \sum_{j=1}^J \frac{k_j}{s_j^2 + \omega^2} \quad (5-21)$$

soll hier als *frequenzabhängige Love-Zahl* bezeichnet werden. Dieser Fall der periodischen Anregung ist insofern eine Ausnahme, als hier das resultierende Potential auch im Zeitbereich als Produkt von Love-Zahl und anregendem Potential erscheint. Die frequenzabhängige Lovezahl ist offensichtlich komplex. Das bedeutet physikalisch, dass die Antwort des Systems eine Phasenverschiebung β zur Anregung aufweist, für die gilt

$$\tan \beta = \frac{-\omega \sum_{j=1}^J \frac{k_j}{s_j^2 + \omega^2}}{k_E - \sum_{j=1}^J \frac{k_j s_j}{(s_j^2 + \omega^2)}} \quad (5-22)$$

Anmerkung 5-3 :

Im Gezeitenfall lässt sich β auch geometrisch interpretieren: Der Phasenverschiebung β entspricht eine Zeitverschiebung $\Delta t = \beta/\omega$ zwischen dem Maximum der Anregung und dem Maximum der Systemantwort (in einem beliebigen, aber festen Punkt der Erdoberfläche). Betrachten wir die Gezeitenanregung nur eines einzigen Himmelskörpers, so ist ein Maximum erreicht, wenn der Himmelskörper im Meridian des Aufpunktes steht (obere Kulmination). Die Systemantwort (Gezeitenwulst) erreicht das Maximum um $\Delta t = -\beta/\omega$ später. Während dieser Zeit hat sich die Erde um $\Delta \lambda = \Omega \Delta t = -\beta \Omega/\omega$ weitergedreht. $\Delta \lambda$ ist also der Längenunterschied zwischen Himmelskörper und Gezeitenwulst. Dieser Längenunterschied verursacht ein Drehmoment, das der Erddrehung entgegengerichtet ist und diese verlangsamt.

Im Fall einer Gezeitenanregung treten tatsächlich Terme auf, die proportional zu $\exp(i\omega t)$ sind: Die komplexen Gezeitenpotential- Koeffizienten enthalten die Faktoren $\exp(im(\lambda - \lambda_H))$, wobei die geographische Länge λ_H der Himmelskörper nahezu linear mit der Zeit abnimmt. Bei den Lastpotentialkoeffizienten sind dagegen eher Terme der Form

$$c^{Exc}(t') = C \cos(\omega t') \quad (5-23)$$

zu erwarten (man denke an jahreszeitlich wechselnde Auflasten oder an den Zyklus der Eiszeiten). Für diesen Fall erhält man

$$c^{Def}(t) = C \sum_{j=1}^J k_j \frac{s_j}{s_j^2 + \omega^2} \exp(s_j t) + C |k_\omega| \cos(\omega t + \beta) \quad (5-24)$$

5-2 Der inkrementelle Trägheitstensor und seine Beziehung zum inkrementellen Gravitationspotential

Bekanntlich lässt sich der Trägheitstensor eines Körpers teilweise aus den Koeffizienten seines Gravitationspotentials im Außenraum rekonstruieren. Insbesondere diejenigen Komponenten des inkrementellen Trägheitstensors, die in der linearisierten Drehimpulsbilanz auftreten, lassen sich mit den Koeffizienten des inkrementellen Gravitationspotentials im Außenraum darstellen. In Abschnitt 3-6.4 hatten wir die folgende Integralformel für die Koeffizienten des Außenraumpotentials benutzt:

$$c_{l,m}^{vA} = g \int_{Erde} \delta\varrho(\mathbf{X}_Q) \frac{R_Q^l}{(2l+1)} Y_{l,m}^*(\Lambda_Q, \Phi_Q) d^3\mathbf{X}_Q \quad (5-25)$$

Die Komponenten des Trägheitstensors sind andererseits durch (2-137) gegeben. Sie lauten dargestellt als Integrale über die Stördichte multipliziert mit Kugelfunktionen:

$$\begin{aligned} \delta J_{11} &= \int \delta\varrho(\Lambda, \Phi, R) (Y^2 + Z^2) d^3\mathbf{X} = \int \delta\varrho(\Lambda, \Phi, R) R^2 (\cos^2 \Phi \sin^2 \Lambda + \sin^2 \Phi) d^3\mathbf{X} = \\ &= \int \delta\varrho(\Lambda, \Phi, R) R^2 \left[\frac{2}{3} Y_{0,0} + \frac{1}{3\sqrt{5}} Y_{2,0}^* - \frac{1}{\sqrt{30}} (Y_{2,2}^* + Y_{2,-2}^*) \right] d^3\mathbf{X} \\ \delta J_{22} &= \int \delta\varrho(\Lambda, \Phi, R) (X^2 + Z^2) d^3\mathbf{X} = \int \delta\varrho(\Lambda, \Phi, R) R^2 (\cos^2 \Phi \cos^2 \Lambda + \sin^2 \Phi) d^3\mathbf{X} = \\ &= \int \delta\varrho(\Lambda, \Phi, R) R^2 \left[\frac{2}{3} Y_{0,0} + \frac{1}{3\sqrt{5}} Y_{2,0}^* + \frac{1}{\sqrt{30}} (Y_{2,2}^* + Y_{2,-2}^*) \right] d^3\mathbf{X} \\ \delta J_{33} &= \int \delta\varrho(\Lambda, \Phi, R) (X^2 + Y^2) d^3\mathbf{X} = \int \delta\varrho(\Lambda, \Phi, R) R^2 \cos^2 \Phi d^3\mathbf{X} = \\ &= \int \delta\varrho(\Lambda, \Phi, R) R^2 \left[\frac{2}{3} Y_{0,0} - \frac{2}{3\sqrt{5}} Y_{2,0}^* \right] d^3\mathbf{X} \end{aligned} \quad (5-26)$$

$$\begin{aligned} \delta J_{12} &= - \int \delta\varrho(\Lambda, \Phi, R) XY d^3\mathbf{X} = - \frac{i}{\sqrt{30}} \int \delta\varrho(\Lambda, \Phi, R) R^2 [Y_{2,2}^* - Y_{2,-2}^*] d^3\mathbf{X} \\ \delta J_{23} &= - \int \delta\varrho(\Lambda, \Phi, R) YZ d^3\mathbf{X} = \frac{i}{\sqrt{30}} \int \delta\varrho(\Lambda, \Phi, R) R^2 [Y_{2,1}^* + Y_{2,-1}^*] d^3\mathbf{X} \\ \delta J_{13} &= - \int \delta\varrho(\Lambda, \Phi, R) XZ d^3\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{30}} \int \delta\varrho(\Lambda, \Phi, R) R^2 [Y_{2,1}^* - Y_{2,-1}^*] d^3\mathbf{X} \end{aligned}$$

Durch Vergleich von (5-25) und (5-26) lassen sich die fünf Kugelfunktionskoeffizienten zweiten Grades alle als Linearkombinationen der sechs Trägheitsmomente darstellen. Dies gilt sowohl für die hier dargestellten Störgrößen als auch für die Größen 0-ter Ordnung. Die Inversion gelingt i.allg. nur für die Außerdiagonalelemente des Trägheitstensors. (Die Hauptdiagonalelemente des inkrementellen Trägheitstensors lassen sich ebenfalls durch die Kugelfunktionskoeffizienten zweiten Grades darstellen, falls die Entwicklung der Stördichte in Kugelflächenfunktionen keinen Term nullten Grades enthält. Diese Voraussetzung ist bei inkompressiblen Erdmodellen tatsächlich erfüllt. Nähere Erläuterungen hierzu finden sich in *E.Grafarend et al. 2000*).

Durch Vergleich von (5-25) mit (5-26) folgt insbesondere

$$\delta J_{13} = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{5}{6}} [c_{2,1}^{vA} - c_{2,-1}^{vA}] \quad \delta J_{23} = i \frac{1}{g} \sqrt{\frac{5}{6}} [c_{2,1}^{vA} + c_{2,-1}^{vA}] \quad (5-27)$$

Dies sind die *MacCullagh-Gleichungen* für komplexe Potentialkoeffizienten. Fassen wir die Komponenten δJ_{13} , δJ_{23} zu einer komplexen Größe $\delta J := \delta J_{13} + i\delta J_{23}$ zusammen, so folgt

$$\delta J = -\frac{1}{g} \sqrt{\frac{10}{3}} c_{2,-1}^{vA} \quad (5-28)$$

Wir benutzen schließlich die angegebenen Formeln dazu, einen Ausdruck für die flüssige Love-Zahl $k_{2,F}^T$ herzuleiten. Bezeichnen wir mit $V_{2,0}^{(A)}$ den Kugelfunktionskoeffizienten des Gravitationspotentials im Außenraum, so findet man durch Vergleich von (5-25) mit (5-26):

$$V_{2,0}^{(A)} = -\frac{g}{\sqrt{5}} \left(J_{33} - \frac{J_{11} + J_{22}}{2} \right) = -\frac{g}{\sqrt{5}} (C - A) \quad (5-29)$$

Wir können den 2,0-Term des ungestörten Zentrifugalpotentials als eine gezeitenartige Anregung verstehen, die bereits unendlich lange Zeit wirkt (im Grundzustand herrscht ja hydrostatisches Gleichgewicht); der 2,0-Term des Gravitationspotential wäre demnach der flüssige Grenzwert des Deformationspotentials. Es gilt also gemäß (5-11) und (5-2) (wobei hier nur "sphärische" Terme berücksichtigt werden):

$$V_{2,0}^{(A)} = -R_E^5 k_{2,F}^T \frac{\Omega^2}{3\sqrt{5}} = -\frac{g}{\sqrt{5}} (C - A) \quad (5-30)$$

Damit folgt für die flüssige Love-Zahl $k_{2,F}^T$:

$$k_{2,F}^T = \frac{3g(C - A)}{R_E^5 \Omega^2} \quad (5-31)$$

Dieser Ausdruck kann – wie auch (5-18) – zur Kontrolle der gefundenen Lösung $\tilde{k}_2^T(s)$ benutzt werden. Setzt man in die Lösung $s = 0$ ein, so muss sich (5-31) ergeben.

5-3 Berechnung der inkrementellen Rotation aus der Drehimpulsbilanz

Mit Hilfe des in Abschnitt 5-2 hergeleiteten inkrementellen Trägheitstensors setzen wir nun die linearisierte Drehimpulsbilanz in ihrer komplexen Form (2-278) zusammen. Wir beschränken uns hier auf die Polbewegung bzw. -wanderung. Da wir die Auflast bei den Veränderungen der Trägheitsmomente berücksichtigen, verschwinden die äußeren Momente (siehe Abschnitt 2-9.3). Wir ersetzen das komplexe Trägheitsmoment $\delta \tilde{J}$ in (2-279) mit Hilfe der MacCullaghgleichung (5-28) sowie (5-6):

$$[As - i(C - A)\Omega] \tilde{m} = [s + i\Omega] \frac{R_E^3}{g} \sqrt{\frac{10}{3}} \left\{ (1 + \tilde{k}_2^{L(0)} + \delta \tilde{k}_{2,-1;2}^L + \delta g_{2,-1;2}^L) \tilde{c}_{2,-1}^{v1(Last)(0)} R_E^2 + \right. \\ \left. + (\delta \tilde{k}_{2,-1;4}^L + \delta g_{2,-1;4}^L) \tilde{c}_{4,-1}^{v1(Last)(0)} R_E^4 + \tilde{k}_2^T R_E^2 \tilde{c}_{2,-1}^{v1(Zent)} \right\} \quad (5-32)$$

Hierin ist der Koeffizient des inkrementellen Zentrifugalpotentials $\tilde{c}_{2,-1}^{v1(Zent)}$ gemäß (3-67) seinerseits von \tilde{m} abhängig. Wir setzen diesen Ausdruck ein und fassen die Glieder mit \tilde{m} zusammen. Damit lautet die Drehimpulsbilanz

$$[As - i(C - A)\Omega + \tilde{k}_2^T (s + i\Omega) \frac{R_E^5 \Omega^2}{3g}] \tilde{m} = [s + i\Omega] \frac{R_E^3}{g} \sqrt{\frac{10}{3}} \left\{ (1 + \tilde{k}_2^{L(0)} + \delta g_{2,-1;2}^L + \delta \tilde{k}_{2,-1;2}^L) \tilde{c}_{2,-1}^{v1(Last)(0)} R_E^2 + \right. \\ \left. + (\delta \tilde{k}_{2,-1;4}^L + \delta g_{2,-1;4}^L) \tilde{c}_{4,-1}^{v1(Last)(0)} R_E^4 \right\} \quad (5-33)$$

Wir benutzen folgende Abkürzungen:

$$\sigma_E := \frac{C - A}{A} \Omega \quad k_F^T = \frac{3Ag\sigma_E}{R_E^5 \Omega^3} = \frac{3g(C - A)}{R_E^5 \Omega^2} \quad (5-34)$$

Dabei ist σ_E die bekannte *Euler-Frequenz* der Polbewegung einer starren Erde, die bei etwa $2\pi/304d$ liegt. k_F^T ist die *flüssige Love-Zahl*, die sich als asymptotischer Wert der Love-Zahl \tilde{k}_2^T für $s \rightarrow \infty$ ergibt (siehe Abschnitte 5-1.1, 5-2). Damit lautet die Drehimpulsbilanz

$$[s - i\sigma_E + \frac{\tilde{k}_2^T \sigma_E}{k_F^T \Omega} (s + i\Omega)] \tilde{m} = (s + i\Omega) \frac{\sqrt{30}\sigma_E}{k_F^T R_E^2 \Omega^3} \left[(1 + \tilde{k}_{2,-1;2}^{L(0)} + \delta g_{2,-1;2}^L) \tilde{c}_{2,-1}^{v1(Last)(0)} R_E^2 + \right. \\ \left. + (\tilde{k}_{2,-1;4}^{L(0)} + \delta g_{2,-1;4}^L) \tilde{c}_{4,-1}^{v1(Last)(0)} R_E^4 \right] \quad (5-35)$$

5-3.1 Die ungestörte Lösung

In diesem Abschnitt betrachten wir die Lösung der Drehimpulsbilanz in nullter Näherung. Paradoxerweise geht hierbei über die Differenz des polaren und äquatorialen Trägheitsmomentes die Erdabplattung ein; ebenso wird die inkrementelle Zentrifugalkraft berücksichtigt, die bei einer sphärischen, nichtrotierenden Erde gar nicht auftreten würde. Andererseits wird der Einfluss der Erdabplattung auf die Love- und Lastzahlen vernachlässigt. (Wir verzichten in diesem Unterabschnitt auf die oberen Indices ⁽⁰⁾.)

Ziel ist es, Gleichung (5-35) nach \tilde{m} aufzulösen und eine Partialbruchzerlegung analog zu derjenigen für die Deformationskoeffizienten durchzuführen. Wir benutzen dazu die im Abschnitt 5-1.1 erläuterte Darstellung für die Love- und Auflastzahlen:

$$\tilde{k}_2^T = k_{2,E}^T + \sum_{j=1}^J \frac{k_{2,j}^T}{s - s_j^{(2)}} \quad \tilde{k}_2^L = k_{2,E}^L + \sum_{j=1}^J \frac{k_{2,j}^L}{s - s_j^{(2)}} \quad (5-36)$$

Für die flüssige Love-Zahl ergibt sich aus (5-36)

$$k_F^T := k_{2,F}^T = k_{2,E}^T - \sum_{j=1}^J \frac{k_{2,j}^T}{s_j^{(2)}} \quad \text{und} \quad \tilde{k}_2^T - k_F^T = \sum_{j=1}^J \frac{k_{2,j}^T s}{s_j (s - s_j^{(2)})} \quad (5-37)$$

Aus der linken Seite der Drehimpulsbilanz wird damit

$$[s - i\sigma_E + \frac{\tilde{k}_2^T \sigma_E}{k_F^T \Omega} (s + i\Omega)] \tilde{m} = s \frac{k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T}{k_F^T \Omega} \left[1 + \sum_{j=1}^J \frac{\sigma_E k_{2,j}^T (s_j^{(2)} + i\Omega)}{s_j^{(2)} (k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T)} \cdot \frac{1}{(s - s_j^{(2)})} \right] \tilde{m} = \\ =: s \frac{k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T}{k_F^T \Omega} \left[1 + i \sum_{j=1}^J \frac{x_j}{s - s_j^{(2)}} \right] \tilde{m} \quad (5-38)$$

Wir haben dabei die folgende Abkürzung benutzt:

$$x_j := \frac{\sigma_E k_{2,j}^T (\Omega - i s_j^{(2)})}{s_j^{(2)} (k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T)} \approx \frac{\sigma_E k_{2,j}^T}{s_j^{(2)} k_F^T}$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer muss als Bruch dargestellt werden, damit \tilde{m} in Partialbrüche zerlegt werden kann:

$$1 + i \sum_{j=1}^J \frac{x_j}{s - s_j^{(2)}} = \frac{\prod_{j=1}^J (s - s_j) + i \sum_{j=1}^J x_j \prod_{q \neq j} (s - s_q)}{\prod_{j=1}^J (s - s_j)} =: \frac{f(s)}{\prod_{j=1}^J (s - s_j)} =: \frac{\prod_{j=1}^J (s - a_j)}{\prod_{j=1}^J (s - s_j^{(2)})} \quad (5-39)$$

Die Nullstellen des Zählers a_j müssen hierbei numerisch bestimmt werden. Dabei stellt sich heraus, dass von diesen J Nullstellen $J - 1$ nahezu rein reell sind, während bei genau einer der Nullstellen der Imaginärteil überwiegt. *Vermersen and Sabadini (1996)* zeigen, dass diese ausgezeichnete Nullstelle in sehr guter Näherung durch

$$a_{M_0} := \frac{\sum_{j=1}^J x_j s_j^{(2)}}{\sum_{j=1}^J x_j} - i \sum_{j=1}^J x_j \quad (5-40)$$

berechnet werden kann. Der Imaginärteil dieser Nullstelle ist in guter Näherung

$$\sigma_{Ch} := - \sum_{j=1}^J \frac{\sigma_E k_{2,j}^T}{s_j^{(2)} k_F^T} \quad (5-41)$$

Das ist die *Chandler-Frequenz*, also die Resonanzfrequenz der periodischen Polbewegung des Erdkörpers, deren experimentell bestimmter Wert bei $2\pi/430d$ liegt (ein Modellwert für σ_{Ch} findet sich im nächsten Abschnitt, worin auch die Last- und Love-Zahlen für ein 5-Schichten-Erdmodell angegeben sind). Genäherte Werte für die restlichen $J - 1$ Nullstellen a_j lassen sich aus der Gleichung

$$\sum_{j=1}^J Re(x_j) \prod_{q \neq j} (s - s_q) = 0 \quad (5-42)$$

gewinnen. Die Nullstellen der letzteren Gleichung sind alle reell. Damit sind Näherungen $a_j^{(0)}$ für alle J Nullstellen a_j bekannt, die beispielsweise durch eine Newton-Iteration

$$a_j^{(i+1)} = a_j^{(i)} - f(a_j^{(i)})/f'(a_j^{(i)}) \quad (5-43)$$

verbessert werden können.

Auflösung der Drehimpulsbilanz (5-38) nach \tilde{m} ergibt mit Hilfe von (5-39):

$$\tilde{m} = \frac{\sqrt{30}\sigma_E}{R_E^2 \Omega^2 (k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T)} \frac{(s + i\Omega)}{s} \frac{\prod_{j=1}^J (s - s_j^{(2)})}{\prod_{j=1}^J (s - a_j)} (1 + \tilde{k}_2^L) \tilde{c}_{2,-1}^{v1(Last)(0)} R_E^2 \quad (5-44)$$

Wegen

$$(1 + \tilde{k}_2^L) = \frac{\prod_{q=1}^J (s - s_q^{(2)}) (1 + k_{2,E}^L) + \sum_{j=1}^J k_{2,j}^L \prod_{q \neq j} (s - s_q^{(2)})}{\prod_{q=1}^J (s - s_q^{(2)})} \quad (5-45)$$

folgt die Partialbruchzerlegung

$$\tilde{m} = - \frac{\sqrt{30}}{R_E^2 \Omega^2} \left[A_0^{(2)} + \frac{L_2}{s} + \sum_{j=1}^J \frac{A_j^{(2)}}{s - a_j} \right] \tilde{c}_{2,-1}^{v1(Last)(0)} R_E^2 \quad (5-46)$$

mit

$$A_0^{(2)} = - \frac{\sigma_E (1 + k_{2,E}^L)}{(k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T)} \quad A_j^{(2)} = - \frac{\sigma_E (a_j + i\Omega) \prod_{q=1}^J (a_j - s_q^{(2)}) (1 + \tilde{k}_2^L(a_j))}{(k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T) a_j \prod_{q \neq j} (a_j - a_q)} \quad L_2 = - \frac{i\sigma_E \Omega (1 + k_{2,F}^L) \prod_{q=1}^J s_q^{(2)}}{(k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T) \prod_{q=1}^J a_q} = 0$$

Beim Modell mit viskoelastischer Lithosphäre ist $k_{2,F}^L = -1$, mithin $L_2 = 0$. Die Ausdruck in der eckigen Klammer in (5-46)

$$\tilde{k}^{LP} := A_0^{(2)} + \frac{L_2}{s} + \sum_{j=1}^J \frac{A_j^{(2)}}{s - a_j} \quad (5-47)$$

ist dimensionslos; er bildet offensichtlich das Analogon zu den Love- und Last- Zahlen für das Inkrement des Drehvektors. (Leider wurde für diese Verhältniszahl offenbar noch kein Name eingeführt.) Der negative Vorfaktor

$$G_\Omega := - \frac{\sqrt{30}}{R_E^2 \Omega^2} \quad (5-48)$$

besitzt die Dimension sec^2/m^2 , also die reziproke Dimension des Potentials. Es handelt sich dabei gerade um den Faktor, der $\tilde{c}_{2,-1}^{v1(Zent)} R_E^2$ in \tilde{m} überführt. Die Größe \tilde{k}^{LP} ist also gerade die (Laplace-artige) Verhältniszfunktion

zwischen dem Lastpotential und dem inkrementellen Zentrifugalpotential der Ordnung -1, das aufgrund der direkten und indirekten Änderungen des Trägheitstensors infolge der Last entsteht, wobei selbstverständlich wieder die Abwesenheit von Drehmomenten vorausgesetzt wird.

Anmerkung 5-4 : In der geophysikalischen Literatur wird \tilde{m} anstatt auf $\tilde{c}_{2,-1}^{v1(Last)} R_E^2$ häufig auf die “Anregungsfunktion”

$$\tilde{\varphi}(s) := -\frac{i(s+i\Omega)\delta\tilde{J}^{Last}}{A\sigma_E} = \frac{i(s+i\Omega)}{k_F^T R_E^2 \Omega^3} \sqrt{30}(1+\tilde{k}_2^L) R_E^2 \tilde{c}_{2,-1}^{v1(Last)} \quad (5-49)$$

bezogen. Dabei handelt es sich um eine abgeleitete Größe, die mit den Änderungen der Hauptträgheitsachsen in Beziehung steht, vgl. (2-145). Nachteilig ist aber, dass eine zweite Partialbruchzerlegung notwendig wird, wenn man auf die Eingangsgröße $\tilde{c}_{2,-1}^{v1(Last)} R_E^2$ übergehen will.

Betrachten wir wieder die Wirkung einer Heaviside-Last (also den Fall, dass der Lastpotentialkoeffizient zur Zeit t_0 momentan von null auf einen im weiteren Zeitverlauf gleichbleibenden Wert springt); wir beschränken uns dabei auf den Lastpotentialkoeffizienten vom Grad 2 und der Ordnung -1. Die Überlegungen, die wir in Abschnitt 5-1.1 bezüglich der Verhältniszahlen (dort: der Love- bzw. Last- Zahlen) angestellt haben, lassen sich hier ebenfalls anwenden, da die “Moden” a_j jeweils einen negativen Realteil besitzen.

Nehmen wir an, zur Zeit t_0 werde eine positive, nahezu punktförmige Last auf das nördliche Halbsphäroid und zwar auf den 0-Meridian des Koordinatensystems aufgebracht. Der Lastkoeffizient $c_{2,-1}^{v1(Last)(0)}$ ist in diesem Fall rein reell und positiv. Der “elastische Grenzwert” der inkrementellen Rotation wird durch die Verhältniszahl

$$k_E^{LP} := A_0^{(2)} = -\frac{\sigma_E(1+k_{2,E}^L)}{(k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T)} \quad (5-50)$$

charakterisiert. Multipliziert mit dem Faktor G_Ω erhält man eine reelle, positive Konstante. Daraus folgt, dass das “elastische” Rotationsinkrement m_E reell und positiv ist, der Rotationsvektor also in x-Richtung, d.h. zur Last hin abgelenkt wird.

Der Chandler-Term $G_\Omega A_{M_0}/(s-a_{M_0})$, dem im Zeitbereich die Funktion $G_\Omega A_{M_0}/a_{M_0}(\exp(a_{M_0}(t-t_0))-1)$ entspricht, lässt sich als “gedämpfte Kreisbewegung” interpretieren: das Argument der Exponentialfunktion ist komplex mit stark überwiegendem Imaginärteil und negativem Realteil. Der “flüssige Grenzwert” (also der Grenzwert für $t \rightarrow \infty$) des Chandler-Terms ist

$$k_{Ch,F}^{LP} := -A_{M_0}/a_{M_0} \approx \frac{\sigma_E(1+k_{2,E}^L)}{\sigma_{Ch} k_F^T} \quad (5-51)$$

Multipliziert mit dem Faktor G_Ω ergibt sich ein überwiegend reeller Wert mit negativem Realteil; er charakterisiert den Symmetriepunkt der Chandler-Bewegung, der somit genähert auf der negativen x-Achse liegt (also auf der Seite, die der Last abgewandt ist). Er ist betragsmäßig viel größer als der elastische Grenzwert. Die Anfangs-Amplitude der Chandler-Bewegung ist proportional zu $|G_\Omega(k_E^{LP} - k_{Ch,F}^{LP})| \approx |G_\Omega k_{Ch,F}^{LP}|$.

Die Chandler-Bewegung wird überlagert durch die übrigen Bewegungsanteile $G_\Omega A_j^{(2)}/a_j(\exp(a_j(t-t_0))-1)$, bei denen die Exponentialfunktionen überwiegend oder rein reelle (negative) Argumente besitzen. Diese Bewegungsanteile lassen sich somit als säkulare bzw. Polwanderungsterme interpretieren. Der flüssige Grenzwert der Gesamtbewegung

$$k_F^{LP} := k_E^{LP} - \sum_j^J A_j/a_j \quad (5-52)$$

ist ebenfalls nahezu reell mit positivem Realteil und betragsmäßig nochmals deutlich größer als $k_{Ch,F}^{LP}$. Multipliziert mit dem Faktor G_Ω erhält man wieder einen negativen Realteil. Tatsächlich bewegt sich also der Pol säkular von der Last weg (vgl. hierzu die Abbildung 13.5 aus K. Strobach (1991), die wir in Abschnitt 1-3 wiedergegeben haben). Vielleicht aus diesem Grund wird manchmal anstelle des Ausdrucks “Polwanderung” auch “Polflucht” gebraucht. Für die “flüssige Verhältniszahl” k_F^{LP} ergibt sich im übrigen nur deshalb ein von 0 verschiedener Wert, weil es gemäß (5-38) möglich war, aus der linken Seite der Drehimpulsbilanz einen Faktor s abzuspalten. Andernfalls wäre wegen $k_{2,F}^L + 1 = 0$ der flüssige Grenzwert der inkrementellen Rotation gleich null.

Wir leiten noch eine alternative Darstellung von k_F^{LP} her, indem wir in der Gleichung (5-44) den Grenzübergang $s \rightarrow 0$ durchführen. Wegen des Faktors s , der im Nenner der rechten Seite dieser Gleichung auftritt, wenden wir die Regel von L'Hospital an:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 + \tilde{k}_2^L}{s} = -\sum_{j=1}^J \frac{k_j^L}{s^2}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{m}(s) &= -\frac{\sqrt{30}}{R_E^2 \Omega^2} \left\{ \left[-i\sigma_E \frac{\prod_j s_j}{\prod_j a_j} \right] \left(\frac{-\Omega}{k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T} \sum_{j=1}^J \frac{k_j^L}{s_j^2} \right) \right\} R_E^2 \tilde{c}_{2,-1}^{v1(Last)}(s=0) \\ &= -\frac{\sqrt{30}}{R_E^2 \Omega^2} k_F^{LP} R_E^2 \tilde{c}_{2,-1}^{v1(Last)}(s=0) \end{aligned} \quad (5-53)$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer wird in der Literatur als A_1 bezeichnet, siehe z.B. Formel 16 in *R. Sabadini et al. 1984*.

Schließlich betrachten wir wieder den Fall einer rein periodischen Anregung: Sei $R_E^2 \tilde{c}_{2,-1}^{v1(Last)} = C \cdot \exp(i\omega t)$. Analog zu (5-20) finden wir

$$m(t) = G_\Omega C \sum_{s=1}^J \exp(a_j t) \frac{A_j}{a_j - i\omega} + G_\Omega C \exp(i\omega t) \left[k_E^{LP} - \sum_{s=1}^J \frac{A_j}{a_j - i\omega} \right] \quad (5-54)$$

Der erste Ausdruck beschreibt wieder einen abklingenden Einschwingvorgang. Wenn wir die frequenzabhängige Verhältnisfunktion in der eckigen Klammer nach Real- und Imaginärteil trennen, so ergibt sich für den rein periodischen Anteil:

$$m_{per}(t) = G_\Omega C \exp(i\omega t) \left\{ \left[k_E^{LP} - \sum_{j=1}^J \frac{[A_j^R a_j^R + A_j^I (a_j^I - \omega)]}{(a_j^R)^2 + (a_j^I - \omega)^2} \right] - i \sum_{j=1}^J \frac{[A_j^I a_j^R + A_j^R (\omega - a_j^I)]}{(a_j^R)^2 + (a_j^I - \omega)^2} \right\} \quad (5-55)$$

Da eine Anregung der obigen Form kaum auftritt, betrachten wir wieder ein Auflastpotential der Form

$$R_E^2 \tilde{c}_{2,-1}^{v1(Last)} = C \cdot \cos(\omega t) = \frac{C}{2} (\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)) \quad (5-56)$$

Mit den Abkürzungen $A_j^R := \text{Re}(A_j)$, $A_j^I := \text{Im}(A_j)$ usw. und

$$\begin{aligned} k_{(+\omega)}^{LP} &:= \left[k_E^{LP} - \sum_{j=1}^J \frac{[A_j^R a_j^R + A_j^I (a_j^I - \omega)]}{(a_j^R)^2 + (a_j^I - \omega)^2} \right] - i \sum_{j=1}^J \frac{[A_j^I a_j^R + A_j^R (\omega - a_j^I)]}{(a_j^R)^2 + (a_j^I - \omega)^2} \\ k_{(-\omega)}^{LP} &:= \left[k_E^{LP} - \sum_{j=1}^J \frac{[A_j^R a_j^R + A_j^I (a_j^I + \omega)]}{(a_j^R)^2 + (a_j^I + \omega)^2} \right] - i \sum_{j=1}^J \frac{[A_j^I a_j^R - A_j^R (\omega + a_j^I)]}{(a_j^R)^2 + (a_j^I + \omega)^2} \end{aligned} \quad (5-57)$$

ergibt sich

$$m_{per}(t) = \frac{G_\Omega C}{2} \left[k_{(+\omega)}^{LP} \exp(i\omega t) + k_{(-\omega)}^{LP} \exp(-i\omega t) \right] \quad (5-58)$$

Diese Gleichung lässt sich nicht - wie im Fall des Deformationspotentials - auf die Form $G_\Omega C k_\omega \cos(\omega t + \beta)$ bringen. Während nämlich dort $\text{Re}(k(\omega)) = \text{Re}(k(-\omega))$, $\text{Im}(k(\omega)) = -\text{Im}(k(-\omega))$ galt, trifft dies hier nicht mehr zu. Vielmehr lässt sich die Bewegung (5-58) als *elliptische Polbewegung (wobble)* interpretieren: Eine einfache Umformung ergibt

$$m_{per}(t) = G_\Omega C \exp(i\gamma) [r \exp(i(\omega t + \beta)) + \Delta r \exp(-i(\omega t + \beta))] \quad (5-59)$$

wobei

$$r = \frac{|k_{(+\omega)}^{LP}|}{2} \quad \Delta r = \frac{|k_{(-\omega)}^{LP}|}{2} \quad \gamma + \beta = \arctan \frac{\text{Im}(k_{(+\omega)}^{LP})}{\text{Re}(k_{(+\omega)}^{LP})} \quad \gamma - \beta = \arctan \frac{\text{Im}(k_{(-\omega)}^{LP})}{\text{Re}(k_{(-\omega)}^{LP})} \quad (5-60)$$

Wir haben hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\omega > 0$ angenommen. Die numerische Rechnung ergibt, dass $r > \Delta r$ für alle positiven ω gilt; die Bewegung verläuft damit stets gegen den Uhrzeigersinn. r charakterisiert den mittleren Radius der Bewegungs-Ellipse; die Halbachsen der Ellipse sind durch $r + \Delta r$, $r - \Delta r$ festgelegt. Der Winkel γ ist die Additionskonstante zum Richtungswinkel der großen Halbachse der Ellipse in der X, Y -Ebene (davon abgesehen wird dieser Richtungswinkel durch die räumliche Phase der Anregung festgelegt). β bezeichnet - wie im Fall des Deformationspotentials - die zeitartige Phasenverschiebung (die Bewegungskurve schneidet die große Halbachse zur Zeit $t = -\beta/\omega$).

Ein Zahlenbeispiel für die erläuterten Größen findet sich in Kapitel 6.

5-3.2 Die gestörte Lösung

In diesem Unterabschnitt berücksichtigen wir nunmehr auch die sphäroidischen Störungen in den Last- und Lovezahlen. Betrachten wir zunächst wieder die linke Seite der Drehimpulsbilanz (5-35). Mit

$$\tilde{k}_{2,-1;2}^T = k_{2,-1;2;E}^T + \sum_{j=1}^J \left[\frac{k_{2,-1;2;j}^{T1}}{s - s_j^{(2)}} + \frac{k_{2,-1;2;j}^{T2}}{(s - s_j^{(2)})^2} \right] \quad k_{2,-1;2;F}^T = k_{2,-1;2;E}^T + \sum_{j=1}^J \left[-\frac{k_{2,-1;2;j}^{T1}}{s_j^{(2)}} + \frac{k_{2,-1;2;j}^{T2}}{(s_j^{(2)})^2} \right] \quad (5-61)$$

und

$$\tilde{k}_{2,-1;2}^T - k_{2,-1;2;F}^T = \sum_{j=1}^J \frac{s}{s_j^{(2)}(s - s_j)^2} [k_{2,-1;2;j}^{T1} s_j (s - s_j) - k_{2,-1;2;j}^{T2} (s - 2s_j)] \quad (5-62)$$

folgt

$$[s - i\sigma_E + \frac{\tilde{k}_{2,-1;2}^T \sigma_E}{k_F^T \Omega} (s + i\Omega)] \tilde{m} = s \frac{k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T}{k_F^T \Omega} \left[1 + i \sum_{j=1}^J \frac{x_j (s - s_j) + y_j (\Omega (s - 2s_j) + i s_j^2)}{(s - s_j)^2} \right] \tilde{m} \quad (5-63)$$

mit

$$x_j := \frac{\sigma_E k_{2,-1;2;j}^{T1} (\Omega - i s_j^{(2)})}{s_j^{(2)} (k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T)} \quad y_j := -\frac{\sigma_E k_{2,-1;2;j}^{T2}}{(s_j^{(2)})^2 (k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T)}$$

Anmerkung 5-5 : An dieser Stelle besteht insofern eine Beweislücke, als nicht gezeigt wurde, dass k_F^T mit $k_{2,-1;2;F}^T$ identifiziert werden darf, oder genauer, dass

$$k_{2,-1;2;F}^T = \frac{3Ag\sigma_E}{R_E^5 \Omega^3} = \frac{3g(C-A)}{R_E^5 \Omega^2}$$

auch in sphäroidischer Näherung gilt. Wie im vorigen Unterabschnitt erläutert, würde sich jedoch ein völlig anderes asymptotisches Verhalten der Lösung ergeben, wenn aus der linken Seite der Drehimpulsbilanz (5-35) kein Faktor s ausgeklammert werden könnte.

Der Ausdruck in der eckigen Klammer wird wieder als Bruch dargestellt:

$$1 + i \sum_{j=1}^J \frac{x_j (s - s_j) + y_j (\Omega (s - 2s_j) + i s_j^2)}{(s - s_j)^2} = \frac{\prod_{j=1}^J (s - s_j)^2 + i \sum_{j=1}^J [x_j (s - s_j) + y_j (\Omega (s - 2s_j) + i s_j^2)] \prod_{q \neq j}^J (s - s_q)^2}{\prod_{j=1}^J (s - s_j)^2} =$$

$$=: \frac{f(s)}{\prod_{j=1}^J (s - s_j)^2} =: \frac{\prod_{j=1}^{2J} (s - \hat{a}_j)}{\prod_{j=1}^J (s - s_j^{(2)})^2} \quad (5-64)$$

Die Nullstellen des Zählers müssen wieder numerisch bestimmt werden, wobei ihre Anzahl sich im Vergleich zur ungestörten Lösung verdoppelt hat. Die Nullstellensuche gelingt wieder iterativ. Als Anfangswerte für die ersten J Nullstellen können die a_J der ungestörten Lösung dienen; für die restlichen J Nullstellen sind die s_j eine sehr gute Näherung.

Auflösung der Drehimpulsbilanz (5-38) nach \tilde{m} ergibt mit Hilfe von (5-39):

$$\tilde{m} = \frac{\sqrt{30} \sigma_E}{R_E^2 \Omega^2 (k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T)} \frac{(s + i\Omega) \prod_{j=1}^J (s - s_j^{(2)})^2}{s \prod_{j=1}^{2J} (s - \hat{a}_j)} \left[(1 + \delta g_{2,-1;2}^L + \tilde{k}_{2,-1;2}^L \tilde{c}_{2,-1}^{v1(Last)(0)}) R_E^2 + \right. \quad (5-65)$$

$$\left. + (\delta g_{2,-1;4}^L + \tilde{k}_{2,-1;4}^L \tilde{c}_{4,-1}^{v1(Last)(0)}) R_E^4 \right]$$

Wir betrachten die beiden Anteile von \tilde{m} , die den Graden 2 und 4 im Lastpotential entsprechen, gesondert. Wegen

$$(1 + \delta g_{2,-1;2}^L + \tilde{k}_{2,-1;2}^L) = \frac{\prod_{q=1}^J (s - s_q^{(2)})^2 (1 + \delta g_{2,-1;2}^L + k_{2,-1;2;E}^L) + \sum_{j=1}^J \left[k_{2,-1;2;j}^{L1} (s - s_j^{(2)}) + k_{2,-1;2;j}^{L2} \right] \prod_{q \neq j}^J (s - s_q^{(2)})^2}{\prod_{q=1}^J (s - s_q^{(2)})^2} \quad (5-66)$$

folgt

$$\tilde{m}_2 = -\frac{\sqrt{30}}{R_E^2 \Omega^2} \left[\hat{A}_0^{(2)} + \frac{\hat{L}_2}{s} + \sum_{j=1}^{2J} \frac{\hat{A}_j^{(2)}}{s - \hat{a}_j} \right] \tilde{c}_{2,-1}^{v1(Last)(0)} R_E^2 \quad (5-67)$$

mit

$$\hat{A}_0^{(2)} = -\frac{\sigma_E (1 + k_{2,-1;2;E}^L + \delta g_{2,-1;2}^L)}{(k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T)} \quad \hat{A}_j^{(2)} = -\frac{\sigma_E (\hat{a}_j + i\Omega) \prod_{q=1}^J (\hat{a}_j - s_q^{(2)})^2 (1 + \delta g_{2,-1;2}^L + \tilde{k}_{2,-1;2}^L(a_j))}{(k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T) \hat{a}_j \prod_{q \neq j}^{2J} (\hat{a}_j - \hat{a}_q)}$$

$$\hat{L}_2 = -\frac{i\sigma_E \Omega (1 + \delta g_{2,-1;2}^L + k_{2,-1;2;F}^L) \prod_{q=1}^J (s_q^{(2)})^2}{(k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T) \prod_{q=1}^{2J} \hat{a}_q}$$

Wegen

$$\tilde{k}_{2,-1;4}^L = (k_{2,-1;4;E}^L + \delta g_{2,-1;4}^L) + \frac{\sum_{j=1}^J \left[k_{2,-1;4;j}^{L1} \prod_{q \neq j}^J (s - s_q^{(2)}) \prod_{q=1}^J (s - s_q^{(4)}) + k_{2,-1;4;j}^{L2} \prod_{q=1}^J (s - s_q^{(2)}) \prod_{q \neq j}^J (s - s_q^{(4)}) \right]}{\prod_{q=1}^J (s - s_q^{(2)}) (s - s_q^{(4)})} \quad (5-68)$$

folgt

$$\tilde{m}_4 = -\frac{\sqrt{30}}{R_E^2 \Omega^2} \left[A_0^{(4)} + \frac{L_4}{s} + \sum_{j=1}^J \frac{A_j^{(4)}}{s - \hat{a}_j} + \sum_{j=1}^J \frac{S_j^{(4)}}{s - s_j^{(4)}} \right] \tilde{c}_{4,-1}^{v1(Last)(0)} R_E^4 \quad (5-69)$$

mit

$$A_0^{(4)} = -\frac{\sigma_E (k_{2,-1;4;E}^L + \delta g_{2,-1;4}^L)}{(k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T)} \quad A_j^{(4)} = -\frac{\sigma_E (\hat{a}_j + i\Omega) \prod_{q=1}^J (\hat{a}_j - s_q^{(2)}) (\tilde{k}_{2,-1;4}^L(\hat{a}_j) + \delta g_{2,-1;4}^L)}{(k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T) \hat{a}_j \prod_{q \neq j}^J (\hat{a}_j - \hat{a}_q)}$$

$$L_4 = -\frac{i\sigma_E \Omega (k_{2,-1;4;F}^L + \delta g_{2,-1;4}^L) \prod_{q=1}^J s_q^{(2)}}{(k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T) \prod_{q=1}^J \hat{a}_q} \quad S_j^{(4)} = -\frac{\sigma_E (s_j^{(4)} + i\Omega) k_{2,-1;4;j}^{L2} \prod_{q=1}^J (s_j^{(4)} - s_q^{(2)})}{(k_F^T \Omega + \sigma_E k_{2,E}^T) s_j^{(4)} \prod_{q=1}^J (s_j^{(4)} - \hat{a}_q)}$$

Analog zum ungestörten Fall ist $L_2 = L_4 = 0$. Bei den Zusatztermen von \tilde{m}_4 haben wir nicht mehr zwischen den "neuen" Nullstellen \hat{a}_j , $j = J + 1, \dots, 2J$ und den Relaxationszeiten $s_j^{(2)}$ unterschieden; \tilde{m}_4 enthält somit keine Terme mit den $s_j^{(2)}$.

Durch die Berücksichtigung der sphäroidischen Verbesserungen bei den Love- Zahlen werden also die Polstellen etwas verschoben und es kommt ein zweiter Satz von Polstellen hinzu, die nahezu mit den Nullstellen der Säkular determinanten zweiten Grades identisch sind. Durch die Berücksichtigung der sphäroidischen Verbesserungen bei den Last- Zahlen werden die Verhältniszahlen etwas verändert und es kommt ein weiterer Satz von Polstellen hinzu, nämlich die Nullstellen der Säkular determinanten vierten Grades. Das qualitative Verhalten der Lösung bleibt im übrigen unverändert. Insbesondere ergibt sich keine Aufspaltung, sondern nur eine Frequenzverschiebung des Chandler-Modus; dieser Modus bleibt der einzige, bei dem der Imaginärteil überwiegt.

6. Ein numerisches Beispiel (5-Schichten-Modell)

Wir geben hier ein numerisches Beispiel für die hergeleiteten Ergebnisse, um insbesondere die Größenordnung der sphäroidischen Effekte zu demonstrieren. Wir verwenden ein homogen geschichtetes Erdmodell mit 5 Schichten.

Tabelle 6.1: Eingangsparameter des Erdmodells I

Gravitationskonstante	$6,67259 \cdot 10^{-11} m^3 / (kg \ sec^2)$
Winkelgeschwindigkeit der Erde	$0,7292115 \cdot 10^{-4} rad / sec$

Tabelle 6.2: Eingangsparameter des Erdmodells II

Radius [m]	Dichte [$\frac{kg}{m^3}$]	Schermodul [$10^{11} \frac{kg}{m \ sec^2}$]	dyn. Viskosität [$10^{22} \frac{kg}{m \ sec}$]	Exzentrizität e^2
0				
3.480.000	10.932	0,0	0,0	0,005296
5.701.000	4.878	2,190	0,1	0,006441
5.951.000	3.857	1,060	0,1	0,006573
6.250.000	3.434	0,7270	0,1	0,006740
6.371.000	3.184	0,602	100,0	0,006810

Diese Werte wurden bis auf die letzte Spalte aus *B. Vermeersen and R. Sabadini (1996)* entnommen; lediglich die dynamische Viskosität der obersten Schicht wurde willkürlich festgesetzt (die genannten Autoren nehmen ein elastisches Verhalten der Lithosphäre an). Dies hat eventuell den Nachteil einerer geringeren numerischen Stabilität, erlaubt jedoch Rechen-Kontrollen, da die flüssigen Auflastzahlen für diesen Fall bekannt sind. Die Exzentrizitäten wurden mit den Formeln des Abschnitts 3-3 berechnet.

Tabelle 6.3: Abgeleitete Parameter

Parameter	aus dem Modell	aus Beobachtungen
Erdmasse	$5,939189 \cdot 10^{24} kg$	$5,973700 \cdot 10^{24} kg$
geoz. Grav.-konstante	$3.962.978 \cdot 10^8 m^3 / sec^2$	$3.986.005 \cdot 10^8 m^3 / sec^2$
Oberflächenexzentrizität	0,006.810	0,006.694
Mittl. Äquat. Trägheitsmoment	$0,80670 \cdot 10^{38} kg m^2$	$0,801 \cdot 10^{38} kg m^2$
Differenz der Trägheitsmomente	$0,26840 \cdot 10^{36} kg m^2$	$0,26309 \cdot 10^{36} kg m^2$
Flüssige Love-Zahl	0,96264	0,94
Euler-Frequenz	$0,24262 \cdot 10^{-6} rad / sec$	$0,23951 \cdot 10^{-6} rad / sec$
Euler-Periode	299,736 d	303,623 d

Die Werte in der rechten Spalte wurden aus dem GRS80 (*H. Moritz 1980*) entnommen bzw. abgeleitet.

Mit den Formeln des Abschnittes 4-1 wurden zunächst die sphärischen Approximationen der Auflastzahl- und Lovezahl-Komponenten berechnet. Es gibt $4(n - M) - 1 = 11$ "signifikante" Nullstellen der Säkulardeterminanten. Für die Grade 2 und 4 ergibt sich:

Tabelle 6.4: Nullstellen der Säkulardeterminanten, Last-/Lovezahl - Komponenten (Grad 2)

Nr	Bez.	Relaxationszeit [Jtd] (negativ)	inverse Relaxationszeit s_j [1/Jtd]	Lastzahl-Komponenten $k_{2,j}^L$ [1/Jtd]	$-k_{2,j}^L/s_j$	Lovezahl-Komponenten $k_{2,j}^T$ [1/Jtd]	$-k_{2,j}^T/s_j$
0	el.	—	—	$-0,246.272 \cdot 10^{+0}$	—	$0,305.049 \cdot 10^{+0}$	—
1	T4	0,251	$-0,398.516 \cdot 10^{+1}$	$-0,115.549 \cdot 10^{+0}$	$-0,289.948 \cdot 10^{-1}$	$0,180.760 \cdot 10^{+0}$	$0,453.583 \cdot 10^{-1}$
2	T3	0,282	$-0,354.272 \cdot 10^{+1}$	$-0,995.648 \cdot 10^{-1}$	$-0,281.041 \cdot 10^{-1}$	$0,113.618 \cdot 10^{+0}$	$0,320.708 \cdot 10^{-1}$
3	T2	0,353	$-0,283.372 \cdot 10^{+1}$	$-0,274.303 \cdot 10^{+0}$	$-0,967.996 \cdot 10^{-1}$	$0,367.161 \cdot 10^{+0}$	$0,129.569 \cdot 10^{+0}$
4	T1	0,403	$-0,248.205 \cdot 10^{+1}$	$-0,776.229 \cdot 10^{-1}$	$-0,312.737 \cdot 10^{-1}$	$0,812.002 \cdot 10^{-1}$	$0,327.150 \cdot 10^{-1}$
5	M0	0,494	$-0,202.320 \cdot 10^{+1}$	$-0,335.070 \cdot 10^{+0}$	$-0,165.614 \cdot 10^{+0}$	$0,426.519 \cdot 10^{+0}$	$0,210.814 \cdot 10^{+0}$
6	C0	2,225	$-0,449.440 \cdot 10^{+0}$	$-0,140.992 \cdot 10^{+0}$	$-0,313.705 \cdot 10^{+0}$	$0,812.209 \cdot 10^{-1}$	$0,180.716 \cdot 10^{+0}$
7	L0	9,084	$-0,110.087 \cdot 10^{+0}$	$-0,219.013 \cdot 10^{-3}$	$-0,198.946 \cdot 10^{-2}$	$0,820.720 \cdot 10^{-3}$	$0,745.523 \cdot 10^{-2}$
8	M1	530,741	$-0,188.416 \cdot 10^{-2}$	$-0,239.607 \cdot 10^{-5}$	$-0,127.169 \cdot 10^{-2}$	$0,226.142 \cdot 10^{-4}$	$0,120.023 \cdot 10^{-1}$
9	M2	708,982	$-0,141.047 \cdot 10^{-2}$	$-0,107.789 \cdot 10^{-3}$	$-0,764.207 \cdot 10^{-1}$	$0,152.468 \cdot 10^{-4}$	$0,108.097 \cdot 10^{-1}$
10	—	28.063,129	$-0,356.339 \cdot 10^{-4}$	$-0,221.947 \cdot 10^{-6}$	$-0,622.853 \cdot 10^{-2}$	$0,112.491 \cdot 10^{-7}$	$0,315.681 \cdot 10^{-3}$
11	—	592.709,956	$-0,168.717 \cdot 10^{-5}$	$-0,561.269 \cdot 10^{-8}$	$-0,332.680 \cdot 10^{-2}$	$0,112.307 \cdot 10^{-9}$	$0,664.721 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 6.5: Nullstellen der Säkulardeterminanten, Last- /Lovezahl - Komponenten (Grad 4)

Nr	Bez.	Relaxationszeit [Jtd] (negativ)	inverse Relaxationszeit s_j [1/Jtd]	Lastzahl-Komponenten $k_{4,j}^L$ [1/Jtd]	$-k_{4,j}^L/s_j$	Lovezahl-Komponenten $k_{4,j}^T$ [1/Jtd]	$-k_{4,j}^T/s_j$
0	el.	—	—	$-0,119.088 \cdot 10^{+0}$	—	$0,425.693 \cdot 10^{-1}$	—
1	T4	0,241	$-0,413.756 \cdot 10^{+1}$	$0,281.351 \cdot 10^{-3}$	$0,679.992 \cdot 10^{-4}$	$0,206.608 \cdot 10^{-3}$	$0,499.348 \cdot 10^{-4}$
2	T3	0,294	$-0,339.041 \cdot 10^{+1}$	$-0,785.998 \cdot 10^{-2}$	$-0,231.830 \cdot 10^{-2}$	$0,291.055 \cdot 10^{-2}$	$0,858.467 \cdot 10^{-3}$
3	T2	0,371	$-0,269.055 \cdot 10^{+1}$	$-0,581.862 \cdot 10^{-2}$	$-0,216.261 \cdot 10^{-2}$	$0,296.582 \cdot 10^{-2}$	$0,110.231 \cdot 10^{-2}$
4	T1	0,427	$-0,234.096 \cdot 10^{+1}$	$-0,162.651 \cdot 10^{-1}$	$-0,694.805 \cdot 10^{-2}$	$0,587.338 \cdot 10^{-2}$	$0,250.896 \cdot 10^{-2}$
5	M0	0,875	$-0,114.238 \cdot 10^{+1}$	$-0,461.027 \cdot 10^{+0}$	$-0,403.568 \cdot 10^{+0}$	$0,175.970 \cdot 10^{+0}$	$0,154.039 \cdot 10^{+0}$
6	C0	2,208	$-0,452.869 \cdot 10^{+0}$	$-0,161.024 \cdot 10^{+0}$	$-0,355.564 \cdot 10^{+0}$	$0,465.964 \cdot 10^{-1}$	$0,102.892 \cdot 10^{+0}$
7	L0	3,957	$-0,252.680 \cdot 10^{+0}$	$-0,627.818 \cdot 10^{-3}$	$-0,248.464 \cdot 10^{-2}$	$0,820.439 \cdot 10^{-3}$	$0,324.695 \cdot 10^{-2}$
8	M1	259,419	$-0,385.477 \cdot 10^{-2}$	$-0,265.906 \cdot 10^{-3}$	$-0,689.811 \cdot 10^{-1}$	$0,212.987 \cdot 10^{-4}$	$0,552.529 \cdot 10^{-2}$
9	M2	537,991	$-0,185.877 \cdot 10^{-2}$	$-0,441.631 \cdot 10^{-4}$	$-0,237.594 \cdot 10^{-1}$	$0,110.639 \cdot 10^{-4}$	$0,595.230 \cdot 10^{-2}$
10	—	10001,444	$-0,999.856 \cdot 10^{-4}$	$-0,863.124 \cdot 10^{-6}$	$-0,863.249 \cdot 10^{-2}$	$0,385.426 \cdot 10^{-7}$	$0,385.481 \cdot 10^{-3}$
11	—	503482,211	$-0,198.617 \cdot 10^{-5}$	$-0,130.328 \cdot 10^{-7}$	$-0,656.176 \cdot 10^{-2}$	$0,249.180 \cdot 10^{-9}$	$0,125.458 \cdot 10^{-3}$

Die "elastischen" Komponenten der Last- und Lovezahlen sind – im Gegensatz zu den restlichen Komponenten – dimensionslos. Die Namen der Komponenten wurden von *Wu and Peltier (1984)* eingeführt.

Es ergeben sich Relaxationszeiten zwischen 250 Jahren und 600 Millionen Jahren. Bei entsprechender Wahl der Parameter kann man auch Relaxationszeiten erhalten, die größer sind als das Alter der Erde. Setzt man testhalber die Massendichte in allen Schichten gleich ihrem Mittelwert über die gesamte Erde, so fallen (im Einklang mit den Überlegungen aus Abschnitt 4) vier Moden weg, insbesondere die drei Moden mit den längsten Relaxationszeiten, während die Moden T1 - T4 nahezu unverändert erhalten bleiben.

Abbildung 6.1: Frequenzabhängige Lastzahl – Amplitudenverhältnis $k_{2,\omega}^L$

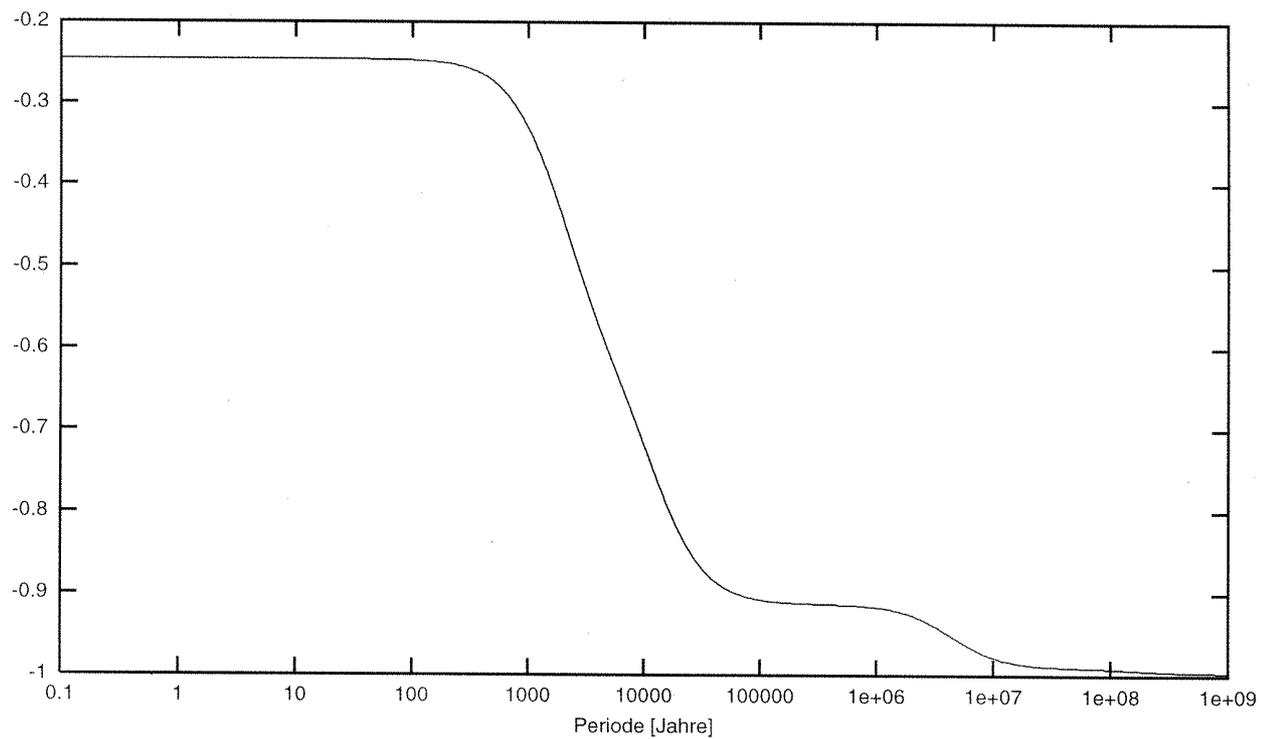


Abbildung 6.2: Frequenzabhängige Lastzahl – Phasenverschiebung β_2^L [Grad]

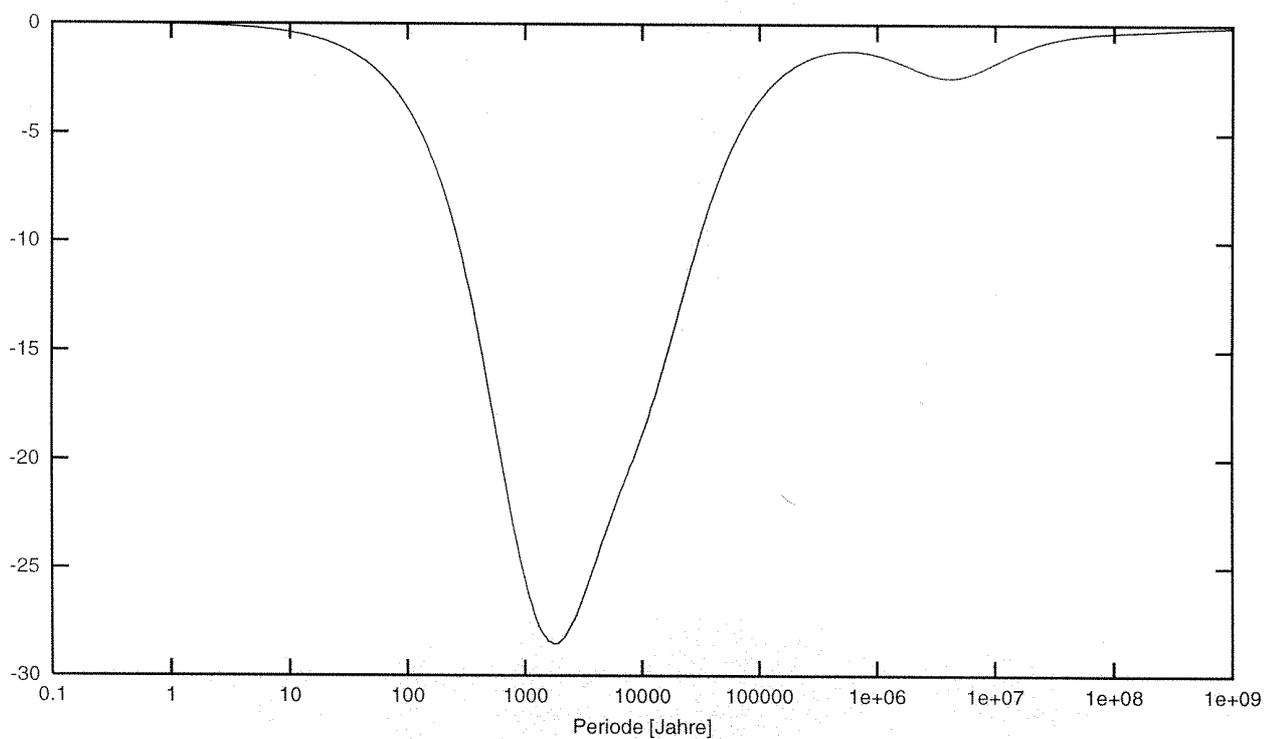


Abbildung 6.3: Frequenzabhängige Lovezahl – Amplitudenverhältnis $|k_{2,\omega}^T|$

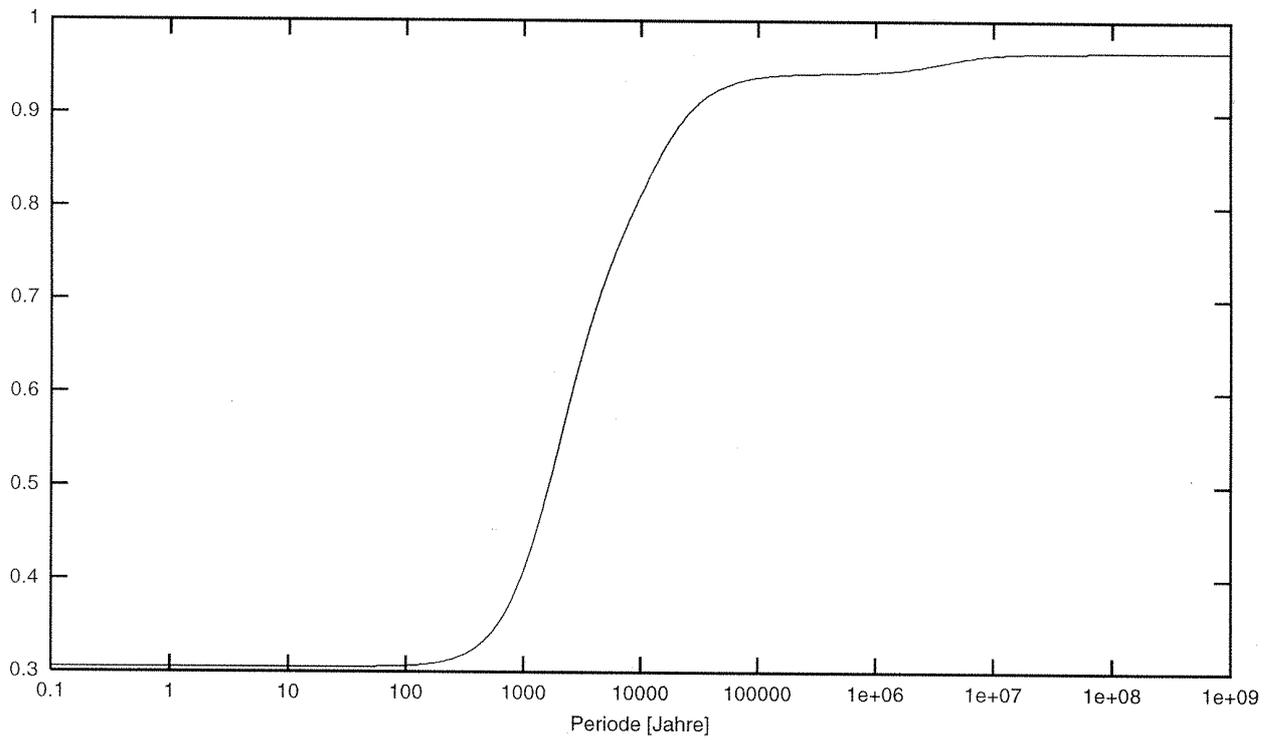
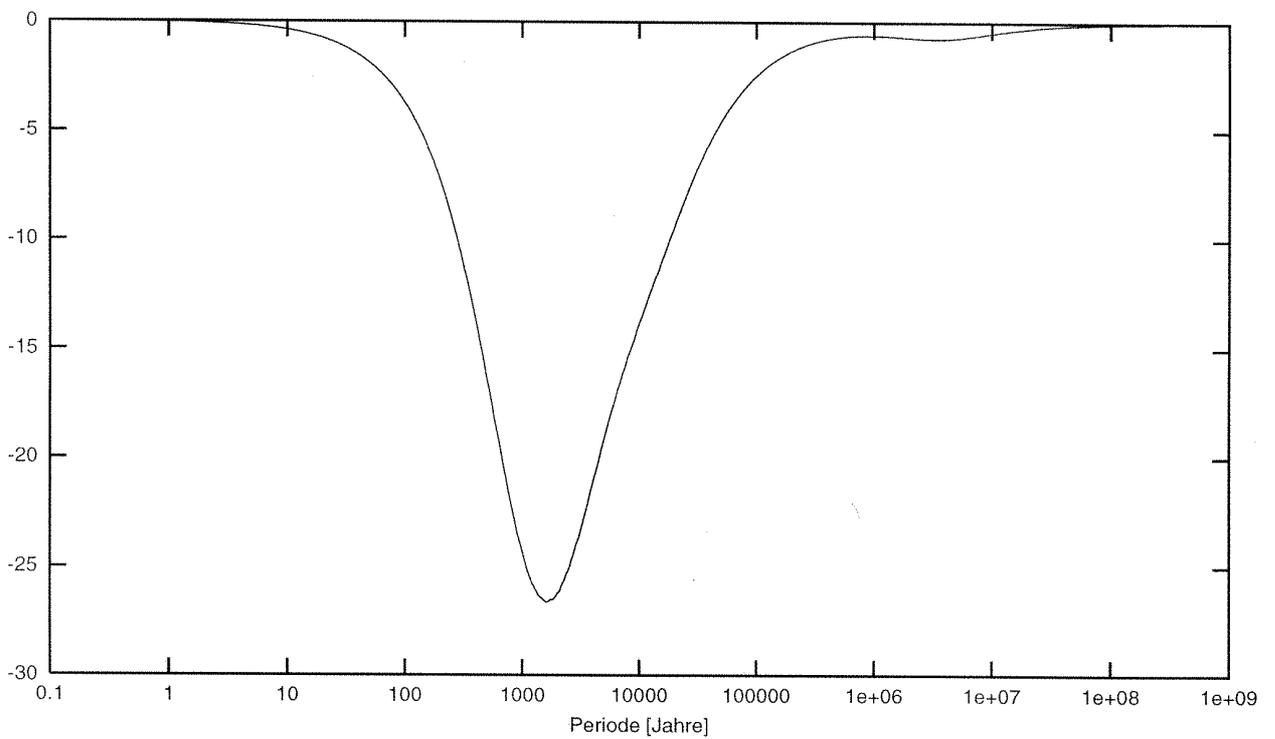


Abbildung 6.4: Frequenzabhängige Lovezahl – Phasenverschiebung β_2^T [Grad]



Unterscheiden sich jedoch die Dichtewerte, so wirkt sich bei den "langen" Relaxationszeiten aber auch die hohe dynamische Viskosität der Lithosphäre aus. Selbstverständlich sind die angegebenen Nachkommastellen angesichts der Genauigkeit des Modells für eine reale Erde nicht signifikant und werden nur zu Kontrollzwecken angegeben.

Die Abbildungen 6.1 - 6.4 zeigen die Beträge der frequenzabhängigen Last- bzw. Love-Zahlen vom Grad 2 sowie die entsprechenden Phasenverschiebungen gemäß (5-21), (5-22) und (5-24). (Im Falle von $k_{2,\omega}^L$ ist der negative Betrag und die um 180° veränderte Phasenverschiebung angegeben, um die letztere klein zu halten.) Es sei nochmals daran erinnert, dass die frequenzabhängigen Last- bzw. Love-Zahlen nur die rein periodischen Bewegungsanteile im Falle einer periodischen Anregung beschreiben – der Einschwingvorgang wird gemäß (5-24) durch die inversen Relaxationszeiten s_j kontrolliert. Die Beträge der frequenzabhängigen Love- bzw. Lastzahlen bewegen sich offensichtlich zwischen den elastischen Grenzwerten (bei hohen Frequenzen) und den flüssigen Grenzwerten (bei niedrigen Frequenzen). Die Phasenverschiebung bewegt sich zwischen 0° und -27° für den Gezeitenfall bzw. zwischen 0° und -29° für den Lastfall.

Auffallend ist, dass der für die Gezeitenreibung so wichtige Wert für die Phasenverschiebung bei halbtägiger Gezeitenanregung unter 1 Bogensekunde liegt und damit bei weitem zu klein ist, siehe z.B. *P. Melchior (1989)*. Offenbar macht sich hier zum einen die unzureichende bzw. fehlende Modellierung des Erdkerns und der Ozeane, zum anderen die quasistatische Näherung bemerkbar.

Tabelle 6.6: Komplexe Moden und Kennzahlen der Polwanderung bzw. -bewegung

Nr.	$Re(a_j)$ [1/Jtd]	$Im(a_j)$ [1/Jtd]	$Re(A_j^{(2)(0)})$ [1/Jtd]	$Im(A_j^{(2)(0)})$ [1/Jtd]	$-Re(A_j^{(2)(0)}/a_j)$	$-Im(A_j^{(2)(0)}/a_j)$
0			$-0,260238 \cdot 10^{-2}$	$0,000000 \cdot 10^{+0}$	—	—
1	$-0,387669 \cdot 10^{+1}$	$0,289525 \cdot 10^{-04}$	$0,312166 \cdot 10^{-1}$	$0,336014 \cdot 10^{-4}$	$0,805239 \cdot 10^{-2}$	$0,872770 \cdot 10^{-5}$
2	$-0,345649 \cdot 10^{+1}$	$0,253835 \cdot 10^{-04}$	$0,105547 \cdot 10^{-1}$	$0,272647 \cdot 10^{-4}$	$0,305357 \cdot 10^{-2}$	$0,791039 \cdot 10^{-5}$
3	$-0,262214 \cdot 10^{+1}$	$0,240105 \cdot 10^{-04}$	$0,321484 \cdot 10^{-1}$	$0,201062 \cdot 10^{-4}$	$0,122604 \cdot 10^{-1}$	$0,778013 \cdot 10^{-5}$
4	$-0,238622 \cdot 10^{+1}$	$0,213645 \cdot 10^{-04}$	$0,119463 \cdot 10^{-1}$	$0,220532 \cdot 10^{-4}$	$0,500636 \cdot 10^{-2}$	$0,928672 \cdot 10^{-5}$
5	$-0,189487 \cdot 10^{+1}$	$0,525882 \cdot 10^{+04}$	$-0,572806 \cdot 10^{+0}$	$-0,600216 \cdot 10^{+4}$	$0,114135 \cdot 10^{+1}$	$-0,520176 \cdot 10^{-3}$
6	$-0,103857 \cdot 10^{+1}$	$0,151152 \cdot 10^{-03}$	$0,424024 \cdot 10^{+0}$	$0,118557 \cdot 10^{-3}$	$0,408277 \cdot 10^{+0}$	$0,173574 \cdot 10^{-3}$
7	$-0,123453 \cdot 10^{+0}$	$0,279858 \cdot 10^{-05}$	$-0,557521 \cdot 10^{-2}$	$0,340789 \cdot 10^{-5}$	$-0,451605 \cdot 10^{-1}$	$0,265809 \cdot 10^{-4}$
8	$-0,338959 \cdot 10^{-1}$	$0,510724 \cdot 10^{-05}$	$0,707400 \cdot 10^{-1}$	$-0,223574 \cdot 10^{-5}$	$0,208698 \cdot 10^{+1}$	$0,248495 \cdot 10^{-3}$
9	$-0,163391 \cdot 10^{-2}$	$0,308947 \cdot 10^{-09}$	$0,837601 \cdot 10^{-3}$	$0,918676 \cdot 10^{-9}$	$0,512636 \cdot 10^{+0}$	$0,659188 \cdot 10^{-6}$
10	$-0,581160 \cdot 10^{-4}$	$0,192610 \cdot 10^{-09}$	$0,424357 \cdot 10^{-3}$	$-0,308098 \cdot 10^{-8}$	$0,730190 \cdot 10^{+1}$	$-0,288140 \cdot 10^{-4}$
11	$-0,436516 \cdot 10^{-5}$	$0,131400 \cdot 10^{-10}$	$0,102826 \cdot 10^{-3}$	$-0,327617 \cdot 10^{-9}$	$0,235561 \cdot 10^{+2}$	$-0,414390 \cdot 10^{-5}$

Bei fast allen Moden der Polwanderung bzw. -bewegung ist der Imaginärteil betragsmäßig erheblich kleiner als der Realteil; eine Ausnahme bildet hier der fünfte Modus, der der Nullstelle M0 der Säkulardeterminanten zugeordnet wird, da beide Größen bereits bei einem homogenen Erdmodell auftreten. Dieser Modus entspricht einem *gedämpften wobble*: Im Zeitbereich entspricht jedem Modus a_j eine Funktion $\exp(a_j(t - t'))$, die mit dem anregenden Potential gefaltet wird. Der Realteil von a_j entspricht somit jeweils der Kreisfrequenz einer periodischen Bewegung, der (negative) Realteil wiederum einer inversen Relaxationszeit, die beschreibt, wie schnell die periodische Bewegung heruntergedämpft wird. Überwiegt betragsmäßig der Realteil, wie das bei fast allen a_j der Fall ist, so kommt die periodische Bewegung kaum zum Tragen; die entsprechende Kurve in der komplexen Ebene läuft für festgehaltenes t' und für $t \rightarrow \infty$ mit nur schwacher Krümmung auf den Ursprung zu. Man spricht dann von einem *Polwanderungsterm*. Beim Modus M0 dagegen ist die Kreisfrequenz der periodischen Bewegung groß im Vergleich zur inversen Relaxationszeit; es liegt eine schwach gedämpfte *Polbewegung* vor. Hier wird der Begriff Modus zu recht verwendet: Der Imaginärteil von a_{M0} ist die Resonanzfrequenz der Polbewegung, die *Chandler-Frequenz*. (Eine weitere Resonanzstelle, der *nearly diurnal free wobble*, tritt hier wegen der ungenügenden Modellierung des flüssigen Erdkerns nicht auf.) Es ist hier nochmals zu betonen, dass über die tatsächlich auftretenden Kreisfrequenzen in der Polbewegung in erster Linie die Anregungen entscheiden.

Tabelle 6.7: Chandler-Bewegung bei Heaviside-Anregung

	Modell	aus Beobachtungen
Chandler-Frequenz	$0,16665 \cdot 10^{-6} \text{ rad/sec}$	$0,16950 \cdot 10^{-6} \text{ rad/sec}$
Chandler-Periode	436,39 d	429,03 d
Relaxationszeit	527,74 Jahre	—
Amplitudenverh. $ k_E^{LP} - k_{Ch,F}^{LP} $	1,14395	—

Der experimentelle Wert für die Chandler-Periode wurde aus *H. Schuh et al. (2001)* entnommen; er stellt einen Mittelwert über die letzten hundert Jahre dar. Ergab sich die aus dem Modell berechnete Euler-Frequenz als zu groß, so ist die Chandler-Frequenz dagegen zu klein. Die Abweichung des Modellwertes ist wohl auf die fehlende Modellierung der Ozeane zurückzuführen. Der hier berechnete Modellwert ist etwas realistischer als derjenige in *L.L.A. Vermeersen and R. Sabadini (1996)*, wo mit einer elastischen Lithosphäre gerechnet wird.

Tabelle 6.8: Flüssiger Grenzwert der Polverlagerung:

$Re(k_{F,2}^{LP(0)})$	$Im(k_{F,2}^{LP(0)})$
$0,349905 \cdot 10^{+2}$	$-0,701200 \cdot 10^{-4}$

Die Konstanten $-A_j/a_j$, wie sie in der vorliegenden Arbeit normiert sind, legen das Verhältnis zwischen dem 2,-1 – Koeffizienten des Auflastpotentials und dem entsprechenden Koeffizienten des inkrementellen Zentrifugalpotentials fest (siehe Abschnitt 5-4). Da bei einer sphärischen, nichtrotierenden Erde auch kein inkrementelles Zentrifugalpotential auftritt, könnte man zur Auffassung kommen, dass das inkrementelle Zentrifugalpotential einen Effekt zweiter Ordnung darstelle, der eventuell vernachlässigt werden könne. Die Zahlenwerte zeigen, dass im Gegenteil das inkrementelle Zentrifugalpotential dominiert.

Der große Realteil des flüssigen Grenzwertes allerdings wird offensichtlich zu über 85 % durch die letzten beiden Moden (mit den längsten Relaxationszeiten) bewirkt, die besonders stark von den gewählten Parametern abhängen und beispielsweise beim Modell mit elastischer Lithosphäre überhaupt nicht auftreten. Der flüssige Grenzwert ist daher nicht als signifikant anzusehen.

Aussagekräftiger sind vermutlich die frequenzabhängigen Verhältniszahlen. Die Abbildungen 6.5 - 6.9 illustrieren die Reaktion des Pols auf eine periodische Anregung gemäß (5-58) – (5-60). Wiederum handelt es sich nur um den rein periodischen Anteil (ohne Einschwingvorgänge). In Abbildung 6.5 ist die Verhältniszahl für die große Halbachse der Bewegungsellipse als Funktion der Anregungsperiode aufgetragen, in Abbildung 6.6 die Exzentrizität dieser Ellipsen. In den Abbildung 6.7, 6.8 ist die Additionskonstante γ^{LP} des Richtungswinkels der großen Halbachse in der X, Y -Ebene bzw. die Phasenverschiebung β^{LP} des Halbachsendurchgangs dargestellt.

Hervorstechend ist das Maximum der großen Halbachse im Falle einer Anregung mit Chandler-Frequenz, die ja die Resonanzfrequenz der Polbewegung ist; Abbildung 6.9 zeigt nochmals das Verhalten der großen Halbachse in der Umgebung dieser Resonanzstelle. Die Frequenz, für welche die große Halbachse ihr Maximum erreicht, stimmt auf 5 Stellen mit der Chandler-Frequenz überein; eine Frequenzverschiebung tritt also (offenbar wegen der geringen Dämpfung) praktisch nicht auf. Die "Phasenwinkel" β^{LP} und γ ändern sich in der Umgebung der Chandler-Frequenz besonders stark. Für diese Frequenz ist die Bewegungskurve im übrigen nahezu kreisförmig. Letzteres gilt ebenso für $\omega \approx A_{Ch}^I/k_E^{LP}$: Bei dieser Frequenz hat der Realteil von $k_{(-\omega)}^{LP}$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel; dies bedeutet, dass die Richtung der großen Halbachse um 90° springt, wie auch aus den Abbildungen 6.7, 6.8 erkennbar wird.

Abbildung 6.5: Amplitudenverhältnis $|r + \Delta r|$ der Bewegungsellipse der Polbewegung bei periodischer Anregung

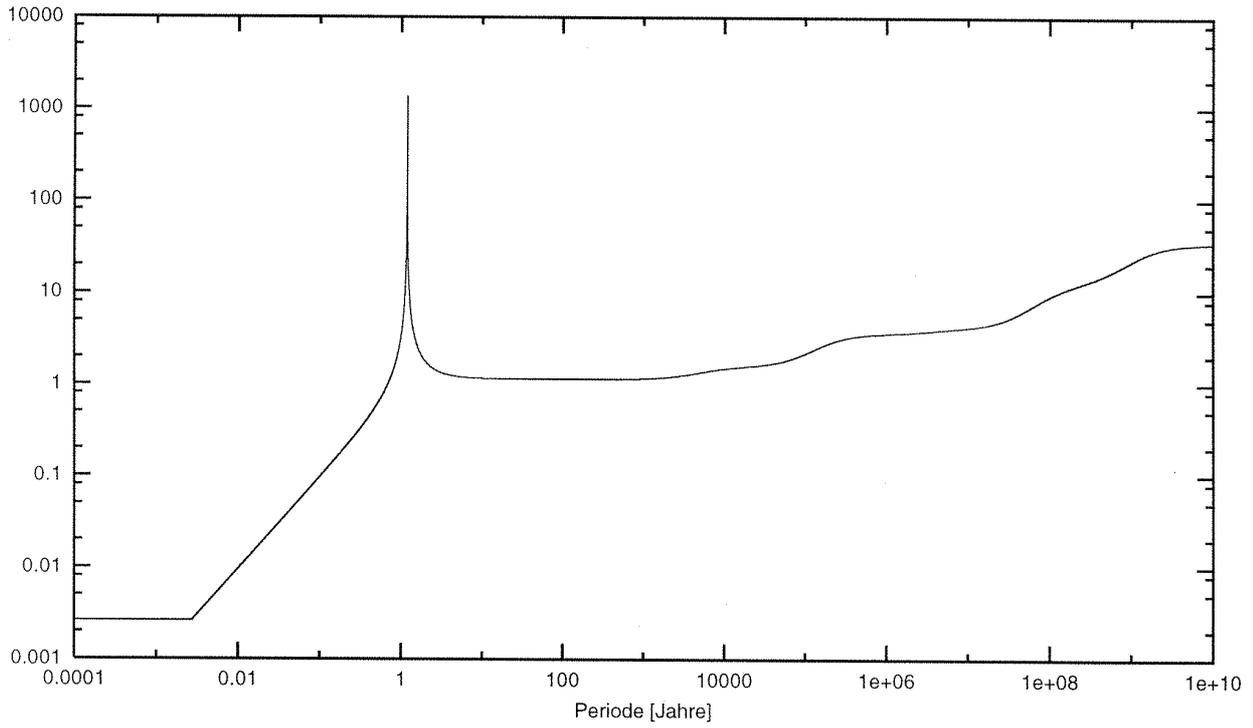


Abbildung 6.6: Exzentrizität der Bewegungsellipse der Polbewegung bei periodischer Anregung

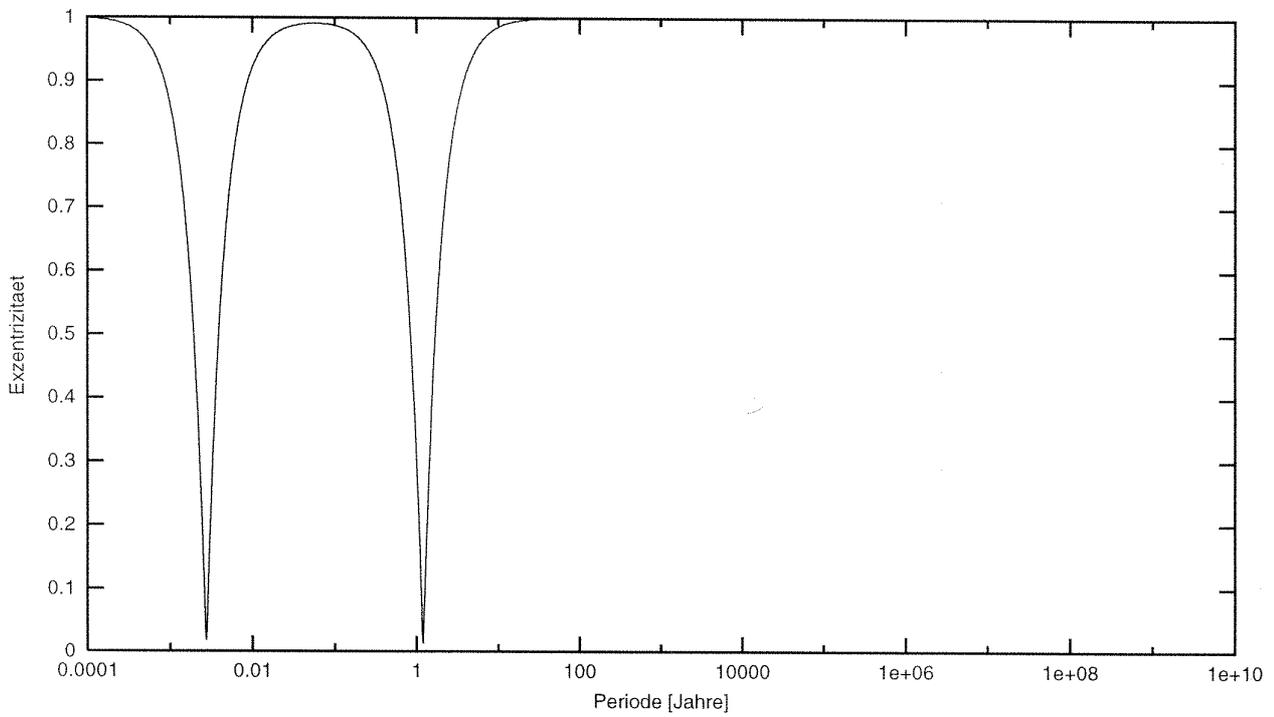


Abbildung 6.7: Additionskonstante γ^{LP} [Grad] zum Richtungswinkel der Bewegungsellipse der Polbewegung bei periodischer Anregung

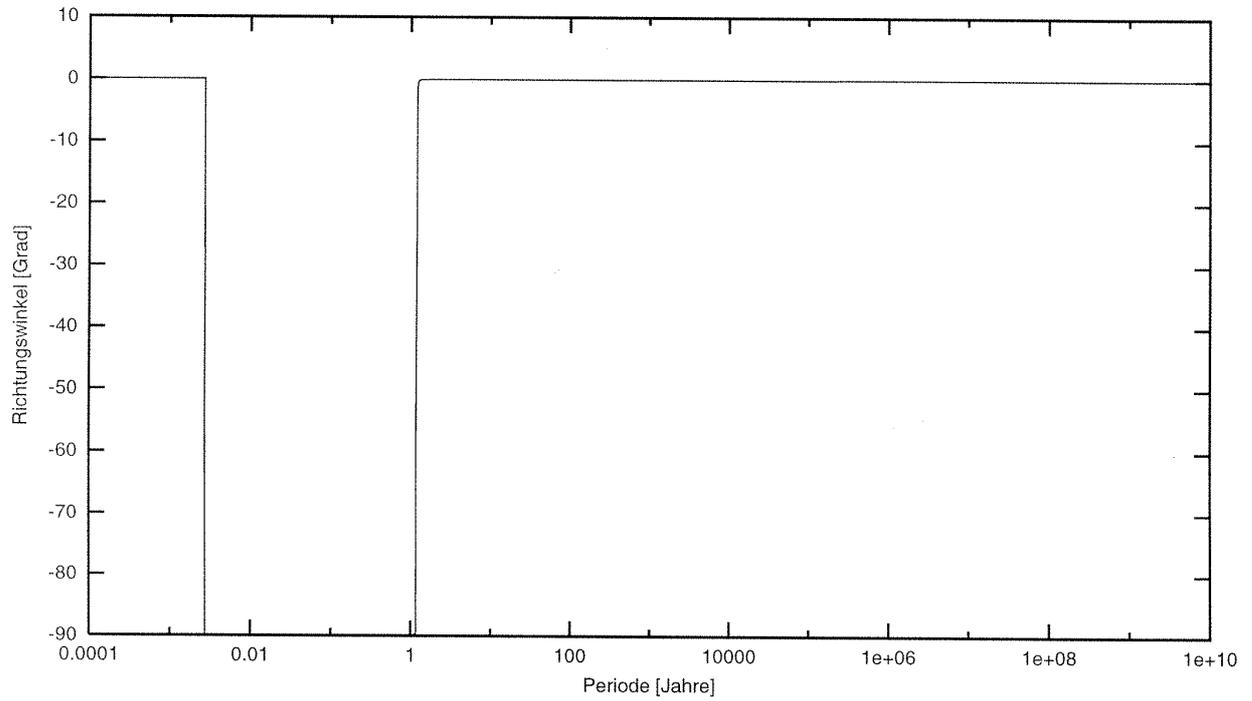


Abbildung 6.8: Phase des Halbachsendurchgangs β^{LP} [Grad]

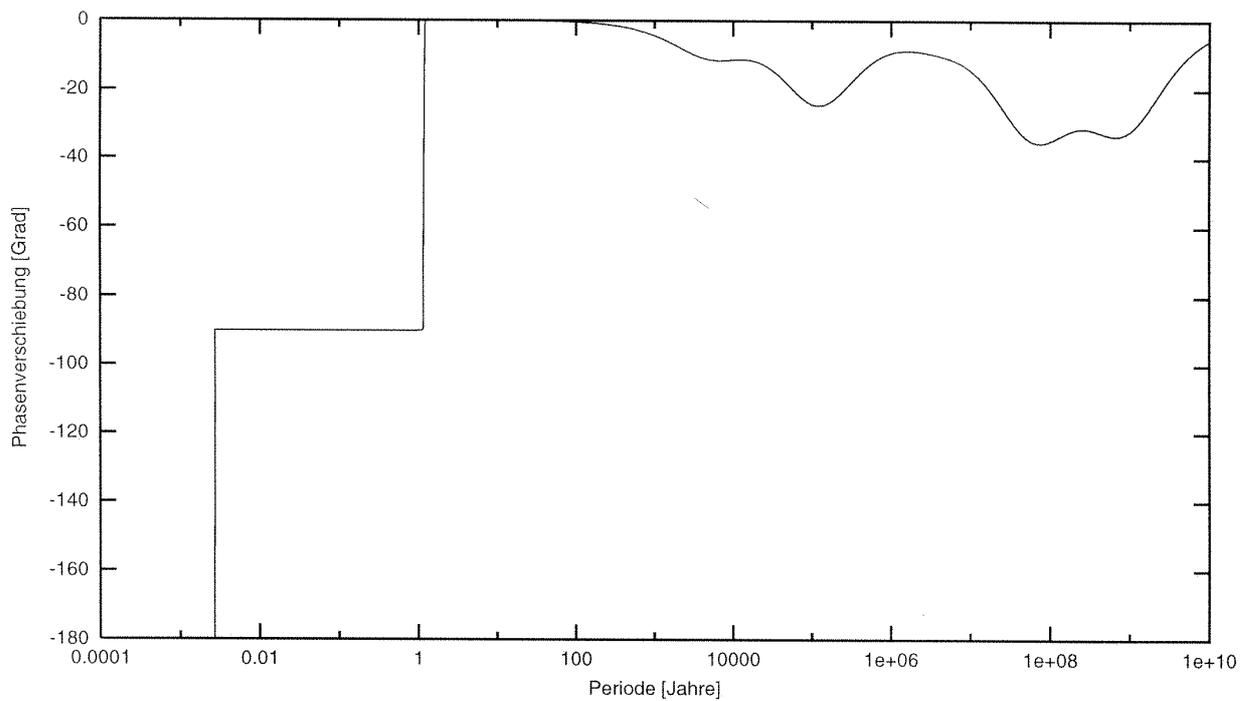
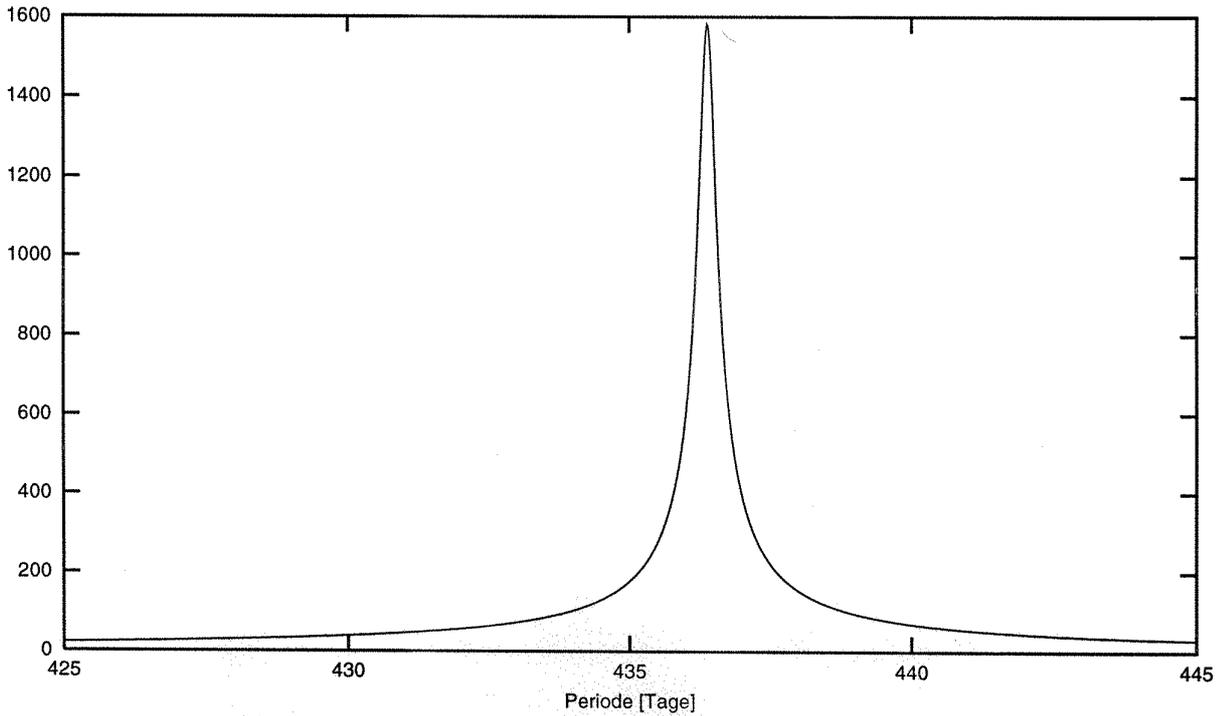


Abbildung 6.9: Amplitudenverhältnis $|r + \Delta r|$ der Bewegungsellipse der Polbewegung bei periodischer Anregung



Bei sehr großen und sehr kleinen Anregungsfrequenzen sind die Bewegungsellipsen stark abgeplattet, die Bewegung entartet nahezu zu einer Schwingung in Richtung der großen Halbachse. Analog zum Fall der frequenzabhängigen Love- und Last-Zahlen erreicht die Verhältniszahl der großen Halbachse für sehr große Frequenzen asymptotisch den elastischen Grenzwert, für sehr kleine Frequenzen den flüssigen Grenzwert:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (r + \Delta r) = k_E^{LP} \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} (r + \Delta r) = k_F^{LP}$$

Für sehr große Frequenzen schwingt der Zentrifugalpotential-Koeffizient $c_{2,-1}^{v1(Zent)}$ gegenphasig zum Lastpotential-Koeffizienten $c_{2,-1}^{v1(Last)}$, was in Abbildung 6.8 durch $\beta \approx 180^\circ$ zum Ausdruck kommt; für kleine Frequenzen schwingen die beiden Koeffizienten in nahezu gleicher Phase. Da m stets das zu $c_{2,-1}^{v1(Zent)}$ entgegengesetzte Vorzeichen besitzt, verhält sich m gerade umgekehrt. Das bedeutet: Wird eine (positive) Masse mit sehr kleiner Frequenz abwechselnd auf die nördliche Hälfte des Greenwicher Meridians aufgebracht und wieder weggenommen, so bewegt sich der Pol nahezu gegenphasig, also von der positiven Masse weg, zur negativen hin. Der Faktor, der zwischen dem Koeffizienten $c_{2,-1}^{v1(Zent)}$ des Zentrifugalpotentials und der Polbewegung m steht, beträgt im übrigen

$$-\frac{\sqrt{30}}{R_E^2 \Omega^2} = -2,5377 \cdot 10^{-5} \frac{rad \cdot sec^2}{m^2} = -5,2344 \frac{arcsec \cdot sec^2}{m^2}$$

Tabelle 6.9 zeigt die Parameter der periodischen Systemantwort für einige ausgezeichnete Frequenzen. Da infolge der Unregelmäßigkeiten der Meeresströmungen und des Klimas ein breites Frequenzband von Anregungen zur Verfügung steht, ist der Chandler-wobble tatsächlich der herausragende Anteil in der Polbewegung. Die Exzentrizität der Bewegung im Falle der jährlichen Bewegung liegt in der Größenordnung der tatsächlich beobachteten, siehe z.B. *H. Schuh et al. (2001)*.

Tabelle 6.9: Frequenzabhängige Parameter der Polbewegung bei periodischer Anregung

Periode	Amplitudenverh. $ r + \Delta r $	Exzentrizität	Additionskonst. γ^{LP}	Phasenversch. β^{LP}
0,5 Jahre	0,579	0,821	-89°,996	-89°,992
1 Jahr	3,190	0,298	-89°,952	-89°,947
436,39 d	1584,078	0,001	-45°,005	-45°,000
1000 Jahre	1,158	1,000	-0°,020	-4°,317
10000 Jahre	1,498	1,000	-0°,013	-11°,262
20000 Jahre	1,593	1,000	-0°,011	-11°,873

Schließlich geben wir die Ergebnisse der sphäroidischen Rechnungen bzw. die Verbesserungen an, die sich im Vergleich zur sphärischen Näherung ergeben.

Tabelle 6.10: Sphäroidische Zusatzterme der Lastzahl-Komponenten

j	$k_{2,-1;2;j}^{L1}$ [1/Jtd]	$-\frac{k_{2,-1;2;j}^{L1}}{s_j^{(2)}}$	$k_{2,-1;2;j}^{L2}$ [1/Jtd] ²	$\frac{k_{2,-1;2;j}^{L2}}{(s_j^{(2)})^2}$	$k_{2,-1;4;j}^{L1}$ [1/Jtd]	$-\frac{k_{2,-1;4;j}^{L1}}{s_j^{(2)}}$	$k_{2,-1;4;j}^{L2}$ [1/Jtd]	$-\frac{k_{2,-1;4;j}^{L2}}{s_j^{(4)}}$
0	-0,716·10 ⁻⁰⁷				0,202·10 ⁻⁰³			
1	-0,475·10 ⁻⁰³	-0,119·10 ⁻³	0,140·10 ⁻⁰³	0,879·10 ⁻⁵	-0,436·10 ⁻⁰³	-0,110·10 ⁻³	0,664·10 ⁻⁴	0,160·10 ⁻⁴
2	-0,581·10 ⁻⁰⁴	-0,164·10 ⁻⁴	0,113·10 ⁻⁰⁴	-0,897·10 ⁻⁶	-0,136·10 ⁻⁰³	-0,383·10 ⁻⁴	-0,361·10 ⁻⁵	-0,106·10 ⁻⁵
3	-0,351·10 ⁻⁰³	-0,124·10 ⁻³	0,304·10 ⁻⁰³	0,378·10 ⁻⁴	-0,134·10 ⁻⁰²	-0,473·10 ⁻³	0,292·10 ⁻³	0,108·10 ⁻³
4	-0,417·10 ⁻⁰⁴	-0,168·10 ⁻⁴	0,337·10 ⁻⁰⁶	0,548·10 ⁻⁷	-0,121·10 ⁻⁰³	-0,489·10 ⁻⁴	0,114·10 ⁻⁴	0,486·10 ⁻⁵
5	0,143·10 ⁻⁰²	0,706·10 ⁻³	0,402·10 ⁻⁰³	0,982·10 ⁻⁴	-0,194·10 ⁻⁰²	-0,960·10 ⁻³	0,515·10 ⁻²	0,451·10 ⁻²
6	0,167·10 ⁻⁰³	0,372·10 ⁻³	0,267·10 ⁻⁰⁴	0,132·10 ⁻³	0,574·10 ⁻⁰²	0,128·10 ⁻¹	-0,497·10 ⁻²	-0,110·10 ⁻¹
7	0,394·10 ⁻⁰⁶	0,358·10 ⁻⁵	0,882·10 ⁻⁰⁸	0,728·10 ⁻⁶	-0,845·10 ⁻⁰⁵	-0,768·10 ⁻⁴	0,283·10 ⁻⁵	0,112·10 ⁻⁴
8	0,407·10 ⁻⁰⁷	0,216·10 ⁻⁴	0,207·10 ⁻¹²	0,583·10 ⁻⁷	-0,233·10 ⁻⁰⁶	-0,124·10 ⁻³	0,152·10 ⁻⁵	0,393·10 ⁻³
9	0,213·10 ⁻⁰⁶	0,151·10 ⁻³	0,598·10 ⁻¹⁰	0,301·10 ⁻⁴	-0,376·10 ⁻⁰⁷	-0,266·10 ⁻⁴	0,809·10 ⁻⁶	0,435·10 ⁻³
10	0,374·10 ⁻⁰⁹	0,105·10 ⁻⁴	0,285·10 ⁻¹⁴	0,224·10 ⁻⁵	-0,445·10 ⁻¹⁰	-0,125·10 ⁻⁵	0,570·10 ⁻⁸	0,570·10 ⁻⁴
11	0,206·10 ⁻¹⁰	0,122·10 ⁻⁴	0,250·10 ⁻¹⁷	0,878·10 ⁻⁶	-0,288·10 ⁻¹⁰	-0,171·10 ⁻⁴	0,113·10 ⁻⁹	0,568·10 ⁻⁴

Die durch die Trägheitsterme hervorgerufenen Komponenten k_j sind sämtlich kleiner als 10⁻⁸ und werden daher hier nicht angegeben.

Tabelle 6.11: Sphäroidische Zusatzterme der Lovezahl-Komponenten

j	$k_{2,-1;2;j}^{T1}$ [1/Jtd]	$-\frac{k_{2,-1;2;j}^{T1}}{s_j^{(2)}}$	$k_{2,-1;2;j}^{T2}$ [1/Jtd] ²	$\frac{k_{2,-1;2;j}^{T2}}{(s_j^{(2)})^2}$
0	-0,221·10 ⁻⁰²			
1	0,289·10 ⁻⁰³	0,725·10 ⁻⁴	-0,218·10 ⁻⁰³	-0,137·10 ⁻⁴
2	-0,153·10 ⁻⁰³	-0,433·10 ⁻⁴	0,128·10 ⁻⁰⁴	0,102·10 ⁻⁵
3	-0,350·10 ⁻⁰³	-0,123·10 ⁻³	-0,407·10 ⁻⁰³	-0,506·10 ⁻⁴
4	-0,111·10 ⁻⁰³	-0,446·10 ⁻⁴	-0,353·10 ⁻⁰⁶	-0,573·10 ⁻⁷
5	-0,273·10 ⁻⁰²	-0,135·10 ⁻²	-0,512·10 ⁻⁰³	-0,125·10 ⁻³
6	-0,251·10 ⁻⁰³	-0,559·10 ⁻³	-0,154·10 ⁻⁰⁴	-0,761·10 ⁻⁴
7	-0,336·10 ⁻⁰⁵	-0,305·10 ⁻⁴	-0,331·10 ⁻⁰⁷	-0,273·10 ⁻⁵
8	-0,159·10 ⁻⁰⁶	-0,845·10 ⁻⁴	-0,195·10 ⁻¹¹	-0,551·10 ⁻⁶
9	-0,634·10 ⁻⁰⁷	-0,450·10 ⁻⁴	-0,846·10 ⁻¹¹	-0,425·10 ⁻⁵
10	-0,403·10 ⁻¹⁰	-0,113·10 ⁻⁵	-0,144·10 ⁻¹⁵	-0,114·10 ⁻⁶
11	-0,842·10 ⁻¹²	-0,499·10 ⁻⁶	-0,500·10 ⁻¹⁹	-0,176·10 ⁻⁷

Tabelle 6.12: Komplexe Moden und Kennzahlen der sphäroidisch gestörten Polwanderung bzw. -bewegung I

Nr.	$Re(\hat{a}_j)$ [1/Jtd]	$Im(\hat{a}_j)$ [1/Jtd]	$Re(\hat{A}_j^{(2)})$ [1/Jtd]	$Im(\hat{A}_j^{(2)})$ [1/Jtd]	$-Re(\hat{A}_j^{(2)}/\hat{a}_j)$	$-Im(\hat{A}_j^{(2)}/\hat{a}_j)$
0	0,000000·10 ⁺⁰	0,000000·10 ⁺⁰⁰	-0,259896·10 ⁻²	0,000000·10 ⁺⁰		
1	-0,387737·10 ⁺¹	0,291911·10 ⁻⁰⁴	0,314029·10 ⁻¹	0,339385·10 ⁻⁴	0,809903·10 ⁻²	0,881395·10 ⁻⁵
2	-0,345629·10 ⁺¹	0,254624·10 ⁻⁰⁴	0,105761·10 ⁻¹	0,274028·10 ⁻⁴	0,305997·10 ⁻²	0,795093·10 ⁻⁵
3	-0,262245·10 ⁺¹	0,241845·10 ⁻⁰⁴	0,323145·10 ⁻¹	0,202861·10 ⁻⁴	0,123223·10 ⁻¹	0,784917·10 ⁻⁵
4	-0,238606·10 ⁺¹	0,214401·10 ⁻⁰⁴	0,119763·10 ⁻¹	0,221692·10 ⁻⁴	0,501927·10 ⁻²	0,933625·10 ⁻⁵
5	-0,189695·10 ⁺¹	0,523913·10 ⁺⁰⁴	-0,574882·10 ⁺⁰	-0,599422·10 ⁺⁴	0,114413·10 ⁺¹	-0,523986·10 ⁻³
6	-0,103952·10 ⁺¹	0,152076·10 ⁻⁰³	0,425477·10 ⁺⁰	0,119620·10 ⁻³	0,409301·10 ⁺⁰	0,174951·10 ⁻³
7	-0,123482·10 ⁺⁰	0,280681·10 ⁻⁰⁵	-0,558817·10 ⁻²	0,342748·10 ⁻⁵	-0,452549·10 ⁻¹	0,267282·10 ⁻⁴
8	-0,338513·10 ⁻¹	0,512444·10 ⁻⁰⁵	0,709675·10 ⁻¹	-0,227405·10 ⁻⁵	0,209645·10 ⁺¹	0,250184·10 ⁻³
9	-0,163454·10 ⁻²	0,310204·10 ⁻⁰⁹	0,839232·10 ⁻³	0,928785·10 ⁻⁹	0,513435·10 ⁺⁰	0,665662·10 ⁻⁶
10	-0,581663·10 ⁻⁴	0,194026·10 ⁻⁰⁹	0,426072·10 ⁻³	-0,311073·10 ⁻⁸	0,732508·10 ⁺¹	-0,290456·10 ⁻⁴
11	-0,435904·10 ⁻⁵	0,131789·10 ⁻¹⁰	0,103210·10 ⁻³	-0,331474·10 ⁻⁹	0,236773·10 ⁺²	-0,445791·10 ⁻⁵

Tabelle 6.13: Sphäroidische Verbesserungen in den Moden \hat{a}_j und den Kennzahlen $\hat{A}_j^{(2)}$

Nr.	$Re(\hat{\delta a}_j)$ [1/Jtd]	$Im(\hat{\delta a}_j)$ [1/Jtd]	$Re(\delta \hat{A}_j^{(2)(0)})$ [1/Jtd]	$Im(\delta \hat{A}_j^{(2)(0)})$ [1/Jtd]	$-Re(\frac{\delta \hat{A}_j^{(2)(0)}}{\hat{a}_j})$	$-Im(\frac{\delta \hat{A}_j^{(2)(0)}}{\hat{a}_j})$
0	0.000·10 ⁺⁰	0.000·10 ⁺⁰⁰	0.342·10 ⁻⁵	0.000·10 ⁺⁰⁰		
1	-0.683·10 ⁻³	0.239·10 ⁻⁰⁶	0.186·10 ⁻³	0.337·10 ⁻⁰⁶	0.466·10 ⁻⁴	0.863·10 ⁻⁷
2	0.208·10 ⁻³	0.788·10 ⁻⁰⁷	0.215·10 ⁻⁴	0.138·10 ⁻⁰⁶	0.640·10 ⁻⁵	0.405·10 ⁻⁷
3	-0.313·10 ⁻³	0.174·10 ⁻⁰⁶	0.166·10 ⁻³	0.180·10 ⁻⁰⁶	0.619·10 ⁻⁴	0.690·10 ⁻⁷
4	0.159·10 ⁻³	0.756·10 ⁻⁰⁷	0.300·10 ⁻⁴	0.116·10 ⁻⁰⁶	0.129·10 ⁻⁴	0.495·10 ⁻⁷
5	-0.208·10 ⁻²	-0.197·10 ⁺⁰²	-0.208·10 ⁻²	0.794·10 ⁺⁰¹	0.278·10 ⁻²	-0.381·10 ⁻⁵
6	-0.951·10 ⁻³	0.924·10 ⁻⁰⁶	0.145·10 ⁻²	0.106·10 ⁻⁰⁵	0.102·10 ⁻²	0.138·10 ⁻⁵
7	-0.288·10 ⁻⁴	0.823·10 ⁻⁰⁸	-0.130·10 ⁻⁴	0.196·10 ⁻⁰⁷	-0.944·10 ⁻⁴	0.147·10 ⁻⁶
8	0.446·10 ⁻⁴	0.172·10 ⁻⁰⁷	0.228·10 ⁻³	-0.383·10 ⁻⁰⁷	0.947·10 ⁻²	0.169·10 ⁻⁵
9	-0.634·10 ⁻⁶	0.126·10 ⁻¹¹	0.163·10 ⁻⁵	0.101·10 ⁻¹⁰	0.799·10 ⁻³	0.647·10 ⁻⁸
10	-0.503·10 ⁻⁷	0.142·10 ⁻¹¹	0.172·10 ⁻⁵	-0.298·10 ⁻¹⁰	0.232·10 ⁻¹	-0.232·10 ⁻⁶
11	0.612·10 ⁻⁸	0.389·10 ⁻¹³	0.384·10 ⁻⁶	-0.386·10 ⁻¹¹	0.121·10 ⁺⁰	-0.314·10 ⁻⁶

Tabelle 6.14: Komplexe Moden und Kennzahlen der sphäroidisch gestörten Polwanderung bzw. -bewegung II

Nr.	$Re(\hat{a}_j)$ [1/Jtd]	$Im(\hat{a}_j)$ [1/Jtd]	$Re(\hat{A}_j^{(2)})$ [1/Jtd]	$Im(\hat{A}_j^{(2)})$ [1/Jtd]	$-Re(\hat{A}_j^{(2)}/\hat{a}_j)$	$-Im(\hat{A}_j^{(2)}/\hat{a}_j)$
12	-0,398394·10 ⁺¹	-0,420504·10 ⁻⁰⁸	-0,220484·10 ⁻⁵	-0,265163·10 ⁻⁰⁸	-0,553431·10 ⁻⁶	-0,665580·10 ⁻⁰⁹
13	-0,354283·10 ⁺¹	-0,502831·10 ⁻¹⁰	-0,215041·10 ⁻⁶	-0,443789·10 ⁻¹⁰	-0,606976·10 ⁻⁷	-0,125264·10 ⁻¹⁰
14	-0,283261·10 ⁺¹	-0,121360·10 ⁻⁰⁸	0,652000·10 ⁻⁶	-0,907850·10 ⁻⁰⁹	0,230177·10 ⁻⁶	-0,320500·10 ⁻⁰⁹
15	-0,248204·10 ⁺¹	-0,731900·10 ⁻¹³	0,786770·10 ⁻⁸	-0,703901·10 ⁻¹³	0,316985·10 ⁻⁸	-0,283597·10 ⁻¹³
16	-0,202199·10 ⁺¹	-0,876803·10 ⁻⁰⁹	0,109952·10 ⁻⁵	-0,690797·10 ⁻⁰⁹	0,543782·10 ⁻⁶	-0,341643·10 ⁻⁰⁹
17	-0,449251·10 ⁺⁰	-0,252410·10 ⁻¹⁰	0,574050·10 ⁻⁶	-0,440552·10 ⁻¹⁰	0,127779·10 ⁻⁵	-0,980639·10 ⁻¹⁰
18	-0,110046·10 ⁺⁰	-0,275189·10 ⁻¹⁰	0,546013·10 ⁻⁷	-0,747838·10 ⁻¹¹	0,496167·10 ⁻⁶	-0,679569·10 ⁻¹⁰
19	-0,188407·10 ⁻²	-0,802844·10 ⁻¹⁶	-0,196486·10 ⁻⁹	-0,787068·10 ⁻¹⁷	-0,104288·10 ⁻⁶	-0,417748·10 ⁻¹⁴
20	-0,140992·10 ⁻²	-0,362636·10 ⁻¹⁴	0,333276·10 ⁻⁸	-0,256783·10 ⁻¹³	0,236380·10 ⁻⁵	-0,182127·10 ⁻¹⁰
21	-0,356211·10 ⁻⁴	-0,665207·10 ⁻¹⁶	0,330254·10 ⁻⁹	-0,131731·10 ⁻¹⁴	0,927131·10 ⁻⁵	-0,369813·10 ⁻¹⁰
22	-0,168672·10 ⁻⁵	-0,385806·10 ⁻¹⁸	0,108523·10 ⁻⁹	-0,195728·10 ⁻¹⁶	0,643400·10 ⁻⁴	-0,116041·10 ⁻¹⁰

Tabelle 6.15: Komplexe Moden und Kennzahlen der sphäroidisch gestörten Polwanderung bzw. -bewegung III

Nr.	$Re(\hat{a}_j)$ [1/Jtd]	$Im(\hat{a}_j)$ [1/Jtd]	$Re(A_j^{(4)})$ [1/Jtd]	$Im(A_j^{(4)})$ [1/Jtd]	$-Re(A_j^{(4)}/\hat{a}_j)$	$-Im(A_j^{(4)}/\hat{a}_j)$
1	$-0,387737 \cdot 10^{+1}$	$0,291911 \cdot 10^{-04}$	$-0,522408 \cdot 10^{-3}$	$-0,178980 \cdot 10^{-06}$	$-0,134733 \cdot 10^{-3}$	$-0,471744 \cdot 10^{-7}$
2	$-0,345629 \cdot 10^{+1}$	$0,254624 \cdot 10^{-04}$	$-0,409559 \cdot 10^{-3}$	$-0,176275 \cdot 10^{-06}$	$-0,118497 \cdot 10^{-3}$	$-0,518742 \cdot 10^{-7}$
3	$-0,262245 \cdot 10^{+1}$	$0,241845 \cdot 10^{-04}$	$-0,565933 \cdot 10^{-3}$	$-0,511825 \cdot 10^{-07}$	$-0,215803 \cdot 10^{-3}$	$-0,215072 \cdot 10^{-7}$
4	$-0,238606 \cdot 10^{+1}$	$0,214401 \cdot 10^{-04}$	$-0,613177 \cdot 10^{-3}$	$-0,122916 \cdot 10^{-06}$	$-0,256983 \cdot 10^{-3}$	$-0,538232 \cdot 10^{-7}$
5	$-0,189695 \cdot 10^{+1}$	$0,523913 \cdot 10^{+04}$	$0,122923 \cdot 10^{-1}$	$0,439385 \cdot 10^{+02}$	$-0,838661 \cdot 10^{-2}$	$0,538282 \cdot 10^{-5}$
6	$-0,103952 \cdot 10^{+1}$	$0,152076 \cdot 10^{-03}$	$0,469275 \cdot 10^{-1}$	$-0,900220 \cdot 10^{-04}$	$0,451434 \cdot 10^{-1}$	$-0,799953 \cdot 10^{-4}$
7	$-0,123482 \cdot 10^{+0}$	$0,280681 \cdot 10^{-05}$	$0,200538 \cdot 10^{-3}$	$-0,561638 \cdot 10^{-07}$	$0,162402 \cdot 10^{-2}$	$-0,417919 \cdot 10^{-6}$
8	$-0,338513 \cdot 10^{-1}$	$0,512444 \cdot 10^{-05}$	$-0,732587 \cdot 10^{-3}$	$0,352905 \cdot 10^{-07}$	$-0,216413 \cdot 10^{-1}$	$-0,223356 \cdot 10^{-5}$
9	$-0,163454 \cdot 10^{-2}$	$0,310204 \cdot 10^{-09}$	$0,555493 \cdot 10^{-5}$	$-0,790171 \cdot 10^{-11}$	$0,339846 \cdot 10^{-2}$	$-0,418924 \cdot 10^{-8}$
10	$-0,581663 \cdot 10^{-4}$	$0,194026 \cdot 10^{-09}$	$0,485823 \cdot 10^{-5}$	$-0,827711 \cdot 10^{-10}$	$0,835232 \cdot 10^{-1}$	$-0,114440 \cdot 10^{-5}$
11	$-0,435904 \cdot 10^{-5}$	$0,131789 \cdot 10^{-10}$	$0,121347 \cdot 10^{-5}$	$-0,131779 \cdot 10^{-10}$	$0,278380 \cdot 10^{+0}$	$-0,218148 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 6.16: Komplexe Moden und Kennzahlen der sphäroidisch gestörten Polwanderung bzw. -bewegung IV

Nr.	$s_j^{(4)}$ [1/Jtd]	$Re(S_j^{(4)})$ [1/Jtd]	$Im(S_j^{(4)})$ [1/Jtd]	$-Re(S_j^{(4)}/s_j^{(4)})$	$-Im(S_j^{(4)}/s_j^{(4)})$
1	$-0,413756 \cdot 10^{+1}$	$0,257703 \cdot 10^{-4}$	$0,517107 \cdot 10^{-08}$	$0,622838 \cdot 10^{-5}$	$0,124979 \cdot 10^{-8}$
2	$-0,339041 \cdot 10^{+1}$	$-0,518296 \cdot 10^{-5}$	$-0,317757 \cdot 10^{-08}$	$-0,152871 \cdot 10^{-5}$	$-0,937222 \cdot 10^{-9}$
3	$-0,269055 \cdot 10^{+1}$	$-0,264886 \cdot 10^{-3}$	$0,821683 \cdot 10^{-07}$	$-0,984506 \cdot 10^{-4}$	$0,305396 \cdot 10^{-7}$
4	$-0,234096 \cdot 10^{+1}$	$0,219203 \cdot 10^{-4}$	$0,124625 \cdot 10^{-07}$	$0,936383 \cdot 10^{-5}$	$0,532369 \cdot 10^{-8}$
5	$-0,114238 \cdot 10^{+1}$	$-0,562120 \cdot 10^{-1}$	$0,884893 \cdot 10^{-04}$	$-0,492062 \cdot 10^{-1}$	$0,774608 \cdot 10^{-4}$
6	$-0,452869 \cdot 10^{+0}$	$-0,209462 \cdot 10^{-3}$	$-0,477030 \cdot 10^{-09}$	$-0,462521 \cdot 10^{-3}$	$-0,105335 \cdot 10^{-8}$
7	$-0,252680 \cdot 10^{+0}$	$-0,114493 \cdot 10^{-4}$	$0,148094 \cdot 10^{-08}$	$-0,453113 \cdot 10^{-4}$	$0,586095 \cdot 10^{-8}$
8	$-0,385477 \cdot 10^{-2}$	$0,396759 \cdot 10^{-4}$	$0,505971 \cdot 10^{-09}$	$0,102927 \cdot 10^{-1}$	$0,131258 \cdot 10^{-6}$
9	$-0,185877 \cdot 10^{-2}$	$-0,976410 \cdot 10^{-6}$	$0,275173 \cdot 10^{-12}$	$-0,525300 \cdot 10^{-3}$	$0,148041 \cdot 10^{-9}$
10	$-0,999856 \cdot 10^{-4}$	$-0,570471 \cdot 10^{-5}$	$0,721014 \cdot 10^{-10}$	$-0,570553 \cdot 10^{-1}$	$0,721119 \cdot 10^{-6}$
11	$-0,198617 \cdot 10^{-5}$	$0,288174 \cdot 10^{-6}$	$0,185218 \cdot 10^{-12}$	$0,145090 \cdot 10^{+0}$	$0,932539 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 6.17: Flüssige Grenzwerte der Polverlagerung:

$Re(k_{F,2}^{LP})$	$Im(k_{F,2}^{LP})$	$Re(k_{F,4}^{LP})$	$Im(k_{F,4}^{LP})$
$0,351464 \cdot 10^{+2}$	$-0,710123 \cdot 10^{-4}$	$0,429319 \cdot 10^{+0}$	$-0,232090 \cdot 10^{-5}$

Allgemein sind die Zusatzterme etwa zwei Größenordnungen kleiner als die "sphärischen Größen". Offensichtlich sind die Vorzeichen hier nicht mehr einheitlich. Die Beiträge zum flüssigen Grenzwert der Polverlagerung liegen bei 4 Promille für den Grad 2 und bei 1 Prozent für den Grad 4 des Lastpotentials. Obwohl eine Polwanderung im Falle einer homogenen Erde überhaupt nicht auftritt, handelt es sich also offensichtlich nicht um einen "Effekt zweiter Ordnung" in dem Sinne, dass er durch sphäroidische Effekte wesentlich beeinflusst werden könnte.

7. Ausblick

Die Bestimmung der zeitlichen Änderungen der Erdfigur und der Erdrotation bildet ein Forschungsgebiet, das nach wie vor eine Fülle von offenen theoretischen Problemen bietet. Zum ersten sind es die lateralen Inhomogenitäten im Erdinneren, die ein lokal sehr unterschiedliches Deformationsverhalten verursachen. Während sich im Falle einer Gezeitenanregung die Einflüsse dieser Inhomogenitäten zum Teil "herausmitteln" (zumindest was die Love-Zahlen h und k betrifft), sind die durch Auflasten verursachten Deformationen stark von den Parametern der *oberflächennahen Schichten* abhängig, die lateral wiederum besonders stark variieren. Hier stößt der Formalismus der Kugelflächenfunktionen an eine gewisse Grenze, auch wenn er insbesondere bei der Interpretation von Ergebnissen weiter eine wichtige Rolle spielen wird. Die Zukunft bei den numerischen Berechnungen dürfte aber den Finite-Elemente-Modelle gehören. Erste Versuche in diese Richtung wurden bereits unternommen (*P. Wu 1992, H. Müller und G. Schulz 1999, A.M. Abolghasem 2001*). Neben der Komplexität solcher dreidimensionaler Modelle verursacht hier offenbar noch die Einbeziehung der inkrementellen Gravitation gewisse Probleme. Dagegen dürfte die Handhabung kompressibler Modelle (die in der vorliegenden Arbeit ausgeklammert wurden; siehe z.B. *B. Vermeersen et al. 1996*) keine größeren Schwierigkeiten bereiten. Anlass zu theoretischen Untersuchungen könnte hier allerdings noch die Adams-Williamson-Gleichung geben, die im Falle von homogenen Schichtungen verletzt ist.

Zum zweiten dürften zukünftige Arbeiten sich mehr der Lösung im Zeitbereich widmen. Solche Lösungen sind kaum noch halbanalytisch zu erzielen, können aber auch nichtlineare Effekte einbeziehen (also beispielsweise die in der vorliegenden Arbeit vernachlässigten nichtlinearen Terme in der Drehimpulsbilanz). Außerdem lassen sich im Zeitbereich Kopplungen verschiedener Einflüsse auf die Erdrotation leichter studieren. Für jede Schicht des Erdkörpers (Lithosphäre, oberer und unterer Mantel, flüssiger Kern usw.) wird ein Modul angelegt, das die Zustandsgrößen der jeweiligen Schicht in bestimmten Zeitschritten nachführt. In *H.U. Jüttner und H.P. Plag 1999* werden erste Ansätze zu einem integrierten Systemmodell der Erdrotation vorgestellt. Diesbezüglich wäre eine gemeinsame Anstrengung verschiedener Forschungsgruppen wünschenswert.

Die numerischen Ergebnisse von Modellrechnungen hängen naturgemäß von den Eingangsparametern ab, die von der geophysikalischen Forschung bereitgestellt werden. Diese Parameter sind jedoch teilweise noch umstritten (beispielsweise unterscheiden sich die Angaben in der Literatur über die dynamische Viskosität des Mantels um Größenordnungen). Häufig werden die Modellparameter als Lösung eines inversen Problems bestimmt, d.h. die Parameter werden so gewählt, dass das Modell zu realistischen Ergebnissen in der Erdrotation führt. Hier wäre eine Sensitivitätsanalyse wünschenswert, die die Auswirkung einer Variation der Eingangsparameter auf die Parameter der Erdrotation aufzeigte.

Als letztes Problem sei noch die Bestimmung realistischer Anregungsfunktionen genannt. So wird beispielsweise die Eisbedeckung der Kontinente häufig mit Hilfe der Strandlinien modelliert. Eine Ablagerung von Eis auf den Kontinenten geht mit einer eustatischen Absenkung des Meeresspiegels einher, umgekehrt lässt sich aus dem globalen mittleren Meeresspiegel zu einer bestimmten Zeitepoche die "Menge des verfügbaren Eises" ableiten. Andererseits werden die Strandlinien auch von der regionalen eiszeitlichen Absenkung bzw. der nacheiszeitlichen Hebung beeinflusst. Bei bekanntem Verlauf der Strandlinien sind also sowohl die Eisbedeckung als auch die Landhebung bzw. -absenkung zunächst als Unbekannte anzusehen.

Abschließend bleibt festzustellen: Im Gegensatz zu anderen Gebieten der Geodäsie, die mehr oder weniger abgeschlossen gelten dürfen, wird die Bestimmung der zeitlichen Änderungen der Erdfigur und der inkrementellen Rotation der Erde noch lange ein aktueller Gegenstand der geodätischen Forschung bleiben.

A Kugelfunktionen

In diesem Abschnitt fassen wir die wichtigsten Definitionen und Formelbeziehungen der Kugelfunktionen zusammen, soweit sie für die vorliegende Arbeit von Interesse sind. Dabei greifen wir auf die Arbeiten von *E. H. Knickmeyer (1984)*, *P. Georgiadou (1984)* sowie *H. W. Mikolajski (1989)* zurück. Wir verzichten weitgehend auf Beweise der angegebenen Formeln; sie sind - neben einer weitergehenden Diskussion der Kugelflächenfunktionen - in den Arbeiten von *J. A. Gaunt (1929)*, *E. W. Hobson (1931)*, *G. Racah (1942)*, *A. R. Edmonds (1964)*, *R. A. Phinney, R. Burridge (1973)* sowie *D. E. Winch, R. W. James (1973)* zu finden. Die einzuführenden Funktionen werden in der Literatur mit unterschiedlichen Normierungsfaktoren definiert, was bei den abgeleiteten Beziehungen zu berücksichtigen ist.

A-1 Skalare Kugelflächenfunktionen - Definitionen und Eigenschaften

A-1.1: Legendre'sche Funktionen 1. Art:

Definierende Differentialgleichung:

$$-\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{d}{dx}f(x)) - \left[l(l+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right] f(x) = 0$$

(A-1)
(Legendre'sche Dgl.)

Lösungen sind unter anderem die *Legendre'schen Funktionen 1. Art*

$$P_{lm}(x) := \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l, \quad \text{mit } l \geq |m| \geq 0; \text{ negative } m \text{ sind zugelassen.}$$

(A-2)

Äquivalent hierzu ist die Definition

$$P_{lm}(x) := \frac{1}{2^l} (1-x^2)^{m/2} \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{k!(l-k)!(l-m-2k)!} x^{l-m-2k}$$

(A-3)
mit $l \geq |m| \geq 0$

r ist die größte ganze Zahl für die $r \leq \frac{(l-m)}{2}$ gilt. In unseren Anwendungen tritt stets $x = \sin \Phi$ als Argument auf.

Aus der Definition von P_{lm} folgt

$$P_{l,-m} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}$$

(A-4)

L_2 -Innenprodukt:

$$\int_{-1}^{+1} P_{l_1 m} P_{l_2 m} dx = \frac{2(l_1+m)!}{(2l_1+1)(l_1-m)!} \delta_{l_1 l_2}$$

(A-5)

Rekursionsformeln:

$$P_{l+1,m} = \frac{1}{l-m+1} [(2l+1) \sin \Phi P_{lm} - (l+m) P_{l-1,m}]$$

(A-6)

$$(2l+1) \cos \Phi \frac{dP_{lm}}{d\Phi} = (l+1)(l+m) P_{l-1,m} - l(l-m+1) P_{l+1,m}$$

(A-7)

Definierende Differentialgleichung der skalaren Kugelflächenfunktionen:

$$\frac{\partial^2 f(\Lambda, \Phi)}{\partial \Phi^2} - \tan \Phi \frac{\partial f(\Lambda, \Phi)}{\partial \Phi} + \frac{1}{\cos^2 \Phi} \frac{\partial^2 f(\Lambda, \Phi)}{\partial \Lambda^2} + l(l+1) f(\Lambda, \Phi) = 0$$

(A-8)

(Laplace-Beltrami-Gleichung bezüglich der Kugeloberfläche)

Lösungen sind

(a) Reellwertige vollständig normierte Kugelflächenfunktionen

$$e_{\Phi\Lambda}^{lm} := \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{2(2l+1)} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(\sin\Phi) \cos m\Lambda & \text{für } 0 < m < l \\ \sqrt{2l+1} P_{l0}(\sin\Phi) & \text{für } m = 0 \\ \sqrt{2(2l+1)} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} P_{l,|m|}(\sin\Phi) \sin |m|\Lambda & \text{für } 0 < -m < l \end{array} \right\} \quad (\text{A-9})$$

(b) Komplexwertige vollständig normierte Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\Lambda, \Phi) := (-1)^m \sqrt{2(2l+1)} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(\sin\Phi) \exp(im\Lambda) \quad (\text{A-10})$$

für $0 \leq |m| \leq l$

Komplex-konjugierte Funktion:

$$Y_{lm}^* = Y_{lm} \exp(-2im\Lambda) = (-1)^m Y_{l,-m} \quad (\text{A-11})$$

Real- und Imaginärteile der Kff alternierender Ordnung:

$$\Re(Y_{l,-m}) = (-1)^m \Re(Y_{l,m}) \quad \Im(Y_{l,-m}) = (-1)^{m+1} \Im(Y_{l,m}) \quad (\text{A-12})$$

Zusammenhang zwischen den reell- und komplexwertigen Kugelflächenfunktionen:

Für $m = 0$ gilt

$$e_{\Phi\Lambda}^{l,0} = Y_{l,0}(\Lambda, \Phi)$$

Für $m > 0$ gilt

$$\begin{bmatrix} e_{\Phi\Lambda}^{lm} \\ e_{\Phi\Lambda}^{l,-m} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (-1)^m & 1 \\ (-1)^{m+1}i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{lm} \\ Y_{l,-m} \end{bmatrix} \quad (\text{A-13})$$

Die Transformationsmatrix ist *unitär*, die inverse Transformation lautet für $m > 0$

$$\begin{bmatrix} Y_{lm} \\ Y_{l,-m} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (-1)^m & (-1)^m i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\Phi\Lambda}^{lm} \\ e_{\Phi\Lambda}^{l,-m} \end{bmatrix} \quad (\text{A-14})$$

Zusammenhang zwischen den entsprechenden Kugelfunktionskoeffizienten:

Sei $m > 0$ und die Funktion

$$f(\Lambda, \Phi) := c_{lm} e_{\Phi\Lambda}^{lm} + c_{l,-m} e_{\Phi\Lambda}^{l,-m} = \hat{c}_{lm} Y_{lm} + \hat{c}_{l,-m} Y_{l,-m}$$

reell (über l, m wird hier nicht summiert; die konstanten Koeffizienten $c_{l,\pm m}$ seien reell). Dann lautet die Transformation zwischen den Koeffizienten

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_{l,m} \\ \hat{c}_{l,-m} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (-1)^m & (-1)^{m+1}i \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{lm} \\ c_{l,-m} \end{bmatrix} \quad (\text{A-15})$$

$$\begin{bmatrix} c_{l,m} \\ c_{l,-m} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (-1)^m & 1 \\ (-1)^m i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_{lm} \\ \hat{c}_{l,-m} \end{bmatrix} \quad (\text{A-16})$$

Damit f reell ist, müssen die komplexen Koeffizienten $\hat{c}_{l,\pm m}$ folgendes erfüllen:

$$\begin{aligned} \Re(\hat{c}_{l,-m}) &= (-1)^m \Re(\hat{c}_{l,m}) & \Im(\hat{c}_{l,-m}) &= (-1)^{m+1} \Im(\hat{c}_{l,m}) \\ \implies \hat{c}_{l,-m} &= (-1)^m \hat{c}_{l,m}^* & & \text{(gilt auch für negative } m) \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

damit wird aus (A-16):

$$c_{l,m} = \sqrt{2}(-1)^m \Re e(\hat{c}_{l,m}), \quad c_{l,-m} = \sqrt{2}(-1)^{m+1} \Im m(\hat{c}_{l,m}) \quad (\text{A-18})$$

Darstellung des reziproken Abstandes in Kugelfunktionen:

$$\frac{1}{|\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q|} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{R_P^l}{R_Q^{l+1}} \frac{1}{2l+1} e_{\Phi_Q, \Lambda_Q}^{lm} e_{\Phi_P, \Lambda_P}^{lm} \quad \text{für } R_P < R_Q \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{R_Q^l}{R_P^{l+1}} \frac{1}{2l+1} e_{\Phi_Q, \Lambda_Q}^{lm} e_{\Phi_P, \Lambda_P}^{lm} \quad \text{für } R_P > R_Q \end{array} \right\} \quad (\text{A-19})$$

$$\frac{1}{|\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q|} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{R_P^l}{R_Q^{l+1}} \frac{1}{2l+1} Y_{lm}(\Phi_P, \Lambda_P) Y_{lm}^*(\Phi_Q, \Lambda_Q) \quad \text{für } R_P < R_Q \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{R_Q^l}{R_P^{l+1}} \frac{1}{2l+1} Y_{lm}(\Phi_P, \Lambda_P) Y_{lm}^*(\Phi_Q, \Lambda_Q) \quad \text{für } R_P > R_Q \end{array} \right\} \quad (\text{A-20})$$

A-1.2 Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} \sin \Phi \cdot P_{lm} &= \frac{1}{2l+1} [(l+m)P_{l-1,m} + (l-m+1)P_{l+1,m}] \\ \cos \Phi \cdot \frac{dP_{lm}}{d\Phi} &= \frac{1}{2l+1} [(l+1)(l+m)P_{l-1,m} - l(l-m+1)P_{l+1,m}] \end{aligned} \quad (\text{A-21})$$

$$\begin{aligned} \sin \Phi \cdot Y_{lm} &= \frac{\sqrt{(l-m)(l+m)}}{\sqrt{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1,m} + \frac{\sqrt{(l-m+1)(l+m+1)}}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m} \\ \cos \Phi \cdot \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \Phi} &= \frac{(l+1)\sqrt{(l-m)(l+m)}}{\sqrt{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1,m} - \frac{l\sqrt{(l-m+1)(l+m+1)}}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m} \end{aligned} \quad (\text{A-22})$$

A-1.3 Produkte zwischen Kugelflächenfunktionen

Ein Produkt $Y_{l_1, m_1}(\Lambda, \Phi) \cdot Y_{l_2, m_2}(\Lambda, \Phi)$ läßt sich wiederum als Summe von Kugelflächenfunktionen darstellen:

$$\begin{aligned} Y_{l_1, m_1}(\Lambda, \Phi) \cdot Y_{l_2, m_2}(\Lambda, \Phi) &= \sum_{\max(|m_1+m_2|, |l_1-l_2|)}^{l_1+l_2} C(l_1, l_2, l; m_1, m_2) Y_{l, m_1+m_2}(\Lambda, \Phi) \quad \text{mit} \\ C(l_1, l_2, l; m_1, m_2) &:= \left[\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(l+m_1+m_2)!(l-m_1-m_2)!}{(2l+1)(l_1+m_1)!(l_1-m_1)!(l_2+m_2)!(l_2-m_2)!} \right]^{1/2} K(l_1, l_2, l; m_1, m_2) \\ \text{und} \\ K(l_1, l_2, l; m_1, m_2) &:= (-1)^{s-l} (2l+1) \frac{(l_1+m_1)!(l_2+m_2)!(l_1-m_1)!(l_2-m_2)!}{(l_1+l_2+l+1)!(s-l_1)!(s-l_2)!(s-l)!} \\ &\quad \cdot (-l_1+l_2+l)!(l_1-l_2+l)!(l_1+l_2-l)! s! \Sigma \end{aligned} \quad (\text{A-23})$$

dabei ist

$$2s := l_1 + l_2 + l \quad \text{und}$$

$$\Sigma := \sum_{t=t_o}^{t_u} (-1)^t [t!(-l_1+l-m_2+t)!(-l_2+l+m_1+t)!(l_1-m_1-t)! \cdot$$

$$\cdot (l_2+m_2-t)!(l_1+l_2-l-t)!]^{-1},$$

$$t_o := \min(l_1 - m_1, l_2 + m_2, l_1 + l_2 - l), \quad t_u := \max(0, l_1 - l + m_2, l_2 - l - m_1)$$

$K(l_1, l_2, l; m_1, m_2)$ kann auch mit Hilfe von Wigner-3j-Symbolen dargestellt werden; es ist

$$K(l_1, l_2, l; m_1, m_2) := (-1)^{m_1+m_2} (2l+1) \left[\frac{(l_1+m_1)!(l_2+m_2)!(l_1-m_1)!(l_2-m_2)!}{(l-m_1-m_2)!(l+m_1+m_2)!} \right]^{1/2} \cdot \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & (-m_1-m_2) \end{pmatrix} \quad (\text{A-24})$$

(Die runden Klammern in der unteren Zeile stehen für die Wigner-3j-Symbole.)

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} Y_{1,0}(\Phi) \cdot Y_{lm}(\Lambda, \Phi) &= C(l, 1, l-1; m, 0) Y_{l-1,m}(\Lambda, \Phi) + C(l, 1, l+1; m, 0) Y_{l+1,m}(\Lambda, \Phi) \\ Y_{2,0}(\Phi) \cdot Y_{lm}(\Lambda, \Phi) &= C(l, 2, l-2; m, 0) Y_{l-2,m}(\Lambda, \Phi) + C(l, 2, l; m, 0) Y_{lm}(\Lambda, \Phi) + \\ &\quad + C(l, 2, l+2; m, 0) Y_{l+2,m}(\Lambda, \Phi) \end{aligned} \quad (\text{A-25})$$

mit

$$\begin{aligned} C(l, 1, l-1; m, 0) &= \sqrt{\frac{3(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}} \\ C(l, 1, l+1; m, 0) &= \sqrt{\frac{3(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} \end{aligned} \quad (\text{A-26})$$

$$\begin{aligned} C(l, 2, l-2; m, 0) &= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5(l-m)(l-m-1)(l+m)(l+m-1)}{(2l-3)(2l-1)^2(2l+1)}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} C(l, 1, l-1; m, 0) \cdot C(l-1, 1, l-2; m, 0) \end{aligned}$$

$$C(l, 2, l; m, 0) = \sqrt{5} \frac{l(l+1) - 3m^2}{(2l-1)(2l+3)} = \frac{\sqrt{5}}{3} [(l+1)C(l, 1, l-1; m, 0)^2 - lC(l, 1, l+1; m, 0)^2] \quad (\text{A-27})$$

$$\begin{aligned} C(l, 2, l+2; m, 0) &= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5(l-m+1)(l-m+2)(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)^2(2l+5)}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} C(l, 1, l+1; m, 0) \cdot C(l+1, 1, l+2; m, 0) \end{aligned}$$

Werden die Funktionen $Y_{1,0}$ oder $Y_{2,0}$ mit einer Summe der Gestalt $c_{lm} Y_{lm}$ multipliziert, so ergibt sich aus (A-25) mit einer Indexverschiebung

$$\begin{aligned} Y_{1,0}(\Phi) \cdot c_{lm} Y_{lm}(\Lambda, \Phi) &= [C(l, 1, l-1; m, 0)c_{l-1,m} + C(l, 1, l+1; m, 0)c_{l+1,m}] Y_{lm}(\Lambda, \Phi) \\ Y_{2,0}(\Phi) \cdot c_{lm} Y_{lm}(\Lambda, \Phi) &= [C(l, 2, l-2; m, 0)c_{l-2,m} + C(l, 2, l; m, 0)c_{lm} + C(l, 2, l+2; m, 0)c_{l+2,m}] Y_{lm}(\Lambda, \Phi) \end{aligned} \quad (\text{A-28})$$

(Wir haben hier auch die Symmetrieeigenschaften $C(l+2, 2, l; m, 0) = C(l, 2, l+2; m, 0)$ usw. benutzt.)

Ein numerischer Algorithmus zur Berechnung der Koeffizienten $C(l_1, l_2, l; m_1, m_2)$, der Rekursionsformeln benutzt, kann der Arbeit *E.H. Knickmeyer (1984)* entnommen werden. Die Herleitung der angeführten Formeln sowie geeignete Algorithmen zur numerischen Koeffizientenberechnung sind auch in den Arbeiten von *J.A. Gaunt (1929)*, *G. Racah (1942)*, *G. Balmino(1978)*, *A.R. Edmonds(1964)* und *R.A. Phinney, R. Burridge (1973)* zu finden.

A-2 Vektorielle Kugelfunktionen

A-2.1 Definitionen und Eigenschaften

Reelle vektorielle Kugelfunktionen:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{R}_{l,m}(\Lambda, \Phi) &:= e_{l,m}(\Lambda, \Phi) \mathbf{e}_R \\
 \mathfrak{S}_{lm}(\Lambda, \Phi) &:= \frac{\partial e_{l,m}(\Lambda, \Phi)}{\partial \Phi} \mathbf{e}_\Phi + \frac{1}{\cos \Phi} \frac{\partial e_{l,m}(\Lambda, \Phi)}{\partial \Lambda} \mathbf{e}_\Lambda \\
 \mathfrak{T}_{l,m}(\Lambda, \Phi) &:= -\frac{1}{\cos \Phi} \frac{\partial e_{l,m}(\Lambda, \Phi)}{\partial \Lambda} \mathbf{e}_\Phi + \frac{\partial e_{l,m}(\Lambda, \Phi)}{\partial \Phi} \mathbf{e}_\Lambda
 \end{aligned} \tag{A-29}$$

Komplexe vektorielle Kugelfunktionen:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{l,m}(\Lambda, \Phi) &:= Y_{l,m}(\Lambda, \Phi) \mathbf{e}_R \\
 \mathbf{S}_{l,m}(\Lambda, \Phi) &:= \frac{-R}{\sqrt{l(l+1)}} \text{GRAD } Y_{l,m} = \frac{-1}{\sqrt{l(l+1)}} \left[\frac{\partial Y_{l,m}}{\partial \Phi} \mathbf{e}_\Phi + \frac{1}{\cos \Phi} \frac{\partial Y_{l,m}}{\partial \Lambda} \mathbf{e}_\Lambda \right] \\
 \mathbf{T}_{l,m}(\Lambda, \Phi) &:= \frac{R}{\sqrt{l(l+1)}} \text{ROT } (Y_{lm} \mathbf{e}_R) = \frac{-1}{\sqrt{l(l+1)}} \left[\frac{1}{\cos \Phi} \frac{\partial}{\partial \Lambda} (Y_{lm}(\Lambda, \Phi)) \mathbf{e}_\Phi - \frac{\partial}{\partial \Phi} (Y_{lm}(\Lambda, \Phi)) \mathbf{e}_\Lambda \right]
 \end{aligned} \tag{A-30}$$

Aus den Definitionen folgt

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{T}_{lm}(\Lambda, \Phi) &= -\mathbf{e}_R \times \mathfrak{S}_{lm}(\Lambda, \Phi) & \mathbf{T}_{lm}(\Lambda, \Phi) &= \mathbf{e}_R \times \mathbf{S}_{lm}(\Lambda, \Phi) \\
 \mathfrak{S}_{lm}(\Lambda, \Phi) &= \mathbf{e}_R \times \mathfrak{T}_{lm}(\Lambda, \Phi) & \mathbf{S}_{lm}(\Lambda, \Phi) &= -\mathbf{e}_R \times \mathbf{T}_{lm}(\Lambda, \Phi)
 \end{aligned} \tag{A-31}$$

Integrale über reelle vektorielle Kugelfunktionen:

$$\begin{aligned}
 \int_\sigma \mathfrak{R}_{1,0} d\sigma &= \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \mathbf{e}_Z & \int_\sigma \mathfrak{R}_{1,1} d\sigma &= \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \mathbf{e}_X & \int_\sigma \mathfrak{R}_{1,-1} d\sigma &= \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \mathbf{e}_Y \\
 \int_\sigma \mathfrak{S}_{1,0} d\sigma &= \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \mathbf{e}_Z & \int_\sigma \mathfrak{S}_{1,1} d\sigma &= \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \mathbf{e}_X & \int_\sigma \mathfrak{S}_{1,-1} d\sigma &= \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \mathbf{e}_Y;
 \end{aligned} \tag{A-32}$$

die entsprechenden Integrale über alle anderen reellen vektoriellen Kugelfunktionen verschwinden:

$$\int_\sigma \mathfrak{R}_{lm} d\sigma = 0 \quad \forall l \neq 1 \quad \int_\sigma \mathfrak{S}_{lm} d\sigma = 0 \quad \forall l \neq 1 \quad \int_\sigma \mathfrak{T}_{lm} d\sigma = 0 \quad \forall l \tag{A-33}$$

Integrale über komplexe vektorielle Kugelfunktionen:

$$\begin{aligned}
 \int_\sigma \mathbf{R}_{1,0} d\sigma &= \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \mathbf{e}_Z & \int_\sigma \mathbf{R}_{1,1} d\sigma &= -\frac{4\pi}{\sqrt{6}} (\mathbf{e}_X + i\mathbf{e}_Y) & \int_\sigma \mathbf{R}_{1,-1} d\sigma &= \frac{4\pi}{\sqrt{6}} (\mathbf{e}_X - i\mathbf{e}_Y) \\
 \int_\sigma \mathbf{S}_{1,0} d\sigma &= -4\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{e}_Z & \int_\sigma \mathbf{S}_{1,1} d\sigma &= \frac{4\pi}{\sqrt{3}} (\mathbf{e}_X + i\mathbf{e}_Y) & \int_\sigma \mathbf{S}_{1,-1} d\sigma &= \frac{4\pi}{\sqrt{3}} (-\mathbf{e}_X + i\mathbf{e}_Y);
 \end{aligned} \tag{A-34}$$

abkürzende Schreibweise:

$$\int_\sigma \mathbf{R}_{1,m} d\sigma = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \mathbf{e}_m \quad \int_\sigma \mathbf{S}_{1,m} d\sigma = -4\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{e}_m \tag{A-35}$$

mit:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{-1} &:= \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-i\Lambda) (-i\mathbf{e}_\Lambda - \sin \Phi \mathbf{e}_\Phi + \cos \Phi \mathbf{e}_r) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{R}_{1,-1} - \sqrt{2} \mathbf{S}_{1,-1}) \\
 \mathbf{e}_0 &:= \mathbf{e}_z = \cos \Phi \mathbf{e}_\Phi + \sin \Phi \mathbf{e}_R = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{R}_{1,0} - \sqrt{2} \mathbf{S}_{1,0}) \\
 \mathbf{e}_{+1} &:= -\frac{\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(i\Lambda) (-i\mathbf{e}_\Lambda + \sin \Phi \mathbf{e}_\Phi - \cos \Phi \mathbf{e}_R) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{R}_{1,1} - \sqrt{2} \mathbf{S}_{1,-1})
 \end{aligned} \tag{A-36}$$

die entsprechenden Integrale über alle anderen komplexen vektoriellen Kugelfunktionen verschwinden:

$$\int_\sigma \mathbf{R}_{lm} d\sigma = 0 \quad \forall l \neq 1 \quad \int_\sigma \mathbf{S}_{lm} d\sigma = 0 \quad \forall l \neq 1 \quad \int_\sigma \mathbf{T}_{lm} d\sigma = 0 \quad \forall l \tag{A-37}$$

Orthogonalitätsrelationen:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \langle \mathbf{R}_{lm}, \mathbf{R}_{ij} \rangle d\sigma &= 4\pi\delta_{l,i}\delta_{m,j} & \int_{\sigma} \langle \mathbf{S}_{lm}, \mathbf{S}_{ij} \rangle d\sigma &= 4\pi\delta_{l,i}\delta_{m,j} \\ \int_{\sigma} \langle \mathbf{T}_{lm}, \mathbf{T}_{ij} \rangle d\sigma &= 4\pi\delta_{l,i}\delta_{m,j} \end{aligned} \quad (\text{A-38})$$

sämtliche Integrale über “gemischte” Innenprodukte verschwinden.

A-2.2 Transformation zwischen den sphärischen Komponenten eines Vektorfeldes und den radiusabhängigen Koeffizientenfunktionen der vektoriellen Kugelfunktionen

Sei $\mathbf{u}(\Lambda, \Phi, R) = U_R \mathbf{e}_R + U_{\Phi} \mathbf{e}_{\Phi} + U_{\Lambda} \mathbf{e}_{\Lambda} = \mathbf{r}_{lm} \mathfrak{R}_{lm} + \mathbf{s}_{lm} \mathfrak{S}_{lm} + \mathbf{t}_{lm} \mathfrak{T}_{lm}$ ein Vektorfeld. Dann folgt aus der Definition der vektoriellen Kugelfunktionen

$$\begin{bmatrix} U_{\Lambda} \\ U_{\Phi} \\ U_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\cos \Phi} \frac{\partial}{\partial \Lambda} (e_{\Phi, \Lambda}^{lm}) & \frac{\partial}{\partial \Phi} (e_{\Phi, \Lambda}^{lm}) \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \Phi} (e_{\Phi, \Lambda}^{lm}) & -\frac{1}{\cos \Phi} \frac{\partial}{\partial \Lambda} (e_{\Phi, \Lambda}^{lm}) \\ e_{\Phi, \Lambda}^{lm} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{lm} \\ \mathbf{s}_{lm} \\ \mathbf{t}_{lm} \end{bmatrix} \quad (\text{A-39})$$

A-2.3 Darstellung spezieller Vektorfeldtypen in vektoriellen Kugelfunktionen

Darstellung der kartesischen Basisvektoren:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_X \\ \mathbf{e}_Y \\ \mathbf{e}_Z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \mathfrak{R}_{1,1} + \mathfrak{S}_{1,1} \\ \mathfrak{R}_{1,-1} + \mathfrak{S}_{1,-1} \\ \mathfrak{R}_{1,0} + \mathfrak{S}_{1,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{R}_{1,1} - \mathbf{R}_{1,-1}) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{S}_{1,1} - \mathbf{S}_{1,-1}) \\ \frac{i}{\sqrt{6}}(\mathbf{R}_{1,1} + \mathbf{R}_{1,-1}) - \frac{i}{\sqrt{3}}(\mathbf{S}_{1,1} + \mathbf{S}_{1,-1}) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_{1,0} - \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{S}_{1,0} \end{bmatrix} \quad (\text{A-40})$$

Darstellung der sphärischen Basisvektoren:

$$\begin{bmatrix} \cos \Phi \mathbf{e}_{\Lambda} \\ \cos \Phi \mathbf{e}_{\Phi} \\ \mathbf{e}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \mathfrak{T}_{1,0} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \mathfrak{S}_{1,0} \\ \mathfrak{R}_{0,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{T}_{1,0} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{S}_{1,0} \\ \mathbf{R}_{0,0} \end{bmatrix} \quad (\text{A-41})$$

Darstellung eines konstanten Vektorfeldes:

Sei $\mathbf{f} = f_X \mathbf{e}_X + f_Y \mathbf{e}_Y + f_Z \mathbf{e}_Z$ ein konstantes Vektorfeld. Dann gilt

$$\mathbf{f} = \sum_{m=-1}^1 (f_{1,m}^R \mathfrak{R}_{1,m} + f_{1,m}^S \mathfrak{S}_{1,m}) \quad (\text{A-42})$$

mit den konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} f_{1,0}^R &= \frac{1}{\sqrt{3}} f_Z & f_{1,0}^S &= \frac{1}{\sqrt{3}} f_Z \\ f_{1,1}^R &= \frac{1}{\sqrt{3}} f_X & f_{1,1}^S &= \frac{1}{\sqrt{3}} f_X \\ f_{1,-1}^R &= \frac{1}{\sqrt{3}} f_Y & f_{1,-1}^S &= \frac{1}{\sqrt{3}} f_Y \end{aligned} \quad (\text{A-43})$$

und

$$\mathbf{f} = \sum_{m=-1}^1 (f_{1,m}^R \mathbf{R}_{1,m} + f_{1,m}^S \mathbf{S}_{1,m}) \quad (\text{A-44})$$

mit den konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} f_{1,0}^R &= \frac{1}{\sqrt{3}} f_Z & f_{1,0}^S &= -\sqrt{\frac{2}{3}} f_Z \\ f_{1,1}^R &= \frac{1}{\sqrt{6}} (-f_X + i f_Y) & f_{1,1}^S &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (-f_X + i f_Y) \\ f_{1,-1}^R &= \frac{1}{\sqrt{6}} (f_X + i f_Y) & f_{1,-1}^S &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (f_X + i f_Y) \end{aligned} \quad (\text{A-45})$$

$$\implies f_{1,m}^S = -\sqrt{2} f_{1,m}^R$$

Infinitesimale Drehung:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad \text{mit} \quad \mathbf{u} = \delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{X} \\ \text{und} \quad \delta \boldsymbol{\omega} &= \sum_{m=-1}^1 (\delta \omega_{1,m}^R \mathbf{R}_{1,m} + \delta \omega_{1,m}^S \mathbf{S}_{1,m}) \end{aligned}$$

(mit den konstanten Koeffizienten $\delta \omega_{1,m}^R$, $\delta \omega_{1,m}^S$ entsprechend (A-45))

$$\implies \mathbf{u} = -R \sum_{m=-1}^1 \delta \omega_{1,m}^S \mathbf{T}_{1,m} \quad (\text{A-46})$$

Reine Scherung:

Es sei eine reine Scherung dargestellt durch die kartesischen Koordinaten des (in diesem Fall konstanten) Euler-Lagrange-Tensors:

$$\begin{bmatrix} u_X \\ u_Y \\ u_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{XX} & e_{XY} & e_{ZX} \\ e_{XY} & e_{YY} & e_{YZ} \\ e_{ZX} & e_{YZ} & e_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}. \quad (\text{A-47})$$

Dann lautet die Darstellung des Verschiebungsvektors in vektoriiellen Kugelfunktionen

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & R \left\{ \frac{1}{3} (e_{XX} + e_{YY} + e_{ZZ}) \mathfrak{R}_{0,0} + \frac{1}{6\sqrt{5}} (-e_{XX} - e_{YY} + 2e_{ZZ}) (2\mathfrak{R}_{2,0} + \mathfrak{S}_{2,0}) + \right. \\ & + \frac{1}{\sqrt{15}} e_{ZX} (2\mathfrak{R}_{2,1} + \mathfrak{S}_{2,1}) + \frac{1}{\sqrt{15}} e_{YZ} (2\mathfrak{R}_{2,-1} + \mathfrak{S}_{2,-1}) + \\ & \left. + \frac{1}{2\sqrt{15}} (e_{XX} - e_{YY}) (2\mathfrak{R}_{2,2} + \mathfrak{S}_{2,2}) + \frac{1}{\sqrt{15}} e_{XY} (2\mathfrak{R}_{2,-2} + \mathfrak{S}_{2,-2}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A-48})$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & R \left\{ \frac{1}{3} (e_{XX} + e_{YY} + e_{ZZ}) \mathbf{R}_{0,0} + \frac{1}{6\sqrt{5}} (-e_{XX} - e_{YY} + 2e_{ZZ}) (2\mathbf{R}_{2,0} - \sqrt{6}\mathbf{S}_{2,0}) + \right. \\ & + \frac{1}{\sqrt{30}} (-e_{ZX} + ie_{YZ}) (2\mathbf{R}_{2,1} - \sqrt{6}\mathbf{S}_{2,1}) + \frac{1}{\sqrt{30}} (e_{ZX} + ie_{YZ}) (2\mathbf{R}_{2,-1} - \sqrt{6}\mathbf{S}_{2,-1}) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{120}} (e_{XX} - e_{YY} - 2ie_{XY}) (2\mathbf{R}_{2,2} - \sqrt{6}\mathbf{S}_{2,2}) + \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{120}} (e_{XX} - e_{YY} + 2ie_{XY}) (2\mathbf{R}_{2,-2} - \sqrt{6}\mathbf{S}_{2,-2}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A-49})$$

A-2.4 Anwendung von Differentialoperatoren auf die vektoriellen Kugelfunktionen

$$\begin{aligned}
\text{ROT } \mathfrak{R}_{lm}(\Lambda, \Phi) &= \frac{1}{R} \mathfrak{T}_{lm}(\Lambda, \Phi) \\
\text{ROT } \mathfrak{S}_{lm}(\Lambda, \Phi) &= -\frac{1}{R} \mathfrak{T}_{lm}(\Lambda, \Phi) \\
\text{ROT } \mathfrak{T}_{lm}(\Lambda, \Phi) &= \frac{1}{R} [\mathfrak{S}_{lm}(\Lambda, \Phi) + l(l+1)\mathfrak{R}_{lm}(\Lambda, \Phi)]
\end{aligned} \tag{A-50}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\text{ROT } \mathbf{R}_{lm}(\Lambda, \Phi) &= \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} \mathbf{T}_{lm}(\Lambda, \Phi) \\
\text{ROT } \mathbf{S}_{lm}(\Lambda, \Phi) &= \frac{1}{R} \mathbf{T}_{lm}(\Lambda, \Phi) \\
\text{ROT } \mathbf{T}_{lm}(\Lambda, \Phi) &= \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} \mathbf{R}_{lm}(\Lambda, \Phi) - \frac{1}{R} \mathbf{S}_{lm}(\Lambda, \Phi)
\end{aligned} \tag{A-51}$$

Sei \mathbf{u} ein Vektorfeld, dargestellt in vektoriellen Kugelfunktionen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\Lambda, \Phi, R) &= \mathbf{r}_{l,m}(R)\mathfrak{R}_{lm}(\Lambda, \Phi) + \mathbf{s}_{l,m}(R)\mathfrak{S}_{lm}(\Lambda, \Phi) + \mathbf{t}_{l,m}(R)\mathfrak{T}_{lm}(\Lambda, \Phi) \\
&= r_{l,m}(R)\mathbf{R}_{lm}(\Lambda, \Phi) + s_{lm}(R)\mathbf{S}_{lm}(\Lambda, \Phi) + t_{lm}(R)\mathbf{T}_{lm}(\Lambda, \Phi)
\end{aligned} \tag{A-52}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}
\text{ROT } \mathbf{u}(\Lambda, \Phi, R) &= \frac{l(l+1)}{R} \mathbf{t}_{l,m}(R)\mathfrak{R}_{lm}(\Lambda, \Phi) + \left(\frac{\mathbf{t}_{l,m}(R)}{R} + \frac{d\mathbf{t}_{l,m}}{dR}\right)\mathfrak{S}_{lm}(\Lambda, \Phi) \\
&\quad + \left(\frac{\mathbf{r}_{l,m}(R)}{R} - \frac{\mathbf{s}_{l,m}(R)}{R} - \frac{d\mathbf{s}_{l,m}}{dR}\right)\mathfrak{T}_{lm}(\Lambda, \Phi) \\
&= \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} t_{lm}(R)\mathbf{R}_{lm}(\Lambda, \Phi) - \left(\frac{t_{lm}(R)}{R} + \frac{dt_{lm}}{dR}\right)\mathbf{S}_{lm}(\Lambda, \Phi) \\
&\quad + \left(\frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} r_{l,m}(R) + \frac{s_{lm}(R)}{R} + \frac{ds_{lm}}{dR}\right)\mathbf{T}_{lm}(\Lambda, \Phi)
\end{aligned} \tag{A-53}$$

$$\begin{aligned}
\text{ROT ROT } \mathbf{u} &= \frac{l(l+1)}{R^2} \left[\mathbf{r}_{l,m} - \mathbf{s}_{l,m} - R \frac{d\mathbf{s}_{l,m}}{dR} \right] \mathfrak{R}_{lm} + \\
&\quad + \frac{1}{R} \left[\frac{d\mathbf{t}_{l,m}}{dR} - 2 \frac{d\mathbf{s}_{l,m}}{dR} - R \frac{d^2\mathbf{s}_{l,m}}{dR^2} \right] \mathfrak{S}_{lm} + \frac{1}{R^2} \left[l(l+1)\mathbf{t}_{l,m} - 2R \frac{d\mathbf{t}_{l,m}}{dR} - R^2 \frac{d^2\mathbf{t}_{l,m}}{dR^2} \right] \mathfrak{T}_{lm}
\end{aligned} \tag{A-54}$$

$$\begin{aligned}
\text{ROT ROT } \mathbf{u} &= \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R^2} \left[\sqrt{l(l+1)}r_{l,m} + s_{lm} + R \frac{ds_{lm}}{dR} \right] \mathbf{R}_{lm} + \\
&\quad + \frac{1}{R} \left[-\sqrt{l(l+1)} \frac{dr_{l,m}}{dR} - 2 \frac{ds_{lm}}{dR} - R \frac{d^2s_{lm}}{dR^2} \right] \mathbf{S}_{lm} + \frac{1}{R^2} \left[l(l+1)t_{lm} - 2R \frac{dt_{lm}}{dR} - R^2 \frac{d^2t_{lm}}{dR^2} \right] \mathbf{T}_{lm}
\end{aligned} \tag{A-55}$$

$$\begin{aligned}
\text{ROT ROT ROT } \mathbf{u} &= \frac{l(l+1)}{R^2} \left[\frac{l(l+1)}{R} \mathbf{t}_{l,m} - 2 \frac{d\mathbf{t}_{l,m}}{dR} - R \frac{d^2\mathbf{t}_{l,m}}{dR^2} \right] \mathfrak{R}_{lm} + \\
&\quad + \frac{1}{R} \left[-\frac{l(l+1)}{R^2} \mathbf{t}_{l,m} + \frac{l(l+1)}{R} \frac{d\mathbf{t}_{l,m}}{dR} - 3 \frac{d^2\mathbf{t}_{l,m}}{dR^2} - R \frac{d^3\mathbf{t}_{l,m}}{dR^3} \right] \mathfrak{S}_{lm} + \\
&\quad + \left[\frac{l(l+1)}{R^3} \mathbf{r}_{l,m} - \frac{1}{R} \frac{d^2\mathbf{r}_{l,m}}{dR^2} - \frac{l(l+1)}{R^3} \mathbf{s}_{l,m} - \frac{l(l+1)}{R^2} \frac{d\mathbf{s}_{l,m}}{dR} + \frac{3}{R} \frac{d^2\mathbf{s}_{l,m}}{dR^2} + \frac{d^3\mathbf{s}_{l,m}}{dR^3} \right] \mathfrak{T}_{lm}
\end{aligned} \tag{A-56}$$

$$\begin{aligned}
\text{ROT ROT ROT } \mathbf{u} = & \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R^2} \left[\frac{l(l+1)}{R} t_{lm} - 2 \frac{dt_{lm}}{dR} - R \frac{d^2 t_{lm}}{dR^2} \right] \mathbf{R}_{lm} - \\
& - \frac{1}{R} \left[-\frac{l(l+1)}{R^2} t_{lm} + \frac{l(l+1)}{R} \frac{dt_{lm}}{dR} - 3 \frac{d^2 t_{lm}}{dR^2} - R \frac{d^3 t_{lm}}{dR^3} \right] \mathbf{S}_{lm} + \\
& + \left[\frac{(l(l+1))^{3/2}}{R^3} r_{l,m} - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} \frac{d^2 r_{l,m}}{dR^2} + \frac{l(l+1)}{R^3} s_{lm} + \right. \\
& \left. + \frac{l(l+1)}{R^2} \frac{ds_{lm}}{dR} - \frac{3}{R} \frac{d^2 s_{lm}}{dR^2} - \frac{d^3 s_{lm}}{dR^3} \right] \mathbf{T}_{lm}
\end{aligned} \tag{A-57}$$

$$\begin{aligned}
\text{DIV } \mathbf{u} = & \left(\frac{2}{R} \mathbf{r}_{l,m} + \frac{d\mathbf{r}_{l,m}}{dR} - \frac{l(l+1)}{R} \mathbf{s}_{l,m} \right) e_{\Phi, \Lambda}^{lm} \\
= & \left(\frac{2}{R} r_{l,m} + \frac{dr_{l,m}}{dR} + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} s_{lm} \right) Y_{lm}
\end{aligned} \tag{A-58}$$

$$\begin{aligned}
\text{GRAD DIV } \mathbf{u} = & \left(-\frac{2}{R^2} \mathbf{r}_{l,m} + \frac{2}{R} \frac{d\mathbf{r}_{l,m}}{dR} + \frac{d^2 \mathbf{r}_{l,m}}{dR^2} + \frac{l(l+1)}{R^2} \mathbf{s}_{l,m} - \frac{l(l+1)}{R} \frac{d\mathbf{s}_{l,m}}{dR} \right) \mathfrak{R}_{lm}(\Phi, \Lambda) + \\
& + \frac{1}{R} \left(\frac{2}{R} \mathbf{r}_{l,m} + \frac{d\mathbf{r}_{l,m}}{dR} - \frac{l(l+1)}{R} \mathbf{s}_{l,m} \right) \mathfrak{S}_{lm}(\Phi, \Lambda) \\
= & \left(-\frac{2}{R^2} r_{l,m} + \frac{2}{R} \frac{dr_{l,m}}{dR} + \frac{d^2 r_{l,m}}{dR^2} - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R^2} s_{lm} + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} \frac{ds_{lm}}{dR} \right) \mathbf{R}_{lm} - \\
& - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} \left(\frac{2}{R} r_{l,m} + \frac{dr_{l,m}}{dR} + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} s_{lm} \right) \mathbf{S}_{lm}
\end{aligned} \tag{A-59}$$

Diese Formeln geben Anlass zu einem von (A-52) abweichenden Ansatz eines Vektorfeldes \mathbf{u} in vektoriellen Kugelfunktionen, bei dem die Bestandteile entweder divergenzfrei oder rotationsfrei sind:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 := & -\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left(a_{lm} + R \frac{da_{lm}}{dR} \right) \mathbf{R}_{lm} + a_{lm} \mathbf{S}_{lm} && \text{(rotationsfrei)} \\
\mathbf{u}_2 := & a_{lm} \mathbf{R}_{lm} - \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left(2a_{lm} + R \frac{da_{lm}}{dR} \right) \mathbf{S}_{lm} && \text{(divergenzfrei)} \\
\mathbf{u}_3 := & t_{lm} \mathbf{T}_{lm} && \text{(divergenzfrei)}
\end{aligned} \tag{A-60}$$

Anwendung der Differentialoperatoren DIV bzw. ROT auf diese Bestandteile ergibt

$$\begin{aligned}
\text{DIV } \mathbf{u}_1 = & -\frac{1}{R\sqrt{l(l+1)}} \left[R^2 \frac{d^2 a_{lm}}{dR^2} + 4R \frac{da_{lm}}{dR} - (l-1)(l+2)a_{lm} \right] && \text{ROT } \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \\
\text{ROT } \mathbf{u}_2 = & -\frac{1}{R\sqrt{l(l+1)}} \left[R^2 \frac{d^2 a_{lm}}{dR^2} + 4R \frac{da_{lm}}{dR} - (l-1)(l+2)a_{lm} \right] \mathbf{T}_{lm} && \text{DIV } \mathbf{u}_2 = 0 \\
\text{ROT } \mathbf{u}_3 = & \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} t_{l,m}(R) \mathbf{R}_{lm} - \left(\frac{t_{l,m}(R)}{R} + \frac{dt_{l,m}}{dR} \right) \mathbf{S}_{lm} && \text{DIV } \mathbf{u}_3 = 0
\end{aligned} \tag{A-61}$$

A-2.5 Partielle Ableitungen vektorieller Kugelfunktionen

$$\begin{aligned}
\cos \Phi \frac{\partial \mathbf{R}_{lm}}{\partial \Phi} &= \frac{(l+1)\sqrt{(l+m)(l-m)}}{\sqrt{(2l-1)(2l+1)}} \mathbf{R}_{l-1,m} - \frac{l\sqrt{(l+m+1)(l-m+1)}}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}} \mathbf{R}_{l+1,m} + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{\frac{l-1}{l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{S}_{l-1,m} - \right. \\
&\left. - \sqrt{\frac{l+2}{l+1}} C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{S}_{l+1,m} \right\} + \frac{im}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{T}_{lm}
\end{aligned} \tag{A-62}$$

$$\sin \Phi \frac{\partial (r_{l,m} \mathbf{R}_{lm})}{\partial R} = \frac{dr_{l,m}}{dR} \left\{ \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}} \mathbf{R}_{l-1,m} + \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} \mathbf{R}_{l+1,m} \right\} \tag{A-63}$$

$$\begin{aligned}
\cos \Phi \frac{\partial \mathbf{S}_{lm}}{\partial \Phi} &= \frac{\sqrt{(l+1)(l+m)(l-m)}}{\sqrt{l(2l-1)(2l+1)}} \mathbf{R}_{l-1,m} - \frac{\sqrt{l(l+m+1)(l-m+1)}}{\sqrt{(l+1)(2l+1)(2l+3)}} \mathbf{R}_{l+1,m} + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{l+1}{l} \sqrt{(l-1)(l+1)} C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{S}_{l-1,m} - \right. \\
&\left. - \frac{l}{l+1} \sqrt{l(l+2)} C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{S}_{l+1,m} \right\} + \frac{im}{l(l+1)} \mathbf{T}_{lm}
\end{aligned} \tag{A-64}$$

$$\begin{aligned}
\sin \Phi \frac{\partial (s_{l,m} \mathbf{S}_{lm})}{\partial R} &= \frac{ds_{l,m}}{dR} \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{l} \sqrt{(l-1)(l+1)} C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{S}_{l-1,m} + \right. \\
&\left. + \frac{1}{l+1} \sqrt{l(l+2)} C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{S}_{l+1,m} + \frac{\sqrt{3}im}{l(l+1)} \mathbf{T}_{lm} \right\}
\end{aligned} \tag{A-65}$$

$$\begin{aligned}
\cos \Phi \frac{\partial \mathbf{T}_{lm}}{\partial \Phi} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{l+1}{l} \sqrt{(l-1)(l+1)} C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{T}_{l-1,m} - \right. \\
&\left. - \frac{l}{l+1} \sqrt{l(l+2)} C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{T}_{l+1,m} \right\} - \frac{im}{l(l+1)} \mathbf{S}_{lm} + \frac{im}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{R}_{lm}
\end{aligned} \tag{A-66}$$

$$\begin{aligned}
\sin \Phi \frac{\partial (t_{l,m} \mathbf{T}_{lm})}{\partial R} &= \frac{dt_{l,m}}{dR} \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{l} \sqrt{(l-1)(l+1)} C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{T}_{l-1,m} + \right. \\
&\left. + \frac{1}{l+1} \sqrt{l(l+2)} C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{T}_{l+1,m} - \frac{\sqrt{3}im}{l(l+1)} \mathbf{S}_{lm} \right\}
\end{aligned} \tag{A-67}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial Z} &= \frac{\cos \Phi}{R} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \Phi} + \sin \Phi \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial R} \\
&= \left[\frac{l+1}{R} r_{l,m} + \frac{dr_{l,m}}{dR} + \sqrt{\frac{l+1}{l}} \frac{s_{l,m}}{R} \right] \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}} \mathbf{R}_{l-1,m} + \\
&\quad + \left[\frac{-l}{R} r_{l,m} + \frac{dr_{l,m}}{dR} - \sqrt{\frac{l}{l+1}} \frac{s_{l,m}}{R} \right] \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} \mathbf{R}_{l+1,m} + \\
&\quad + \left[\sqrt{\frac{l-1}{l}} \frac{r_{l,m}}{R} + \frac{l+1}{l} \sqrt{(l-1)(l+1)} \frac{s_{l,m}}{R} + \frac{1}{l} \sqrt{(l-1)(l+1)} \frac{ds_{l,m}}{dR} \right] \frac{1}{\sqrt{3}} C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{S}_{l-1,m} + \\
&\quad + \left[-\sqrt{\frac{l+2}{l+1}} \frac{r_{l,m}}{R} - \frac{l}{l+1} \sqrt{l(l+2)} \frac{s_{l,m}}{R} + \frac{1}{l+1} \sqrt{l(l+2)} \frac{ds_{l,m}}{dR} \right] \frac{1}{\sqrt{3}} C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{S}_{l+1,m} + \\
&\quad + \left[\frac{l+1}{l} \frac{t_{l,m}}{R} + \frac{1}{l} \frac{dt_{l,m}}{dR} \right] \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(l-1)(l+1)} C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{T}_{l-1,m} + \\
&\quad + \left[-\frac{l}{l+1} \frac{t_{l,m}}{R} + \frac{1}{l+1} \frac{dt_{l,m}}{dR} \right] \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{l(l+2)} C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{T}_{l+1,m} + \\
&\quad + \frac{im}{\sqrt{l(l+1)}} \frac{t_{l,m}}{R} \mathbf{R}_{lm} + \frac{im}{l(l+1)} \left[-\frac{t_{l,m}}{R} - \frac{dt_{l,m}}{dR} \right] \mathbf{S}_{lm} + \frac{im}{l(l+1)} \left[\sqrt{l(l+1)} \frac{r_{l,m}}{R} + \frac{s_{l,m}}{R} + \frac{ds_{l,m}}{dR} \right] \mathbf{T}_{lm}
\end{aligned} \tag{A-68}$$

A-2.6 Produkte mit vektoriiellen Kugelfunktionen als Faktoren

a) Skalare mal vektorielle Kugelfunktion:

$$Y_{1,0} \cdot \mathbf{R}_{lm} = C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{R}_{l-1,m} + C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{R}_{l+1,m} \tag{A-69}$$

$$\begin{aligned}
Y_{1,0} \cdot \mathbf{S}_{lm} &= \frac{1}{l} \sqrt{(l+1)(l-1)} C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{S}_{l-1,m} + \sqrt{3} \frac{im}{l(l+1)} \mathbf{T}_{l,m} + \\
&\quad + \frac{1}{l+1} \sqrt{l(l+2)} C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{S}_{l+1,m}
\end{aligned} \tag{A-70}$$

$$\begin{aligned}
Y_{1,0} \cdot \mathbf{T}_{lm} &= \frac{1}{l} \sqrt{(l+1)(l-1)} C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{T}_{l-1,m} - \sqrt{3} \frac{im}{l(l+1)} \mathbf{S}_{l,m} + \\
&\quad + \frac{1}{l+1} \sqrt{l(l+2)} C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{T}_{l+1,m}
\end{aligned} \tag{A-71}$$

Für den Fall daß über diese Produkte summiert wird, verschieben wir die Indizes und führen abkürzende Symbole ein:

$$\begin{aligned}
Y_{1,0} \cdot \mathbf{R}_{lm} r_{l,m} &= r_{lm10}^{RY} \mathbf{R}_{lm} \\
r_{lm10}^{RY} &:= C(l, 1, l+1; m, 0) r_{l+1,m} + C(l, 1, l-1; m, 0) r_{l-1,m}
\end{aligned} \tag{A-72}$$

$$\begin{aligned}
Y_{1,0} \cdot \mathbf{S}_{lm} s_{l,m} &= s_{lm10}^{SY} \mathbf{S}_{lm} + t_{lm10}^{SY} \mathbf{T}_{lm} \\
s_{lm10}^{SY} &:= \frac{1}{l+1} \sqrt{l(l+2)} C(l, 1, l+1; m, 0) s_{l+1,m} + \frac{1}{l} \sqrt{(l-1)(l+1)} C(l, 1, l-1; m, 0) s_{l-1,m} \\
t_{lm10}^{SY} &:= \sqrt{3} \frac{im}{l(l+1)} s_{l,m}
\end{aligned} \tag{A-73}$$

$$\begin{aligned}
Y_{1,0} \cdot \mathbf{T}_{lm} t_{l,m} &= s_{lm10}^{TY} \mathbf{S}_{lm} + t_{lm10}^{TY} \mathbf{T}_{lm} \\
s_{lm10}^{TY} &:= -\sqrt{3} \frac{im}{l(l+1)} t_{l,m} \\
t_{lm10}^{TY} &:= \frac{1}{l+1} \sqrt{l(l+2)} C(l, 1, l+1; m, 0) t_{l+1,m} + \frac{1}{l} \sqrt{(l-1)(l+1)} C(l, 1, l-1; m, 0) t_{l-1,m}
\end{aligned} \tag{A-74}$$

$$Y_{2,0} \cdot \mathbf{R}_{lm} = C(l, 2, l-2; m, 0) \mathbf{R}_{l-2,m} + C(l, 2, l; m, 0) \mathbf{R}_{l,m} + C(l, 2, l+2; m, 0) \mathbf{R}_{l+2,m} \tag{A-75}$$

$$\begin{aligned}
Y_{2,0} \cdot \mathbf{S}_{lm} &= \sqrt{\frac{(l+1)(l-2)}{l(l-1)}} C(l, 2, l-2; m, 0) \mathbf{S}_{l-2,m} + \frac{im}{l} \sqrt{\frac{15}{(l-1)(l+1)}} C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{T}_{l-1,m} + \\
&+ \left(1 - \frac{3}{l(l+1)}\right) C(l, 2, l; m, 0) \mathbf{S}_{l,m} + \\
&+ \frac{im}{l+1} \sqrt{\frac{15}{l(l+2)}} C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{T}_{l+1,m} + \sqrt{\frac{l(l+3)}{(l+1)(l+2)}} C(l, 2, l+2; m, 0) \mathbf{S}_{l+2,m}
\end{aligned} \tag{A-76}$$

$$\begin{aligned}
Y_{2,0} \cdot \mathbf{T}_{lm} &= \sqrt{\frac{(l+1)(l-2)}{l(l-1)}} C(l, 2, l-2; m, 0) \mathbf{T}_{l-2,m} - \frac{im}{l} \sqrt{\frac{15}{(l-1)(l+1)}} C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{S}_{l-1,m} + \\
&+ \left(1 - \frac{3}{l(l+1)}\right) C(l, 2, l; m, 0) \mathbf{T}_{l,m} - \\
&- \frac{im}{l+1} \sqrt{\frac{15}{l(l+2)}} C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{S}_{l+1,m} + \sqrt{\frac{l(l+3)}{(l+1)(l+2)}} C(l, 2, l+2; m, 0) \mathbf{T}_{l+2,m}
\end{aligned} \tag{A-77}$$

$$\begin{aligned}
Y_{2,0} \cdot \mathbf{R}_{lm} r_{l,m} &= r_{lm20}^{RY} \mathbf{R}_{lm} \\
r_{lm20}^{RY} &:= C(l, 2, l+2; m, 0) r_{l+2,m} + C(l, 2, l; m, 0) r_{l,m} + C(l, 2, l-2; m, 0) r_{l-2,m}
\end{aligned} \tag{A-78}$$

$$\begin{aligned}
Y_{2,0} \cdot \mathbf{S}_{lm} s_{l,m} &= s_{lm20}^{SY} \mathbf{S}_{lm} + t_{lm20}^{SY} \mathbf{T}_{lm} \\
s_{lm20}^{SY} &:= \sqrt{\frac{(l+3)l}{(l+2)(l+1)}} C(l, 2, l+2; m, 0) s_{l+2,m} + \left(1 - \frac{3}{l(l+1)}\right) C(l, 2, l; m, 0) s_{l,m} + \\
&+ \sqrt{\frac{(l-2)(l+1)}{(l-1)l}} C(l, 2, l-2; m, 0) s_{l-2,m} \\
t_{lm20}^{SY} &:= \frac{im}{l+1} \sqrt{\frac{15}{l(l+2)}} C(l, 1, l+1; m, 0) s_{l+1,m} + \frac{im}{l} \sqrt{\frac{15}{(l-1)(l+1)}} C(l, 1, l-1; m, 0) s_{l-1,m}
\end{aligned} \tag{A-79}$$

$$\begin{aligned}
Y_{2,0} \cdot \mathbf{T}_{lm} t_{l,m} &= s_{lm20}^{TY} \mathbf{S}_{lm} + t_{lm20}^{TY} \mathbf{T}_{lm} \\
s_{lm20}^{TY} &:= -\frac{im}{l+1} \sqrt{\frac{15}{l(l+2)}} C(l, 1, l+1; m, 0) t_{l+1,m} - \frac{im}{l} \sqrt{\frac{15}{(l-1)(l+1)}} C(l, 1, l-1; m, 0) t_{l-1,m} \\
t_{lm20}^{TY} &:= \sqrt{\frac{l(l+3)}{(l+1)(l+2)}} C(l, 2, l+2; m, 0) t_{l+2,m} + \left(1 - \frac{3}{l(l+1)}\right) C(l, 2, l; m, 0) t_{l,m} + \\
&+ \sqrt{\frac{(l-2)(l+1)}{l(l-1)}} C(l, 2, l-2; m, 0) t_{l-2,m}
\end{aligned} \tag{A-80}$$

$$Y_{l,m} \cdot \mathbf{R}_{1,0} = C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{R}_{l-1,m} + C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{R}_{l+1,m} \quad (\text{A-81})$$

$$Y_{l,m} \cdot \mathbf{S}_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -\sqrt{\frac{l-1}{l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{S}_{l-1,m} - \sqrt{3} \frac{im}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{T}_{l,m} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{l+2}{l+1}} C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{S}_{l+1,m} \right\} \quad (\text{A-82})$$

$$Y_{l,m} \cdot \mathbf{T}_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -\sqrt{\frac{l-1}{l}} C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{T}_{l-1,m} + \sqrt{3} \frac{im}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{S}_{l,m} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{l+2}{l+1}} C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{T}_{l+1,m} \right\} \quad (\text{A-83})$$

$$r_{l,m} Y_{l,m} \cdot \mathbf{S}_{1,0} = s_{lm10}^{RS} \mathbf{S}_{l,m} + t_{lm10}^{RS} \mathbf{T}_{l,m} \\ s_{lm10}^{RS} := -\sqrt{\frac{l}{2(l+1)}} C(l, 1, l+1; m, 0) r_{l+1,m} + \sqrt{\frac{l+1}{2l}} C(l, 1, l-1; m, 0) r_{l-1,m} \\ t_{lm10}^{RS} := -\frac{im\sqrt{3}}{\sqrt{2l(l+1)}} r_{l,m} \quad (\text{A-84})$$

$$r_{l,m} Y_{l,m} \cdot \mathbf{T}_{1,0} = s_{lm10}^{RT} \mathbf{S}_{l,m} + t_{lm10}^{RT} \mathbf{T}_{l,m} \\ s_{lm10}^{RT} := \frac{im\sqrt{3}}{\sqrt{2l(l+1)}} r_{l,m} \\ t_{lm10}^{RT} := -\sqrt{\frac{l}{2(l+1)}} C(l, 1, l+1; m, 0) r_{l+1,m} + \sqrt{\frac{l+1}{2l}} C(l, 1, l-1; m, 0) r_{l-1,m} \quad (\text{A-85})$$

$$Y_{l,m} \cdot \mathbf{R}_{2,0} = C(l, 2, l-2; m, 0) \mathbf{R}_{l-2,m} + C(l, 2, l; m, 0) \mathbf{R}_{l,m} + C(l, 2, l+2; m, 0) \mathbf{R}_{l+2,m} \quad (\text{A-86})$$

$$Y_{l,m} \cdot \mathbf{S}_{2,0} = -\sqrt{\frac{2(l-2)}{3(l-1)}} C(l, 2, l-2; m, 0) \mathbf{S}_{l-2,m} - \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{im}{\sqrt{l(l-1)}} C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{T}_{l-1,m} + \\ + \sqrt{\frac{3}{2l(l+1)}} C(l, 2, l; m, 0) \mathbf{S}_{l,m} - \\ - \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{im}{\sqrt{(l+1)(l+2)}} C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{T}_{l+1,m} + \sqrt{\frac{2(l+3)}{3(l+2)}} C(l, 2, l+2; m, 0) \mathbf{S}_{l+2,m} \quad (\text{A-87})$$

$$Y_{l,m} \cdot \mathbf{T}_{2,0} = -\sqrt{\frac{2(l-2)}{3(l-1)}} C(l, 2, l-2; m, 0) \mathbf{T}_{l-2,m} + \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{im}{\sqrt{l(l-1)}} C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{S}_{l-1,m} + \\ + \sqrt{\frac{3}{2l(l+1)}} C(l, 2, l; m, 0) \mathbf{T}_{l,m} + \\ + \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{im}{\sqrt{(l+1)(l+2)}} C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{S}_{l+1,m} + \sqrt{\frac{2(l+3)}{3(l+2)}} C(l, 2, l+2; m, 0) \mathbf{T}_{l+2,m} \quad (\text{A-88})$$

$$\begin{aligned}
r_{l,m} Y_{l,m} \cdot \mathbf{S}_{2,0} &= s_{lm20}^{RS} \mathbf{S}_{lm} + t_{lm20}^{RS} \mathbf{T}_{lm} \\
s_{lm20}^{RS} &:= -\sqrt{\frac{2l}{3(l+1)}} C(l, 2, l+2; m, 0) r_{l+2,m} + \sqrt{\frac{3}{2l(l+1)}} C(l, 2, l; m, 0) r_{l,m} + \\
&\quad + \sqrt{\frac{2(l+1)}{3l}} C(l, 2, l-2; m, 0) r_{l-2,m}
\end{aligned} \tag{A-89}$$

$$t_{lm20}^{RS} := -\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{im}{\sqrt{l(l+1)}} [C(l, 1, l+1; m, 0) r_{l+1,m} + C(l, 1, l-1; m, 0) r_{l-1,m}]$$

$$\begin{aligned}
r_{l,m} Y_{l,m} \cdot \mathbf{T}_{2,0} &= s_{lm20}^{RT} \mathbf{S}_{lm} + t_{lm20}^{RT} \mathbf{T}_{lm} \\
s_{lm20}^{RT} &:= \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{im}{\sqrt{l(l+1)}} [C(l, 1, l+1; m, 0) r_{l+1,m} + C(l, 1, l-1; m, 0) r_{l-1,m}] \\
t_{lm20}^{RT} &:= -\sqrt{\frac{2l}{3(l+1)}} C(l, 2, l+2; m, 0) r_{l+2,m} + \sqrt{\frac{3}{2l(l+1)}} C(l, 2, l; m, 0) r_{l,m} + \\
&\quad + \sqrt{\frac{2(l+1)}{3l}} C(l, 2, l-2; m, 0) r_{l-2,m}
\end{aligned} \tag{A-90}$$

b) Innenprodukte zwischen vektoriellen Kugelfunktionen

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{S}_{1,0}, \mathbf{S}_{l,m} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2l(l+1)}} \{ (l+1) C(l, 1, l-1; m, 0) Y_{l-1,m} - l C(l, 1, l+1; m, 0) Y_{l+1,m} \} \\
\langle \mathbf{T}_{1,0}, \mathbf{T}_{l,m} \rangle &= \langle \mathbf{S}_{1,0}, \mathbf{S}_{l,m} \rangle
\end{aligned} \tag{A-91}$$

$$\langle \mathbf{S}_{1,0}, \mathbf{T}_{l,m} \rangle = \frac{im}{\sqrt{l(l+1)}} \sqrt{\frac{3}{2}} Y_{l,m} \quad \langle \mathbf{T}_{1,0}, \mathbf{S}_{l,m} \rangle = -\langle \mathbf{S}_{1,0}, \mathbf{T}_{l,m} \rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{S}_{1,0}, \mathbf{S}_{l,m} \rangle s_{l,m} &= c_{lm10}^{SS} Y_{lm} \\
c_{lm10}^{SS} &:= \sqrt{\frac{(l+2)}{2(l+1)}} C(l, 1, l+1; m, 0) s_{l+1,m} - \sqrt{\frac{(l-1)}{2l}} C(l, 1, l-1; m, 0) s_{l-1,m} \\
\langle \mathbf{T}_{1,0}, \mathbf{T}_{l,m} \rangle t_{l,m} &= c_{lm10}^{TT} Y_{lm} \\
c_{lm10}^{TT} &:= \sqrt{\frac{(l+2)}{2(l+1)}} C(l, 1, l+1; m, 0) t_{l+1,m} - \sqrt{\frac{(l-1)}{2l}} C(l, 1, l-1; m, 0) t_{l-1,m}
\end{aligned} \tag{A-92}$$

$$\langle \mathbf{S}_{1,0}, \mathbf{T}_{l,m} \rangle t_{l,m} = c_{lm10}^{TS} Y_{lm} \quad c_{lm10}^{TS} := \frac{im}{\sqrt{l(l+1)}} \sqrt{\frac{3}{2}} t_{l,m}$$

$$\langle \mathbf{T}_{1,0}, \mathbf{S}_{l,m} \rangle s_{l,m} = c_{lm10}^{ST} Y_{lm} \quad c_{lm10}^{ST} := -\frac{im}{\sqrt{l(l+1)}} \sqrt{\frac{3}{2}} s_{l,m}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_{2,0}, \mathbf{S}_{l,m} \rangle = & \sqrt{\frac{2(l+1)}{3l}} C(l, 2, l-2; m, 0) Y_{l-2,m} + \sqrt{\frac{3}{2l(l+1)}} C(l, 2, l; m, 0) Y_{l,m} - \\ & - \sqrt{\frac{2l}{3(l+1)}} C(l, 2, l+2; m, 0) Y_{l+2,m} \end{aligned} \quad (\text{A-93})$$

$$\langle \mathbf{S}_{2,0}, \mathbf{T}_{l,m} \rangle = \sqrt{\frac{5}{2l(l+1)}} im \{ C(l, 1, l-1; m, 0) Y_{l-1,m} + C(l, 1, l+1; m, 0) Y_{l+1,m} \}$$

$$\langle \mathbf{S}_{2,0}, \mathbf{S}_{l,m} \rangle s_{l,m} = c_{lm20}^{SS} Y_{lm}$$

$$\begin{aligned} c_{lm20}^{SS} := & \sqrt{\frac{2(l+3)}{3(l+2)}} C(l, 2, l+2; m, 0) s_{l+2,m} + \sqrt{\frac{3}{2l(l+1)}} C(l, 2, l; m, 0) s_{l,m} - \\ & - \sqrt{\frac{2(l-2)}{3(l-1)}} C(l, 2, l-2; m, 0) s_{l-2,m} \end{aligned} \quad (\text{A-94})$$

$$\langle \mathbf{S}_{2,0}, \mathbf{T}_{l,m} \rangle t_{l,m} = c_{lm20}^{TS} Y_{lm}$$

$$c_{lm20}^{TS} := \sqrt{\frac{5}{2(l+1)(l+2)}} im C(l, 1, l+1; m, 0) t_{l+1,m} + \sqrt{\frac{5}{2l(l-1)}} im C(l, 1, l-1; m, 0) t_{l-1,m}$$

c) Äußere Produkte zwischen vektoriellen Kugelfunktionen

$$\mathbf{S}_{1,0} \times \mathbf{S}_{l,m} = -im \sqrt{\frac{3}{2l(l+1)}} \mathbf{R}_{lm} \quad (\text{A-95})$$

$$\mathbf{S}_{1,0} \times \mathbf{T}_{l,m} = \frac{1}{\sqrt{2l(l+1)}} \{ (l+1) C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{R}_{l-1,m} - l C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{R}_{l+1,m} \}$$

A-3 Tensorielle Kugelfunktionen

a) Antisymmetrische tensorielle Kugelfunktionen:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{l,m}^R & := Y_{lm} (\mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{e}_\Phi - \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_\Lambda) / \sqrt{2} \\ \mathbf{T}_{l,m}^S & := (\mathbf{T}_{lm} \otimes \mathbf{e}_R - \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{T}_{l,m}) / \sqrt{2} \\ \mathbf{T}_{l,m}^T & := (\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{S}_{lm} - \mathbf{S}_{lm} \otimes \mathbf{e}_R) / \sqrt{2} \end{aligned} \quad (\text{A-96})$$

b) Symmetrische tensorielle Kugelfunktionen

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{lm}^{L0} & := Y_{lm} \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R \\ \mathbf{T}_{lm}^{T0} & := Y_{lm} (\mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{e}_\Lambda) / \sqrt{2} \\ \mathbf{T}_{lm}^{E1} & := (\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{S}_{lm} + \mathbf{S}_{lm} \otimes \mathbf{e}_R) / \sqrt{2} \\ \mathbf{T}_{lm}^{B1} & := (\mathbf{T}_{lm} \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{T}_{lm}) / \sqrt{2} \end{aligned} \quad (\text{A-97})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{lm}^{E2} &:= \left[(\mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_\Phi - \mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{e}_\Lambda) (\partial_\Phi^2 + \tan \Phi \partial_\Phi - \frac{1}{\cos^2 \Phi} \partial_\Lambda^2) Y_{lm} \right. \\
&\quad \left. + 2(\mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_\Lambda) \partial_\Phi \left(\frac{1}{\cos \Phi} \partial_\Lambda Y_{lm} \right) \right] / \sqrt{2(l-1)l(l+1)(l+2)} \\
&= \frac{1}{\cos \Phi} [2im \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{T}_{lm} - 2im \mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{S}_{lm} - 2 \sin \Phi \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{S}_{lm} - \\
&\quad - 2 \sin \Phi \mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{T}_{lm} + \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{l(l+1)} Y_{lm} (\mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{S}_{1,0} + \mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{T}_{1,0})] / \sqrt{2(l-1)(l+2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2} \cos \Phi} \left\{ \frac{im \sqrt{(l+2)(l-1)}}{l(l+1)} [\mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{T}_{lm} - \mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{S}_{lm}] - \right. \\
&\quad - \frac{\sqrt{(l+1)(l+2)}}{\sqrt{3}l} C(l, 1, l-1; m, 0) [\mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{S}_{l-1,m} + \mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{T}_{l-1,m}] + \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{l(l-1)}}{\sqrt{3}(l+1)} C(l, 1, l+1; m, 0) [\mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{S}_{l+1,m} + \mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{T}_{l+1,m}] \right\}
\end{aligned} \tag{A-98}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{lm}^{B2} &:= \left[2(\mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_\Phi - \mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{e}_\Lambda) \partial_\Phi \left(\frac{1}{\cos \Phi} \partial_\Lambda Y_{lm} \right) \right. \\
&\quad \left. - (\mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_\Lambda) (\partial_\Phi^2 + \tan \Phi \partial_\Phi - \frac{1}{\cos^2 \Phi} \partial_\Lambda^2) Y_{lm} \right] / \sqrt{2(l-1)l(l+1)(l+2)} \\
&= \frac{1}{\cos \Phi} [-2im \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{S}_{lm} - 2im \mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{T}_{lm} - 2 \sin \Phi \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{T}_{lm} - \\
&\quad + 2 \sin \Phi \mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{S}_{lm} + \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{l(l+1)} Y_{lm} (\mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{T}_{1,0} - \mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{S}_{1,0})] / \sqrt{2(l-1)(l+2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2} \cos \Phi} \left\{ -\frac{im \sqrt{(l+2)(l-1)}}{l(l+1)} [\mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{S}_{lm} + \mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{T}_{lm}] - \right. \\
&\quad - \frac{\sqrt{(l+1)(l+2)}}{\sqrt{3}l} C(l, 1, l-1; m, 0) [\mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{T}_{l-1,m} - \mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{S}_{l-1,m}] + \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{l(l-1)}}{\sqrt{3}(l+1)} C(l, 1, l+1; m, 0) [\mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{T}_{l+1,m} - \mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{S}_{l+1,m}] \right\}
\end{aligned} \tag{A-99}$$

c) Darstellung des Gradienten eines Vektorfeldes in tensoriellen Kugelfunktionen:

$$\begin{aligned}
\text{grad} (r_{l,m} \mathbf{R}_{lm} + s_{l,m} \mathbf{S}_{lm} + t_{l,m} \mathbf{T}_{lm}) &= \\
&\sqrt{l(l+1)/2} \frac{t_{l,m}}{R} \mathbf{T}_{lm}^R - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{dt_{l,m}}{dR} + \frac{t_{l,m}}{R} \right) \mathbf{T}_{lm}^S + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{l(l+1)} \frac{r_{l,m}}{R} + \frac{ds_{l,m}}{dR} + \frac{s_{l,m}}{R} \right) \mathbf{T}_{lm}^T + \\
&+ \frac{dr_{l,m}}{dR} \mathbf{T}_{lm}^{L0} + \frac{1}{R} (\sqrt{2} r_{l,m} + \sqrt{l(l+1)/2} s_{l,m}) \mathbf{T}_{lm}^{T0} - \\
&- \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{l(l+1)} \frac{r_{l,m}}{R} - \frac{ds_{l,m}}{dR} + \frac{s_{l,m}}{R} \right) \mathbf{T}_{lm}^{E1} - \sqrt{(l-1)(l+2)/2} \frac{s_{l,m}}{R} \mathbf{T}_{lm}^{E2} + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{dt_{l,m}}{dR} - \frac{t_{l,m}}{R} \right) \mathbf{T}_{lm}^{B1} - \sqrt{(l-1)(l+2)/2} \frac{t_{l,m}}{R} \mathbf{T}_{lm}^{B2}
\end{aligned} \tag{A-100}$$

d) Verjüngungen des Verzerrungs-Tensors in vektoriellen Kugelfunktionen

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\text{GRAD } \mathbf{u} + \text{GRAD}^T \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(U_{K|L} + U_{L|K})\mathbf{G}^K \otimes \mathbf{G}^L = \\
&= \frac{\partial U_R}{\partial R} \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial U_\Phi}{\partial \Phi} + U_R \right) \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\cos \Phi} \frac{\partial U_\Lambda}{\partial \Lambda} + U_R - \tan \Phi U_\Phi \right) \mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{e}_\Lambda + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial U_R}{\partial R} + \frac{\partial U_\Phi}{\partial R} - \frac{U_\Phi}{R} \right) (\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_R) + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R \cos \Phi} \frac{\partial U_R}{\partial \Lambda} + \frac{\partial U_\Lambda}{\partial R} - \frac{U_\Lambda}{R} \right) (\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_\Lambda + \mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{e}_R) + \\
&+ \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{\cos \Phi} \frac{\partial U_\Phi}{\partial \Lambda} + \frac{\partial U_\Lambda}{\partial \Phi} + \tan \Phi U_\Lambda \right) (\mathbf{e}_\Lambda \otimes \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_\Lambda)
\end{aligned} \tag{A-101}$$

Für die Verjüngung $\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_R$ gilt

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_R = \frac{d\mathbf{r}_{l,m}}{dR} \mathfrak{R}_{lm} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R} \mathbf{r}_{lm} + \frac{d\mathbf{s}_{l,m}}{dR} - \frac{1}{R} \mathbf{s}_{l,m} \right) \mathfrak{S}_{lm} + \left(\frac{d\mathbf{t}_{l,m}}{dR} - \frac{1}{R} \mathbf{t}_{l,m} \right) \mathfrak{T}_{lm} \right] \tag{A-102}$$

(Zum Beweis wendet man (A-101) auf \mathbf{e}_R an und benutzt (A-39) sowie die Definition der vektoriellen Kugelfunktionen (A-29).

e) Überschiebungen der tensoriellen Kugelfunktionen mit \mathbf{N} bzw. $\mathbf{S}_{2,0}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{lm}^{L0} \cdot \mathbf{N} &= \mathbf{R}_{l,m} = \bar{\mathbf{R}}_{l,m} + \sqrt{\frac{2}{15}} e^2 Y_{l,m} \mathbf{S}_{2,0} \\
\mathbf{T}_{lm}^{T0} \cdot \mathbf{N} &= -\frac{e^2}{\sqrt{15}} Y_{l,m} \mathbf{S}_{2,0} \\
\mathbf{T}_{lm}^{E1} \cdot \mathbf{N} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{\mathbf{S}}_{l,m} - 2\sqrt{\frac{2}{15}} e^2 \langle \mathbf{S}_{l,m}, \mathbf{S}_{2,0} \rangle \mathbf{e}_R \right\} \\
\mathbf{T}_{lm}^{B1} \cdot \mathbf{N} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{\mathbf{T}}_{l,m} - 2\sqrt{\frac{2}{15}} e^2 \langle \mathbf{T}_{l,m}, \mathbf{S}_{2,0} \rangle \mathbf{e}_R \right\}
\end{aligned} \tag{A-103}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{lm}^{E2} \cdot \mathbf{S}_{2,0} &= \frac{\sqrt{5}}{2} \left\{ \frac{2\sqrt{(l+1)(l-2)(l+2)}}{(l-1)\sqrt{15l}} C(l, 2, l-2; m, 0) \mathbf{S}_{l-2,m} + \right. \\
&+ \frac{9\sqrt{(l-1)(l+2)}}{\sqrt{15} l(l+1)} C(l, 2, l; m, 0) \mathbf{S}_{lm} - \frac{2\sqrt{l(l-1)(l+3)}}{(l+2)\sqrt{15}(l+1)} C(l, 2, l+2; m, 0) \mathbf{S}_{l+2,m} - \\
&\left. - im \frac{(l-3)\sqrt{l+2}}{l(l-1)\sqrt{l+1}} C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{T}_{l-1,m} - im \frac{(l+4)\sqrt{l-1}}{(l+1)(l+2)\sqrt{l}} C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{T}_{l+1,m} \right\}
\end{aligned} \tag{A-104}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{lm}^{B2} \cdot \mathbf{S}_{2,0} &= \frac{\sqrt{5}}{2} \left\{ \frac{2\sqrt{(l+1)(l-2)(l+2)}}{(l-1)\sqrt{15l}} C(l, 2, l-2; m, 0) \mathbf{T}_{l-2,m} + \right. \\
&+ \frac{9\sqrt{(l-1)(l+2)}}{\sqrt{15} l(l+1)} C(l, 2, l; m, 0) \mathbf{T}_{lm} - \frac{2\sqrt{l(l-1)(l+3)}}{(l+2)\sqrt{15}(l+1)} C(l, 2, l+2; m, 0) \mathbf{T}_{l+2,m} + \\
&\left. + im \frac{(l-3)\sqrt{l+2}}{l(l-1)\sqrt{l+1}} C(l, 1, l-1; m, 0) \mathbf{S}_{l-1,m} + im \frac{(l+4)\sqrt{l-1}}{(l+1)(l+2)\sqrt{l}} C(l, 1, l+1; m, 0) \mathbf{S}_{l+1,m} \right\}
\end{aligned} \tag{A-105}$$

A-4 Darstellung geometrischer Elemente des Rotationsellipsoids mit Hilfe von Kugelfunktionen

Im folgenden bezeichnen wir mit

- a - die große Halbachse des Ellipsoids
- b - die kleine Halbachse des Ellipsoids
- e^2 - die 1. numerische Exzentrizität des Ellipsoids
- Λ, Φ - geozentrische Länge und Breite auf dem Ellipsoid

Wir vernachlässigen Terme der Ordnung e^4 .

Definition des "mittleren Radius" \bar{R} des Ellipsoids:

$$\bar{R} := \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R(\Phi) \cos \Phi \, d\Phi d\Lambda = \frac{b}{2e} \ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right) \approx b\left(1 + \frac{e^2}{3}\right) \approx a\left(1 - \frac{e^2}{6}\right) \quad (\text{A-106})$$

Abstand $R(\Phi)$ der Ellipsoidfläche von ihrem Ursprung

$$R(\Phi) \approx \bar{R}\left(1 - \frac{e^2}{3\sqrt{5}} Y_{2,0}\right) \quad (\text{A-107})$$

Normalenvektor in vektoriellen Kugelfunktionen:

$$\mathbf{n} \approx \mathbf{R}_{0,0} - \sqrt{\frac{2}{15}} e^2 \mathbf{S}_{2,0} \quad (\text{A-108})$$

Beweis:

Sei $\mathbf{x}(\Lambda, \Phi) = R(\Phi) \mathbf{e}_R$ der Ortsvektor des Ellipsoides. Dann folgt

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Lambda} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Phi}}{\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Lambda} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Phi} \right|} = \frac{R \mathbf{e}_R - \frac{\partial R}{\partial \Phi} \mathbf{e}_\Phi}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \Phi}\right)^2}} \approx \frac{\left(1 - \frac{e^2}{3\sqrt{5}} Y_{2,0}\right) \mathbf{e}_R + \frac{e^2}{3\sqrt{5}} \frac{\partial Y_{2,0}}{\partial \Phi} \mathbf{e}_\Phi}{\sqrt{\left(1 - \frac{e^2}{3\sqrt{5}} Y_{2,0}\right)^2}} \approx \mathbf{R}_{0,0} - \sqrt{\frac{2}{15}} e^2 \mathbf{S}_{2,0}. \quad \blacksquare$$

Flächenelement in geozentrischer Länge und Breite Λ, Φ :

$$\begin{aligned} d^2 \mathbf{X} &= a^2 \cos \Phi (1 - e^2 \sin^2 \Phi) d\Phi d\Lambda \\ &= a^2 \cos \Phi \left(1 - e^2 \left(\frac{2}{3\sqrt{5}} Y_{2,0} + \frac{1}{3} Y_{0,0}\right)\right) d\Phi d\Lambda \approx \bar{R}^2 \cos \Phi \left(1 - \frac{2e^2}{3\sqrt{5}} Y_{2,0}\right) d\Phi d\Lambda \end{aligned} \quad (\text{A-109})$$

B Euler'sche und Lagrange'sche Störungen der gravitativen Feldgrößen

Wir skizzieren hier Beweise für die Formeln (2-201), (2-204) aus Abschnitt 2. Wir benutzen dazu stetig differenzierbare Regularisierungen der Integralkerne sowie die folgenden Sätze aus der Analysis:

Lemma B-1 (Vertauschbarkeit von Ableitung und Integration):

Es seien die Funktionen $f(x^i, t^j)$, $\frac{\partial f}{\partial t^k}(x^i, t^j)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$ im Definitionsbereich $G_1(\mathbf{x}) \times G_2(\mathbf{t})$ in allen Argumenten stetig. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t^k} \int_{G_1(\mathbf{x})} f(x^i, t^j) d^n \mathbf{x} = \int_{G_1(\mathbf{x})} \frac{\partial f}{\partial t^k} f(x^i, t^j) d^n \mathbf{x},$$

i.e. Integration und Differentiation dürfen vertauscht werden. ■

Lemma B-2 (Vertauschbarkeit von Limes und Ableitung):

Sei $F_k(t^i)$ eine Funktionenfolge, die ebenso wie die Folge der Ableitungen $\frac{\partial F_k}{\partial t^j}(t^i)$ im Definitionsbereich $G(\mathbf{t})$ gleichmäßig konvergiere:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(t^i) = F(t^i), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial F_k}{\partial t^j}(t^i) = f_j(t^i)$$

Dann existiert $\frac{\partial F}{\partial t^j}(t^i) \quad \forall \mathbf{t} \in G(\mathbf{t})$ und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial F_k}{\partial t^j}(t^i) = f_j(t^i) = \frac{\partial F}{\partial t^j}(t^i) = \frac{\partial}{\partial t^j} \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(t^i),$$

i.e. Limesbildung und Differentiation dürfen vertauscht werden. ■

Zum Beweis des Lemmas (sogar unter schwächeren Voraussetzungen) siehe *H. Heuser (1982) p. 552*.

Wir definieren folgenden regularisierenden Kern:

$$\mathbf{g}^{(\delta)}(\mathbf{x}_P, \mathbf{x}_Q) = \begin{cases} \frac{\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P}{2\delta^3} \left(5 - 3 \frac{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|^2}{\delta^2}\right) & \text{für } |\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q| \leq \delta \\ \frac{\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|^3} & \text{für } |\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q| > \delta \end{cases}$$

Da der Kern nur von der Differenz $\mathbf{d}_{PQ} := \mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P$ abhängig ist, schreiben wir auch $\mathbf{g}^{(\delta)}(\mathbf{d}_{PQ})$. Der Gradient von $\mathbf{g}^{(\delta)}(\mathbf{d}_{PQ})$ lautet

$$\text{grad}_{(\mathbf{d}_{PQ})} \mathbf{g}^{(\delta)}(\mathbf{d}_{PQ}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{I}}{2\delta^3} \left(5 - 3 \frac{|\mathbf{d}_{PQ}|^2}{\delta^2}\right) - \frac{3}{\delta^5} \mathbf{d}_{PQ} \otimes \mathbf{d}_{PQ} & \text{für } |\mathbf{d}_{PQ}| \leq \delta \\ \frac{\mathbf{I}}{|\mathbf{d}_{PQ}|^3} - \frac{3}{|\mathbf{d}_{PQ}|^5} \mathbf{d}_{PQ} \otimes \mathbf{d}_{PQ} & \text{für } |\mathbf{d}_{PQ}| > \delta. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\text{grad}_{(\mathbf{d}_{PQ})} \mathbf{g}^{(\delta)}(\mathbf{d}_{PQ})$ ebenso wie $\mathbf{g}^{(\delta)}(\mathbf{d}_{PQ})$ selbst überall stetig, insbesondere an der Stelle $|\mathbf{d}_{PQ}| = \delta$.

Betrachten wir zunächst die Formel (2-201) für die Anomalien. Wir bilden die folgende Argumentationskette:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \mathbf{f}_G(\mathbf{x}_P(t))|_{t_0} \cdot \Delta t &= \frac{D}{Dt} \left\{ g \int_{R^3} \varrho(\mathbf{x}_Q(t)) \frac{\mathbf{x}_Q(t) - \mathbf{x}_P(t)}{|\mathbf{x}_Q(t) - \mathbf{x}_P(t)|^3} d^3 \mathbf{x}_Q \right\} |_{t_0} \cdot \Delta t \\ &= \frac{D}{Dt} \left\{ \lim_{\delta \rightarrow 0} g \int_{R^3} \varrho(\mathbf{x}_Q(t)) \mathbf{g}^{(\delta)}(\mathbf{d}_{PQ}(t)) d^3 \mathbf{x}_Q \right\} |_{t_0} \cdot \Delta t \\ &= g \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{D}{Dt} \int_{R^3} \varrho(\mathbf{x}_Q(t)) \mathbf{g}^{(\delta)}(\mathbf{d}_{PQ}(t)) d^3 \mathbf{x}_Q \right\} |_{t_0} \cdot \Delta t \\ &= g \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{R^3} \varrho(\mathbf{x}_Q(t)) \frac{d}{dt} \mathbf{g}^{(\delta)}(\mathbf{d}_{PQ}(t)) d^3 \mathbf{x}_Q \right\} |_{t_0} \cdot \Delta t \\ &\approx g \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{R^3} \varrho(\mathbf{X}_Q) \text{grad}_d \mathbf{g}^{(\delta)}|_{\mathbf{d}_{PQ}(t_0)} \cdot (\mathbf{u}_Q - \mathbf{u}_P) d^3 \mathbf{X}_Q \right\} \end{aligned}$$

Damit ist Formel (2-204) bewiesen. Zu beachten ist, daß der Grenzwertprozess in der Weise vollzogen wurde, daß das Integrationsgebiet durch Kugeln um den Aufpunkt mit immer kleiner werdendem Radius unterteilt wurde.

Wir geben noch alternative Beweisskizzen von (2-203), (2-204), (2-200) und (2-201) an.

Das Störpotential kann als Newtonintegral über die Dichtestörung in linearer Näherung gemäß (2-148) approximiert werden:

$$\begin{aligned}\delta v(\mathbf{x}_P) &\approx -g \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{R^3 \setminus K^\delta} \frac{\text{DIV}_Q(\varrho_0(\mathbf{X}_Q)\mathbf{u}_Q)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|} d^3\mathbf{X}_Q \\ &= -g \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{R^3 \setminus K^\delta} \text{DIV}_Q \left\{ \frac{(\varrho_0(\mathbf{X}_Q)\mathbf{u}_Q)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|} \right\} d^3\mathbf{X}_Q + \\ &\quad + g \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{R^3 \setminus K^\delta} \langle \varrho_0(\mathbf{X}_Q)\mathbf{u}_Q, \text{GRAD}_Q \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|} \right\} \rangle d^3\mathbf{X}_Q\end{aligned}$$

Wenden wir auf den ersten Summanden den Gauß'schen Satz an, so verschwinden die beiden entstehenden Flächenintegrale, denn außerhalb der Erde verschwindet die Dichte, und

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{K^\delta} \frac{\varrho_0(\mathbf{X}_Q)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|} \langle \mathbf{u}_Q, \mathbf{N} \rangle d^2\mathbf{X}_Q = 0.$$

Wir erhalten daher

$$\delta v(\mathbf{x}_P) \approx g \int_{R^3} \varrho_0(\mathbf{X}_Q) \frac{\langle \mathbf{u}_Q, \mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q \rangle}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|^3} d^3\mathbf{X}_Q$$

wie vorher. Die entsprechende Umformung läßt sich auch für die Schwerstörung durchführen. Auch hier wird der Gauß'sche Satz angewandt, wobei in diesem Fall aber das Flächenintegral nicht verschwindet: wegen der starken Singularität des Integralkernes wird eine Kugel K^δ um den Aufpunkt mit Radius δ vom Integrationsgebiet ausgeschlossen; \mathbf{N} ist die äußere Normale dieser Kugel. Beim Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ ergibt sich aus dem Flächenintegral ein integralfreier Term:

$$\begin{aligned}\text{grad } \delta v(\mathbf{x}_P) &\approx -g \int_{R^3} \frac{\text{DIV}_Q(\varrho_0(\mathbf{X}_Q)\mathbf{u}_Q)(\mathbf{X}_Q - \mathbf{x}_P)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|^3} d^3\mathbf{X}_Q \\ &= -g \int_{R^3} \text{DIV}_Q \left\{ \frac{(\mathbf{X}_Q - \mathbf{x}_P)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|^3} \otimes \varrho_0\mathbf{u}_Q \right\} d^3\mathbf{X}_Q + g \int_{R^3} \text{GRAD}_Q \left\{ \frac{(\mathbf{X}_Q - \mathbf{x}_P)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|^3} \right\} \cdot \varrho_0\mathbf{u}_Q d^3\mathbf{X}_Q \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ g \int_{K^\delta} \frac{(\mathbf{X}_Q - \mathbf{x}_P)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|^3} \langle \varrho_0\mathbf{u}_Q, \mathbf{N} \rangle d^2\mathbf{X}_Q + \right. \\ &\quad \left. + g \int_{R^3 \setminus K^\delta} \left\{ \frac{\mathbf{I}}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|^3} - 3 \frac{(\mathbf{X}_Q - \mathbf{x}_P) \otimes (\mathbf{X}_Q - \mathbf{x}_P)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|^5} \right\} \cdot \varrho_0\mathbf{u}_Q d^3\mathbf{X}_Q \right\} \\ &= \frac{4\pi g \varrho(\mathbf{x}_P)\mathbf{u}_P}{3} + g \int_{R^3} \varrho_0(\mathbf{X}_Q) \left\{ \frac{\mathbf{u}_Q}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|^3} - 3 \frac{(\mathbf{X}_Q - \mathbf{x}_P) \langle (\mathbf{X}_Q - \mathbf{x}_P), \mathbf{u}_Q \rangle}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{X}_Q|^5} \right\} d^3\mathbf{X}_Q\end{aligned}$$

wie vorher; das letzte Integral muß wieder als Cauchy-Hauptwert behandelt werden.

Gemäß (2-85) gilt in linearer Approximation

$$\Delta v(\mathbf{X}_P) \approx \delta v(\mathbf{X}_P) + \langle \text{grad } v(\mathbf{X}_P, t_0), \mathbf{u}_P \rangle$$

Nun ist

$$\langle \text{grad } v(\mathbf{X}_P, t_0), \mathbf{u}_P \rangle \approx g \int_{R^3} \varrho_0(\mathbf{X}_Q) \frac{\langle \mathbf{X}_Q - \mathbf{X}_P, \mathbf{u}_P \rangle}{|\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q|^3} d^3\mathbf{X}_Q$$

und mit (2-203) folgt (2-200). Analog dazu wird

$$\Delta \mathbf{f}_G(\mathbf{X}_P) \approx \delta \mathbf{f}_G(\mathbf{X}_P) + \langle \text{grad } \mathbf{f}_G(\mathbf{X}_P, t_0), \mathbf{u}_P \rangle$$

und mit

$$\langle \text{grad } \mathbf{f}_G(\mathbf{X}_P, t_0), \mathbf{u}_P \rangle =$$

(siehe z.B. *E. Martensen 1968, S.122*, das Integral ist als Cauchy- Hauptwert zu verstehen)

$$\begin{aligned} &= \langle g \int_{R^3} \varrho_0(\mathbf{X}_Q) \text{grad grad } \frac{1}{|\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q|} d^3\mathbf{X}_Q - \frac{4\pi g}{3} \varrho_0(\mathbf{X}_P) \mathbf{I}, \mathbf{u}_P \rangle = \\ &= \langle g \int_{R^3} \varrho_0(\mathbf{X}_Q) \left\{ \frac{-\mathbf{I}}{|\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q|^3} + 3 \frac{(\mathbf{X}_Q - \mathbf{X}_P) \otimes (\mathbf{X}_Q - \mathbf{X}_P)}{|\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q|^5} \right\} d^3\mathbf{X}_Q, \mathbf{u}_P \rangle - \frac{4\pi g}{3} \varrho_0(\mathbf{X}_P) \mathbf{u}_P \end{aligned}$$

folgt (2-201).

Weiter beweisen wir die Differentialgleichung (2-208) für die Anomalie Δv . Wegen $\Delta v = \Delta v^\mathcal{L}(X^K, t) = v^\mathcal{L}(X^K, t) - v^\mathcal{L}(X^K, t_0)$ wird

$$\begin{aligned} \text{div grad } \Delta v &\approx \text{DIV GRAD } \Delta v = \text{DIV GRAD } v^\mathcal{L}(X^K, t) - \text{DIV GRAD } v^\mathcal{L}(X^K, t_0) \\ &= \text{DIV GRAD } v^\mathcal{L}(X^K, t) + 4\pi g \varrho^\mathcal{L}(X^K, t_0) \approx \text{(siehe (2-95))} \\ &\approx \text{div grad } v(\mathbf{x}_P, t) + (2v_{|KM} U_{|L}^M + v_{|M} U_{|KL}^M) G^{KL} + 4\pi g \varrho_0(\mathbf{X}_P) \\ &= -4\pi g \varrho(\mathbf{x}_P) + (2v_{|KM} U_{|L}^M + v_{|M} U_{|KL}^M) G^{KL} + 4\pi g \varrho_0(\mathbf{X}_P) \\ &= -4\pi g \Delta \varrho + (2v_{|KM} U_{|L}^M + v_{|M} U_{|KL}^M) G^{KL}. \end{aligned}$$

Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn der Laplace-Operator auf

$$\Delta v(\mathbf{X}_P) \approx \delta v(\mathbf{X}_P) + \langle \text{grad } v(\mathbf{X}_P, t_0), \mathbf{u}_P \rangle$$

angewandt wird.

Formel (2-209) folgt für die Störungen aus der Definition, für die Anomalien mit Hilfe von (2-91) aus

$$\begin{aligned} \text{div } \Delta \mathbf{f}_G &\approx \text{DIV } \mathbf{f}_G^\mathcal{L}(X^K, t) - \text{DIV } \mathbf{f}_G^\mathcal{L}(X^K, t_0) \\ &\approx \text{div } \mathbf{f}_G^\mathcal{L}(X^K, t) + F_{|K}^L U_{|L}^K + 4\pi g \varrho_0(\mathbf{X}_P) = -4\pi g \Delta \varrho(\mathbf{X}_P) + F_{|K}^L U_{|L}^K, \end{aligned}$$

Formel (2-210) in entsprechender Weise mit Hilfe von (2-97).

C Rechenregeln für die Laplace-Transformation

Definition:

Die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[f(t)]$ einer Funktion $f(t)$ ist durch

$$\mathcal{L}[f(t)] := \tilde{f}(s) := \int_0^\infty f(t) \exp(-st) dt \quad (\text{C-1})$$

definiert.

Rechenregeln:

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(t-t') g(t') dt' \right\} = \tilde{f}(s) \tilde{g}(s) \quad (\text{C-2})$$

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right\} = s \tilde{f}(s) - f(0) \quad (\text{C-3})$$

$$\mathcal{L}\{H(t-t_0)\} = \frac{1}{s} \exp(-st_0)$$

$$\mathcal{L}\{\exp(at)\} = \frac{1}{s-a} \quad (\text{C-4})$$

$$\mathcal{L}\{t \exp(at)\} = \frac{1}{(s-a)^2}$$

D Rechenregeln für Euler'sche und Lagrange'sche Inkremente

Lemma D-1 (Rechenregeln für Inkremente von Feldgrößen):

Seien F, H skalare Feldgrößen. Es gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned}
 1.) \quad \delta(F \cdot H) &= H^{\mathcal{E}}(x^k, t) \delta F + F^{\mathcal{E}}(x^k, t) \delta H - \delta F \delta H \\
 &= H^{\mathcal{E}}(x^k, t_0) \delta F + F^{\mathcal{E}}(x^k, t_0) \delta H + \delta F \delta H \\
 \Delta(F \cdot H) &= H^{\mathcal{L}}(X^K, t) \Delta F + F^{\mathcal{L}}(X^K, t) \Delta H - \Delta F \Delta H \\
 &= H^{\mathcal{L}}(X^K, t_0) \Delta F + F^{\mathcal{L}}(X^K, t_0) \Delta H + \Delta F \Delta H \tag{D-1} \\
 2.) \quad \Delta F &= \delta F + F^{\mathcal{E}}(x^k, t_0) - F^{\mathcal{E}}(\delta_K^k X^K, t_0) \\
 \delta F &= \Delta F + F^{\mathcal{L}}(X^K, t_0) - F^{\mathcal{L}}(\delta_k^K x^k, t_0) \\
 3.) \quad (\delta F)_{,k} &= \delta(F_{,k}) \quad (\Delta F)_{,K} = \Delta(F_{,K}) \\
 4.) \quad (\delta F)_{,K} &= \Delta(F^{\mathcal{L}}_{,K}) + F^{\mathcal{L}}_{,K}(X^L, t_0) - F^{\mathcal{L}}_{,M}(\delta_l^L x^l, t_0) \delta_k^M x^k_{,K} \\
 \delta(F_{,K}) &= \Delta(F^{\mathcal{L}}_{,K}) + F^{\mathcal{L}}_{,K}(X^L, t_0) - F^{\mathcal{L}}_{,K}(\delta_l^L x^l, t_0) \\
 \implies (\delta F)_{,K} &= \delta(F^{\mathcal{L}}_{,K}) - F^{\mathcal{L}}_{,M}(\delta_l^L x^l, t_0) \delta_k^M \Delta x^k_{,K} \\
 (\Delta F)_{,k} &= \delta(F^{\mathcal{E}}_{,k}) + F^{\mathcal{E}}_{,k}(x^l, t_0) - F^{\mathcal{E}}_{,m}(\delta_l^L X^L, t_0) \delta_k^m X^K_{,k} \\
 \Delta(F^{\mathcal{E}}_{,k}) &= \delta(F^{\mathcal{E}}_{,k}) + F^{\mathcal{E}}_{,k}(x^l, t_0) - F^{\mathcal{E}}_{,k}(\delta_l^L X^L, t_0) \\
 \implies (\Delta F)_{,k} &= \Delta(F^{\mathcal{E}}_{,k}) - F^{\mathcal{E}}_{,m}(\delta_l^L X^L, t_0) \delta_k^m \delta X^K_{,k}
 \end{aligned}$$

Sei $\mathcal{V}(t)$ ein materielles Volumen, $\sigma(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}_Q(t), t)$ eine Zweipunkt-Kernfunktion; $\mathbf{p}(t)$ sei ein Ortsvektor zu einem materiellen Punkt. Das Volumen des Grundzustandes wird mit $\mathcal{V}_0 := \mathcal{V}(t_0)$ abgekürzt. Die Feldgröße $F(\mathbf{p}(t), t)$ sei definiert als $F(\mathbf{p}(t), t) = \int_{\mathcal{V}(t)} \sigma(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}_Q, t) d^3 \mathbf{x}_Q$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 5.) \quad \Delta F &= F(\mathbf{p}(t), t) - F(\mathbf{P}, t_0) \\
 &= \int_{\mathcal{V}(t)} \sigma(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}_Q, t) d^3 \mathbf{x}_Q - \int_{\mathcal{V}_0} \sigma(\mathbf{P}, \mathbf{X}_Q, t_0) d^3 \mathbf{X}_Q \\
 &= \int_{\mathcal{V}(t)} \Delta_{PQ} \sigma d^3 \mathbf{x}_Q + \int_{\mathcal{V}_0} \sigma(\mathbf{P}, \mathbf{X}_Q, t_0) \left(\sqrt{\frac{\det g}{\det G}} |Q \cdot j|_Q - 1 \right) d^3 \mathbf{X}_Q \\
 &= \int_{\mathcal{V}_0} \Delta_{PQ} \sigma d^3 \mathbf{X}_Q + \int_{\mathcal{V}_0} \sigma(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}_Q(\mathbf{X}_Q, t), t) \left(\sqrt{\frac{\det g}{\det G}} \cdot j - 1 \right) d^3 \mathbf{X}_Q \tag{D-2} \\
 \delta F &= F(\mathbf{p}, t) - F(\mathbf{p}, t_0) \\
 &= \int_{\mathcal{V}(t)} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{x}_Q, t) d^3 \mathbf{x}_Q - \int_{\mathcal{V}_0} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{X}_Q, t_0) d^3 \mathbf{X}_Q \\
 &= \int_{\mathcal{V}(t)} \Delta_Q \sigma d^3 \mathbf{x}_Q + \int_{\mathcal{V}_0} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{X}_Q, t_0) \left(\sqrt{\frac{\det g}{\det G}} |Q \cdot j|_Q - 1 \right) d^3 \mathbf{X}_Q \\
 &= \int_{\mathcal{V}_0} \Delta_Q \sigma d^3 \mathbf{X}_Q + \int_{\mathcal{V}_0} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{x}_Q(\mathbf{X}_Q, t), t) \left(\sqrt{\frac{\det g}{\det G}} \cdot j - 1 \right) d^3 \mathbf{X}_Q
 \end{aligned}$$

wobei die Abkürzungen $\Delta_{PQ} \sigma := \sigma(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}_Q(\mathbf{X}_Q, t), t) - \sigma(\mathbf{P}, \mathbf{X}_Q, t_0)$ und $\Delta_Q \sigma := \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{x}_Q(\mathbf{X}_Q, t), t) - \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{X}_Q, t_0)$ benutzt wurden; das Δ soll sich also im ersten Fall auf beide Argumente, im zweiten nur auf den Integrationspunkt beziehen. ■

Die meisten dieser Rechenregeln ergeben sich direkt aus den Definitionen. Bei 2.) haben wir $F^{\mathcal{E}}(x^k, t_0) = F^{\mathcal{L}}(\delta_k^K x^k, t_0)$ und $F^{\mathcal{L}}(X^K, t_0) = F^{\mathcal{E}}(\delta_K^k X^K, t_0)$ benutzt. Für den Beweis zu 5.) wurde noch die Beziehung (2-64) zwischen dem verzerrten und dem unverzerrten Volumenelement (Abschnitt 2-23) verwendet.

Literatur

- Abd-Elmotaal, H.A.H. (1991): Gravity anomalies Based on the Vening Meinesz Isostatic Model and their Statistical Behaviour. Mitteilungen der geodätischen Institute der Universität Graz: Folge 72
- Abolghasem, A.M. (2001): Numerical Modeling of Post-seismic Displacement Fields. Technical Reports of the Department of Geodesy and Geoinformatics, University of Stuttgart, Report No. 2001.2
- Airy, G.B. (1855). Phil. Trans. **145**, 101-104
- Balmino, G. (1978): On the Product of Legendre Functions as encountered in Geodynamics. *Studia geoph. et geod* **22** (1978), 107-118
- Bialas, V. (1982): Erdgestalt, Kosmologie und Weltanschauung - Die Geschichte der Geodäsie als Teil der Kulturgeschichte der Menschheit. Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart.
- Čadek, O. and Z. Martinec (1991): Spherical harmonic expansion of the earth's crustal thickness up to degree and order 30. *Studia geophysica et geodaetica*, 35: 151-165, 1991
- Chandrasekhar, S. (1969): Ellipsoidal Figures of Equilibrium. Yale University Press. New Haven and London, 1969
- Chinnery, M.A. (1975): The Static Deformation of an Earth with a Fluid Core: A Physical Approach. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **42**, 461-475
- Christensen, R.M. (1982): Theory of Viscoelasticity, 2nd edition, Academic Press, New York 1982.
- Clairaut, A.C. (1743): La Théorie de la figure de la Terre tirée des Principes de l'Hydrostatique. Paris 1743. Deutsche Übersetzung: Theorie der Erdgestalt nach den Gesetzen der Hydrostatik (Ostwalds Klassiker der modernen Wissenschaften Nr. 189) Verlag von Wilhelm Engelmann, 1913, Leipzig.
- Comer, R. (1983): Thick plate flexure. *Geophys. J. R. astr. Soc.* **72**, 101-113
- Corrieu, V., C. Thoraval and Y. Ricard (1995): Mantle dynamics and geoid Green functions. *Geophys. J. Int.*, **120**, 516-523.
- Dahlen, F.A. (1972): Elastic dislocation theory for a self-gravitating elastic configuration with an initial static stress field. *Geophys. J. R. astr. Soc.* **28**, 357-383
- Dehant, V. and J.M. Wahr (1991): The Response of a Compressible, Non-Homogeneous Earth to Internal Loading: Theory. *J. Geomag. Geoelectr.*, **43**: 157-178
- Dickey, P.A. (1985): Who discovered Mount Everest? *EOS Transactions, American Geophysical Union*, Vol 66, No. 41, October 8, 1985.
- Dong, D., J.O. Dickey, Y. Chao and M.K. Cheng (1997): Geocenter variations caused by atmosphere, ocean and surface ground water. *Geophysical Research Letters*, Vol. 24, No. 15, pp 1867-1870
- Dutton, C.E. (1889): *Bull. Wash. Phil. Soc.* **11**, 51-64.
- Dziewonski, A., Anderson, D. (1981): PREM. *Phys. Earth Planet. Inter.* 25 (1981) 297-356 siehe auch: Landolt-Börnstein 1984
- Edmonds, A.R. (1964): Drehimpulse in der Quantenmechanik. Bibliographisches Institut Mannheim
- Ekman, M. (1993): Postglacial rebound and sea level Phenomena, with special reference to Fennoscandia and Baltic Sea. In: Veröffentlichungen des Finnischen Geodätischen Institutes No. 115: Lecture Notes for NKG-Autumn School 1992, edited by J. Kakkuri, Helsinki 1993
- Engels, J.(1991): Eine approximative Lösung der fixen gravimetrischen Randwertaufgabe im Innen- und Außenraum der Erde; Dissertation DGK Reihe C Nr. 379, München
- Engels, J., E.W. Grafarend, P.Sorcik (1996): The gravitational field of topographic-isostatic masses and the hypothesis of mass condensation II – the topographic-isostatic geoid. *Surveys in Geophysics* **17**: 41-66, 1996
- Eringen, C. (1962): Nonlinear Theory of Continuous Media. McGraw-Hill Book Company, New York

- Euler, L. (1758): *Mouvement de rotation des corps solides autour d'un point fixe*. Abhandlungen der Berliner Akademie 1758
- Fabrizio, M., A. Morro (1992): *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*. SIAM studies in applied mathematics; vol.12, Philadelphia
- Fairbridge, R.W. (1983): *Isostasy and eustasy*. in: *Shorelines and Isostasy*, edited by D.E. Smith and A.G. Dawson, Academic Press, London, New York 1983
- Farrell, W.E. (1972): *Deformation of the Earth by Surface Loads; Reviews of Geophysics and Space Physics*, Vol.10, No. 3, pp 761-797, August 1972
- Farrell, W.E. and J.A. Clarke (1976): *On post-glacial sea-level*, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 46, 647-667
- Forte, A.M. and W.R. Peltier (1991): *Viscous flow models of global geophysical observables; 1. Forward problems*. *J. Geophys. Res.*, **96**, 20 131- 20159
- Gaunt, J.A. (1929): *The Triplets of Helium*. *Phil. Trans. R. Soc.*, London A228, 151-196
- Georgiadou, P.(1984): *Zur Definition eines körperfesten Bezugssystems für eine deformierbare Erde und seine analytische Bewegungsform unter dem Einfluß externer Kräfte*; DGK Reihe C Nr. 297, Bayerische Akademie der Wissenschaften, München
- Georgiadou, P. and E. Grafarend (1986): *Global vorticity and the definition of the rotation of a deformable earth*; *Gerlands Beiträge zur Geophysik*, Leipzig 95, S. 516-528
- Grafarend, E.W. (1982): *Six Lectures on Geodesy and Global Geodynamics*. in: *Proceedings of the Third International Summer School in the Mountains*, eds. H. Moritz and H. Sünkel, Mitt. Geod. Institute Graz, Folge 41, 531-685, Graz 1982
- Grafarend, E.W., J. Engels and P. Varga (2000): *The temporal variation of the spherical and Cartesian multipoles of the gravity field: the generalized MacCullagh representation*. *Journal of Geodesy* (2000) 74: 519-530
- Grüninger, W. (1990): *Zur topographisch-isostatischen Reduktion der Schwere*; Dissertation TU Karlsruhe (1990)
- Heiskanen, W.A. and F.A. Vening Meinesz (1958): *The earth and its gravity field*. New York, McGraw-Hill.
- Heiskanen, W.A. and H. Moritz (1967): *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Company, San Francisco
- Helmert, F.R. (1884): *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*; Leipzig, Verlag Teubner 1884
- Hertz, H. (1884): *Über das Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten*. *Wiedemanns Ann. d. Phys. u. Chem.*, N.F., **22**, 449-455
- Hertz, H. (1895): *Über das Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten*. Aus: Ph. Lenard (Herausgeber): *Gesammelte Werke von Heinrich Hertz*; Band I. *Schriften vermischten Inhalts*. Johann Ambrosius Barth, Leipzig.
- Heuser, H. (1982) *Lehrbuch der Analysis Teil 1*; B.G. Teubner Stuttgart
- Heuser, H. (1983) *Lehrbuch der Analysis Teil 2*; B.G. Teubner Stuttgart
- Hillaire-Marcel, C. (1980): in: *Earth Rheology, Isostasy and Eustasy*. edited by N.A. Mörner, pp. 215-230. John Wiley Chichester
- Hobson, E.W. (1931): *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. University Press Cambridge
- Jeffreys, H. (1952): *The Earth*. Cambridge University Press
- Jeffreys, H. and R.O. Vicente (1957a): *The theory of nutation and variation of latitude*; *Mon. Not. R. Astr. Soc.* 117, S. 142-161
- Jeffreys, H. and R.O. Vicente (1957b): *The theory of nutation and variation of latitude; the Roche model core*; *Mon. Not. R. Astr. Soc.* 117, S. 162-173

- Jochmann, H. (1991): Relative motions between the inner core and the Earth's mantle due to attractions of the Sun and the Moon. *Astronom. Nachr.* **312** (1991) 4, 265-273
- Jüttner, H.U. and H.P. Plag (1999): On Modeling of Earth Rotation Variations in an Integrated Model and Appropriate Frames of Reference. In: 3. DFG-Rundgespräch zum Thema Bezugssysteme, Ed. M. Schneider, Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Band 5, Frankfurt am Main 1999
- Kaila, K.L. (1981): Structure and seismotectonics of the Himalaya-Pamir Hindukush region and the Indian plate boundary. in: Zagros, Hindukush, Himalaya Geodynamic Evolution, AGU Geodynamics Series Volume 3, edited by H.K. Gupta and F.M. Delany, pp. 272-293, AGU, Washington D.C., 1981
- Kessel, D. (1968): Ableitung einer nichtlokalen Elastizitätstheorie aus der Gittertheorie von Ionenkristallen. Dissertation TU Clausthal
- Klingbeil, E. (1977): Variationsrechnung. Bibliographisches Institut, Mannheim
- Knickmeyer, E.H. (1984): Eine approximative Lösung der allgemeinen linearen Geodätischen Randwertaufgabe durch Reihenentwicklungen nach Kugelfunktionen. DGK Reihe C Nr. 304, München
- Kopal, Z. (1960): Figures of Equilibrium of Celestial Bodies. University of Wisconsin Press, Madison
- Lambeck, K. (1980): The earth's variable rotation: Geophysical causes and consequences. Cambridge University Press
- Lambeck, K. (1988): Geophysical Geodesy: the slow deformations of the earth. Clarendon Press Oxford
- Landolt, Börnstein (1984): Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaft und Technik. Gruppe V, Geophysik und Weltraumforschung Bd. 2, Geophysik der festen Erde, des Mondes und der Planeten, Springer Berlin 1984, 84-96
- Leipholtz, H. (1968): Einführung in die Elastizitätstheorie. Verlag G. Braun, Karlsruhe
- Longman, I.M. (1963): A Green's function for determining the deformation of the Earth under surface mass loads. 2. Computations and numerical results. *Journal of Geophysical Research*, **68**, 485
- Love, A.E.H. (1909): The yielding of the earth to disturbing forces. *Proc. Royal Astronomical Society, London* **A 82** 1909, pp. 73-88
- Love, A.E.H. (1911): Some problems of geodynamics. Cambridge University Press, Cambridge 1911 (Nachdruck: Dover publication, New York 1967)
- Malvern, L. (1969): Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice Hall, Inglewood Cliffs
- Marsden, J., T. Hughes (1983): Mathematical Foundations of Elasticity. Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall
- Martensen, E. (1968): Potentialtheorie. Teubner-Verlag, Stuttgart
- Martinec, Z. (1984): Free Oscillations of the Earth. *Travaux Géophysiques XXXII*, Academia, Praha No. 591 pp.118-236 1987
- Martinec, Z. and K. Pěč (1987): Three-dimensional density distribution generating the observed gravity field of planets. *Proceedings of the International Symposium "Figure and Dynamics of the Earth, Moon and Planets"*, Prague September 15-20, 1986 Part I, 129-163.
- Martinec, Z. and P. Vaníček (1994a): The indirect effect of topography in the Stokes-Helmert technique for a spherical approximation of the geoid. *manuscripta geodaetica* (1994) 19: 213-219
- Martinec, Z. and P. Vaníček (1994b): Direct topographical effect of Helmert's condensation for a spherical approximation of the geoid. *manuscripta geodaetica* (1994) 19: 257-268
- Matas, J. (1995): Mantle viscosity and density structure. Diploma thesis, Department of Geophysics, Faculty of Mathematics and Geophysics, Charles University, Prague
- Melchior, P. (1989): The phase lag of the Earth tides and the braking of the Earth's rotation. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 56, pp. 186-188
- Mikolajski, H.-W. (1989): Synthetische Modelle zur Polbewegung eines deformierbaren Erdkörpers; DGK Reihe C Nr. 354, Bayerische Akademie der Wissenschaften, München

- Mitrovica, J.X., J.L. Davis and I.I. Shapiro (1994): A spectral formalism for computing three-dimensional deformations due to surface loads. 1.Theory, 2. Present-day glacial isostatic adjustment. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 99, No. B4, pp 7057-7101
- Molodenskii, M.S. (1961): The theory of nutation and diurnal earth tides *Comm. Obs. Roy. Belgique* 188, S.Geophys. 58, 25-56
- Moritz, H. (1980): Geodetic Reference System 1980. *Bulletin Geodesique* 54: 395-405
- Moritz, H., I. Mueller (1987): *Earth Rotation*, Ungar Publishing Company, New York
- Moritz, H. (1990): *The figure of the Earth*. Wichmann-Verlag, Karlsruhe
- Müller, H. und G. Schulz (1999): Modellierung der Erde mit Finiten Elementen. In: 3. DFG-Rundgespräch zum Thema Bezugssysteme, Ed. M. Schneider, Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Band 5, Frankfurt am Main 1999
- Munk, W.H. and G. MacDonald (1960): *The rotation of the Earth*. Cambridge University Press, New York
- Phinney, R.A., R. Burridge (1973): Representation of the Elastic Gravitational Excitation of a Spherical Earth by Generalized Spherical Harmonics. *Geophys. J. R. astr. Soc.* **34**, 451-487
- Pratt, J.H. (1855) *Phil. Trans.* **145**, 53-100
- Pratt, J.H. (1859) *Phil. Trans.* **149**, 745-778
- Racah, G. (1942): Theory of Complex Spectra I, II. *Phys. Rev.* **61** (1942), 186-197; **62**, 538-462
- Routh, E. (1905): *Dynamics of a System of Rigid Bodies, Part II*. Macmillan, New York. 1st edition 1860.
- Rummel, R., R. Rapp, H. Sünkel, C.C. Tscherning (1988): Comparisons of global topographic/isostatic models to the earth's observed gravity field. OSU-Report No. 388, The Ohio State University, Columbus, Ohio
- Sabadini, R. and W.R. Peltier (1981): Pleistocene deglaciation and the Earth's rotation: implications for mantle viscosity. *Geophys. J. astr. Soc.* **66**, 553-578
- Sabadini, R., D.A. Yuen and E. Boschi (1982): Polar Wandering and the Forced Responses of a Rotating, Multilayered, Viscoelastic Planet; *Journal of Geophysical Research*, Vol. 87, No B4, p. 2885-2903
- Sasao, T.; S. Okubo; M. Saito (1980): A simple theory of the dynamical effects of a stratified fluid core upon nutational motion of the earth; in: Fedorov, E. P. et al.: *Nutation and the earth's rotation*, Reidel, Dordrecht, Netherlands
- Schuh, H., S. Nagel and T. Seitz (2001): Linear Drift and periodic Variations observed in long time series of polar motion. *Journal of Geodesy* **74**: 701 - 710 (2001)
- Shida, T. (1912): Horizontal pendulum observations of the change of plumbline at Kamigano. *Kyoto Mem. Coll. Sci. Eng. Tokyo* **4** 1912, pp 23-174
- Shida, T. and M. Matsuyama (1912): Change of plumbline referred to the axis of the earth found from the results of the international latitude observations. *Mem. Coll. Sci. Eng. Tokyo* **4** 1912, pp 277-284
- Smith, M.L.(1974): The Scalar Equations of Infinitesimal Elastic-Gravitational Nutation for a Rotating, Slightly elliptical Earth; *Geoph. J. R. Astr. Soc.* **37**, S. 491-526
- Smith, M.L.(1977): Wobble and nutation of the earth; *Geoph. J. R. Astr. Soc.* **50**, S. 103-140
- Smith, M.L.(1980): The theoretical description of the nutation of the earth; *IAU-Colloquium No.56*, Warsaw
- Spada, G.; R. Sabadini; D.A. Yuen and Y. Ricard (1992): Effects on postglacial rebound from the hard rheology in the transition zone. *Geophys. J. Int.*, **109**, pp.683-700, 1992.
- Strobach, K. (1991): *Unser Planet Erde*; Gebrüder Bornträger, Berlin, Stuttgart
- Sun, W. and L.E. Sjöberg (1999): Gravitational potential changes of a spherically symmetric earth model caused by a surface load. *Geophys. J. Int.* (1999) **137**, 449-468
- Takeuchi, H. and M. Saito (1972): Seismic surface waves, in *Methods in Computational Physics*, 11, pp. 217-295, ed. Bolt, B.A., Academic Press, New York

- Thong, N.C. and E.W. Grafarend (1989): A spheroidal harmonic model of the terrestrial gravitational field; *manuscripta geodaetica* (1989) 14: 285-304
- Todhunter, I. (1873): *History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth*. London, Constable, 1873; reprint ed. New York, Dover Publications, 1962
- Toupin, R.A. (1956): The elastic dielectric. *J. Rational Mech. and Analysis*, **5**: 849-915
- Truesdell, C. (1964): Die Entwicklung des Drallsatzes. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, Band 44 Heft 4/5, 149-158
- Truesdell, C. und W. Noll (1965): Vol. 3 des Handbuchs der Physik (ed. S. Flügge). Springer-Verlag Berlin
- Turcotte, D.L. and G. Schubert (1982): *Geodynamic applications of continuum physics to geological problems*. John Wiley & Sons, New York, Chichester
- Tushingham, A.M. and W.R. Peltier (1991): Ice-3G: A new global model of late Pleistocene deglaciation based upon geophysical predictions of post-glacial relative sea level change. *Journal of geophysical research*, Vol. 96, No. B3, pp 4497-4523 March 1991
- Vaniček, P. and Z. Martinec (1994): The Stokes- Helmert scheme for the evaluation of a precise geoid. *manuscripta geodaetica* (1994) 19: 119-128
- Vening Meinesz, F.A. (1931): Une nouvelle méthode pour la réduction isostatique régionale de l'intensité de la pesanteur. *Bull. Géod.* No. 29
- Vening Meinesz, F.A. (1939): Tables fondamentales pour la réduction isostatique régionale. *Bull. Géod.* No. 63
- Venturini, W.S. (1983): *Boundary Element Method in Geomechanics*. Springer Verlag Berlin, Heidelberg.
- Vermeersen, B. (1993): Changes in the Earth's Rotation by Tectonics. *Geologica Ultraiectina* No.111, Utrecht
- Vermeersen, B. and R. Sabadini (1996): Significance of the fundamental mantle rotational relaxation mode in polar wander simulations. *Geophys. J. Int.*, **127**, F5-F9, 11996.
- Vermeersen, B., R. Sabadini and G. Spada (1996): Compressible rotational deformation. *Geophysical Journal International* Vol. 126 No. 3, 735-761
- Wahr, J.M. (1980): The tidal motions of a rotating, elliptical, elastic, oceanless earth. Ph.D. Thesis, Department of Physics, University of Colorado
- Wahr, J.M. (1981): Body tides on an elliptical, rotating, elastic and oceanless earth; *Geophys. J.R.Astr. Soc.* 64, 677-703
- Watts, A.B. (2001): *Isostasy and Flexure of the Lithosphere*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Winch, D.E., R.W. James (1973): Computations with Spherical Harmonics and Fourier Series in Geomagnetism. in: *Methods in Computational Physics*, **13** (1973), Academic Press, New York
- Wolf, D. (1985): Thick plate flexure re-examined. *Geophys. J. R. astr. Soc.* **80**, 265-273
- Wolf, D. (1987): An upper bound on lithosphere thickness from glacio-isostatic adjustment in Fennoscandia. *Journal of Geophysics* 61:141-149
- Wolf, D. (1997): *Gravitational Viscoelastodynamics for a Hydrostatic Planet*. DGK Reihe C Nr. 452, Bayerische Akademie der Wissenschaften, München
- Wu, P. and W.R. Peltier (1982): Viscous gravitational relaxation; *Geophys. J. R. astr. Soc.* 70, 435-485
- Wu, P. and W.R. Peltier (1984): Pleistocene deglaciation and the Earth's rotation: a new analysis. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **76**, 753-791
- Wu, P. (1990): Deformation of internal boundaries in a viscoelastic earth and topographic coupling between the mantle and the core; *Geophys. J. Int.* (1990) **101**, 213-231
- Wu, P. (1992): Deformation of an Incompressible Viscoelastic Flat Earth with Powerlaw Creep: a Finite Element Approach. *Geophys. J. Int.*, Vol. 108, p.33-51
- Zharkov, V.N., S.M. Molodensky, A. Brzeziński, E. Groten and P. Varga (1996): *The Earth and its Rotation*. Wichmann-Verlag, Heidelberg.

The story was told of a sultan who awoke in the middle of the night and summoned his wizzard. "Wizzard," he said, "my sleep is troubled. Tell me: What is holding up the earth?" "Majesty," the wizzard replied, "the earth rests on the back of a giant elephant." The sultan was satisfied and went back to sleep. But then he awoke in a cold sweat and summoned the wizzard again. "Wizzard," he said, "what is holding up the elephant?" The wizzard looked at him and said: "The elephant stands on the back of a giant turtle. And you can stop right there, Majesty. It's turtles all the way down."

(anonym)

... es schien mir auf gewisse Weise richtig, dass die Vernunft von allem die Ursache ist, und ich gedachte, wenn sich dies so verhält, so werde die ordnende Vernunft auch alles ordnen und jegliches stellen, so wie es sich am besten befindet. ... Dieses nun bedenkend freute ich mich, dass ich glauben konnte, über die Ursache der Dinge einen Lehrer an dem Anaxagoras gefunden zu haben, ... der mir nun auch sagen werde, zuerst ob die Erde flach ist oder rund, und wenn er es mir gesagt, mir dann auch die Notwendigkeit der Sache und ihre Ursache dazu erklären werde, indem er auf das bessere zurückginge, und mir zeigte, dass es ihr besser wäre, so zu sein. Und wenn er behauptete, sie stände in der Mitte, werde er mir dabei erklären, dass es ihr besser wäre, in der Mitte zu stehen ... Ebenso war ich entschlossen mich nach der Sonne gleichermaßen zu erkundigen, und dem Monde und den übrigen Gestirnenwegen ihrer verhältnismäßigen Geschwindigkeit und ihrer Umwälzungen und was ihnen sonst begegnet, woher es doch jedem besser ist, das zu verrichten und zu erleiden, was er erleidet. Denn ich glaubte ja nicht, nachdem er einmal behauptet, alles sei von der Vernunft geordnet, dass er irgend einen anderen Grund mit hineinziehen werde, als dass es das Beste sei, dass sie sich so verhalten wie sie sich verhalten; und also glaubte ich, indem er für jedes einzelne und alles insgesamt den Grund nachwiese, werde er das Beste eines jeglichen darstellen, und das für alles insgesamt Gute ... Und von dieser wunderbaren Hoffnung, o Freund, fiel ich ganz herunter, als ich fortschritt und las, und sah, wie der Mann mit der Vernunft gar nichts anfängt, und auch sonst gar nicht Gründe anführt, die sich beziehen auf das Anordnen der Dinge, dagegen aber allerlei Luft und Aether und Wasser vorschleibt und sonst vieles zum Teil wunderliche...

Platon (aus: Phaidon)

Wahre Worte sind nicht schön
schöne Worte sind nicht wahr
dem Guten fehlt die glatte Zunge
Glattzüngige sind nicht gut
Wissende sind nicht gelehrt
Gelehrte sind nicht wissend ...

Lao-tse (aus: Tao-te-king)

Das Wasser im Gefäß glitzert,
das Wasser der See ist dunkel.
Die kleine Wahrheit hat klare Worte,
die große Wahrheit hat großes Schweigen.

Tagore

- | | | | |
|-----|----|--------|--|
| Nr. | 1 | (1976) | Vorträge des Lehrgangs Numerische Photogrammetrie (III), Esslingen 1975 - vergriffen |
| Nr. | 2 | (1976) | Vorträge der 35. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1975 |
| Nr. | 3 | (1976) | Contributions of the XIIIth ISP-Congress of the Photogrammetric Institute, Helsinki 1976 - vergriffen |
| Nr. | 4 | (1977) | Vorträge der 36. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1977 |
| Nr. | 5 | (1979) | E. Seeger: Das Orthophotoverfahren in der Architekturphotogrammetrie, Dissertation |
| Nr. | 6 | (1980) | Vorträge der 37. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1979 |
| Nr. | 7 | (1981) | Vorträge des Lehrgangs Numerische Photogrammetrie (IV): Grobe Datenfehler und die Zuverlässigkeit der photogrammetrischen Punktbestimmung, Stuttgart 1980 - vergriffen |
| Nr. | 8 | (1982) | Vorträge der 38. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1981 |
| Nr. | 9 | (1984) | Vorträge der 39. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1983 |
| Nr. | 10 | (1984) | Contributions to the XVth ISPRS-Congress of the Photogrammetric Institute, Rio de Janeiro 1984 |
| Nr. | 11 | (1986) | Vorträge der 40. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1985 |
| Nr. | 12 | (1987) | Vorträge der 41. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1987 |
| Nr. | 13 | (1989) | Vorträge der 42. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1989 |
| Nr. | 14 | (1989) | Festschrift - Friedrich Ackermann zum 60. Geburtstag, Stuttgart 1989 |
| Nr. | 15 | (1991) | Vorträge der 43. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1991 |
| Nr. | 16 | (1992) | Vorträge zum Workshop "Geoinformationssysteme in der Ausbildung", Stuttgart 1992 |

- Nr. 1 (1987) K. Eren: Geodetic Network Adjustment Using GPS Triple Difference Observations and a Priori Stochastic Information
- Nr. 2 (1987) F.W.O. Aduol: Detection of Outliers in Geodetic Networks Using Principal Component Analysis and Bias Parameter Estimation
- Nr. 3 (1987) M. Lindlohr: SIMALS; SIMulation, Analysis and Synthesis of General Vector Fields
- Nr. 4 (1988) W. Pachelski, D. Lapucha, K. Budde: GPS-Network Analysis: The Influence of Stochastic Prior Information of Orbital Elements on Ground Station Position Measures
- Nr. 5 (1988) W. Lindlohr: PUMA; Processing of Undifferenced GPS Carrier Beat Phase Measurements and Adjustment Computations
- Nr. 6 (1988) R.A. Snay, A.R. Drew: Supplementing Geodetic Data with Prior Information for Crustal Deformation in the Imperial Valley, California 1988
- Nr. 7 (1989) H.-W. Mikolaïski, P. Braun: Dokumentation der Programme zur Behandlung beliebig langer ganzer Zahlen und Brüche
- Nr. 8 (1989) H.-W. Mikolaïski: Wigner 3j Symbole, berechnet mittels Ganzzahlarithmetik
- Nr. 9 (1989) H.-W. Mikolaïski: Dokumentation der Programme zur Multiplikation nach Kugelfunktionen entwickelter Felder
- Nr. 10 (1989) H.-W. Mikolaïski, P. Braun: Dokumentation der Programme zur Differentiation und zur Lösung des Dirichlet-Problems nach Kugelfunktionen entwickelter Felder
- Nr. 11 (1990) L. Kubácková, L. Kubáček: Elimination Transformation of an Observation Vector preserving Information on the First and Second Order Parameters
- Nr. 12 (1990) L. Kubácková: Locally best Estimators of the Second Order Parameters in Fundamental Replicated Structures with Nuisance Parameters
- Nr. 13 (1991) G. Joos, K. Jörg: Inversion of Two Bivariate Power Series Using Symbolic Formula Manipulation
- Nr. 14 (1991) B. Heck, K. Seitz: Nonlinear Effects in the Scalar Free Geodetic Boundary Value Problem
- Nr. 15 (1991) B. Schaffrin: Generating Robustified Kalman Filters for the Integration of GPS and INS
- Nr. 16 (1992) Z. Martinec: The Role of the Irregularities of the Earth's Topography on the Tidally Induced Elastic Stress Distribution within the Earth
- Nr. 17 (1992) B. Middel: Computation of the Gravitational Potential of Topographic-Isostatic Masses
- Nr. 18 (1993) M.I. Yurkina, M.D. Bondarewa: Einige Probleme der Erdrotationsermittlung
- Nr. 19 (1993) L. Kubácková: Multiepoch Linear Regression Models
- Nr. 20 (1993) O.S. Salychev: Wave and Scalar Estimation Approaches for GPS/INS Integration

- Nr. 1994.1 (1994) H.-J. Euler: Generation of Suitable Coordinate Updates for an Inertial Navigation System
- Nr. 1994.2 (1994) W. Pachelski: Possible Uses of Natural (Barycentric) Coordinates for Positioning
- Nr. 1995.1 (1995) J. Engels, E.W. Grafarend, P. Sorcik: The Gravitational Field of Topographic-Isostatic Masses and the Hypothesis of Mass Condensation - Part I & II
- Nr. 1995.2 (1995) Minutes of the ISPRS Joint Workshop on Integrated Acquisition and Interpretation of Photogrammetric Data
- Nr. 1996.1 (1996) Festschrift für Klaus Linkwitz anlässlich der Abschiedsvorlesung im Wintersemester 1995/96; herausgegeben von Eberhard Baumann, Ulrich Hangleiter und Wolfgang Möhlenbrink
- Nr. 1996.2 (1996) J. Shan: Edge Detection Algorithms in Photogrammetry and Computer Vision
- Nr. 1997.1 (1997) Erste Geodätische Woche Stuttgart, 7.-12. Oktober 1996; herausgegeben von A. Gilbert und E.W. Grafarend
- Nr. 1997.2 (1997) U. Kälberer: Untersuchungen zur flugzeuggetragenen Radaraltimetrie
- Nr. 1998.1 (1998) L. Kubáček, L. Kubácková: Regression Models with a weak Nonlinearity
- Nr. 1999.1 (1999) GIS-Forschung im Studiengang Geodäsie und Geoinformatik der Universität Stuttgart; herausgegeben von M. Sester und F. Krumm
- Nr. 1999.2 (1999) Z. Martinec: Continuum Mechanics for Geophysicists and Geodesists. Part I: Basic Theory
- Nr. 1999.3 (1999) J. H. Dambeck: Diagnose und Therapie geodätischer Trägheitsnavigationssysteme. Modellierung – Systemtheorie – Simulation – Realdatenverarbeitung
- Nr. 1999.4 (1999) G. Fotopoulos, C. Kotsakis, M. G. Sideris: Evaluation of Geoid Models and Their Use in Combined GPS/Levelling/Geoid Height Network Adjustment
- Nr. 1999.5 (1999) Ch. Kotsakis, M. G. Sideris: The Long Road from Deterministic Collocation to Multiresolution Approximation
- Nr. 1999.6 (1999) Quo vadis geodesia...? Festschrift for Erik W. Grafarend on the occasion of his 60th birthday; herausgegeben von F. Krumm und V.S. Schwarze - vergriffen, out of stock -
- Nr. 2000.1 (2000) J. Banks, K. Kubik, Y. H. Lu: Investigation into Digital Image Matching
- Nr. 2000.2 (2000) P. Xu, E. Cannon, G. Lachapelle: Mixed Integer Observation Models, GPS Decorrelation and Integer Programming
- Nr. 2000.3 (2000) B. Voosoghi: Intrinsic Deformation Analysis of the Earth Surface Based on 3-Dimensional Displacement Fields Derived from Space Geodetic Measurements
- Nr. 2001.1 (2001) F. Butsch: Untersuchungen zur elektromagnetischen Interferenz bei GPS

- Nr. 2001.2 (2001) A. M. Abolghasem: Numerical Modeling of Post-Seismic Displacement Fields
- Nr. 2002.1 (2002) J. L. Awange: Gröbner Bases, Multipolynomial Resultants and the Gauss-Jacobi Combinatorial Algorithms - Adjustment of Nonlinear GPS/LPS Observations
- Nr. 2002.2 (2002) Y. Kuroishi: On the Application of Downward Continuation of Surface Gravity onto the Reference Ellipsoid, to the Geoid Determination in Mountainous Areas
- Nr. 2002.3 (2002) H. Schade: Neigungsbestimmung mit GPS für die Photogrammetrie
- Nr. 2003.1 (2003) D. Dettmering: Die Nutzung des GPS zur dreidimensionalen Ionosphärenmodellierung
- Nr. 2003.2 (2003) D. Wolf: Continuum Mechanics in Geophysics and Geodesy: Fundamental Principles
- Nr. 2004.1 (2004) E. W. Grafarend: Tensor Algebra, Linear Algebra, Multilinear Algebra
- Nr. 2006.1 (2006) J. Engels: Zur Modellierung von Auflastdeformationen und induzierter Polwanderung