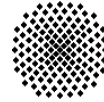
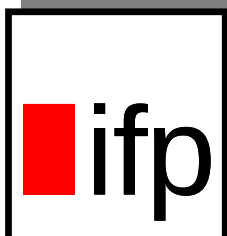
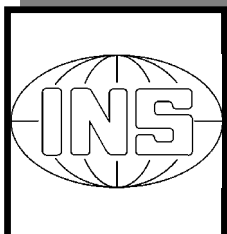


Universität Stuttgart



Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik

Technical Reports
Department of Geodesy and
Geoinformatics



J.H. Dambeck

Diagnose und Therapie geodätischer Trägheits- navigationssysteme

Modellierung - Systemtheorie -
Simulation - Realdatenverarbeitung

Diagnose und Therapie geodätischer Trägheitsnavigationssysteme

Modellierung – Systemtheorie – Simulation – Realdatenverarbeitung

Von der Fakultät für

Bauingenieur- und Vermessungswesen

der Universität Stuttgart

zur Erlangung der Würde eines

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Dipl.-Math. techn. (Univ.), Dipl.-Math. (FH)

Johann H. Dambeck

aus Osterhofen

Hauptberichter: o. Prof. Dr.-Ing. habil, Dr. tech. h.c. mult., Dr.-Ing. E.h. E.W. Grafarend
Mitberichter: o. Prof. Dr.-Ing. W. Möhlenbrink
Prof. Dr.-Ing. M. Zeitz

Tag der mündlichen Prüfung: 23. Juli 1998

Die Dissertation wurde am Geodätischen Institut im Fachbereich Geodäsie und Geoinformatik der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Stuttgart angefertigt.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung / Abstract	3
Verzeichnis wichtiger Symbole	6
Einleitung	7
1 Geodätische Bezugssysteme	11
1. Definition der Koordinatensysteme	11
1. Raumfestes Bezugssystem ($P_i, \mathbf{i}$)	11
2. Erdfestes Bezugssystem ($P_e, \mathbf{e}$)	12
3. Horizontsystem ($P_h, \mathbf{h}$)	12
4. Beobachtungssystem ($P_b, \mathbf{b}$)	14
2. Die Gruppe der Rotationsmatrizen $SO(3)$	15
3. Orthonormale Punkttransformationen	15
4. Orthonormale Vektortransformationen	16
1. Basiswechsel zwischen den Bezugsachsensystemen $\mathbf{i}$ und $\mathbf{e}$	17
2. Basiswechsel zwischen den Bezugsachsensystemen $\mathbf{e}$ und $\mathbf{h}$	17
3. Basiswechsel zwischen den Bezugsachsensystemen $\mathbf{h}$ und $\mathbf{b}$	17
2 Orientierungsdifferentialgleichungen	19
1. $SO(3)$ -Differentialgleichungen	19
2. Parametrisierungen der $SO(3)$ -Gruppe	26
1. Kardan-Parametrisierung	26
2. Euler-Parametrisierung	27
3. Laning-Bortz-Stuelpnagel-Parametrisierung	28
4. Cayley-Parametrisierung	28
5. Hamilton-Parametrisierung	30
6. Drehachse/-winkel-Parametrisierung	34
3. Orientierungsparameterdifferentialgleichungen	35
1. Kardan-Orientierungsdifferentialgleichungen	36
2. Euler-Orientierungsdifferentialgleichungen	37
3. Cayley-Orientierungsdifferentialgleichungen	38
4. Hamilton-Orientierungsdifferentialgleichungen	39
5. Laning-Bortz-Stuelpnagel-Orientierungsdifferentialgleichungen	42
3 Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen	44
1. Darstellung in kartesischen Koordinaten	44
2. Darstellung in ellipsoidnormalen Koordinaten	47
4 Trägheitsnavigationsdifferentialgleichungssysteme (TNDgLS)	49
1. Nichtlineare TNDgLS	49
2. Linearisierung nach B. Taylor	51
3. Linearisierte TNDgLS	53
5 Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit	58
1. Existenz und Eindeutigkeit	58
2. Stetige Abhängigkeit von Anfangswert, -zeit und Modell	59
3. Zur Lipschitz-Stetigkeit nichtlinearer TNDgLS	60
4. Lipschitz-Stetigkeit linearisierter TNDgLS	62
6 Stabilitätsanalyse	64
1. Stabilitätsbegriff	65
2. Stabilitätsverhalten linearer zeitinvarianter Differentialgleichungssysteme	66
3. Zustandstransformationsinvarianz	68
4. Zum Stabilitätsverhalten linear(isiert)er TNDgLS	69
5. Zum Stabilitätsverhalten nichtlinearer TNDgLS	80

Kurzfassung

Die Intention der vorliegenden Arbeit ist einerseits eine vollständige und dennoch kompakte Herleitung von nicht-linearen Trägheitsnavigationsgleichungen in diversen Kombinationen von Parametrisierungen des Euklidischen Raumes und der Gruppe der Rotationsmatrizen und andererseits eine detaillierte Untersuchung der Modelleigenschaften und der prinzipiellen Grenzen des Meßprinzips. Die Darstellung umfaßt dabei Linearisierung und Diskretisierung, ergänzt durch die Zusammenstellung relevanter Kalman-Filter- und -Glättervarianten. Es werden die Ursachen für die Instabilität von ungestützten Trägheitsnavigationssystemen aufgezeigt und die lokale Invarianz des Stabilitätsverhaltens bzgl. regulärer Zustandstransformationen bewiesen. Fehler in den vertikalen Komponenten von Position und Geschwindigkeit werden dabei als eine Quelle exponentieller Instabilität identifiziert. Da man ohne externe Beobachtungen nicht zwischen systematischen Sensorfehlern und einer Variation der Trajektorie unterscheiden kann, sind systematische Sensorfehler eine weitere Ursache für Instabilität. Die bedeutendste Unzulänglichkeit, welche die Beobachtbarkeitsanalyse im Falle von Positions- und Geschwindigkeitsbeobachtungen (z.B. mittels "single antenna DGPS") enthüllt, ist der Mangel an Beobachtbarkeit des Rotationswinkels um den von der Akzelerometertriade in stationären Navigationsphasen registrierten Beschleunigungsvektor. Dies beinhaltet den aus dem praktischen Einsatz von Trägheitsnavigationssystemen bekannten Mangel an Beobachtbarkeit des Kurswinkels im Rahmen der Anfangsfeinorientierung. Ferner wird die lokale Invarianz der Beobachtbarkeit bzgl. beschränkter Zustandstransformationen bewiesen und gezeigt, daß im Falle statischer Messungen Anfangsorientierung und Sensorbias mittels der von den inertialen Sensoren vorliegenden Beobachtungen nicht gleichzeitig beobachtbar sind. In jedem Falle ist die Beobachtbarkeit der Sensordrift jedoch unkritisch. Eine Systemsimulation zum Zwecke des Studiums der Wirkung einzelner Fehlerquellen auf den Systemzustand und die Verarbeitung realer Sensordaten des Litton LTN-90-100 mit ausführlicher Sensordatenanalyse und autonomer initialer Orientierungsbestimmung dokumentieren schließlich den praktischen Einsatz der gewonnenen Modelle samt Fehlerfortpflanzung.

Abstract

The intention of this thesis on the one hand is a compact, but rigorous derivation of the system of nonlinear inertial navigation equations in several combinations of spatial coordinates and parametrizations of the group of rotation matrices and on the other hand a detailed investigation of their properties and the limits of the measurement principle. The description includes linearization and discretization, completed by a compilation of useful Kalman filters and smoothers. The sources of instability of unaided inertial navigation models are discussed and the local invariance of the stability with respect to regular state transformations is proven. Errors in the vertical components of position and velocity are identified as sources of exponential instability. Without external observations nobody can distinguish between systematic sensor errors and a variation of the trajectory. Hence all kinds of systematic sensor errors are sources of instability, too. The most important shortcoming which the observability analysis shows to exist, is the lack of observability of the rotation angle around the acceleration vector sensed by the accelerometer triad in a stationary navigation period in the case of position and velocity observations, e.g. by usage of single antenna DGPS. This includes the well known lack of observability of the heading during fine alignment. Furthermore the local invariance of the observability property with respect to bounded state transformations is proven and it is shown, that in static mode the initial orientation and sensor biases are not simultaneously observable. The observability of sensor drifts is given. A system simulation to analyse the influence of different error sources upon the states and the processing of real data of a Litton LTN-90-100 including an extensive sensor data analysis and an autonomous initial orientation determination show the usage of the presented models and the error propagation.

7 Beobachtbarkeitsanalyse	84
1. Formen der Beobachtbarkeit	85
2. Beobachtbarkeitsabbildung – globale Beobachtbarkeit	85
3. Anwendungen der globalen Beobachtbarkeitsanalyse auf TNDgIS	86
4. Beobachtbarkeitsmatrix – lokale Beobachtbarkeit	89
5. Beobachtbarkeitsanalyse linear(isiert)er Systeme	91
6. Anwendung der lokalen Beobachtbarkeitsanalyse auf TNDgIS	93
8 Zeitdiskrete Kalman-Schätzer	97
1. Zeitdiskretisierung der Systemgleichungen	97
2. Zeitdiskrete Kalman-Schätzer	100
1. Zerlegung allgemeiner Zustandsraummodelle	100
2. Zeitdiskrete Kalman-Filter	101
3. Zeitdiskrete Kalman-Glätter	107
9 Initiale Orientierungsbestimmung	110
1. Autonome initiale Orientierungsbestimmung	110
2. Nichtautonome initiale Orientierungsbestimmung	112
10 Systemsimulation	114
1. Referenzlösung und Sensordaten	114
2. Navigationslösung	114
11 Realdatenverarbeitung	119
1. Sensordatenanalyse	120
2. Navigationslösung	126
Zusammenfassung und Ausblick	130
A Matrizen­theorie	132
B vec-/veck-Operator und Kronecker Produkt	136
C Zusammenhangsmatrizen	138
1. Definition und Eigenschaft	138
2. Die Zusammenhangsmatrizen Ω_{ie} und Ω_{ei}	138
3. Die Zusammenhangsmatrizen Ω_{eh} und Ω_{he}	138
4. Die Zusammenhangsmatrizen Ω_{ih} und Ω_{hi}	138
5. Die Zusammenhangsmatrizen Ω_{hb} und Ω_{bh}	139
6. Transformationsregeln	139
D Aufdatierung der Orientierungsparameter	141
1. Additive Kardan-Winkelaufdatierung	141
2. Multiplikative Kardan-Winkelaufdatierung	142
E Winkelgeschwindigkeitsvektoren	149
Literaturverzeichnis	150
Danksagung	156
Curriculum Vitae	156

Verzeichnis wichtiger Symbole

$(P_i, \mathbf{i})$	raumfestes Bezugssystem (Quasi-Inertialsystem)
$(P_e, \mathbf{e})$	erdfestes Bezugssystem (WGS84)
$(P_h, \mathbf{h})$	rotationsellipsoidisches Horizontsystem (WGS84)
$(P_b, \mathbf{b})$	Beobachtungssystem
P_i, P_e, P_h, P_b	Bezugssystemzentren
$\mathbf{i}, \mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{b}$	Bezugsachsensysteme
t, τ	Zeitvariablen
t_0, t_k	Zeitpunkte
R_{ab}	Rotationsmatrix zur Transformation von Bezugsachsensystem $\mathbf{b}$ nach $\mathbf{a}$, mit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{b}\}$
$\mathbf{x}_a$	kartesischer Ortsvektor im Bezugssystem $(P_a, \mathbf{a})$ mit $\mathbf{a} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{b}\}$
$\mathbf{v}_a$	kartesischer Geschwindigkeitsvektor bzgl. des Bezugsachsensystems $\mathbf{a}$, mit $\mathbf{a} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{b}\}$
v_0, v_n, v_v	Ost-, Nord- und Vertikalgeschwindigkeit
a, b	äquatorialer und polarer Halbmesser des WGS84-Rotationsellipsoids
e	erste numerische Exzentrizität des WGS84-Rotationsellipsoids
λ, φ, h	ellipsoidnormale Länge, Breite und Höhe
N	Normalkrümmungsradius bzgl. WGS84-Rotationsellipsoid
M	Meridiankrümmungsradius bzgl. WGS84-Rotationsellipsoid
ω_{ie}	Erdrotationsrate (WGS84)
ω_S	Schulerrate
$\boldsymbol{\omega}_{ab}$	Winkelgeschwindigkeitsvektor des Bezugsachsensystems $\mathbf{b}$ bzgl. $\mathbf{a}$, mit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{b}\}$
Ω_{ab}	schiefsymmetrische Matrix der Winkelgeschwindigkeiten des Bezugsachsensystems $\mathbf{b}$ bzgl. $\mathbf{a}$, mit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{b}\}$
$\mathbf{f}_b$	Beschleunigungsvektor des Beobachtungssystemzentrums P_b bzgl. des raumfesten Bezugssystems, dargestellt bzgl. des Beobachtungssachsensystems $\mathbf{b}$
$\mathbf{b}, \mathbf{d}$	Sensorbias- und -driftvektor
$\hat{h}_{gyros}, \hat{h}_{accel.}$	Systemauflösung der Kreisel und Akzelerometer
$\alpha_K, \alpha_N, \alpha_R$	Kurs-, Nick- und Rollwinkel
$\alpha_{ab}, \beta_{ab}, \gamma_{ab}$	Kardan-Winkel des Bezugsachsensystems $\mathbf{b}$ bzgl. $\mathbf{a}$, mit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{b}\}$
$\psi_{ab}, \vartheta_{ab}, \eta_{ab}$	Euler-Winkel des Bezugsachsensystems $\mathbf{b}$ bzgl. $\mathbf{a}$, mit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{b}\}$
σ_{ab}	Laning-Bortz-Stuelpnagel-Orientierungsparameter des Bezugsachsensystems $\mathbf{b}$ bzgl. $\mathbf{a}$, mit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{b}\}$
s_{ab}	Cayley-Orientierungsparameter des Bezugsachsensystems $\mathbf{b}$ bzgl. $\mathbf{a}$, mit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{b}\}$
$\tilde{q}_{ab}$	Hamilton-Quaternion des Bezugsachsensystems $\mathbf{b}$ bzgl. $\mathbf{a}$, mit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{b}\}$
$\alpha, \mathbf{n}$	Drehwinkel und -achse
$R_E(\psi, \vartheta, \eta)$	Euler-Parametrisierung der Gruppe der Rotationsmatrizen
$R_K(\alpha, \beta, \gamma)$	Kardan-Parametrisierung der Gruppe der Rotationsmatrizen
$R_C(s)$	Cayley-Parametrisierung der Gruppe der Rotationsmatrizen
$R_{LBS}(\boldsymbol{\sigma})$	Laning-Bortz-Stuelpnagel-Parametrisierung der Gruppe der Rotationsmatrizen
$R_H(\tilde{q})$	Hamilton-Parametrisierung der Gruppe der Rotationsmatrizen
$R_D(\mathbf{n}, \alpha)$	Drehachse/-winkel-Parametrisierung der Gruppe der Rotationsmatrizen
$\mathbf{z}$	Zustandsvektor
$\mathbf{s}$	Sensordatenvektor
$\mathbf{y}$	Beobachtungsvektor
$\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{q}$	vektorielle Modellfunktionen
V_e	Gravitationspotential terrestrischer Massen
V_t	Gezeitenpotential
γ_a	Schwerebeschleunigungsvektor bzgl. Bezugsachsensystem $\mathbf{a}$
GM	Gravitationsmasse der Erde
A, B, C, D	Koeffizientenmatrizen
$SO(3)$	Gruppe der dreidimensionalen (eigentlichen) Rotationsmatrizen
$\mathbb{H}$	Menge der Quaternionen
$\mathbb{H}_0$	Menge der Quaternionen mit Skalarteil Null
$\mathbb{H}_1$	Menge der normierten Quaternionen
$\mathcal{O}$	Landau-Symbol

„Alle Messungen der Welt wiegen nicht ein Theorem auf, wodurch die Wissenschaft der ewigen Wahrheiten wahrhaft weitergebracht wird.“¹⁾

(Carl Friedrich Gauß)

Einleitung

Nach neun Jahren intensiver Bemühungen im Projektbereich E „Geodätische Inertialverfahren“ des Sonderforschungsbereiches 228 „Hochgenaue Navigation“ wurde im „Finanzierungsantrag 1993/1994/1995“ folgendes Zwischenresümee gezogen:

„Hätte man Inertialverfahren hoher Genauigkeit, so ergäben sich zahlreiche Anwendungen: Steuerung von Tunnelvortrieben und Rohrvorpressungen, Positionierung von Materialzügen im Fabrikbetrieb, Positionierungen unter Tage [...]. In den zurückliegenden Jahren hat sich allerdings gezeigt, daß der ungestützte, alleinige Einsatz von Inertialsystemen in der Geodäsie – nach anfänglicher Euphorie in dieser Richtung – Perspektiven nur in Spezialanwendungen hat. [...] Gründe hierfür sind u.a. das ungünstige Fehler- und Driftverhalten, immer noch hohe Hardwarekosten, großer Rechenaufwand und die Kompliziertheit der genauen Modellierung. Dies ist bedauerlich, denn prinzipiell sind solche Systeme ideale Vermessungsinstrumente.“

Die Hoffnung, Trägheitsnavigationssysteme als autonome, kinematische Vermessungssysteme zur Positionierung mit geodätischer Genauigkeit einsetzen zu können, hatte sich zerschlagen. Mit erschwierlichen Systemen konnten die angestrebten Genauigkeiten lediglich kurzzeitig unter idealisierten Versuchsbedingungen erzielt werden, was dem ursprünglich geplanten Einsatz von Trägheitsnavigationssystemen zur Positionierung in der Vermessungspraxis im Wege stand. Diese Aussage unterstellt natürlich die Verwendung körperfester (engl. „strapdown“) Trägheitsnavigationssysteme, deren Sensoren der vollen Dynamik des Trägers ausgesetzt sind und die damit nicht vergleichbar sind mit den hochgenauen Sensoren für Anwendungen geringer Dynamik, wie sie in Plattformsystemen (s. [O. Salychev(1995)]) oder bei Spezialanwendungen (s. [W. Möhlenbrink(1984)]) zum Einsatz kommen.

Das bis zu diesem Zeitpunkt zur Praxisreife geführte satellitengestützte Positionierungssystem GPS liefert in den meisten für die Vermessungspraxis relevanten Fällen weit höhere relative Positionierungsgenauigkeiten zu einem Bruchteil der Kosten. Nun galt es in der finalen Phase des SFB 228, der veränderten Situation Rechnung zu tragen. Das Anwendungsgebiet von Trägheitsnavigationssystemen verlagerte sich weg von der autonomen Positionierung hin zur Positionierung und Orientierung von Multisensorplattformen im Verbund mit GPS z.B. in der Aero-Photogrammetrie, der Fernerkundung oder der Fluggravimetrie. Die große Zuverlässigkeit, eine hohe Datenrate und eine hohe relative Orientierungsgenauigkeit begründen dabei die zentrale Rolle, welche einem Trägheitsnavigationssystem beim Aufbau einer Multisensorplattform zukommt.

Dem Teilprojekt E1 des Projektbereiches E des Sonderforschungsbereiches 228 – welchem diese Arbeit zuzuordnen ist – oblag die Schaffung der theoretischen Grundlagen und die Erforschung der Grenzen des Meßprinzips. Zur Abgrenzung von dem Teilprojekt E2 (Realisierung operationeller Software für das GPS-gestützte Trägheitsnavigationssystem LASERNAV II der Firma Honeywell, s. [O. Heinze(1995)]) und dem Teilprojekt E3 (24-Lagen-Kalibrierung eines Trägheitsnavigationssystems, s. [R. Petzoldt(1995)]) wird im weiteren der Kalibrierung eines Trägheitsnavigationssystems kein und der Realdatenverarbeitung verhältnismäßig wenig Platz eingeräumt.

Der Mechanisierung von Trägheitsnavigationssystemen wurden eine Vielzahl von Publikationen gewidmet. Exemplarisch seien die Monographien [K.R. Britting(1971)], [C. Broxmeyer(1964)], [J.L. Farrell(1976)], [G.M. Siouris(1993)], [B. Stieler; H. Winter(1982)] und [D.H. Titterton; J.L. Weston(1997)], die Vorlesungsmanuskripte [C.T. Leondes(1970)], [K.P. Schwarz; M. Wei(1994)] und [B. Stieler(1980)] und die Artikel [P.G. Savage(1984)], [A. VanBronkhorst(1978)] und [R.V.C. Wong(1988)] genannt. Jede Gruppe von Forschern verwendet dabei ihren eigenen Zugang. Aufgrund der Bedeutung von horizontierenden Plattformsystemen finden zur Parametrisierung des dreidimensionalen Euklidischen Raumes üblicherweise ellipsoidnormale Koordinaten²⁾ Verwendung. Die daraus resultierenden Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen sind jedoch – speziell in linearisierter Form – bereits kompliziert genug, um Approximationen erforderlich werden zu lassen. Dabei spielt weder die analytische Berechenbarkeit der Koeffizienten, noch die Darstellbarkeit in einem Manuskript, sondern vielmehr der mit der numerischen Auswertung verbundene Rechenaufwand die entscheidende Rolle. Im Detail entscheidet das Dynamikspektrum der modellierten Anwendung, die Datenrate und die Auflösung des zur Verfügung stehenden inertialen Sensorsystems, die Frequenz und die Art der Stützung und natürlich die Genauigkeitsanfor-

¹⁾ Brief von C.F. Gauß an F.W. Bessel vom 14. März 1824

²⁾ Synonym auch als geodätische oder geographische Koordinaten bezeichnet.

nung an das Gesamtsystem über den Approximationsgrad. Da i.a. keine strikte Trennung zwischen Modellierung und Approximation erfolgt, ist ein Modellvergleich nur im Sinne eines Koeffizientenvergleiches ohne Referenz möglich. Spätestens die Verwendung unterschiedlicher Parametrisierungen der Gruppe der Rotationsmatrizen und unterschiedlicher Vorgehensweisen zur Aufdatierung der Orientierungsparameter läßt auch einen Koeffizientenvergleich scheitern. So verwendet beispielsweise P.G. Savage eine (numerisch ausgewertete) Approximation der analytischen Lösung eines Orientierungsdifferentialgleichungssystems in (globalen) Laning-Bortz-Stuelpnagel-Parametern, während K.P. Schwarz die Ausgangsorientierung zunächst unter der Annahme konstanter Winkelgeschwindigkeiten zeitlich propagiert (ohne Verwendung einer Parametrisierung) und anschließend ein linearisiertes System von Störungsdifferentialgleichungen zur Bestimmung von Kardan-Winkelstörungen aufstellt und löst, welche in eine Kardan-Rotationsmatrix eingesetzt und von links mit der zuvor propagierten Rotationsmatrix multipliziert die Aufdatierung vervollständigen. Damit ist ein direkter Vergleich praktisch unmöglich.

In der vorliegenden Arbeit werden deshalb die grundlegenden Modellgleichungen zunächst in möglichst allgemeinen Koordinaten³⁾ hergeleitet und die strikte Trennung zwischen Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen einerseits und Orientierungsdifferentialgleichungen andererseits verfolgt. Damit ist die Basis für die Herleitung nichtlinearer Trägheitsnavigationsdifferentialgleichungssysteme (TNDgIS) in beliebigen krummlinigen Koordinaten gelegt, welche letztendlich die Grundlage für die Beurteilung von auf Näherungen basierenden Modellen bilden. Auf der Basis dieses Zuganges werden die nichtlinearen TNDgIS in den wichtigsten Koordinaten hergeleitet und deren Eigenschaften diskutiert. Dazu zählen die Abbildungseigenschaften der gewählten Parametrisierung (Homöomorphismus?), die Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit der Lösung eines TNDgIS von Anfangsdaten und Modell, die Stabilität bzgl. fehlerbehafteter Anfangswerte und Koeffizienten bei ungestützter Navigation und die Beobachtbarkeit aller Zustände bei gestützter Navigation. Die Bestimmung dieser Eigenschaften der Systemgleichungen wird im Titel unter dem Begriff *Diagnose* zusammengefaßt. Dabei wird stets auch die Zustandstransformationsinvarianz der Systemeigenschaften eines linearisierten TNDgIS bewiesen, womit die anhand einer Parametrisierung gezeigten Eigenschaften auch für diverse andere Parametrisierungen lokale Geltung haben. Die aus der einschlägigen Literatur (soweit allgemein zugänglich) bekannten Ergebnisse wurden an entsprechender Stelle zitiert. Viele sich aus der Systematik scheinbar zwangsläufig ergebenden Beziehungen und Darstellungen sind jedoch originär oder zumindest verallgemeinert. Simulationsrechnungen zur quantitativen Bestimmung der durch Diskretisierung, Linearisierung und Quantelung der Sensordaten generierten Zustandsfehler anhand einer synthetischen Trajektorie in Abhängigkeit der Datenrate demonstrieren die notwendige Fehlerordnung des verwendeten Integrationsverfahrens eines nichtlinearen und eines linearisierten TNDgIS für diverse Taktungen und Quantelungen. Die abschließende Verarbeitung eines mit dem Trägheitsnavigationssystem Litton LTN-90-100 aufgezeichneten typischen Datensatzes (kurze stationäre Anfangsphase mit Störungen) umfaßt eine ausführliche Sensordatenanalyse und Konzepte zur Robustifizierung und Konvergenzbeschleunigung der initialen autonomen Selbstorientierung unter Ausnutzung der zuvor erarbeiteten Systemeigenschaften. Die Auswertung erfolgt sowohl ungestützt als auch durch regelmäßige Nullgeschwindigkeitsabgleiche (engl. „zero velocity update (ZUPT)“) gestützt. In diesem Zusammenhang wird die Stützung als *Therapie* der im Rahmen der Diagnose gezeigten Instabilität inertialer Navigationsmodelle verstanden. Ferner dient der betrachtete Datensatz der Verdeutlichung der für die Planung eines Meßexperimentes notwendigen Überlegungen. Zur Verifikation langwieriger Herleitungen wurde das Computeralgebrasystem MATHEMATICA und für die Implementierung eines numerischen Softwarepakets zur Trägheitsnavigation das CAE-Tool MATLAB verwendet.

Im einzelnen werden im 1. Kapitel die im weiteren verwendeten geodätischen Bezugssysteme definiert, die Rotationsmatrizen zur Transformation zwischen den wichtigsten Bezugsachsensystemen bestimmt und zentrale Elemente der verwendeten Notation und Bezeichnungsweise geklärt. Mittels der Lösung der Orientierungsdifferentialgleichungen wird später der von der Akzelerometertriade registrierte Beschleunigungsvektor in das der Berechnung zugrundegelegte geodätische Bezugssystem transformiert und anschließend die Gravitation und die aufgrund der Erdrotation existenten Trägheitsbeschleunigungen korrigiert. Eine Fehlorientierung zieht demnach eine Fehlbeschleunigung nach sich, welche sich zu Geschwindigkeits- und Positionsfehler aufintegriert. Dies erklärt die zentrale Rolle, welche Orientierungsdifferentialgleichungen spielen und die Gewichtung innerhalb der vorliegenden Arbeit. Im 2. Kapitel werden aus den oben genannten Gründen zunächst die in Rotationsmatrizen formulierten Matrixdifferentialgleichungen zur Beschreibung der zeitlichen Veränderung der Orientierung zwischen zwei und drei beliebigen orthonormalen Bezugsachsensystemen hergeleitet und anschließend deren Eigenschaften untersucht. Für beide Fälle wird eine analytische Lösung unter der Voraussetzung zeitinvarianter Koeffizientenmatrizen (dies entspricht der Annahme konstanter Winkelgeschwindigkeiten zwischen den Bezugsachsensystemen) bestimmt und die Gestalt der Lösungen im allgemeinen Fall zeitvarianter Koeffizientenmatrizen diskutiert. Einer Matrixdifferentialgleichung entsprechen hierbei neun skalare Differentialgleichungen. Ihre Verwendung in einem TNDgIS würde somit aufgrund der hohen Redundanz zu einer künstlichen Vergrößerung der Anzahl der (dann nicht mehr un-

³⁾ Dabei fiel die Wahl auf kartesische Koordinaten zur Parametrisierung des dreidimensionalen Euklidischen Raumes und Rotationsmatrizen (bzw. Hamilton-Quaternionen) zur „Parametrisierung“ der Gruppe der eigentlichen Rotationsmatrizen, da die explizite Darstellung dieser Koordinaten durch praktisch beliebige andere Koordinaten problemlos möglich ist.

abhängigen) skalaren Systemzustände führen. Demzufolge werden im Anschluß an den auf H. Hopf zitierten Satz, daß kein globaler Homöomorphismus (bijektive und stetige Abbildung) zwischen der Gruppe der Rotationsmatrizen und dem dreidimensionalen Euklidischen Raum existiert, zwei trigonometrische (Kardan-Winkel für die Folge 123 und Euler-Winkel für die Folge 313 von Einzelrotationen) und vier algebraische (Laning-Bortz-Stuelpnagel- und Cayley-Parameter, Hamilton-Quaternionen, Drehachse/-winkel-Darstellung nach dem Satz von L. Euler) Parametrisierungen der Gruppe der Rotationsmatrizen eingeführt, deren Abbildungseigenschaften untersucht und speziell die algebraischen Parametrisierungen geometrisch interpretiert. Durch Einsetzen der Parametrisierungen in die zuvor in Rotationsmatrizen formulierten Orientierungsdifferentialgleichungen werden die zugehörigen Orientierungsparameterdifferentialgleichungen hergeleitet und diskutiert. Es sei angemerkt, daß zur Wahrung der Systematik die im 2. Kapitel behandelten Beziehungen stets für absolute Orientierungsparameter formuliert sind und die Einordnung von auf relativen Orientierungsparametern basierenden Vorgehensweisen zur Aufdatierung in Anhang D erfolgt. Die Herleitung der Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen in kartesischen und darauf aufbauend in ellipsoidnormalen Koordinaten ist Gegenstand von *Kapitel 3*. Damit verbunden ist die Herleitung der Trägheitsbeschleunigungen aus geometrischen Ansätzen und die durch den freien Fall der Erde um die Sonne bedingte Kompensation der translativen Beschleunigung zwischen Inertialzentrum und Geozentrum mit der durch extraterrestrische Massen im Universum verursachten Gravitationsbeschleunigung im Geozentrum. Die sich durch die Abweichung des Evaluierungspunktes vom Geozentrum ergebende Beschleunigung heißt Gezeitenbeschleunigung und wird in diesem Zusammenhang eingeführt. Diesen Betrachtungen inhärent ist dabei die Möglichkeit der Materialisierung eines (Quasi-)Inertialsystems in sehr guter Näherung durch ein geozentrisches raumfestes Bezugssystem. Im Anschluß erfolgt in *Kapitel 4* die exemplarische Kombination von auf kartesischen und ellipsoidnormalen Koordinaten basierenden Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen mit in Hamilton-Quaternionen formulierten Orientierungsdifferentialgleichungen derart, daß die Orientierungsdifferentialgleichungen unabhängig sind von Position und Geschwindigkeit, wodurch Positions- und/oder Geschwindigkeitsfehler die Orientierung nicht beeinflussen. Beide TNDgLS werden nach Taylor an Zustands- und Sensordatenvektor linearisiert und die resultierenden Koeffizientenmatrizen ohne Vernachlässigungen angegeben. Die linearisierten TNDgLS finden im klassischen Kalman-Schätzer Verwendung. Damit ist die Modellbildung abgeschlossen.

Betrachtet man den Anfangszustandsvektor als gegeben, so stellt sich die Frage, ob die sich aus der Kombination von Anfangswert und nichtlinearen bzw. linearisierten TNDgLS ergebenden multivariaten Anfangswertaufgaben korrekt gestellt sind. Damit verbunden ist die Untersuchung der Existenz, der Eindeutigkeit und der stetigen Abhängigkeit von Anfangszustand, -zeit und Modell der Lösung der Anfangswertaufgabe. In *Kapitel 5* wird dementsprechend zunächst ein kurzer Abriss geeigneter Sätze aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen gegeben und die den Sätzen zugrundeliegenden Voraussetzungen bei Anwendung auf spezielle TNDgLS geprüft. Zur Klärung der Übertragbarkeit der Ergebnisse auf (linearisierte) Anfangswertaufgaben in anderen Parametrisierungen wird die Zustandstransformationsinvarianz untersucht. Ziel des Kapitels ist es, zu zeigen, daß das TNDgLS sinnvoll modelliert wurde und neben den bekannten Unzulänglichkeiten der verwendeten Parametrisierungen des Euklidischen Raumes und der Gruppe der Rotationsmatrizen keine weiteren auftreten. Anschließend wird in *Kapitel 6* das Stabilitätsverhalten von TNDgLS analysiert. Dazu wird zunächst der verwendete Stabilitätsbegriff geklärt und ein Satz bewiesen, welcher für lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten die detaillierte Analyse des polynomialen Übergangs zwischen stabilen und exponentiell instabilen Systemen erlaubt. Nach Anwendung auf ein spezielles TNDgLS wird zur Klärung der Übertragbarkeit der Ergebnisse auf diverse andere Parametrisierungen wiederum die Zustandstransformationsinvarianz untersucht. Bislang wurde damit das Fehlerverhalten von linearisierten TNDgLS bzgl. eines fehlerbehafteten Anfangszustandsvektors behandelt. Da die Gültigkeit der Linearisierung in guter Näherung nur für ein i.a. durch die Taktung des Trägheitsnavigationssystems vorgegebenes Zeitintervall gewährleistet ist, wird das System an dem am Ende dieses Zeitintervalls aufdatierten Zustandsvektor und den aktuellen Sensordaten erneut linearisiert. Die in der Historie des Experimentes aufgelaufenen Sensorfehler spiegeln sich damit im Fehler des aktuellen Anfangszustandsvektors wider, was das gewählte Vorgehen rechtfertigt. Dabei kommt der Identifikation instabiler Zustandskomponenten zur Ermöglichung einer verfeinerten Modellbildung besondere Bedeutung zu. Am Ende des Kapitels wird schließlich exemplarisch für nichtlineare TNDgLS noch das Stabilitätsverhalten von in Rotationsmatrizen formulierten Orientierungsdifferentialgleichungen bezüglich Orthonormalitätsfehlern in der initialen Rotationsmatrix und fehlerhafter zeitvarianter Koeffizientenmatrizen untersucht. Bislang ist damit das Systemverhalten bei ungestützter Navigation geklärt. Liegen jedoch zusätzlich externe Beobachtungen (Messungen) vor (z.B. durch GPS), so stellt sich unmittelbar die Frage, ob damit alle Zustände – bzw. welche nicht – verbessert werden können. Eine derartige Untersuchung heißt Beobachtbarkeitsanalyse und ist Gegenstand von *Kapitel 7*. Dazu werden zunächst die Formen der Beobachtbarkeit für ein deterministisches System im Sinne der Kinematik definiert und die Beobachtbarkeitsabbildung eingeführt, deren globale Invertierbarkeit die globale Beobachtbarkeit eines nichtlinearen Systems garantiert. Die Anwendung auf nichtlineare Systeme der Trägheitsnavigation zielt dabei einerseits auf die Beobachtbarkeit der Orientierung bei Positionsbeobachtungen (Koordinatenabgleich oder GPS) und ande-

rerseits auf die Beobachtbarkeit von Orientierung und linearen Sensorfehlern bei Sensorbeobachtungen in einer stationären Phase ab. Die Linearisierung der Beobachtbarkeitsabbildung führt zur Beobachtbarkeitsmatrix und damit zur lokalen Beobachtbarkeit und deren Anwendung, wobei zur Klärung der Übertragbarkeit der exemplarisch gewonnenen Ergebnisse wiederum die Zustandstransformationsinvarianz untersucht wird. Damit ist auch der systemtheoretische Teil der Arbeit abgeschlossen.

Die Stochastizität von Sensordaten, Anfangszustand und (redundanten) externen Beobachtungen erfordert die Verwendung eines Schätzverfahrens zur Lösung des Systems. Da zeitdiskrete Schätzverfahren am besten geeignet sind, steht am Beginn von *Kapitel 8* die Beschreibung von geeigneten Diskretisierungsverfahren. Dabei ist das Verhältnis zwischen der mit der Erhöhung der Fehlerordnung des verwendeten Integrationsverfahrens verbundenen Genauigkeitssteigerung und der damit einhergehenden direkten (Integrationsverfahren) und indirekten (Fehlerfortpflanzung) Vergrößerung des Rechenaufwandes zu berücksichtigen. Eine Zusammenstellung von für navigatorische Zwecke geeigneten Kalman-Schätzern in Form von Kalman-Filtern und -Glättern komplettiert das 8. Kapitel. Mit der Beschreibung von Verfahren zur initialen Orientierungsbestimmung in *Kapitel 9* sind alle für die Anwendung der Modelle notwendigen Überlegungen durchgeführt. Um einen Eindruck der Auswirkungen von Diskretisierungs-, Linearisierungs- und Quantelungsfehlern⁴⁾ zu erhalten, wird in *Kapitel 10* die Systemsimulation eines Trägheitsnavigationssystems behandelt. Dazu wird eine Position und Orientierung umfassende kontinuierliche Trajektorie funktional vorgegeben und die inertialen Sensordaten durch Auflösen eines nichtlinearen TNDgIS berechnet. Durch Vorgabe des Anfangszustandsvektors und einer gequantelten Abtastung der analogen Sensordaten kann dann anhand nichtlinearer bzw. linearisierter TNDgIS der Einfluß der Fehlerordnung des verwendeten Integrationsverfahrens untersucht werden, wobei die erzielten Ergebnisse abhängig sind von der Länge und der Dynamik der verwendeten Trajektorie. Der Vorteil der Systemsimulation liegt dabei in der Kenntnis einer perfekten Referenztrajektorie. Schließlich wird im 11. Kapitel ein Datensatz eingehend analysiert und sowohl ungestützt als auch im wesentlichen durch Nullgeschwindigkeitsabgleiche gestützt ausgewertet, welcher vom Department of Geomatics, University of Calgary mit einem modifizierten LTN-90-100 Trägheitsnavigationssystem der Firma Litton entlang einer stark befahrenen Landstraße – und damit nicht unter Laborbedingungen – aufgezeichnet wurde. Aufgrund von Störungen während der kurzen Anfangsorientierungsphase sind dabei Maßnahmen zur Robustifizierung und Konvergenzbeschleunigung der initialen autonomen Orientierungsbestimmung zu ergreifen. Zur Beurteilung des Datensatzes ist der Datenverarbeitung im Kalman-Schätzer eine ausführliche Sensordatenanalyse vorgeschaltet. Das zur Navigation im Rahmen von Systemsimulation und Realdatenverarbeitung verwendete TNDgIS ist dabei in kartesischen WGS84-Koordinaten und Hamilton-Quaternionen parametrisiert. Damit ist der aus Modellierung, Systemtheorie, Systemsimulation und Realdatenverarbeitung konzipierte Hauptteil der Arbeit abgeschlossen.

Anhang A dient der Zusammenstellung von im Hauptteil benötigten Ergebnissen aus der Matrizen- und *Anhang B* der Einführung des vektorwertigen Operators und des Kronecker Produkts, sowie einiger damit verbundener Sätze. Definition, Eigenschaft und Transformationsregeln für Zusammenhangsmatrizen werden neben den zu den wichtigsten Rotationsmatrizen korrespondierenden Zusammenhangsmatrizen in *Anhang C* bereitgestellt. Die exemplarische Bereitstellung nichtlinearer Orientierungsparameterdifferentialgleichungen für verschiedene Verfahren zur Aufdatierung der Orientierung mittels der Kardan-Rotationsfolge 312 ist Gegenstand von *Anhang D*. Zentraler Punkt ist dabei die Deutung der direkten zeitlichen Integration der um die Erddrotation korrigierten Kreiselraten als Lösung eines expliziten nichtlinearen Kardan-Orientierungsdifferentialgleichungssystems mit in nullter Ordnung entwickelter rechten Seite. Die auf dem zugehörigen nichtlinearen Modell basierende Simulationsstudie [M. Guha; J. Winkler(1998)] zeigt die mit zunehmender Entwicklungsordnung einhergehende Genauigkeitssteigerung anhand von Trajektorien unterschiedlicher Dynamik auf und verleiht damit der Interpretation von Winkelgeschwindigkeiten als i.a. nichtholonome Koordinaten Ausdruck. In *Anhang E* werden die Winkelgeschwindigkeitsvektoren für alle vorgestellten Parametrisierungen der Gruppe der Rotationsmatrizen als Funktion der Orientierungsparameter und deren zeitlichen Ableitungen bereitgestellt.

⁴⁾ Die Quantelung der Sensordaten beinhaltet hauptsächlich die aus der Analog-Digital-Wandlung resultierende diskrete Beschreibung des analogen Sensorsignals in endlich vielen Klassen, aber auch die endliche Mantissenlänge bei der computergestützten Datenverarbeitung (Rundungsfehler).

KAPITEL 1:

Geodätische Bezugssysteme

Zur Unterscheidung von rein theoretisch definierten Koordinatensystemen bezeichnen wir physikalisch realisierte (materialisierte) Koordinatensysteme als Bezugssysteme. In diesem einleitenden Kapitel werden im 1. Abschnitt die im weiteren verwendeten geodätischen Bezugssysteme – im einzelnen sind dies ein geozentrisches¹⁾, raumfestes Bezugssystem (Quasiinertialsystem), ein geozentrisches, erdfestes Bezugssystem (z.B. GRS80, WGS84, ITRF), ein rotationsellipsoidisches Horizontsystem (z.B. auf Basis des GRS80, WGS84, ITRF) und ein Beobachtungssystem (realisiert durch die Sensorachsen des Trägheitsnavigationssystems) – definiert. Neben Raumkoordinaten sind Rotationsmatrizen von zentraler Bedeutung bei der Formulierung von Trägheitsnavigationsmodellen. Der 2. Abschnitt beinhaltet dementsprechend eine kurze Definition der Gruppe der Rotationsmatrizen $SO(3)$ zur verkürzten Inbezugnahme. Die orthogonale Punkttransformation zwischen zwei beliebigen kartesischen Koordinatensystemen, welche den Ausgangspunkt für die folgenden beiden Kapitel bildet, wird im 3. Abschnitt kurz dargestellt. Im 4. Abschnitt werden die für orthonormale Vektortransformationen zwischen den eingeführten Bezugssystemen notwendigen Rotationsmatrizen bereitgestellt.

1. Definition der Koordinatensysteme

Die in den nachfolgenden Abschnitten eingeführten Bezugssysteme – Bezugssystemzentren und Bezugssachsensysteme – stellen wir a priori zusammen im kommutativen Diagramm der Bezugssysteme (s. z.B. [B. Richter(1986)], [D. Schröder et al.(1988)])

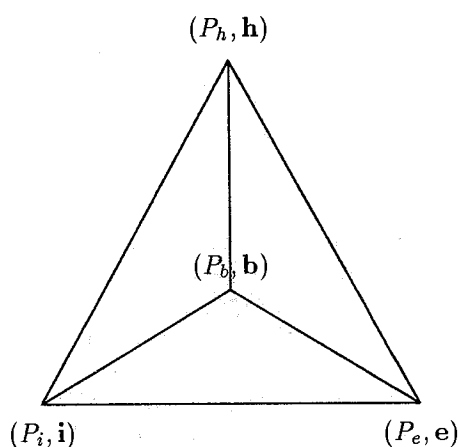


Abbildung 1.1: Das kommutative Diagramm der Bezugssystemachsen und -zentren.

1. Raumfestes Bezugssystem (P_i, i)

Isaac Newton (*1642, †1727) gründete seine Mechanik auf einen absoluten, euklidischen Raum und eine absolute Zeit. Seine Axiome basieren auf eben diesem Konzept. Da die Newtonschen Axiome auf Basis von Kräften und Beschleunigungen formuliert sind, gelten sie sowohl in einem Koordinatensystem, welches relativ zum absoluten Raum ruht, als auch in jedem dazu unbeschleunigt bewegten. Alle Koordinatensysteme dieser Klasse heißen nach Newton Inertialsysteme und verkörpern das idealisierte Konzept extraterrestrischer Koordinatensysteme (s. z.B. [J. Kovalevsky; I.I. Müller; B. Kolaczek(1989)]). Bezüglich der Konstruktion des inertialen Bezugssystems im Massenmittelpunkt des Universums sei auf die in [E.W. Grafarend et al.(1979)] und [E.W. Grafarend(1979)] eingeführten dreidimensionalen kommutativen Diagramme für die Bezugssystemachsen und -zentren verwiesen, an deren einem Ende das Beobachtungsbezugssystem und an deren anderem Ende ein inertiales Bezugssystem steht. Materialisierungsverfahren für extraterrestrische Bezugssysteme sind beispielsweise in [J. Kovalevsky(1989)], [C. Ma(1989)] und [J.G. Williams; E.M. Standish(1989)] beschrieben. Approximationen des inertialen Bezugssystems werden als quasi-inertiale Bezugssysteme bezeichnet.

¹⁾Diese Wahl eines operationalen Bezugssystems mag zunächst nur als unzureichende Näherung erscheinen. Auf Basis der Berechnungen von Kapitel 3 zeigt sich jedoch, daß unter „Vernachlässigung der gezeitenerzeugenden sowie der Eulerbeschleunigung in den translatorischen Gleichungen die rotatorische Modellbildung mit einer Genauigkeit von etwa $3 \cdot 10^{-5}^\circ/h$ erfolgt, die translatorische dagegen mit etwa $0,2 \text{ mgal}$ “ (s. [D. Schröder(1992)]). Das Geozentrum ist ad hoc der Massenmittelpunkt der starren Erde einschließlich der Atmosphäre.

Wie im 3. Kapitel gezeigt werden wird, spielt die „absolute Orientierung“ des gewählten (quasi-)inertialen Bezugssystems keine Rolle, da in nichtlineare Trägheitsnavigationsdifferentialgleichungssysteme nur die Zusammenhangsmatrix $\Omega_{ie} = \text{veck}^{-1}(\boldsymbol{\omega}_{ie})^2$ und nicht die Drehmatrix R_{ie} eingehen, falls die Berechnungen nicht im (Quasi-)Inertialsystem ausgeführt werden sollen. Ferner werden wir im 3. Kapitel noch sehen, daß die translative Beschleunigung des Geozentrums P_e bzgl. des Inertialzentrums P_i in den Gezeitenterm eingeht. Wir setzen deshalb zunächst

P_i : Geozentrum
 $\mathbf{i}_3$: in Richtung Nordpol (CIO)
 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$: bilden mit $\mathbf{i}_3$ rechtshändiges Koordinatensystem
 und sind raumfest bzgl. Erdrotation.

Den verbleibenden Freiheitsgrad eliminieren wir durch die Forderung der Übereinstimmung des raumfesten und erdfesten Bezugssystems zur initialen Epoche t_0 und gelangen damit zur Definition:

P_i : Geozentrum
 $\mathbf{i}_1$: in der terrestrischen Äquatorebene in Richtung Nullmeridian (IERS) zur initialen Epoche t_0
 $\mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1$: komplettiert rechtshändiges Koordinatensystem
 $\mathbf{i}_3$: in Richtung CIO

Für das Bezugsachsensystem (Vektorbasis) wählen wir die Darstellung $\mathbf{i} = (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$. Für den Ortsvektor $\vec{P_i P}$ im quasi-inertialen Bezugssystem $(P_i, \mathbf{i})$ zum Raumpunkt P mit den Koordinaten $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ folgt

$$\vec{P_i P} = \mathbf{i} \mathbf{x}_i = (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

2. Erdfestes Bezugssystem $(P_e, \mathbf{e})$

Grundlage bildet das „Geodetic Reference System 1980“ (GRS80), welches auf der XVII Vollversammlung der IUGG in Canberra, im Dezember 1979, als Resolution Nr. 7 verabschiedet wurde (s. [H. Moritz(1988)]). Danach liegt das Bezugssystemzentrum P_e im Geozentrum, die $\mathbf{e}_3$ -Achse wird durch die Richtung des „Conventional International Origin for Polar Motion“ (CIO), bestimmt vom „International Polar Motion Service“ (IPMS), definiert und die $\mathbf{e}_1$ -Achse liegt orthogonal dazu durch den vom „Bureau International de l'Heure“ (BIH) bestimmten Nullmeridian.³⁾ Die $\mathbf{e}_2$ -Achse ergibt sich aus der orthonormalen Ergänzung zu einem rechtshändigen, kartesischen Bezugssystem. Das „Geodetic Reference System 1980“ (GRS80), das „World Geodetic System 1984“ (WGS84), s. [World Geodetic System 1984(1988)], und das „International Terrestrial Reference Frame“ (ITRF) stimmen auf Beschluß des „US-Department of Defense“ seit 29. Januar 1997 überein und werden deshalb im weiteren synonym verwendet. Damit ist das geozentrische, erdfeste, kartesische Bezugssystem vollständig definiert zu:

P_e : Geozentrum
 $\mathbf{e}_1$: in der terrestrischen Äquatorebene in Richtung IERS-Nullmeridian
 $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$: komplettiert rechtshändiges Koordinatensystem
 $\mathbf{e}_3$: in Richtung CIO

Für das Bezugsachsensystem (Vektorbasis) wählen wir die Darstellung $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Für den Ortsvektor $\vec{P_e P}$ im geozentrischen, erdfesten Bezugssystem $(P_e, \mathbf{e})$ zum Raumpunkt P mit den Koordinaten $\mathbf{x}_e = (x_e, y_e, z_e)$ folgt

$$\vec{P_e P} = \mathbf{e} \mathbf{x}_e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

3. Horizontsystem $(P_h, \mathbf{h})$

In der Geodäsie finden überwiegend flächenbezogene Koordinaten Verwendung. Als Referenzfläche dient i.a. ein biaxiales Ellipsoid $E_{a,b}^2$ mit der großen (äquatorialen) Halbachse a und der kleinen (polaren) Halbachse b . „The

²⁾ Der veck -Operator und der zugehörige inverse Operator sind in Anhang B definiert.

³⁾ Nach Beschluß der „International Union of Geodesy and Geophysics“ (IUGG) und der „International Astronomical Union“ (IAU) von 1987 wurden IPMS und BIH in den „International Earth Rotation Service“ (IERS) eingegliedert, welchem die hochgenaue Bestimmung geodätischer Bezugssysteme obliegt (s. [The Geodestist's Handbook(1996)], [D.D. McCarthy(1996)]).

International Union of Geodesy and Geophysics" (IUGG) verabschiedete – wie bereits erwähnt – das GRS80 (absolutes, geozentrisches, geodätisches Datum), welches auf der Theorie des geozentrischen Äquipotentialellipsoids (Niveauellipsoids) beruht (s. [H. Moritz(1988)]). Danach gilt

$$\begin{aligned} a &= 6378137 \text{ m} \\ b &= 6356752.3141 \text{ m} \\ \omega_{ie} &= 0.00007292115 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ e^2 &= 0.00669438002290 \end{aligned} \quad (1.3)$$

ω_{ie} ist die Erddrehrate und e die erste Exzentrizität. Der Mittelpunkt von $E_{a,b}^2$ liegt im Geozentrum, die kleine Halbachse b von $E_{a,b}^2$ auf der $\mathbf{e}_3$ -Achse und die große Halbachse a von $E_{a,b}^2$ in der Äquatorebene.

Die Koordinaten eines beliebigen Raumpunktes P können alternativ zur kartesischen Darstellung im $(P_e, \mathbf{e})$ -System auch via geodätischer Breite φ , $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, geodätischer Länge λ , $\lambda \in [0, 2\pi)$, und ellipsoidischer Höhe h in geodätischen (ellipsoidischen, ellipsoidnormalen) Koordinaten (λ, φ, h) ausgedrückt werden. Die Länge bezieht sich dabei auf den vom IERS definierten Nullmeridian.

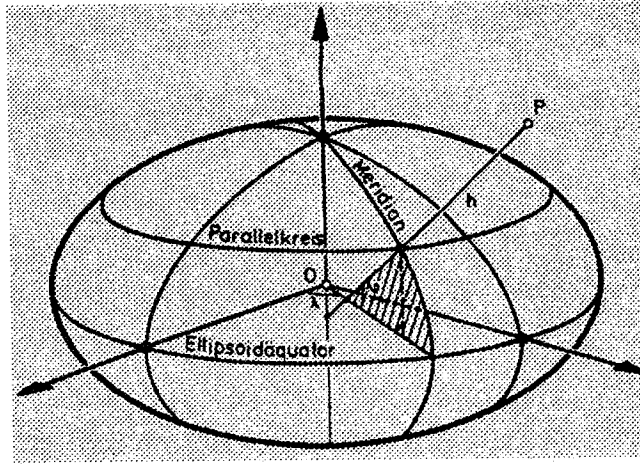


Abbildung 1.2: Das geozentrische, erdfeste Bezugssystem $(P_e, \mathbf{e})$ und geodätische Koordinaten λ, φ, h

Die geodätische Breite φ ist nach obiger Abbildung als Winkel zwischen der verlängerten Ellipsoidnormalen durch P und deren orthogonalen Projektion in die Ellipsoidäquatorebene definiert und wird von der Ellipsoidäquatorebene zum Nordpol positiv bzw. zum Südpol negativ gezählt. Die geodätische Länge λ ist der nach Osten positiv gezählte Winkel zwischen der $\mathbf{e}_1$ -Achse und der orthogonal in die Ellipsoidäquatorebene projizierten Ellipsoidnormalen durch P .

Damit resultiert die Parametrisierung von $E_{a,b}^2$ in geodätischen Koordinaten (λ, φ, h) zu

$$\mathbf{x}_e(P \in E_{a,b}^2) = \begin{pmatrix} N(\varphi) \cos \varphi \cos \lambda \\ N(\varphi) \cos \varphi \sin \lambda \\ \frac{b^2}{a^2} N(\varphi) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit dem Normalkrümmungsradius ("normal terminated by the minor axis", s. z.B. [B.G. Bomford(1962)])

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (1.4)$$

und der ersten numerischen Exzentrizität e

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (1.5)$$

Mit der Ellipsoidnormalen in geodätischen Koordinaten $\mathbf{n}(P \in E_{a,b}^2) = (\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, \sin \varphi)^T$ lautet die Darstellung eines beliebigen Raumpunktes P

$$\mathbf{x}_e(P \in \mathbb{R}^3) = \begin{pmatrix} (N(\varphi) + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N(\varphi) + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\frac{b^2}{a^2} N(\varphi) + h\right) \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Die Definition des rotationsellipsoidischen Horizontsystems lautet

$$\begin{aligned}
 P_h &: \text{Topozentrum} \\
 \mathbf{h}_1 &:= \frac{\frac{\partial \mathbf{x}_e(P_h)}{\partial \lambda}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}_e(P_h)}{\partial \lambda} \right\|} \quad (\text{ellipsoidisch ost}) \\
 \mathbf{h}_2 &:= \frac{\frac{\partial \mathbf{x}_e(P_h)}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}_e(P_h)}{\partial \varphi} \right\|} \quad (\text{ellipsoidisch nord}) \\
 \mathbf{h}_3 &:= \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2 = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}_e(P_h)}{\partial h}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}_e(P_h)}{\partial h} \right\|} \quad (\text{ellipsoidisch vertikal}).
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Für das Bezugsachsensystem (Vektorbasis) wählen wir die Darstellung $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3)$. Für den Ortsvektor $\vec{P_h P}$ im rotationsellipsoidischen Horizontsystem $(P_h, \mathbf{h})$ zum Raumpunkt P mit den Koordinaten $\mathbf{x}_h = (x_h, y_h, z_h)$ folgt

$$\vec{P_h P} = \mathbf{h} \mathbf{x}_h = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3) \begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Die Beschreibung der Position eines Raumpunktes P in geodätischen Koordinaten bedingt jedoch Singularitäten an den Polen des Rotationsellipsoids. Diese folgen, da – für $h = \text{const.}$ (o.B.d.A. $h = 0$) – die Abbildung

$$(\lambda, \varphi) \in [0, 2\pi) \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \left(N(\varphi) \cos \varphi \cos \lambda, N(\varphi) \cos \varphi \sin \lambda, \frac{b^2}{a^2} N(\varphi) \sin \varphi\right) \in E_{a,b}^2 \subset \mathbb{R}^3 \tag{1.9}$$

aufgrund der Unbestimmtheit der geodätischen Länge λ im Falle der geodätischen Breiten $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ nicht (global) injektiv bzw. bijektiv ist.

4. Beobachtungssystem $(P_b, \mathbf{b})$

Wir nehmen an, daß die 3 Kreisel zueinander orthogonal und parallel (im Sinne sensibler Achsen) zu den 3 Beschleunigungsmessern in einem Gehäuse fest installiert sind und die Triadenzentren im Beobachtungssystemzentrum P_b zusammenfallen. Nichtorthogonalität, Nichtparallelität, etc. werden bei der Kalibrierung bestimmt und entsprechende Korrekturen der Sensordaten vorgenommen. Das Gehäuse sei fest mit dem Träger (z.B. Fahr- oder Flugzeug) verbunden. O.B.d.A. nehmen wir ferner an, daß die Sensorachsen in Lage und Orientierung mit Nick-, Roll- und Kursachse des Trägers übereinstimmen. In davon abweichenden Konstellationen ist die zeitlich konstante Rotation zwischen Sensor- und Trägerachsensystem zu berücksichtigen, um die Sensordaten als im Trägerachsensystem (Beobachtungssystem) gemessen betrachten zu können.

Für das Bezugsachsensystem (Vektorbasis) wählen wir die Darstellung $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Für den Ortsvektor $\vec{P_b P}$ im Beobachtungssystem $(P_b, \mathbf{b})$ zum Raumpunkt P mit den Koordinaten $\mathbf{x}_b = (x_b, y_b, z_b)$ folgt

$$\vec{P_b P} = \mathbf{b} \mathbf{x}_b = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Für ein ideal montiertes, rechtshändiges Beobachtungssystem verlaufe in Anlehnung an die Definition des $(P_h, \mathbf{h})$ -Systems

- die $\mathbf{b}_1$ -Achse parallel zur Nickachse des Trägers und ist „nach rechts“ (positiv) orientiert und
- die $\mathbf{b}_2$ -Achse parallel zur Rollachse des Trägers und ist „nach vorne“ (positiv) orientiert,
- die $\mathbf{b}_3$ -Achse parallel zur Kursachse des Trägers und ist „nach oben“ (positiv) orientiert.

Für den praktischen Einsatz eines Trägheitsnavigationssystems erfordert der Bezug auf das Triadenzentrum (Beobachtungssystemzentrum) P_b eine gesonderte Betrachtung, da oftmals keine hinreichenden Herstellerangaben zu dessen Lage im Gehäuse vorliegen, ebenso wie zur Anbindung der Sensorachsen an die Gehäuse- bzw. Trägerachsen. Letztere ist im Falle von Orientierungsupdates oder -vergleichen von Bedeutung und wirkt sich nicht auf die Positionierungsgenauigkeit (ohne die Integration externer Sensoren) aus. Zur Erzielung hoher Genauigkeiten ist im Vorfeld der Anwendung eines inertialen Meßsystems deshalb eine Kalibrierung zur Bestimmung dieser Größen notwendig.

2. Die Gruppe der Rotationsmatrizen $SO(3)$

Eine reellwertige quadratische Matrix R heißt orthonormal, wenn R regulär und $R^T = R^{-1}$ ist. Daraus folgt

$$R^T R = R R^T = I_n, \quad (1.11)$$

d.h. die Spalten- bzw. Zeilenvektoren von R bilden im $\mathbb{R}^n$ ein Orthonormalsystem. Umgekehrt ist jede quadratische Matrix deren Zeilen- bzw. Spaltenvektoren ein Orthonormalsystem bilden auch eine orthonormale Matrix. Die Menge der orthonormalen Matrizen bildet bzgl. der Multiplikation eine Gruppe, d.h. daß mit R_1 und R_2 auch $R_1 R_2$, R_1^{-1} und R_2^{-1} orthonormale Matrizen sind. Aus

$$\det(R^T R) = (\det R)^2 = 1 \quad (1.12)$$

folgt, daß für jede orthonormale Matrix gilt

$$\det R = \pm 1. \quad (1.13)$$

Für $n = 3$ folgt aus

$$\det R^T = \det R = \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) \quad \text{mit} \quad R = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \quad (1.14)$$

$$\Leftrightarrow \langle \mathbf{r}_i | \mathbf{r}_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{mit} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

daß für $\det R = +1$ die Spalten- bzw. Zeilenvektoren ein Rechtssystem bilden, während sie für $\det R = -1$ ein Linkssystem bilden. Orthonormale Matrizen R mit $\det R = +1$ heißen auch eigentlich, solche mit $\det R = -1$ uneigentlich. Die Menge der eigentlichen orthonormalen Matrizen bildet die Gruppe $SO(3)$.

Definition 1.1 (s. z.B. [N. Euler; W.-H. Steeb(1992)]):

Sei $K^{n \times n}$, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, die Menge aller n -dimensionalen, quadratischen Matrizen über dem Zahlkörper K . Zur vereinfachten Bezugnahme definieren wir die folgenden klassischen Gruppen

“general linear group”	$GL(n)$	$:= \{A \in K \mid \det(A) \neq 0\}$
“special linear group”	$SL(n)$	$:= \{A \in GL(n) \mid \det(A) = 1\}$
“orthogonal group”	$O(n)$	$:= \{A \in GL(n) \mid A^T A = I_n\}$
“special orthogonal group”	$SO(n)$	$:= SL(n) \cap O(n).$

■

Zur verkürzten Inbezugnahme verwenden wir im weiteren $R \in SO(3)$, um auszudrücken, daß R eine eigentliche Rotationsmatrix ist. Indizes geben dabei an, von welchem Bezugsachsensystem in welches Bezugsachsensystem die Transformation erfolgt.

3. Orthonormale Punkttransformationen

Im kommutativen Diagramm der Bezugssysteme (Abb. 1.1) spiegelt sich die Möglichkeit der direkten und von indirekten Transformationen eines Bezugssystems in ein anderes dadurch wider, daß jedes mit jedem Bezugssystem durch eine Kante verbunden ist. Wir betrachten im vorliegenden Abschnitt die Punktkoordinatentransformation zwischen zwei beliebigen Bezugssystemen dieses kommutativen Diagramms entlang einer Kante.

Seien $(P_a, \mathbf{a})$ und $(P_b, \mathbf{b})$ zwei Koordinatensysteme und P ein beliebiger Raumpunkt.

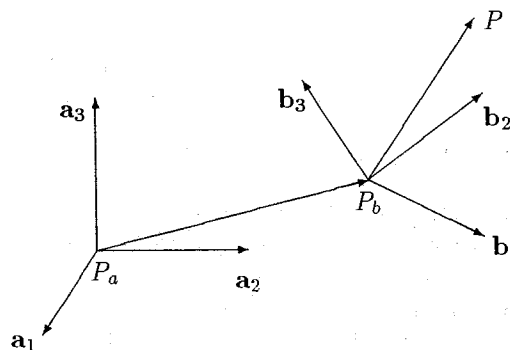


Abbildung 1.3: Punktkoordinatentransformation zwischen 2 orthonormalen Bezugssystemen

Geometrisch gilt die Gleichung

$$\vec{P_a P} = \vec{P_a P_b} + \vec{P_b P} \quad (1.15)$$

Bei Darstellung im Koordinatensystem $(P_a, \mathbf{a})$ folgt

$$\mathbf{a} \mathbf{x}_a(P) = \mathbf{a} \mathbf{x}_a(P_b) + \mathbf{a} R_{ab} \mathbf{x}_b(P) = \mathbf{a} [\mathbf{x}_a(P_b) + R_{ab} \mathbf{x}_b(P)] \quad (1.16)$$

mit

$\mathbf{x}_a(P)$	Koordinaten des Raumpunktes P bzgl. des Koordinatensystems $(P_a, \mathbf{a})$
$\mathbf{x}_a(P_b)$	Koordinaten des Koordinatensystemzentrums P_b bzgl. des Koordinatensystems $(P_a, \mathbf{a})$
$\mathbf{x}_b(P)$	Koordinaten des Raumpunktes P bzgl. des Koordinatensystems $(P_b, \mathbf{b})$
$R_{ab} \in SO(3)$	Drehmatrix zur Vektorkoordinaten bzw. -basistransformation.

Die Bewegung des Raumpunktes P bzgl. des Koordinatensystems $(P_a, \mathbf{a})$ läßt sich somit aufspalten in die translative Bewegung des Ursprungs P_b des Koordinatensystems $(P_b, \mathbf{b})$ bzgl. des Systems $(P_a, \mathbf{a})$ und der ins Bezugssystem $\mathbf{a}$ transformierten Bewegung des Raumpunktes P bzgl. des Systems $(P_b, \mathbf{b})$.

Beziehungen dieser Art bilden sowohl für die $SO(3)$ -Differentialgleichungen im 2. Kapitel als auch für die Herleitung der Bilanzgleichungen der spezifischen Kräfte im 3. Kapitel die Ausgangsbasis.

4. Orthonormale Vektortransformationen

Ein Vektor ist durch Richtung und Länge definiert. Seine Koordinaten sind somit nur vom Koordinatenachsensystem nicht jedoch vom Koordinatensystemzentrum abhängig. Im Vergleich zum vorhergehenden Abschnitt resultiert dementsprechend die Forderung

$$P_a = P_b \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}_a(P_b) = 0$$

Die Vektortransformation wird demnach beschrieben durch die Gleichung

$$\mathbf{a} \mathbf{x}_a(P) = \mathbf{a} R_{ab} \mathbf{x}_b(P) = \mathbf{b} \mathbf{x}_b(P) \quad (1.17)$$

Hierbei läßt sich die Rotationsmatrix $R_{ab} \in SO(3)$ verwenden zur

- Vektorkoordinatentransformation

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_a(P) &= R_{ab} \mathbf{x}_b(P) \\ \Rightarrow R_{ab} : \mathbf{x}_b(P) &\mapsto \mathbf{x}_a(P) \end{aligned}$$

Mit dieser Betrachtung geht man der Frage nach, wie die Koordinaten des Vektors $\vec{P_a P} = \vec{P_b P}$ transformieren.

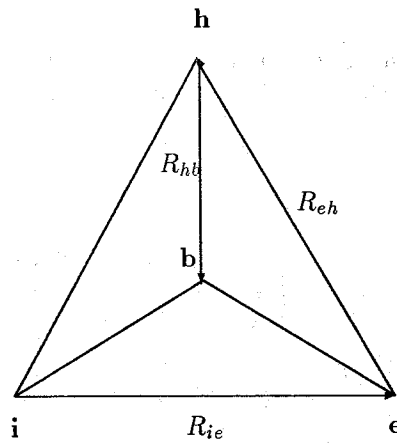
- Vektorbasistransformation

$$\begin{aligned} \mathbf{a} R_{ab} &= \mathbf{b} \\ \Rightarrow R_{ab} : \mathbf{a} &\mapsto \mathbf{b} \end{aligned}$$

Mit dieser Betrachtung geht man der Frage nach, wie die Vektorbasen transformieren.

Wir extrahieren aus dem kommutativen Diagramm der Bezugssysteme (Abb. 1.1) das folgende kommutative Diagramm der Bezugssachsensysteme (Abb. 1.4).

Die Transformationen entsprechen einfachen dreidimensionalen Drehungen. Die den Pfeilrichtungen entsprechenden Transformationsvorschriften (Rotationsmatrizen) sind neben den Pfeilen angegeben. Die Rotationsmatrizen zu den entgegengesetzten Pfeilrichtungen folgen durch Transposition. Jedes Koordinatenachsensystem ist mit jedem anderen (direkt und indirekt) durch Kantenzüge verbunden. Für zwei Koordinatenachsensysteme ergibt sich die zugehörige Drehmatrix durch Kombination der Drehmatrizen entlang eines beliebigen die Systeme verbindenden Kantenzuges.



$$R_{hb} = R_3(\alpha_K)R_1(\alpha_N)R_2(\alpha_R)$$

$$R_{eh} = R_3(\lambda + \frac{\pi}{2})R_1(\frac{\pi}{2} - \varphi)$$

$$R_{ie} = R_3(\omega_{ie}(t - t_0))$$

Abbildung 1.4: Das kommutative Diagramm der wichtigsten Bezugssachsensysteme in der Trägheitsnavigation.

1. Basiswechsel zwischen den Bezugssachsensystemen i und e

Aus der Definition des geozentrischen, raumfesten, kartesischen Bezugssystems $(P_i, \mathbf{i})$ und des geozentrischen, erdfesten, kartesischen Bezugssystems $(P_e, \mathbf{e})$ folgt unmittelbar, daß die Bezugssachsensysteme $\mathbf{i}$ und $\mathbf{e}$ durch eine Drehung um die dritte Achse in Übereinstimmung gebracht werden können. Da das erdfeste bzgl. des raumfesten Bezugssystems eine positive Drehung um die gemeinsame dritte Achse (Erdrotationsachse) vollführt, gilt

$$R_{ie} = R_3(\omega_{ie}(t - t_0)) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_{ie}(t - t_0)) & -\sin(\omega_{ie}(t - t_0)) & 0 \\ \sin(\omega_{ie}(t - t_0)) & \cos(\omega_{ie}(t - t_0)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Die Umkehrabbildung lautet $R_{ei} = R_{ie}^T = R_3^T(\omega_{ie}(t - t_0)) = R_3(-\omega_{ie}(t - t_0))$.

Physikalische Effekte, welche eine Verlagerung der Rotationsachse der Erde bedingen (z.B. Polbewegung, Präzession, Nutation), finden dabei aufgrund ihrer Kleinheit keine Berücksichtigung.

2. Basiswechsel zwischen den Bezugssachsensystemen e und h

Aus der Definition des geozentrischen, erdfesten, kartesischen Koordinatensystems $(P_e, \mathbf{e})$ und des rotationsellipsoidischen Horizontsystems $(P_h, \mathbf{h})$ folgt (s.a. Abbildung 1.2)

$$R_{eh} = R_3(\lambda + \frac{\pi}{2})R_1(\frac{\pi}{2} - \varphi) \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \cos(\lambda + \frac{\pi}{2}) & -\sin(\lambda + \frac{\pi}{2}) & 0 \\ \sin(\lambda + \frac{\pi}{2}) & \cos(\lambda + \frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) & -\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) \\ 0 & \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) & \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda & 0 \\ \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\sin \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (1.20) \end{aligned}$$

Die Umkehrabbildung lautet $R_{he} = R_{eh}^T = R_1^T(\frac{\pi}{2} - \varphi)R_3^T(\lambda + \frac{\pi}{2}) = R_1(\varphi - \frac{\pi}{2})R_3(-\lambda - \frac{\pi}{2})$.

3. Basiswechsel zwischen den Bezugssachsensystemen h und b

Die Rotationsmatrix R_{hb} ist mit der Definition des Beobachtungssachsensystems $\mathbf{b}$ und der Lagewinkel festgelegt. Ausgangspunkt sind die durch das Triadenzentrum P_b laufende (und mit der Definition des Beobachtungssystems gerichtete) Nick-, Roll- und Kursachse des Trägers und die geodätische Horizontalebene im Triadenzentrum mit ausgewiesener Nordrichtung. Der (Azimut- bzw.) Kurswinkel α_K (engl. azimuth, heading, yaw) liegt an zwischen der Nordrichtung und der Projektion der Rollachse in die Horizontalebene. Der Nickwinkel α_N (engl. pitch) liegt an zwischen der Projektion der Rollachse in die rotationsellipsoidische Horizontalebene und der Rollachse. Der Rollwinkel α_R (engl. roll) liegt an zwischen der Knotenachse und der Nickachse. Die Knotenachse ist die

Schnittgerade zwischen der von Nick- und Kursachse aufgespannten Ebene und der Horizontalebene. Alle 3 Winkel werden um die gerichteten Beobachtungssystemachsen mathematisch positiv gezählt.

Damit folgt

$$\begin{aligned}
 R_{hb} &= R_3(\alpha_K)R_1(\alpha_N)R_2(\alpha_R) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_K & -\sin \alpha_K & 0 \\ \sin \alpha_K & \cos \alpha_K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_N & -\sin \alpha_N \\ 0 & \sin \alpha_N & \cos \alpha_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_R & 0 & \sin \alpha_R \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_R & 0 & \cos \alpha_R \end{pmatrix} \quad (1.21) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_K \cos \alpha_R - \sin \alpha_K \sin \alpha_N \sin \alpha_R & -\sin \alpha_K \cos \alpha_N & \cos \alpha_K \sin \alpha_R + \sin \alpha_K \sin \alpha_N \cos \alpha_R \\ \sin \alpha_K \cos \alpha_R + \cos \alpha_K \sin \alpha_N \sin \alpha_R & \cos \alpha_K \cos \alpha_N & \sin \alpha_K \sin \alpha_R - \cos \alpha_K \sin \alpha_N \cos \alpha_R \\ -\cos \alpha_N \sin \alpha_R & \sin \alpha_N & \cos \alpha_N \cos \alpha_R \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Die Umkehrabbildung lautet $R_{bh} = R_{hb}^T = R_2^T(\alpha_R)R_1^T(\alpha_N)R_3^T(\alpha_K) = R_2(-\alpha_R)R_1(-\alpha_N)R_3(-\alpha_K)$.

KAPITEL 2:

Orientierungsdifferentialgleichungen

Sei $\mathbf{f}_b$ der Vektor der im Beobachtungssystem von idealen Akzelerometern registrierten Beschleunigungen (Superposition der Beschleunigung des Meßsystems bzgl. eines inertialen Bezugssystems und der Gravitationsbeschleunigung) und $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ der Vektor der im Beobachtungssystem von idealen Kreiseln registrierten inertialen Winkelgeschwindigkeiten.

Um die Navigationsberechnungen in einem vom Beobachtungssystem abweichenden Bezugssystem durchführen zu können, ist – wie wir im 3. Kapitel noch sehen werden – der Vektor der im Beobachtungssystem gemessenen Beschleunigungen $\mathbf{f}_b$ mittels einer Vektorkoordinatentransformation in dieses System abzubilden. Die dazu notwendige Rotationsmatrix ist mit Hilfe der Kreiselraten zu berechnen. Da die in den Zusammenhangsmatrizen auftretenden Winkelgeschwindigkeiten nichtholonome Größen sind, ist eine direkte zeitliche Integration nicht möglich (s. [K. Magnus(1971)]).

Im 1. Abschnitt werden wir deshalb die lineare, homogene $SO(3)$ -Differentialgleichung für R_{ib} , R_{eb} und R_{hb} herleiten und auftretende Koeffizientenmatrizen auf bekannte Größen, insbesondere den Vektor der im Beobachtungssystem registrierten inertialen Winkelgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}_{ib}$, zurückführen. Durch Kombination mit der Anfangsorientierung (s. Kapitel 9) des Trägheitsnavigationssystems (TNS) resultiert das zugehörige $SO(3)$ -Anfangswertproblem ($SO(3)$ -AWP). Daran schließen wir die Herleitung einer geschlossenen Lösung des $SO(3)$ -AWP für den Fall zeitinvarianter Koeffizientenmatrizen an.

Einer $SO(3)$ -Differentialgleichung entsprechen 9 skalare Differentialgleichungen. Wir befassen uns deshalb im 2. Abschnitt mit vier minimalen und zwei redundanten Parametrisierungen der $SO(3)$ -Gruppe und leiten für diese Parametrisierungen im 3. Abschnitt aus $SO(3)$ -Matrixdifferentialgleichungen die zugehörigen Differentialgleichungen für die Parameter her. In Besonderheit sei darauf hingewiesen, daß die aus der Kreiseltheorie bekannten Orientierungsdifferentialgleichungen (s. z.B. [K. Magnus(1971)]) geeignet auf die Gegebenheiten der Trägheitsnavigation – insbesondere die Verknüpfung von 3 statt 2 Koordinatensystemen – anzupassen sind.

Im Gegensatz zum üblicherweise für die Trägheitsnavigation verwendeten linearisierten Ansatz mit „multiplikativen Kardan-Winkelinkrementen“ (s. Anhang D) stehen dann jedoch die nichtlinearen Orientierungsparameterdifferentialgleichungen für die absoluten Kardan-Winkel zur Verfügung, welche beispielsweise für nichtlineare Filter, wie den erweiterten Kalman-Filter, benötigt werden. In Anhang D leiten wir zur Diskussion der Fehlerordnung für eine Kardan-Parametrisierung die nichtlinearen (!) Orientierungsdifferentialgleichungen für „multiplikative Kardan-Winkelinkremente bzw. -störungen“ her. Im Falle der Quaternionenparametrisierung der $SO(3)$ -Gruppe erhalten wir lineare Quaternionendifferentialgleichungen ($\mathbb{H}_1$ -Differentialgleichungen), wodurch bei Verwendung in einem linearen modellbasierten Filter kein (Zustands-)Linearisierungsfehler auftritt.

Ein Überblick über technologische Realisierungen von Kreiselgeräten ist beispielsweise in [W. von Fabek(1980)], [J.M. Rüeder (1982)], [M.J. Hadfield(1991)], [P.G. Savage(1978)] und [P.G. Savage(1984)] gegeben.

1. $SO(3)$ -Differentialgleichungen

Den Ausgangspunkt bildet die orthonormale Punkttransformation

$$\mathbf{i} \mathbf{x}_i(P) = \mathbf{i} [\mathbf{x}_i(P_b) + R_{ib} \mathbf{x}_b(P)] \quad (2.1)$$

aus Abschnitt 1.2 zwischen dem Quasi-Inertialsystem $(P_i, \mathbf{i})$ und dem Beobachtungssystem $(P_b, \mathbf{b})$.

[D. Schröder(1992)] hat den Fehler, welcher durch Approximation der Inertialsysteme durch das Quasi-Inertialsystem $(P_i, \mathbf{i})$ gemacht wird – bei gleichzeitiger Vernachlässigung von Gezeiten- und Eulerbeschleunigung – untersucht. Er gibt an, daß unter diesen Approximationen „die rotatorische Modellbildung mit einer Genauigkeit von etwa $3 \cdot 10^{-5} \frac{^\circ}{h}$ erfolgt, die translatorische dagegen mit etwa $0,2 mgal$.“

Für die Geschwindigkeit von P gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{i} \mathbf{x}_i(P)) &= \left(\frac{d}{dt} \mathbf{i} \right) \mathbf{x}_i(P) + \mathbf{i} \dot{\mathbf{x}}_i(P) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \mathbf{i} \right) [\mathbf{x}_i(P_b) + R_{ib} \mathbf{x}_b(P)] + \mathbf{i} [\dot{\mathbf{x}}_i(P_b) + \dot{R}_{ib} \mathbf{x}_b(P) + R_{ib} \dot{\mathbf{x}}_b(P)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Unter Verwendung der Äquivalenz der Koordinaten nach Gleichung (2.1) folgt

$$\mathbf{i} \dot{\mathbf{x}}_i(P) = \mathbf{i} [\dot{\mathbf{x}}_i(P_b) + R_{ib} (\dot{R}_{ib}^T R_{ib} \mathbf{x}_b(P) + \dot{\mathbf{x}}_b(P))] \quad (2.3)$$

Wir definieren zunächst

$$\Omega_{ib} := R_{ib}^T \dot{R}_{ib} \quad , \quad R_{ib} \in SO(3). \quad (2.4)$$

Nach Satz C.1 ist Ω_{ib} schiefsymmetrisch, d.h. $\Omega_{ib}^T = -\Omega_{ib}$, und heißt nach Definition C.1 Zusammenhangsmatrix zur Rotationsmatrix R_{ib} . Jede Zusammenhangsmatrix enthält demnach nur 3 unabhängige Koeffizienten. Der in Anhang B definierte Operator *veck*, angewandt auf Ω_{ib} , extrahiert diese Koeffizienten in den Vektor ω_{ib} gerade so, daß gilt

$$\Omega_{ib} \mathbf{x}_b(P) = \omega_{ib} \times \mathbf{x}_b(P). \quad (2.5)$$

Damit ist

$$\mathbf{i} \dot{\mathbf{x}}_i(P) = \mathbf{i} \left[\dot{\mathbf{x}}_i(P_b) + R_{ib}(\omega_{ib} \times \mathbf{x}_b(P) + \dot{\mathbf{x}}_b(P)) \right]. \quad (2.6)$$

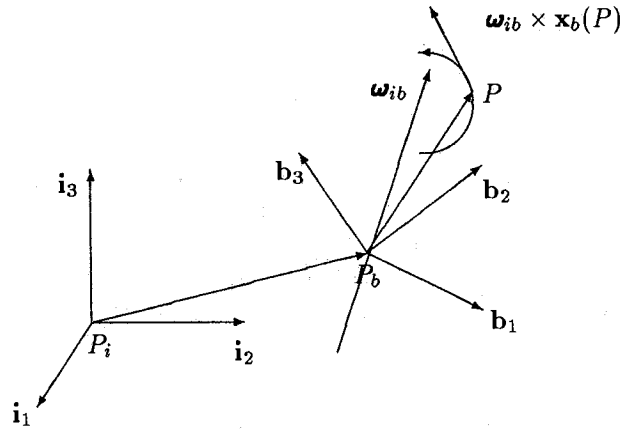


Abbildung 2.1: Absolute Geschwindigkeit eines Vektors.

$\omega_{ib} \times \mathbf{x}_b(P)$ beschreibt die Scheingeschwindigkeit (nach [K. Magnus(1971)] auch Führungsänderung genannt) aufgrund der zeitlichen Lageänderung des Bezugsachsensystems $\mathbf{b}$ relativ zu $\mathbf{i}$. Damit ist $\omega_{ib} = \text{veck}(\Omega_{ib}) = \text{veck}(R_{ib}^T \dot{R}_{ib})$ gerade der Vektor der von der (idealen) Kreiseltriade registrierten inertialen Winkelgeschwindigkeiten im Beobachtungssystem $(P_b, \mathbf{b})$.

Gegeben die Daten ω_{ib} einer (fehlerfreien) inertialen Sensortriade im $(P_b, \mathbf{b})$ -System folgt aus der Definition der Zusammenhangsmatrix Ω_{ib} und $\Omega_{ib} = \text{veck}^{-1}(\omega_{ib})$ die $SO(3)$ -Differentialgleichung

$$\dot{R}_{ib} = R_{ib} \Omega_{ib} \quad , \quad \Omega_{ib}^T = -\Omega_{ib} \quad , \quad R_{ib} \in SO(3) \quad (2.7)$$

mit der zeitvariablen Koeffizientenmatrix $\Omega_{ib}(t)$. Entsprechende $SO(3)$ -Differentialgleichungen bzw. Zusammenhangsmatrizen existieren für die relative Lageänderung jedes (rechtshändigen) kartesischen Koordinatensystems bzgl. eines anderen (rechtshändigen) kartesischen Koordinatensystems. Da in den im nächsten Kapitel hergeleiteten Beschleunigungsbilanzen speziell die unbekannten Rotationsmatrizen R_{eb} und R_{hb} auftreten, seien insbesondere die $SO(3)$ -Differentialgleichungen

$$\dot{R}_{eb} = R_{eb} \Omega_{eb} \quad \text{und} \quad (2.8)$$

$$\dot{R}_{hb} = R_{hb} \Omega_{hb} \quad (2.9)$$

angeführt. $\omega_{eb} = \text{veck}(\Omega_{eb})$ bzw. $\omega_{hb} = \text{veck}(\Omega_{hb})$ beinhalten entsprechend die Winkelgeschwindigkeiten des Koordinatenachsensystems $\mathbf{b}$ bzgl. $\mathbf{e}$ bzw. $\mathbf{h}$. Die einzige Möglichkeit der Anbindung des Beobachtungssystems $\mathbf{b}$ an ein anderes Achsensystem aus dem Kanon der Bezugssysteme $\{(P_i, \mathbf{i}), (P_e, \mathbf{e}), (P_h, \mathbf{h})\}$ besteht mittels des Vektors der (gemessenen) inertialen Winkelgeschwindigkeiten ω_{ib} . Wir substituieren deshalb die Zusammenhangsmatrizen nach den im Anhang C bewiesenen Transformationsregeln für Zusammenhangsmatrizen durch Ausdrücke in welchen Ω_{ib} explizit auftritt. Nach Satz C.6 gilt

$$\Omega_{cb} = \Omega_{ab} - R_{cb}^T \Omega_{ac} R_{cb} \quad . \quad (2.10)$$

Daraus folgt für Ω_{eb} bzw. Ω_{hb}

$$\Omega_{eb} = \Omega_{ib} - R_{eb}^T \Omega_{ie} R_{eb} \quad \text{bzw.} \quad (2.11)$$

$$\Omega_{hb} = \Omega_{ib} - R_{hb}^T \Omega_{ih} R_{hb} . \quad (2.12)$$

Ω_{ie} und Ω_{ih} werden mittels der Definitionsgleichung für Zusammenhangsmatrizen aus R_{ie} und $R_{ih} \in SO(3)$ (s. 1. Kapitel) berechnet und sind in Anhang C angegeben. Das explizite Auftreten der zeitlichen Ableitungen der Lagekoordinaten, d.h. $\dot{\varphi}$ und $\dot{\lambda}$, in Ω_{ih} ist zunächst unkritisch, da – wie wir im 3. Kapitel sehen werden – beide Größen durch Systemzustände (genauer: Ortskoordinaten und Geschwindigkeiten) ausgedrückt werden können. Insgesamt erhalten wir somit durch Einsetzen von (2.11) in (2.8) bzw. von (2.12) in (2.9), zusätzlich zu (2.7), die linearen, homogenen SO(3)-Differentialgleichungen (Orientierungsdifferentialgleichungen) 1. Ordnung

$$\dot{R}_{eb} = R_{eb} \Omega_{ib} - \Omega_{ie} R_{eb} \quad \text{bzw.} \quad (2.13)$$

$$\dot{R}_{hb} = R_{hb} \Omega_{ib} - \Omega_{ih} R_{hb} . \quad (2.14)$$

Ω_{ie} enthält als einzige von Null verschiedene Größe die für die Trägheitsnavigation in sehr guter Näherung als konstant annehmbare Erddrehrate ω_{ie} (s. (C.1)).

Zusammenstellung der Voraussetzungen und zusätzliche Berücksichtigung von Anfangswerten zu den SO(3)-Differentialgleichungen führt auf

Satz 2.1:

Gegeben seien

- (beliebige) orthonormale, rechtshändige Bezugssysteme
 - $(P_i, \mathbf{i})$, hier: raumfestes Bezugssystem
 - $(P_b, \mathbf{b})$, hier: körperfestes Bezugssystem
- den Winkelgeschwindigkeitsvektor zwischen $\mathbf{i}$ - und $\mathbf{b}$ -Achsensystem: $\boldsymbol{\omega}_{ib}(t), t \geq t_0$ (Kreiselbeobachtungen)
- Anfangsorientierung des $\mathbf{b}$ - bzgl. des $\mathbf{i}$ -Achsensystems: R_{ib_0}

Dann wird die zeitliche Entwicklung von $R_{ib}(t)$ beschrieben durch die Matrix-Anfangswertaufgabe (AWA)

$$\dot{R}_{ib}(t) = R_{ib}(t) \Omega_{ib}(t) \quad , \quad R_{ib}(t_0) = R_{ib_0} \in SO(3).$$

■

Satz 2.2:

Gegeben seien

- (beliebige) orthonormale, rechtshändige Bezugssysteme
 - $(P_i, \mathbf{i})$, hier: raumfestes Bezugssystem
 - $(P_e, \mathbf{e})$, hier: erdfestes Bezugssystem
 - $(P_b, \mathbf{b})$, hier: körperfestes Bezugssystem
- die Winkelgeschwindigkeitsvektoren
 - zwischen $\mathbf{b}$ - und $\mathbf{i}$ -Achsensystem: $\boldsymbol{\omega}_{ib}(t), t \geq t_0$ (Kreiselbeobachtungen)
 - zwischen $\mathbf{e}$ - und $\mathbf{i}$ -Achsensystem: $\boldsymbol{\omega}_{ie}(t), t \geq t_0$ (Erdrotation)
- Anfangsorientierung des $\mathbf{b}$ - bzgl. des $\mathbf{e}$ -Achsensystems: R_{eb_0}

Dann wird die zeitliche Entwicklung von $R_{eb}(t)$ beschrieben durch die Matrix-Anfangswertaufgabe (AWA)

$$\dot{R}_{eb}(t) = R_{eb}(t) \Omega_{ib}(t) - \Omega_{ie}(t) R_{eb}(t) \quad , \quad R_{eb}(t_0) = R_{eb_0} \in SO(3).$$

■

Satz 2.3:

Gegeben seien

- (beliebige) orthonormale, rechtshändige Bezugssysteme
 - $(P_i, \mathbf{i})$, hier: raumfestes Bezugssystem
 - $(P_h, \mathbf{h})$, hier: Horizontsystem
 - $(P_b, \mathbf{b})$, hier: körperfestes Bezugssystem
- die Winkelgeschwindigkeitsvektoren
 - zwischen $\mathbf{b}$ - und $\mathbf{i}$ -Achsensystem: $\boldsymbol{\omega}_{ib}(t), t \geq t_0$ (Kreiselbeobachtungen)
 - zwischen $\mathbf{h}$ - und $\mathbf{i}$ -Achsensystem: $\boldsymbol{\omega}_{ih}(t), t \geq t_0$ (positions- u. geschwindigkeitsabhängig!)
- Anfangsorientierung des $\mathbf{b}$ - bzgl. des $\mathbf{h}$ -Achsensystems: R_{hb_0}

Dann wird die zeitliche Entwicklung von $R_{hb}(t)$ beschrieben durch die Matrix-Anfangswertaufgabe (AWA)

$$\dot{R}_{hb}(t) = R_{hb}(t)\Omega_{ib}(t) - \Omega_{ih}(t)R_{hb}(t) \quad , \quad R_{hb}(t_0) = R_{hb_0} \in SO(3).$$

Aus diesen drei Sätzen ist – wie bereits im 1. Kapitel angesprochen – die bekannte Tatsache zu erkennen, daß bei Durchführung der Berechnungen im Quasi-Inertialsystem $(P_i, \mathbf{i})$, wegen der zugehörigen Anfangsorientierung R_{ib_0} , die „absolute Orientierung“ des Quasi-Inertialsystems eine tragende Rolle spielt, während dies bei Durchführung der Berechnungen in anderen Bezugssystemen nicht der Fall ist. Wir werden deshalb im weiteren den Fall der Durchführung der Berechnungen im Quasi-Inertialsystem von der Betrachtung ausschließen.

Damit haben wir unser Ziel erreicht, gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung für die interessierenden Rotationsmatrizen zu formulieren. Genaugenommen handelt es sich jeweils um eine matrixwertige, gewöhnliche, lineare, homogene Differentialgleichungen 1. Ordnung mit i.a. zeitvariablen Koeffizientenmatrizen bzw. neun skalarwertige, gewöhnliche, lineare, homogene Differentialgleichungen 1. Ordnung mit i.a. zeitvariablen Koeffizienten. Natürlich besteht eine Redundanz in der Beschreibung der Orientierung mit neun Zuständen. So könnte man auf die Idee kommen, die Definitionsbedingungen einer Rotationsmatrix R , nämlich $RR^T = I_3$ und $\det(R) = 1$, als Nebenbedingungen der Matrixdifferentialgleichungssysteme der vorhergehenden drei Sätze aufzufassen und damit die Anzahl der „Freiheitsgrade“ auf die von der Kreiseltheorie bekannten drei (Euler- oder Kardanwinkel) zu reduzieren.

Zur Klärung dieser Problematik wird in den folgenden beiden Sätzen gezeigt, daß die matrixwertigen Lösungen von Satz 2.1 bzw. der Sätze 2.2 und 2.3 zu jedem Zeitpunkt $t > t_0$ stets die Struktur einer Rotationsmatrix aufweisen, ohne daß dies explizit gefordert wird. Dies basiert sowohl auf der Struktur der Anfangswerte $R_0 \in SO(3)$, als auch der Differentialgleichungen – hier sei speziell an die Schiefsymmetrie der i.a. zeitvariablen Koeffizientenmatrizen gedacht – und ist unabhängig von der konkreten Realisierung der Winkelgeschwindigkeiten in den Koeffizientenmatrizen.

Satz 2.4:

Die Lösung $R_{ib}(t)$ der Matrix-Anfangswertaufgabe von Satz 2.1 ist für alle $t \geq t_0$ eine Rotationsmatrix, d.h.

$$\forall_{t \geq t_0} : R_{ib}(t) \in SO(3).$$

Beweis von Satz 2.4:

- Beweis von $R_{ib}(t)R_{ib}^T(t) = I_3$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (R_{ib}(t)R_{ib}^T(t)) &= \dot{R}_{ib}(t)R_{ib}^T(t) + R_{ib}(t)\dot{R}_{ib}^T(t) \\ &= R_{ib}(t)\Omega_{ib}(t)R_{ib}^T(t) - R_{ib}(t)\Omega_{ib}^T(t)R_{ib}^T(t) \\ &= 0 \\ \Rightarrow R_{ib}(t)R_{ib}^T(t) &= R_{ib}(t_0)R_{ib}^T(t_0) = R_{ib_0}R_{ib_0}^T = I_3 \end{aligned}$$

- Beweis von $\det(R_{ib}(t)) = +1$: Unter Verwendung der Formel von Liouville (s. V.I. Arnol'd[1991]) folgt unter Berücksichtigung der Schiefsymmetrie der Koeffizientenmatrix $\Omega_{ib}(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det(R_{ib}(t)) &= \underbrace{\text{Spur}(\Omega_{ib}(t))}_0 \det(R_{ib}(t)) = 0 \\ \Rightarrow \det(R_{ib}(t)) &= \det(R_{ib}(t_0)) = \det(R_{ib_0}) = +1 \end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 2.5:

Die Lösungen $R_{eb}(t)$ bzw. $R_{hb}(t)$ der Matrix-Anfangswertaufgaben aus den Sätzen 2.2 und 2.3 sind Rotationsmatrizen für alle $t \geq t_0$, d.h.

$$\forall_{t \geq t_0} : R_{eb}(t) \in SO(3) \quad \text{und} \quad R_{hb}(t) \in SO(3)$$

Beweis von Satz 2.5:

Sei $a \in \{e, h\}$. Zunächst wird gezeigt, daß

$$R_{ab}(t) := R_{ia}^T(t) R_{ab_0} R_{ib}(t)$$

Lösung der SO(3)-Anfangswertaufgabe von Satz 2.2 (für $a = e$) bzw. 2.3 (für $a = h$) ist, falls $R_{ia}(t)$ und $R_{ib}(t)$ Lösungen der Anfangswertaufgaben

$$\begin{aligned} \dot{R}_{ia}(t) &= R_{ia}(t) \Omega_{ia}(t) \quad , \quad R_{ia}(t_0) = I_3 \\ \dot{R}_{ib}(t) &= R_{ib}(t) \Omega_{ib}(t) \quad , \quad R_{ib}(t_0) = I_3 \end{aligned}$$

sind, indem wir folgende Umformung durchführen

$$\begin{aligned} \dot{R}_{ab}(t) &= \frac{d}{dt} (R_{ia}^T(t) R_{ab_0} R_{ib}(t)) = \\ &= \dot{R}_{ia}^T(t) R_{ab_0} R_{ib}(t) + R_{ia}^T(t) R_{ab_0} \dot{R}_{ib}(t) = \\ &= -\Omega_{ia}(t) \underbrace{R_{ia}^T(t) R_{ab_0} R_{ib}(t)}_{R_{ab}(t)} + \underbrace{R_{ia}^T(t) R_{ab_0} R_{ib}(t)}_{R_{ab}(t)} \Omega_{ib}(t) . \end{aligned}$$

Mittels obiger Definition von $R_{ab}(t)$ und Satz 2.4 folgt schließlich

- Beweis von $R_{ab}(t) R_{ab}^T(t) = I_3$:

$$R_{ab}(t) R_{ab}^T(t) = R_{ia}^T(t) R_{ab_0} R_{ib}(t) R_{ib}^T(t) R_{ab_0}^T R_{ia}(t) = I_3$$

- Beweis von $\det(R_{ab}(t)) = +1$:

$$\det(R_{ab}(t)) = \det(R_{ia}(t)) \det(R_{ab_0}) \det(R_{ib}(t)) = +1$$

q.e.d.

Als Ergebnis der beiden vorhergehenden Sätze lassen sich die Anfangswertaufgaben aus den Sätzen 2.1, 2.2 und 2.3 als Abbildungen aus $SO(3)$ ($R_0 \in SO(3)$) in $SO(3)$ ($R(t) \in SO(3), t > t_0$) interpretieren. In diesem Sinne spezifizieren wir diese Matrix-Anfangswertaufgaben im weiteren als SO(3)-Anfangswertaufgaben.

Systematische oder zufällige Fehler in den Winkelgeschwindigkeiten der Koeffizientenmatrizen (z.B. Kreiselbias, -drift oder -rauschen) verändern zwar die Lösung der zugehörigen SO(3)-Anfangswertaufgabe, aber nicht ihre Struktur als Rotationsmatrix. Besitzt dagegen der Anfangswert zu einer Matrix-Anfangswertaufgaben nicht die Struktur einer Rotationsmatrix, so gilt dies ebenso für die Lösung. Eine Diskussion des qualitativen Unterschieds zwischen fehlerhaftem Anfangswert und fehlerhaften Koeffizienten der Matrix-Differentialgleichungen erfolgt in Kapitel 6.

Anmerkung 2.1: Erfüllt $\tilde{R}$ aus numerischen Gründen die Orthogonalitätsbedingung

$$\|\tilde{R}^T - \tilde{R}^{-1}\| < \varepsilon$$

bei gegebenem $\varepsilon > 0$ nicht, so empfiehlt es sich $\tilde{R}$ zu orthonormalisieren. Die beste orthonormalisierte Matrix $R \in SO(3)$ zu $\tilde{R}$ ist die Lösung der Minimierungsaufgabe (s. z.B. [K.R. Britting(1971)])

$$\text{Spur} \left[(R - \tilde{R})^T (R - \tilde{R}) \right] \rightarrow \min ,$$

welche sich angeben läßt zu

$$R = \tilde{R} \left(\tilde{R}^T \tilde{R} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Anmerkung 2.2: Während der stationären Anfangsorientierung (s. Kapitel 9) zeigt eine ideale Kreiseltriade

$$\Omega_{ib} = \Omega_{ie} \quad \text{bzw.} \quad \omega_{ib} = \omega_{ie}$$

an und es gilt $\Omega_{eb} = 0$ bzw. $\omega_{eb} = 0$. Aus den Gleichungen (2.11) und (2.2) folgt dadurch wie erwartet

$$\dot{R}_{eb}(t) = 0 \quad \text{bzw.} \quad R_{eb}(t) = R_{eb_0}.$$

■

Korollar 2.6:

Seien die Zusammenhangsmatrizen Ω_{ie} , Ω_{ib} und Ω_{ih} zeitinvariant.

Dann lauten die analytischen Lösungen der $SO(3)$ -Anfangswertaufgaben der Sätze 2.1, 2.2 und 2.3

$$\begin{aligned} R_{ib}(t) &= R_{ib_0} e^{\Omega_{ib}(t-t_0)} \in SO(3) \quad , \\ R_{eb}(t) &= e^{-\Omega_{ie}(t-t_0)} R_{eb_0} e^{\Omega_{ib}(t-t_0)} \in SO(3) \quad \text{und} \\ R_{hb}(t) &= e^{-\Omega_{ih}(t-t_0)} R_{hb_0} e^{\Omega_{ib}(t-t_0)} \in SO(3) \quad . \end{aligned}$$

■

Beweis von Korollar 2.6:

Der Beweis folgt aus Satz A.8.

q.e.d.

Durch Auftreten der Matrixexponentialfunktionen sind die Lösungen zunächst nicht geschlossen dargestellt. Jedoch ist aufgrund der Schiefsymmetrie des Arguments der Matrixexponentialfunktion eine für die Evaluierung günstigere Darstellung angebar.

Satz 2.7:

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ schiefsymmetrisch, d.h. $\Omega^T = -\Omega$.

Dann ist

$$e^{\Omega\tau} = I_3 + \frac{\sin(\|\omega\|\tau)}{\|\omega\|} \Omega + \frac{1 - \cos(\|\omega\|\tau)}{\|\omega\|^2} \Omega^2$$

$$\text{mit} \quad \omega = \text{veck}(\Omega) \quad .$$

■

Beweis von Satz 2.7:

Nach Definition der Matrixexponentialfunktion ist

$$e^{\Omega\tau} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Omega\tau)^n \quad .$$

Mit

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \text{veck}^{-1} \omega$$

folgt

$$\Omega^3 = -\|\omega\|^2 \Omega \quad .$$

Die Potenzreihe zerfällt damit in 2 Anteile: Einen proportional zu Ω und einen proportional zu Ω^2 . Um dies auszuführen, zerlegen wir die Matrixexponentialfunktion in 3 Summanden: Die Identität I_3 , die Summe der Terme mit ungeraden Potenzen in Ω und die Summe der Terme mit geraden Potenzen in Ω .

$$e^{\Omega\tau} = I_3 + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (\Omega\tau)^{2n+1}}_{S_1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (\Omega\tau)^{2n}}_{S_2}$$

Nachfolgende Umformungen gelten für $\|\boldsymbol{\omega}\| > 0$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow S_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \Omega^{2n+1} \tau^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \|\boldsymbol{\omega}\|^{2n} \Omega \tau^{2n+1} = \\
 &= \frac{\Omega}{\|\boldsymbol{\omega}\|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\|\boldsymbol{\omega}\| \tau)^{2n+1} = \frac{\Omega}{\|\boldsymbol{\omega}\|} \sin(\|\boldsymbol{\omega}\| \tau) \\
 \Rightarrow S_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \Omega^{2n} \tau^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} \|\boldsymbol{\omega}\|^{2(n-1)} \Omega^2 \tau^{2n} = \\
 &= -\frac{\Omega^2}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\|\boldsymbol{\omega}\| \tau)^{2n} = \frac{\Omega^2}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} (1 - \cos(\|\boldsymbol{\omega}\| \tau)) \\
 &\quad \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\|\boldsymbol{\omega}\| \tau)^{2n}}_{\cos(\|\boldsymbol{\omega}\| \tau) - 1}
 \end{aligned}$$

Die Behauptung des Satzes folgt durch Kombination der Ergebnisse. □

Durch Anwendung des Satzes auf die Lösungen der SO(3)-AWP nach Satz (2.6) folgt unter Berücksichtigung von Satz A.6 das

Korollar 2.8:

Die Lösung der SO(3)-Anfangswertaufgabe

$$\dot{R}_{eb}(t) = R_{eb}(t) \Omega_{ib} - \Omega_{ie} R_{eb}(t), \quad R_{eb}(t_0) = R_{eb_0}$$

lautet unter der Voraussetzung konstanter Zusammenhangsmatrizen

$$\begin{aligned}
 R_{eb}(t) &= \left(I_3 - \frac{\sin(\omega_{ie}(t-t_0))}{\omega_{ie}} \Omega_{ie} + \frac{1 - \cos(\omega_{ie}(t-t_0))}{\omega_{ie}^2} \Omega_{ie}^2 \right) R_{eb_0} \\
 &\quad \cdot \left(I_3 + \frac{\sin(\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|(t-t_0))}{\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|} \Omega_{ib} + \frac{1 - \cos(\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|(t-t_0))}{\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|^2} \Omega_{ib}^2 \right) \in SO(3).
 \end{aligned}$$

bzw.

Korollar 2.9:

Die Lösung der SO(3)-Anfangswertaufgabe

$$\dot{R}_{hb}(t) = R_{hb}(t) \Omega_{ib} - \Omega_{ih} R_{hb}(t), \quad R_{hb}(t_0) = R_{hb_0}$$

lautet unter der Voraussetzung konstanter Zusammenhangsmatrizen

$$\begin{aligned}
 R_{hb}(t) &= \left(I_3 - \frac{\sin(\|\boldsymbol{\omega}_{ih}\|(t-t_0))}{\|\boldsymbol{\omega}_{ih}\|} \Omega_{ih} + \frac{1 - \cos(\|\boldsymbol{\omega}_{ih}\|(t-t_0))}{\|\boldsymbol{\omega}_{ih}\|^2} \Omega_{ih}^2 \right) R_{hb_0} \\
 &\quad \cdot \left(I_3 + \frac{\sin(\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|(t-t_0))}{\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|} \Omega_{ib} + \frac{1 - \cos(\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|(t-t_0))}{\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|^2} \Omega_{ib}^2 \right) \in SO(3).
 \end{aligned}$$

Natürlich sind die Zusammenhangsmatrizen Ω_{ih} und Ω_{ib} i.a. nicht konstant. Ω_{ih} kann jedoch in Phasen geringer Dynamik über einem kurzen Zeitintervall in guter Näherung als konstant angesehen werden. Aufgrund des Sensorrauschens kann die Zusammenhangsmatrix Ω_{ib} ohne Vorfilterung der Sensordaten trotz der kurzen Taktzeiten von $\frac{1}{200} - \frac{1}{50}$ s bei körperfesten Trägheitsnavigationssystemen nicht in guter Näherung als konstant angenommen werden. Dennoch bietet das Wissen einer analytischen Näherungslösung die Möglichkeit der näherungsweise Berechnung von Orientierungsinkrementen und anschließender Linearisierung zur Formulierung von Störungsdifferentialgleichungen (s. Anhang D). Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß sich das Rauschen auf dem Vektor der Kreiseldaten $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ bei Verwendung einer analytischen Lösung ungefiltert auf $R_{ib}(t)$, $R_{eb}(t)$ bzw. $R_{hb}(t)$ überträgt. Wir streben die explizite Berücksichtigung von nichtlinearen Orientierungsdifferentialgleichungen in absoluten Orientierungsparametern im Kalman-Schätzer an.

Da einer SO(3)-Anfangswertaufgabe 9 skalare, lineare, homogene Anfangswertaufgaben entsprechen, werden wir uns in den verbleibenden Abschnitten dieses Kapitels mit verschiedenen Parametrisierungen der SO(3)-Gruppe, den daraus resultierenden dimensionsreduzierten Orientierungsparameterdifferentialgleichungen und deren Eigenschaften beschäftigen.

2. Parametrisierungen der $SO(3)$ -Gruppe

[J. Stuelpnagel(1964)] gibt einen kompakten Beweis von dem zuerst von [H. Hopf(1940)] bewiesenen

Satz 2.10:

Es ist topologisch unmöglich einen globalen Homöomorphismus von $SO(3)$ in $\mathbb{R}^3$ zu finden. ■

Beweis von Satz 2.10 (s. [J. Stuelpnagel(1964)])¹⁾:

Da $SO(3)$ eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist, hat jedes Element $P \in SO(3)$ eine Umgebung U_P welche homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ ist. Würde nun ein Homöomorphismus h von $SO(3)$ in $\mathbb{R}^3$ existieren, so wäre nach dem Satz von Brouwer $h(U_P)$ und damit $h(SO(3)) = \bigcup_{P \in SO(3)} h(U_P)$ offen in $\mathbb{R}^3$. Nun ist

$SO(3)$ kompakt und $h(SO(3))$, die stetige Abbildung eines kompakten Raumes, wiederum kompakt.

Der Widerspruch ist offensichtlich, von der getroffenen Annahme der Existenz des Homöomorphismus verursacht und damit die Behauptung bewiesen. q.e.d.

Die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$ hat die Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ (s. z.B. [N. Euler; W.-H. Steeb(1992)]) und damit $SO(3)$ die Dimension 3. Zur Parametrisierung von $SO(3)$ werden demnach mindestens 3 Parameter benötigt. Wir sprechen in diesem Zusammenhang auch von einer minimalen Parametrisierung der $SO(3)$ -Gruppe, welche nach H. Hopf kein globaler Homöomorphismus sein kann. Nachfolgend untersuchen wir die minimalen Parametrisierungen: Kardan-Winkel (α, β, γ) , Euler-Winkel (ψ, ϑ, η) , Laning-Bortz-Stuelpnagel-Parameter $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ und Cayley-Parameter (s_1, s_2, s_3) .

Zur Bewältigung des aus dem Satz von H. Hopf resultierenden prinzipiellen Problems bestehen grundsätzlich zwei Möglichkeiten. Entweder man führt geeignete Kartenwechsel durch oder man sucht einen Homöomorphismus in einem höherdimensionalen Euklidischen Raum (Einbettungsraum). Ebenfalls auf [H. Hopf(1940)] geht der Beweis zurück, daß die Einbettung mindestens im 5-dimensionalen Euklidischen Raum erfolgen muß, um einen globalen Homöomorphismus finden zu können. Die Parameter einer entsprechend gefundenen Parametrisierung sind nach Hopf benannt (s. z.B. [W. Neutsch(1995)], [J. Stuelpnagel(1964)]). Bereits in 4 Dimensionen steht jedoch bei Parametrisierung der $SO(3)$ -Gruppe mit normierten Quaternionen ein lokaler Homöomorphismus zur Verfügung. Wir werden ausführlich auf die (redundante) Parametrisierung mit $\mathbb{H}_1$ -Quaternionen eingehen und zeigen, daß die bekannte Zweideutigkeit der zugehörigen Kartenabbildung irrelevant für praktische Anwendungen ist. Da bei der $\mathbb{H}_1$ -Quaternionen-Parametrisierung – im Gegensatz zu den erwähnten 3- und 5-dimensionalen Einbettungen – ein lineares (Quaternionen-)Differentialgleichungssystem (kein Linearisierungsfehler im Zustand!) resultiert, geben wir dieser den Vorzug.

Zum Zwecke der geometrischen Interpretation der algebraischen $SO(3)$ -Parametrisierungen wird als zweite (redundante) Parametrisierung die Darstellung in Drehrichtungsvektor (gerichtete Drehachse) und Drehwinkel nach dem Satz von Euler eingeführt.

Weitere Parametrisierungen sind z.B. in [K. Kanatani(1990)], [E.H. Knickmeyer; M. Nitschke(1994)], [G. Schut(1959)], [M.D. Shuster(1993)] und [J. Stuelpnagel(1964)] beschrieben.

1. Kardan-Parametrisierung

Jede 3-dimensionale Rotationsmatrix $R \in SO(3)$ kann durch sequentielle Drehungen um die drei Achsen eines kartesischen, rechtshändigen Achsensystems erzeugt werden. Dabei existieren durch Permutation von Drehrichtung und -reihenfolge der Einzeldrehungen eine Vielzahl von Definitionsmöglichkeiten. Wir definieren die Parametrisierung aus mathematisch positiven Einzeldrehungen zu

$$\begin{aligned}
 R_K(\alpha, \beta, \gamma) &:= R_1(\alpha)R_2(\beta)R_3(\gamma) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Die Parametrisierung vermittelt die Abbildung

¹⁾Der Beweis läßt sich auf beliebige, n-dimensionale, geschlossene Mannigfaltigkeiten übertragen (z.B. $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$).

$$R_K(\alpha, \beta, \gamma) : (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{D}(R_K(\alpha, \beta, \gamma)) \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow SO(3) , \quad (2.16)$$

da offensichtlich gilt

$$R_K(\alpha, \beta, \gamma) R_K^T(\alpha, \beta, \gamma) = I_3 \quad \wedge \quad \det(R_K(\alpha, \beta, \gamma)) = +1 . \quad (2.17)$$

Die Umkehrung der Relation (2.15) folgt aus der 1. Zeile und 3. Spalte zu

$\sin \beta = r_{13}$	$\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ eindeutig !}$	(2.18)
$\sin \alpha = -\frac{r_{23}}{\cos \beta}$ $\cos \alpha = \frac{r_{33}}{\cos \beta}$	$\alpha \in (-\pi, \pi] \text{ eindeutig f\"ur } \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\text{singul\"ar f\"ur } \beta = \pm \frac{\pi}{2}$	
$\sin \gamma = -\frac{r_{12}}{\cos \beta}$ $\cos \gamma = \frac{r_{11}}{\cos \beta}$	$\gamma \in (-\pi, \pi] \text{ eindeutig f\"ur } \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\text{singul\"ar f\"ur } \beta = \pm \frac{\pi}{2} .$	

Aus obiger Definition der Kardan-Parametrisierung als sequentielle Drehungen um 3 verschiedene orthogonale Achsen folgt unmittelbar, daß die durch Parametrisierung vermittelte Abbildung für

$$\mathcal{D}(R_K(\alpha, \beta, \gamma)) = (-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times (-\pi, \pi] \quad (2.19)$$

surjektiv (engl. "onto") ist. Jedoch ist die Umkehrung singulär für $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$ (nur $\alpha \pm \gamma$ ist extrahierbar) und damit die durch die Parametrisierung vermittelte Abbildung nicht homöomorph.

2. Euler-Parametrisierung

Analog kann jede dreidimensionale Rotationsmatrix $R \in SO(3)$ auch durch sequentielle Drehungen um nur 2 Achsen eines kartesischen, rechtshändigen Achsensystems erzeugt werden. Wiederum existieren durch Permutation von Drehrichtung und -reihenfolge der Einzeldrehungen eine Vielzahl von Definitionsmöglichkeiten. Wir definieren die Parametrisierung aus mathematisch positiven Einzeldrehungen zu

$$\begin{aligned}
 R_E(\psi, \vartheta, \eta) &:= R_3(\psi) R_1(\vartheta) R_3(\eta) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \eta & -\sin \eta & 0 \\ \sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \eta - \sin \psi \cos \vartheta \sin \eta & -\cos \psi \sin \eta - \sin \psi \cos \vartheta \cos \eta & \sin \psi \sin \vartheta \\ \sin \psi \cos \eta + \cos \psi \cos \vartheta \sin \eta & -\sin \psi \sin \eta + \cos \psi \cos \vartheta \cos \eta & -\cos \psi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \eta & \sin \vartheta \cos \eta & \cos \vartheta \end{pmatrix}
 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Wegen

$$R_E(\psi, \vartheta, \eta) R_E^T(\psi, \vartheta, \eta) = I_3 \quad \wedge \quad \det(R_E(\psi, \vartheta, \eta)) = +1 \quad (2.21)$$

gilt

$$R_E(\psi, \vartheta, \eta) : (\psi, \vartheta, \eta) \in \mathcal{D}(R_E(\psi, \vartheta, \eta)) \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow SO(3) . \quad (2.22)$$

Die Umkehrung der Relation (2.20) folgt aus der 3. Zeile und 3. Spalte zu

$\cos \vartheta = r_{33}$	$\vartheta \in [0, \pi]$ eindeutig !	(2.23)
$\sin \psi = \frac{r_{13}}{\sin \vartheta}$ $\cos \psi = -\frac{r_{23}}{\sin \vartheta}$	$\psi \in [0, 2\pi)$ eindeutig für $\vartheta \in (0, \pi)$ singulär für $\vartheta \in \{0, \pi\}$	
$\sin \eta = \frac{r_{31}}{\sin \vartheta}$ $\cos \eta = \frac{r_{32}}{\sin \vartheta}$	$\eta \in [0, 2\pi)$ eindeutig für $\vartheta \in (0, \pi)$ singulär für $\vartheta \in \{0, \pi\}$.	

Auch hier ist die durch die Parametrisierung vermittelte Abbildung für

$$\mathcal{D}(R_E(\psi, \vartheta, \eta)) = [0, 2\pi) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi) \quad (2.24)$$

surjektiv, die Umkehrung jedoch singulär für $\vartheta \in \{0, \pi\}$ (nur $\psi \pm \eta$ ist extrahierbar) und damit die durch die Parametrisierung vermittelte Abbildung nicht homöomorph.

3. Laning-Bortz-Stuelpnagel-Parametrisierung

Nach Satz A.6 ist $e^\Sigma \in SO(3)$, falls Σ schiefssymmetrisch ist, d.h. $\Sigma^T = -\Sigma$. Dementsprechend ist die Rotationsmatrix $R = e^\Sigma$ durch Identifikation von Σ bzw. $\sigma = \text{veck}(\Sigma) \in \mathbb{R}^3$ bestimmt. Nach Satz 2.7 folgt damit die Rotationsmatrix in Laning-Bortz-Stuelpnagel-Parametern zu

$$R_{LBS}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = e^\Sigma = I_3 + \frac{\sin(\|\sigma\|)}{\|\sigma\|} \Sigma + \frac{1 - \cos(\|\sigma\|)}{\|\sigma\|^2} \Sigma^2. \quad (2.25)$$

Damit können die drei unabhängigen Elemente $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ in der schiefssymmetrischen Matrix Σ , mit $\Sigma^T = -\Sigma$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$, $\sigma \in \mathbb{R}^3$, als Orientierungsparameter angesehen werden. Diese sind formal bestimmt durch

$$\sigma = \text{veck}(\Sigma) = \text{veck}(\ln R_{LBS}). \quad (2.26)$$

Wir werden jedoch noch effizientere Berechnungsmöglichkeiten kennenlernen. Diese Parametrisierung geht auf [J.H. Laning(1949)] zurück, fand jedoch erst durch die Wiederverwendung in [J.E. Bortz(1971)] im Gebiet der Navigation Verbreitung. In der mathematischen Literatur geht die erste bekannte Referenz auf [J. Stuelpnagel(1964)] zurück. Nach [E.H. Knickmeyer; M. Nitschke(1994)] heißen die Parameter Laning-Bortz-Stuelpnagel-Parameter. Es sei jedoch angemerkt, daß Laning-Bortz-Stuelpnagel-Parameter auch als geodätische Normalkoordinaten der $SO(3)$ -Mannigfaltigkeit bzgl. der Identität interpretiert werden können.

4. Cayley-Parametrisierung

Nach den trigonometrischen Parametrisierungen wollen wir schließlich noch eine minimale algebraische Parametrisierung untersuchen. Wir definieren

$$R_C(s_1, s_2, s_3) := (I_3 + S)(I_3 - S)^{-1} \quad \text{mit} \quad S^T = -S, \quad s = (s_1, s_2, s_3)^T = \text{veck}(S). \quad (2.27)$$

Nun ist

$$R_C^T(s) R_C(s) = \left[(I_3 + S)(I_3 + S)^T \right]^{-1} (I_3 + S)(I_3 + S)^T = \quad (2.28)$$

$$= (I_3 + S)^{-1} \underbrace{(I_3 + S)^T (I_3 + S)}_{\text{kommutativ}} (I_3 + S)^T = I_3 \quad (2.29)$$

und

$$\det(R_C(s)) = \det(I_3 + S) \frac{1}{\det(I_3 + S)^T} = +1. \quad (2.30)$$

Beziehungen der Form (2.27) sind in der Literatur unter dem Begriff *Cayleysche Formeln* (s. z.B. [F.R. Gantmacher(1986)]) oder *Cayleysche Transformationen* (s. z.B. [M. Artin(1993)]) bekannt, woraus sich die im weiteren verwendete Bezeichnung als *Cayleysche Parametrisierung* ableitet. $R_C(\mathbf{s})$ ergibt sich explizit zu

$$\begin{aligned} R_C(\mathbf{s}) &= \frac{1}{1 + \|\mathbf{s}\|^2} [(1 - \|\mathbf{s}\|^2)I_3 + 2\text{veck}^{-1}(\mathbf{s}) + 2\mathbf{s}\mathbf{s}^T] \\ &= \frac{1}{1 + \|\mathbf{s}\|^2} \begin{pmatrix} 1 + s_1^2 - s_2^2 - s_3^2 & 2(s_1s_2 - s_3) & 2(s_1s_3 + s_2) \\ 2(s_1s_2 + s_3) & 1 - s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 & 2(s_2s_3 - s_1) \\ 2(s_1s_3 - s_2) & 2(s_2s_3 + s_1) & 1 - s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Die zugehörige Kartenabbildung bestimmen wir in 2 Schritten

1. Durch Spurbildung folgt

$$\text{Spur}(R_C(\mathbf{s})) = \frac{3 - \|\mathbf{s}\|^2}{1 + \|\mathbf{s}\|^2} \quad (2.32)$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{s}\|^2 = \frac{3 - \text{Spur}(R_C(\mathbf{s}))}{1 + \text{Spur}(R_C(\mathbf{s}))} \quad (2.33)$$

2. Der schiefsymmetrische Anteil in $R_C(\mathbf{s})$ ist

$$\frac{1}{2} (R_C(\mathbf{s}) - R_C^T(\mathbf{s})) = \frac{2}{1 + \|\mathbf{s}\|^2} S \quad (2.34)$$

$$\Rightarrow \mathbf{s} = \text{veck}(S) = \text{veck} \left[\frac{1 + \|\mathbf{s}\|^2}{4} (R_C(\mathbf{s}) - R_C^T(\mathbf{s})) \right] \quad (2.35)$$

Kombination der Resultate ergibt die Umkehrung der Abbildung (2.31)²⁾

$$\boxed{\mathbf{s} = \text{veck} \left[\frac{1}{1 + \text{Spur}(R)} (R - R^T) \right] = \frac{1}{1 + \text{Spur}(R)} \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix}} \quad (2.36)$$

Nun ist $-1 \leq \text{Spur} R \leq 3$ für $R \in SO(3)$ und demnach die Umkehrung für Rotationsmatrizen mit $\text{Spur} R = -1$ singulär, d.h. die durch die Parametrisierung (2.31) vermittelte Abbildung

$$R_C(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3) \quad (2.37)$$

ist nicht surjektiv und damit nicht homöomorph.

Anmerkung 2.3: Die eigentliche Schwachstelle der Cayley-Parametrisierung wird anhand der Eigenwerte von $R_C(\mathbf{s})$ deutlich. Nach Satz A.5 lauten die Eigenwerte von $R_C(\mathbf{s})$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_{2,3} &= \frac{1 - \sigma^2}{1 + \sigma^2} \pm i \frac{2\sigma}{1 + \sigma^2} \quad \text{mit} \quad \sigma = \|\mathbf{s}\| \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die konjugiert komplexen Eigenwerte haben den Betrag 1 (s.a. Satz A.4) und liegen somit achsensymmetrisch zur reellen Achse auf dem Einheitskreis in der Gaußschen Zahlenebene (s. Abbildung 2.2). Die in σ parametrisierte Kreisgleichung folgt aus $\det(R_C(\mathbf{s})) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ zu

$$\left(\frac{1 - \sigma^2}{1 + \sigma^2} \right)^2 + \left(\frac{2\sigma}{1 + \sigma^2} \right)^2 = 1.$$

Es ergeben sich folgende Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1 - \sigma^2}{1 + \sigma^2} \right) &= \lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\frac{1}{\sigma^2} - 1}{\frac{1}{\sigma^2} + 1} \right) = -1 \\ \lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2\sigma}{1 + \sigma^2} \right) &= \lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\frac{2}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma^2} + 1} \right) = 0. \end{aligned}$$

²⁾ Diese Darstellung ist praktikabler als die üblicherweise gegebene $S = -(I_3 - R)(I_3 + R)^{-1}$ bzw. $\mathbf{s} = -\text{veck}[(I_3 - R)(I_3 + R)^{-1}]$.

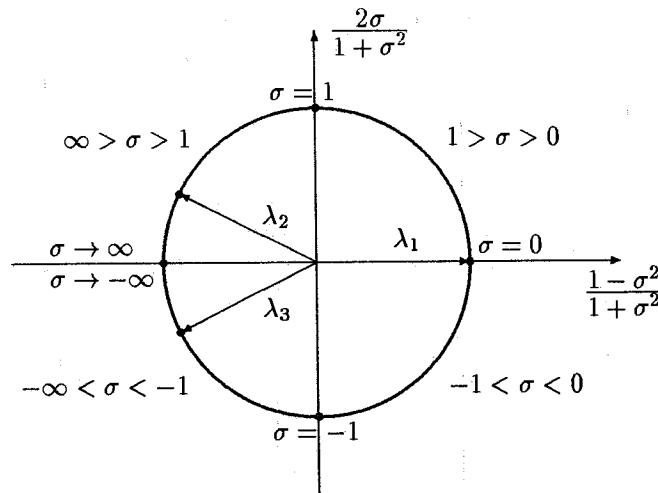


Abbildung 2.2: Darstellung der konjugiert komplexen Eigenwerte einer Rotationsmatrix in Cayley-Parametrisierung

Selbst wenn man das Kartengebiet $\mathcal{D}(R_C(s))$ auf ganz $\mathbb{R}^3$ ausdehnt, existieren keine Cayley-Parameter, welche eine Rotationsmatrix $R_C(s)$ mit den Eigenwerten $\{1, -1, -1\}$ generieren. ■

Anmerkung 2.4: B.L. van der Waerden schrieb 1985 in der von ihm verfassten Geschichte der Algebra: “In an extremely interesting, but nearly forgotten treatise “Untersuchungen über die Summen von Quadraten” (Bonn 1884), R. Lipschitz applied the second Clifford algebra to represent the rotations in n dimensions. He first showed that all rotations A , for which $\det(I + A)$ is not zero, can be obtained as

$$A = (I + C)^{-1}(I - C)$$

where C is an antisymmetric matrix.” ■

Eine geometrische Interpretation der damit mathematisch nachgewiesenen Schwachstelle der Parametrisierung nach a. Cayley erfolgt in Anmerkung 2.8.

5. Hamilton-Parametrisierung

Nachdem wir im vorhergehenden Abschnitt die von H. Hopf prophezeite Unmöglichkeit der Existenz eines globalen Homöomorphismus zwischen $SO(3)$ und einem dreidimensionalen Kartengebiet ($\subset \mathbb{R}^3$) anhand gängiger Parametrisierungen verifiziert haben, wenden wir uns der Lösung der Problematik zu. Dazu betten wir das Kartengebiet höherdimensional ein und betrachten speziell in 4 Dimensionen (redundante Parametrisierung) die Quaternionen. Wie in der Einleitung dieses Kapitels bereits geschildert, haben die Quaternionen bzw. die zugehörigen Orientierungsdifferentialgleichungen alle für die Trägheitsnavigation praxisrelevanten Eigenschaften. Wir gehen deshalb ausführlich auf die Quaternionen-Parametrisierung ein.

Nach einem kurzen Abriß zur Quaternionenalgebra diskutieren wir – analog zu den minimalen Parametrisierungen – die $SO(3)$ -Parametrisierung mit $\mathbb{H}_1$ -Quaternionen, sowie die zugehörige Umkehrung, und interpretieren schließlich die Quaternionen-Parametrisierung geometrisch als Drehung um eine Raumachse ($\rightarrow$ Satz von Euler). Die Quaternionen (auch hyperkomplexes Zahlensystem der Dimension 4 genannt) gehen auf den irischen Mathematiker William Rowan Hamilton (*1805, †1865) zurück, der die Quaternionenalgebra 1843 definierte und in den Monographien “Lectures on Quaternions” (1853) und “Elements of Quaternions” (1867) publizierte. Sie werden deshalb auch als Hamilton-Quaternionen bezeichnet. Die Möglichkeit der Beschreibung von Drehungen im Raum mit Quaternionen wurde wohl zuerst von Arthur Cayley erkannt.

Hamilton untersuchte die Erweiterung der komplexen Zahlenebene um eine Dimension, d.h. er untersuchte die Zahlen $a + bi + cj$, für welche jedoch keine geeignete Algebra existiert (s. z.B. [I.L. Kantor; A.S. Solodovnikov(1989)]). Erst durch Erweiterung um eine weitere Dimension auf

$$q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \tag{2.38}$$

und durch Verzicht auf das Kommutativgesetz der Multiplikation erhielt Hamilton ein funktionierendes Zahlensystem (genauer: Schiefkörper). Dieses basiert auf der Multiplikationsvorschrift

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

(2.39)

q_0 heißt Skarteil und $\{q_i\}_{i \in \{1,2,3\}}$ Vektorteil der Quaternion. Der Vektorteil wird in diesem Zusammenhang mit $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ notiert. Eine Quaternion entspricht somit einem Tupel $(q_0, \mathbf{q})$. Im Rahmen dieser Arbeit werden Quaternionen ferner durch lateinische Kleinbuchstaben mit einem Háček, d.h.

$$\tilde{q} = (q_0, \mathbf{q}) = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, \quad (2.40)$$

notiert, um eine kompakte und eindeutige Notation zugrunde zu legen.

Sei $\mathbb{H}$ die Menge aller Quaternionen, d.h.

$$\mathbb{H} = \{q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\} = \{\tilde{q} \mid q_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}\}. \quad (2.41)$$

Ferner wird die Menge der Quaternionen mit Länge 1, d.h.

$$\mathbb{H}_1 = \{\tilde{q} \in \mathbb{H} \mid \|\tilde{q}\|^2 := q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1\}, \quad (2.42)$$

und die Menge der Quaternionen mit Skarteil 0, d.h.

$$\mathbb{H}_0 = \{\tilde{q} \in \mathbb{H} \mid q_0 = 0\}, \quad (2.43)$$

eingeführt. Die Konjugierte einer Quaternion $\tilde{q} \in \mathbb{H}$ ist

$$\bar{\tilde{q}} = (q_0, -\mathbf{q}) = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k. \quad (2.44)$$

Unter Verwendung der Multiplikationsvorschrift (2.39) in der praktikableren Form

$$\tilde{q}\tilde{p} = (q_0, \mathbf{q})(p_0, \mathbf{p}) = (q_0 p_0 - \mathbf{q}\mathbf{p}, q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}) \quad (2.45)$$

bzw. in Matrix-Vektor-Form

$$\begin{pmatrix} q_0 p_0 - \mathbf{q}\mathbf{p} \\ q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0 I_3 + \text{veck}^{-1} \mathbf{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & -\mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0 I_3 - \text{veck}^{-1} \mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

folgt

$$\bar{\tilde{q}}\tilde{q} = (\|\tilde{q}\|^2, 0) \quad (2.47)$$

und damit aufgrund von

$$\left(\frac{1}{\|\tilde{q}\|^2} \bar{\tilde{q}}\right) \tilde{q} = \underbrace{(1, 0)}_{\text{neutrales Element der Quaternionenmultiplikation}} \quad (2.48)$$

per Definition eines inversen Elements

$$\tilde{q}^{-1} = \frac{1}{\|\tilde{q}\|^2} \bar{\tilde{q}}. \quad (2.49)$$

Speziell ist $\tilde{q}^{-1} = \bar{\tilde{q}} \quad \forall \tilde{q} \in \mathbb{H}_1$. Aus der Definition der Quaternionenmultiplikation folgt ferner $(\tilde{q}\tilde{p})^{-1} = \tilde{p}^{-1}\tilde{q}^{-1}$, $\tilde{q}, \tilde{p} \in \mathbb{H}_1$. Schließlich erwähnen wir für im 5. Kapitel benötigte Abschätzungen noch den

Satz 2.11:

Die Quaternionenmultiplikation ist normtreu, d.h.

$$\forall \tilde{p}, \tilde{q} \in \mathbb{H} : \|\tilde{p}\tilde{q}\| = \|\tilde{p}\| \|\tilde{q}\|.$$

■

Der Beweis des Satzes folgt durch Einsetzen der Definition von Quaternionenmultiplikation und -norm.

Eine ausführliche Darstellung der Quaternionenalgebra und deren fundamentale Sätze von Hurwitz und Frobenius wird beispielsweise in dem Übersichtsartikel [E.W. Grafarend(1982)] und der Monographie [I.L. Kantor; A.S. Solodovnikov(1989)] gegeben. In [E.W. Grafarend(1983)] findet man eine universelle Beschreibung der Anwendung von Quaternionen zur Drehung von Koordinatensystemen und in [L.I. Aramanovitch(1992)] eine ausführliche Literaturstudie über Anwendungen von Quaternionen zur Lösung geodätischer Probleme und zur Kontrolle eines rotierenden Körpers im Raum.

Arthur Cayley erkannte, daß man mit Hilfe von $\mathbb{H}_1$ -Quaternionen³⁾ Drehungen durchführen kann. Die Abbildung

$$\tilde{y} = \tilde{q}\tilde{x}\tilde{q}^{-1} \quad \text{mit} \quad \tilde{x} = (0, \mathbf{x}) \in \mathbb{H}_0, \quad \tilde{q} \in \mathbb{H}_1 \quad (2.50)$$

transformiert den Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ unter Verwendung der $\mathbb{H}_1$ -Quaternion $\tilde{q}$ in den Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, denn nach Definition der Quaternionenmultiplikation ist

$$\tilde{y} = (q_0, \mathbf{q})(0, \mathbf{x})(q_0, -\mathbf{q}) = (0, (\mathbf{q}^T \mathbf{x})\mathbf{q} + q_0^2 \mathbf{x} + 2q_0 \mathbf{q} \times \mathbf{x} - (\mathbf{q}^T \times \mathbf{x}) \times \mathbf{q}) \in \mathbb{H}_0 \quad (2.51)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}}_{=: R_H(\tilde{q}) = R_H(q_0, q_1, q_2, q_3)^4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

(2.52) bildet somit aus $\mathbb{H}_0$ in $\mathbb{H}_0$ ab. Der Vektorteil von $\tilde{x} \in \mathbb{H}_0$, d.h. $\mathbf{x}$, wird nach (2.50) durch die $\mathbb{H}_1$ -Quaternion $\tilde{q}$ auf den Vektorteil der $\mathbb{H}_0$ -Quaternion $\tilde{y}$, d.h. $\mathbf{y}$, abgebildet, wobei die Koeffizientenmatrix

$$R_H^T(\tilde{q}) R_H(\tilde{q}) = I_3 \quad \wedge \quad \det(R_H(\tilde{q})) = +1 \quad (2.53)$$

erfüllt. Mit $R_H(\tilde{q})$, $\tilde{q} \in \mathbb{H}_1$, ist somit eine „4-dimensionale“ Parametrisierung der $SO(3)$ -Gruppe gefunden

$$R_H(\tilde{q}) : \tilde{q} \in \mathbb{H}_1 \longrightarrow SO(3) \quad \text{bzw.} \quad (2.54)$$

$$R_H(q_0, q_1, q_2, q_3) : (q_0, q_1, q_2, q_3)^T \in S_1^3 \subset \mathbb{R}^4 \longrightarrow SO(3). \quad (2.55)$$

Die Umkehrung $SO(3) \longrightarrow S_1^3$ bzw. $\mathbb{H}_1$ folgt nach (2.52) für $R_H(\tilde{q})$ aus dem Schema

$q_0^2 = \frac{1}{4}(1 + r_{11} + r_{22} + r_{33})$	$q_0 q_1 = \frac{1}{4}(r_{32} - r_{23})$	$q_0 q_2 = \frac{1}{4}(r_{13} - r_{31})$	$q_0 q_3 = \frac{1}{4}(r_{21} - r_{12})$
$q_1^2 = \frac{1}{4}(1 + r_{11} - r_{22} - r_{33})$	$q_1 q_2 = \frac{1}{4}(r_{12} + r_{21})$	$q_1 q_3 = \frac{1}{4}(r_{13} + r_{31})$	$q_2 q_3 = \frac{1}{4}(r_{23} + r_{32})$
$q_2^2 = \frac{1}{4}(1 - r_{11} + r_{22} - r_{33})$	$q_2 q_3 = \frac{1}{4}(r_{23} - r_{32})$	$q_3^2 = \frac{1}{4}(1 - r_{11} - r_{22} + r_{33})$	

symmetrisch !

(2.56)

Aus $\tilde{q} \in \mathbb{H}_1$ bzw. $\|\tilde{q}\|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ folgt

$$\exists \quad i \in \{0, 1, 2, 3\} : \quad q_i^2 \geq \frac{1}{4} \quad (2.57)$$

Wählen wir ein dieser Bedingung genügendes Diagonalelement aus dem Schema aus und ziehen davon die Quadratwurzel unter willkürlicher Wahl des Vorzeichens, so sind die verbleibenden Quaternionenkomponenten durch die restlichen Bedingungen in der gleichen Zeile bzw. Spalte von (2.56) eindeutig bestimmt. Die Zweideutigkeit ist unumgänglich. Die Umkehrung auf Basis der ersten Zeile des Tableaus (2.56) lautet beispielsweise

$$q_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \text{Spur } R} \quad (2.58)$$

$$\mathbf{q} = \frac{\text{veck}(R - R^T)}{4q_0} \quad (2.59)$$

Die Surjektivität der $SO(3)$ -Parametrisierung mit $\mathbb{H}_1$ -Quaternionen folgt aus dem

³⁾ Da alle skalaren Vielfachen einer Quaternion $\tilde{q}$ nach (2.50) dieselbe Drehung generieren, schränken wir uns auf normierte Quaternionen ein, um die „Eindeutigkeit der Kartenabbildung“ zu gewährleisten.

⁴⁾ Formal ist $R_C(s_1, s_2, s_3) = R_H(1, s_1, s_2, s_3)$. Da das Kartengebiet der Cayley-Parametrisierung jedoch $\mathbb{R}^3$ – im Gegensatz zu $S_1^3 \subset \mathbb{R}^4$ bei der Quaternionen-Parametrisierung – ist, haben beide Parametrisierungen grundlegend verschiedenen Charakter.

Satz 2.12:

$$\forall R \in SO(3) \quad \exists \tilde{q} \in \mathbb{H}_1 : R = R_H(\tilde{q})$$

Beweis von Satz 2.12 (s. [J. Stuelpnagel(1964)]):

R_H ist ein Homomorphismus, d.h. $R_H(\tilde{q}_1)R_H(\tilde{q}_2) = R_H(\tilde{q}_1\tilde{q}_2)$, $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \in \mathbb{H}_1$. Da R_H stetig und $\mathbb{H}_1$ kompakt und zusammenhängend ist, ist $R_H(\mathbb{H}_1)$ eine kompakte, zusammenhängende Untergruppe von $SO(3)$. Da $SO(3)$ nur 3 kompakte, zusammenhängende Untergruppen, nämlich I_3 , $SO(3)$ und die Gruppe der Rotationen um eine starre Achse, besitzt und $R_H(\mathbb{H}_1)$ keine Achse fix läßt, muß $R_H(\mathbb{H}_1) = SO(3)$ sein. □

Nun ist die Kartenabbildung stetig und die Parametrisierung sowohl stetig als auch surjektiv, aber nicht global injektiv und damit nicht global homöomorph. Da nach $R_H(\tilde{q}) = R_H(-\tilde{q})$ die Zweideutigkeit durch Antipoden der Sphäre S^3 verursacht wird, ist die Parametrisierung jedoch lokal homöomorph.

Es sei noch angemerkt, daß durch die Abbildung $R_H : S^3 \rightarrow SO(3)$ die spezielle orthogonale Gruppe doppelt überdeckt (engl. "double covered") ist. Durch Identifikation antipodaler Punkte erhält man den 3-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ der homöomorph zu $SO(3)$ ist (s. z.B. [M. Artin(1993)]).

Anmerkung 2.5: Das Pendant zur Kardan-Rotationsmatrix $R_K(\alpha, \beta, \gamma) = R_1(\alpha)R_2(\beta)R_3(\gamma)$ lautet in Hamilton-Quaternionen-Darstellung

$$\begin{aligned} \tilde{q}_K &= \tilde{q}_1(\alpha) \tilde{q}_2(\beta) \tilde{q}_3(\gamma) = \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}\right) \left(\cos \frac{\beta}{2} + j \sin \frac{\beta}{2}\right) \left(\cos \frac{\gamma}{2} + k \sin \frac{\gamma}{2}\right) \\ &= \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + i \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}\right) \\ &\quad + j \left(\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}\right) + k \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}\right). \end{aligned}$$

Anmerkung 2.6: Das Pendant zur Euler-Rotationsmatrix $R_E(\alpha, \beta, \gamma) = R_3(\alpha)R_1(\beta)R_3(\gamma)$ lautet in Hamilton-Quaternionen-Darstellung

$$\begin{aligned} \tilde{q}_E &= \tilde{q}_3(\alpha) \tilde{q}_1(\beta) \tilde{q}_3(\gamma) = \left(\cos \frac{\alpha}{2} + k \sin \frac{\alpha}{2}\right) \left(\cos \frac{\beta}{2} + i \sin \frac{\beta}{2}\right) \left(\cos \frac{\gamma}{2} + k \sin \frac{\gamma}{2}\right) \\ &= \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} + i \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} + j \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} + k \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2}. \end{aligned}$$

Anmerkung 2.7: Die zu den Rotationsmatrizen R_{ie} , R_{eh} und R_{hb} korrespondierenden Hamilton-Quaternionen lauten:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{ie} &= \tilde{q}_3(\omega_{ie}(t - t_0)) = \cos \frac{\omega_{ie}(t - t_0)}{2} + k \sin \frac{\omega_{ie}(t - t_0)}{2} \\ \tilde{q}_{eh} &= \tilde{q}_3\left(\lambda + \frac{\pi}{2}\right) \tilde{q}_1\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \left(\cos \frac{\lambda + \frac{\pi}{2}}{2} + k \sin \frac{\lambda + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\lambda}{2} - \sin \frac{\lambda}{2}\right) \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2}\right) + i \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\lambda}{2} - \sin \frac{\lambda}{2}\right) \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}\right) \\ &\quad + j \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\lambda}{2} + \sin \frac{\lambda}{2}\right) \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}\right) + k \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\lambda}{2} + \sin \frac{\lambda}{2}\right) \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2}\right) \\ \tilde{q}_{hb} &= \tilde{q}_3(\alpha_K) \tilde{q}_1(\alpha_N) \tilde{q}_2(\alpha_R) = \left(\cos \frac{\alpha_K}{2} + k \sin \frac{\alpha_K}{2}\right) \left(\cos \frac{\alpha_N}{2} + i \sin \frac{\alpha_N}{2}\right) \left(\cos \frac{\alpha_R}{2} + j \sin \frac{\alpha_R}{2}\right) \\ &= \cos \frac{\alpha_N}{2} \cos \frac{\alpha_R}{2} \cos \frac{\alpha_K}{2} - \sin \frac{\alpha_N}{2} \sin \frac{\alpha_R}{2} \sin \frac{\alpha_K}{2} + i \left(\sin \frac{\alpha_N}{2} \cos \frac{\alpha_R}{2} \cos \frac{\alpha_K}{2} - \cos \frac{\alpha_N}{2} \sin \frac{\alpha_R}{2} \sin \frac{\alpha_K}{2}\right) \\ &\quad + j \left(\cos \frac{\alpha_N}{2} \sin \frac{\alpha_R}{2} \cos \frac{\alpha_K}{2} + \sin \frac{\alpha_N}{2} \cos \frac{\alpha_R}{2} \sin \frac{\alpha_K}{2}\right) + k \left(\cos \frac{\alpha_N}{2} \cos \frac{\alpha_R}{2} \sin \frac{\alpha_K}{2} + \sin \frac{\alpha_N}{2} \sin \frac{\alpha_R}{2} \cos \frac{\alpha_K}{2}\right) \end{aligned}$$

6. Drehachse/-winkel-Parametrisierung

Die Herstellung eines Zusammenhanges zwischen den drei bisher diskutierten algebraischen Parametrisierungen der $SO(3)$ -Gruppe und dem Satz von Euler erlaubt geometrische Interpretationen dieser Orientierungsparameter.

Lemma 2.13 (s. [K. Kanatani(1990)]):

Die $SO(3)$ -Parametrisierung in einer räumlichen Drehung um den Einheitsvektor $\mathbf{n}$ um den Winkel α lautet

$$\begin{aligned} R_D(\mathbf{n}, \alpha) &= \mathbf{n}\mathbf{n}^T(1 - \cos \alpha) + I_3 \cos \alpha + \text{veck}^{-1}(\mathbf{n}) \sin \alpha \\ &= I_3 + \sin \alpha \text{veck}^{-1}(\mathbf{n}) + (1 - \cos \alpha)(\text{veck}^{-1}(\mathbf{n}))^2 \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha + n_1^2(1 - \cos \alpha) & n_1 n_2(1 - \cos \alpha) - n_3 \sin \alpha & n_1 n_3(1 - \cos \alpha) + n_2 \sin \alpha \\ n_1 n_2(1 - \cos \alpha) + n_3 \sin \alpha & \cos \alpha + n_2^2(1 - \cos \alpha) & n_2 n_3(1 - \cos \alpha) - n_1 \sin \alpha \\ n_1 n_3(1 - \cos \alpha) - n_2 \sin \alpha & n_2 n_3(1 - \cos \alpha) + n_1 \sin \alpha & \cos \alpha + n_3^2(1 - \cos \alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die zugehörige Kartenabbildung ist

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\text{Spur}(R) - 1}{2} \\ \mathbf{n} &= \frac{1}{2 \sin \alpha} \text{veck}(R - R^T) = \frac{1}{2 \sin \alpha} \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix} \\ &\text{mit } \alpha \in [0, 2\pi) \text{ und } \mathbf{n} \in S_1^2. \end{aligned}$$

■

Durch Vergleich (symmetrischer Anteil, schiefsymmetrischer Anteil und Spur) von in Laning-Bortz-Stuelpnagel-Parametern, Cayley-Parametern oder Hamilton-Quaternionen parametrisierten Rotationsmatrix mit der Darstellung in Drehrichtungsvektor und -winkel aus Lemma 2.8 folgt:

- Cayley-Parameter:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \tan \frac{\alpha}{2} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \\ \tan \frac{\alpha}{2} &= \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \|\mathbf{s}\| \end{aligned}$$

- Hamilton-Quaternionen:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{n}) \\ \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \\ \sin \frac{\alpha}{2} &= \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \|\mathbf{q}\| \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} q_0 \end{aligned}$$

- Laning-Bortz-Stuelpnagel-Parameter:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \alpha \mathbf{n} \\ \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|} \\ \alpha &= \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \|\boldsymbol{\sigma}\| \end{aligned}$$

Aus diesen Beziehungen läßt sich schließen, daß geometrisch die Richtung des Vektors der Cayley-Parameter $\mathbf{s}$ mit der Richtung der gerichteten Drehachse $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}$ nach dem Satz von Euler übereinstimmt und die Länge $\|\mathbf{s}\|$ Information über die Größe des Drehwinkels α enthält. Dasselbe gilt für den Vektor der Laning-Bortz-Stuelpnagel-Parameter. Im Falle von Hamilton-Quaternionen stimmt die Richtung der gerichteten Drehachse $\mathbf{n}$ (nach dem Satz von Euler) mit der Richtung des Vektorteils $\mathbf{q}$ der Quaternion überein und die Länge des Vektorteils und der Skarteil beinhalten die Information über den Drehwinkel α . Die drei Parametrisierungen unterscheiden sich somit im wesentlichen nur in der Beschreibung des Drehwinkels.

Nach dem Satz von Euler läßt jede 3-dimensionale Rotation eine Achse fix, d.h. entspricht einer Drehung um diese Achse. Jedes $R \in SO(3)$ hat nach Satz A.5 den Eigenwert $+1$. Aus $R\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ist ersichtlich, daß der Eigenvektor zum Eigenwert $+1$ gerade die Raumachse beschreibt, um die gedreht wird.

Anmerkung 2.8 (Cayley-Parameter): Im Falle von Cayley-Parametern folgt die Beziehung $\mathbf{s} = \tan \frac{\alpha}{2} \mathbf{n}$ einfach durch Einsetzen von

$$\text{Spur } R = 1 + 2 \cos \alpha \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix} = 2 \sin \alpha \mathbf{n} \quad .$$

in Gleichung (2.36). Die in Anmerkung 2.3 identifizierte Singularität bei $\text{Spur} R = -1$ tritt nach Lemma nur für den Rotationswinkel $\alpha = \pi \pmod{2\pi}$ auf, unabhängig vom normierten Richtungsvektor $\mathbf{n}$, denn in diesem Fall ist

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi \pm} \|s\| = \lim_{\alpha \rightarrow \pi \pm} \tan \frac{\alpha}{2} = \infty,$$

d.h. es existiert kein endliches Triplet von Cayley-Parametern, welches den Fall einer Achsenspiegelung beschreibt. Die Verwendung der algebraischen Cayley-Parametrisierung ist demnach nur für kleine Drehungen sinnvoll. Aus numerischen Gründen sind neben den Spiegelungen natürlich auch "benachbarte" Fälle auszuschließen. In der Trägheitsnavigation ist die Abtastrate der Sensoren i.a. hoch genug, um den Fall einer Rotation um 180° innerhalb eines Taktes ausschließen zu können. Der Einsatz der Cayley-Parametrisierung ist demzufolge problemlos möglich. ■

Anmerkung 2.9 (Hamilton-Quaternionen): Wegen

$$\|\tilde{q}\|^2 = q_0^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = 1 \quad \forall \tilde{q} \in \mathbb{H}_1$$

existiert ein eindeutiger Winkel $\frac{\alpha}{2}, 0 \leq \frac{\alpha}{2} < \pi$, für den gilt

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{\alpha}{2} \\ \|\mathbf{q}\| &= \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

■

Anmerkung 2.10: Das Pendant zur Laning-Bortz-Stuelpnagel-Rotationsmatrix $R_{LBS}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = e^\Sigma$, mit $\sigma = \text{veck}(\Sigma)$, lautet in Hamilton-Quaternionen-Darstellung

$$\tilde{q}_{LBS} = \cos \frac{\|\sigma\|}{2} + i \sin \frac{\|\sigma\|}{2} \frac{\sigma_1}{\|\sigma\|} + j \sin \frac{\|\sigma\|}{2} \frac{\sigma_2}{\|\sigma\|} + k \sin \frac{\|\sigma\|}{2} \frac{\sigma_3}{\|\sigma\|} = \left(\cos \frac{\|\sigma\|}{2}, \sin \frac{\|\sigma\|}{2} \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \right).$$

■

Anmerkung 2.11: Das Pendant zur Cayley-Rotationsmatrix $R_C(s_1, s_2, s_3)$, lautet in Hamilton-Quaternionen-Darstellung

$$\tilde{q}_C = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\mathbf{s}\|^2}} + i \frac{s_1}{\sqrt{1 + \|\mathbf{s}\|^2}} + j \frac{s_2}{\sqrt{1 + \|\mathbf{s}\|^2}} + k \frac{s_3}{\sqrt{1 + \|\mathbf{s}\|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\mathbf{s}\|^2}} (1, \mathbf{s}).$$

■

Anmerkung 2.12: Das Pendant zur in Drehachse $\mathbf{n}$ und Drehwinkel α parametrisierten Rotationsmatrix $R_D(\mathbf{n}, \alpha)$, lautet in Hamilton-Quaternionen-Darstellung

$$\tilde{q}_D = \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} n_1 + j \sin \frac{\alpha}{2} n_2 + k \sin \frac{\alpha}{2} n_3 = \left(\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{n} \right).$$

■

3. Orientierungsparameterdifferentialgleichungen

Nachdem wir im 1. Abschnitt die relevanten $SO(3)$ -Differentialgleichungen hergeleitet und im 2. Abschnitt die Eigenschaften diverser Parametrisierungen diskutiert haben, gehen wir in diesem Abschnitt nunmehr daran die zugehörigen Orientierungsparameterdifferentialgleichungen zu bestimmen.

Den Ausgangspunkt bildet – der Herleitung der $SO(3)$ -Differentialgleichungen folgend – die Definition einer Zusammenhangsmatrix

$$\Omega_{ab} := R_{ab}^T \dot{R}_{ab} \quad (2.60)$$

Aus der Definition ist ersichtlich, daß die Koeffizienten von Ω_{ab} und damit auch von $\omega_{ab} = \text{veck}(\Omega_{ab})$ nach Einsetzen einer Parametrisierung von $R_{ab} \in SO(3)$ lineare Funktionen der zeitlichen Ableitungen der Parameter sind. Nach Satz C.6 und Satz B.2 ist

$$\omega_{ab} = \omega_{ib} - R_{ab}^T \omega_{ia} \quad (2.61)$$

Wie im 1. Abschnitt dieses Kapitels bereits ausgeführt wurde, ist i.a. $a \in \{e, h\}$. ω_{ib} enthält die gemessenen Kreiseldaten und ω_{ie} bzw. ω_{ih} ⁵⁾ können aus Anhang C entnommen werden. Die Orientierungsparameterdifferentialgleichungen resultieren durch Lösen des quadratischen linearen algebraischen Gleichungssystems (2.61) mit den zeitlichen Ableitungen der Orientierungsparameter als Unbekannte.

1. Kardan-Orientierungsdifferentialgleichungen

Wir setzen

$$R_{ab} = R_K(\alpha_{ab}, \beta_{ab}, \gamma_{ab}) \quad (2.62)$$

Durch Einsetzen von

$$\begin{aligned} \omega_{ab} &= \text{veck}(\Omega_{ab}) = \text{veck}(R_K^T \dot{R}_K) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta_{ab} \cos \gamma_{ab} \dot{\alpha}_{ab} + \sin \gamma_{ab} \dot{\beta}_{ab} \\ -\cos \beta_{ab} \sin \gamma_{ab} \dot{\alpha}_{ab} + \cos \gamma_{ab} \dot{\beta}_{ab} \\ \sin \beta_{ab} \dot{\alpha}_{ab} + \dot{\gamma}_{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_{ab} \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 \\ -\cos \beta_{ab} \sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 \\ \sin \beta_{ab} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_{ab} \\ \dot{\beta}_{ab} \\ \dot{\gamma}_{ab} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.63)$$

in (2.61) und Auflösen nach $(\dot{\alpha}_{ab}, \dot{\beta}_{ab}, \dot{\gamma}_{ab})^T$ folgt

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_{ab} \\ \dot{\beta}_{ab} \\ \dot{\gamma}_{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \gamma_{ab}}{\cos \beta_{ab}} & -\frac{\sin \gamma_{ab}}{\cos \beta_{ab}} & 0 \\ \sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 \\ -\tan \beta_{ab} \cos \gamma_{ab} & \tan \beta_{ab} \sin \gamma_{ab} & 1 \end{pmatrix} \omega_{ib} - \begin{pmatrix} 1 & \sin \alpha_{ab} \tan \beta_{ab} & -\cos \alpha_{ab} \tan \beta_{ab} \\ 0 & \cos \alpha_{ab} & \sin \alpha_{ab} \\ 0 & -\frac{\sin \alpha_{ab}}{\cos \beta_{ab}} & \frac{\cos \alpha_{ab}}{\cos \beta_{ab}} \end{pmatrix} \omega_{ia} \quad (2.64)$$

und mit $\omega_{ie} = (0, 0, \omega_{ie})^T$ (s. (C.1)) der

Satz 2.14 (s. [J. Dambeck(1995)]):

Bei Parametrisierung von $R_{eb} \in SO(3)$ mit Kardan-Winkel, d.h. $R_{eb} = R_K(\alpha_{eb}, \beta_{eb}, \gamma_{eb})$, lautet die der $SO(3)$ -Anfangswertaufgabe

$$\dot{R}_{eb} = R_{eb} \Omega_{ib} - \Omega_{ie} R_{eb}, \quad R_{eb}(t_0) = R_{eb_0}$$

entsprechende Orientierungsanfangswertaufgabe für die Kardan-Winkel

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_{eb} &= \frac{1}{\cos \beta_{eb}} (\omega_{ib_1} \cos \gamma_{eb} - \omega_{ib_2} \sin \gamma_{eb} + \omega_{ie} \cos \alpha_{eb} \sin \beta_{eb}) \\ \dot{\beta}_{eb} &= \omega_{ib_1} \sin \gamma_{eb} + \omega_{ib_2} \cos \gamma_{eb} - \omega_{ie} \sin \alpha_{eb} \\ \dot{\gamma}_{eb} &= -\tan \beta_{eb} (\omega_{ib_1} \cos \gamma_{eb} - \omega_{ib_2} \sin \gamma_{eb}) + \omega_{ib_3} - \omega_{ie} \frac{\cos \alpha_{eb}}{\cos \beta_{eb}} \end{cases}$$

$$(\alpha_{eb}(t_0), \beta_{eb}(t_0), \gamma_{eb}(t_0))^T = (\alpha_{eb_0}, \beta_{eb_0}, \gamma_{eb_0})^T \quad (2.6)$$

Analog folgt mit $\omega_{ih} = (-\dot{\varphi}, (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi, (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin \varphi)^T$ (s. (C.6)) der

Satz 2.15:

Bei Parametrisierung von $R_{hb} \in SO(3)$ mit Kardan-Winkel, d.h. $R_{hb} = R_K(\alpha_{hb}, \beta_{hb}, \gamma_{hb})$, lautet die der $SO(3)$ -Anfangswertaufgabe

$$\dot{R}_{hb} = R_{hb} \Omega_{ib} - \Omega_{ih} R_{hb}, \quad R_{hb}(t_0) = R_{hb_0}$$

⁵⁾Die in ω_{ih} enthaltenen zeitlichen Ableitungen $\dot{\varphi}, \dot{\lambda}$ werden im nächsten Kapitel durch Zustände (genauer: Ortskoordinaten und Geschwindigkeiten) substituiert.

⁶⁾ $(\alpha_{eb_0}, \beta_{eb_0}, \gamma_{eb_0})^T$ folgt aus R_{eb_0} durch Umkehrung der Kartenabbildung.

entsprechende Orientierungsanfangswertaufgabe für die Kardan-Winkel

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_{hb} = \frac{1}{\cos \beta_{hb}} (\omega_{ib_1} \cos \gamma_{hb} - \omega_{ib_2} \sin \gamma_{hb}) - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \tan \beta_{hb} \cos \varphi \sin(\alpha_{hb} - \varphi) + \dot{\varphi} \\ \dot{\beta}_{hb} = \omega_{ib_1} \sin \gamma_{hb} + \omega_{ib_2} \cos \gamma_{hb} - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos(\alpha_{hb} - \varphi) \\ \dot{\gamma}_{hb} = -\tan \beta_{hb} (\omega_{ib_1} \cos \gamma_{hb} - \omega_{ib_2} \sin \gamma_{hb}) + (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \frac{\sin(\alpha_{hb} - \varphi)}{\cos \beta_{hb}} + \omega_{ib_3} \end{cases}$$

$$(\alpha_{hb}(t_0), \beta_{hb}(t_0), \gamma_{hb}(t_0))^T = (\alpha_{hb_0}, \beta_{hb_0}, \gamma_{hb_0})^{T7)}$$

Die Orientierungsparameterdifferentialgleichungen aus beiden Sätzen sind nichtlinear, inhomogen und singulär für $\beta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ferner sei bemerkt, daß die Orientierungsparameterdifferentialgleichungen aus dem Satz 2.14 unabhängig von Position und Geschwindigkeit sind, während sie im Satz 2.15 davon abhängen.

2. Euler-Orientierungsdifferentialgleichungen

In Analogie zum vorhergehenden Abschnitt folgt aus $R_{ab} = R_E(\psi_{ab}, \vartheta_{ab}, \eta_{ab})$

$$\begin{aligned} \omega_{ab} &= \text{veck}(\Omega_{ab}) = \text{veck}(R_E^T \dot{R}_E) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \eta_{ab} \dot{\vartheta}_{ab} + \sin \vartheta_{ab} \sin \eta_{ab} \dot{\psi}_{ab} \\ -\sin \eta_{ab} \dot{\vartheta}_{ab} + \sin \vartheta_{ab} \cos \eta_{ab} \dot{\psi}_{ab} \\ \dot{\eta}_{ab} + \cos \vartheta_{ab} \dot{\psi}_{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta_{ab} \sin \eta_{ab} & \cos \eta_{ab} & 0 \\ \sin \vartheta_{ab} \cos \eta_{ab} & -\sin \eta_{ab} & 0 \\ \cos \vartheta_{ab} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi}_{ab} \\ \dot{\vartheta}_{ab} \\ \dot{\eta}_{ab} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Einsetzen in (2.61) und Auflösen nach $(\dot{\psi}_{ab}, \dot{\vartheta}_{ab}, \dot{\eta}_{ab})^T$ gibt

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}_{ab} \\ \dot{\vartheta}_{ab} \\ \dot{\eta}_{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin \eta_{ab}}{\sin \vartheta_{ab}} & \frac{\cos \eta_{ab}}{\sin \vartheta_{ab}} & 0 \\ \cos \eta_{ab} & -\sin \eta_{ab} & 0 \\ -\cot \vartheta_{ab} \sin \eta_{ab} & -\cot \vartheta_{ab} \cos \eta_{ab} & 1 \end{pmatrix} \omega_{ib} - \begin{pmatrix} -\sin \psi_{ab} \cot \vartheta_{ab} & \cos \psi_{ab} \cot \vartheta_{ab} & 1 \\ \cos \psi_{ab} & \sin \psi_{ab} & 0 \\ \frac{\sin \psi_{ab}}{\sin \vartheta_{ab}} & -\frac{\cos \psi_{ab}}{\sin \vartheta_{ab}} & 0 \end{pmatrix} \omega_{ia}. \quad (2.66)$$

Mit $\omega_{ie} = (0, 0, \omega_{ie})^T$ (s. (C.1)) folgt der

Satz 2.16:

Bei Parametrisierung von $R_{eb} \in SO(3)$ mit Euler-Winkel, d.h. $R_{eb} = R_E(\psi_{eb}, \vartheta_{eb}, \eta_{eb})$, lautet die der $SO(3)$ -Anfangswertaufgabe

$$\dot{R}_{eb} = R_{eb} \Omega_{ib} - \Omega_{ie} R_{eb}, \quad R_{eb}(t_0) = R_{eb_0}$$

entsprechende Orientierungsanfangswertaufgabe für die Euler-Winkel

$$\begin{cases} \dot{\psi}_{eb} = \frac{1}{\sin \vartheta_{eb}} (\omega_{ib_1} \sin \eta_{eb} + \omega_{ib_2} \cos \eta_{eb}) - \omega_{ie} \\ \dot{\vartheta}_{eb} = \omega_{ib_1} \cos \eta_{eb} - \omega_{ib_2} \sin \eta_{eb} \\ \dot{\eta}_{eb} = -\cot \vartheta_{eb} (\omega_{ib_1} \sin \eta_{eb} + \omega_{ib_2} \cos \eta_{eb}) + \omega_{ib_3} \end{cases}$$

$$(\psi_{eb}(t_0), \vartheta_{eb}(t_0), \eta_{eb}(t_0))^T = (\psi_{eb_0}, \vartheta_{eb_0}, \eta_{eb_0})^{T8)}$$

Analog ergibt sich mit $\omega_{ih} = (-\dot{\varphi}, (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi, (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin \varphi)^T$ (s. (C.6)) der

Satz 2.17:

Bei Parametrisierung von $R_{hb} \in SO(3)$ mit Euler-Winkel, d.h. $R_{hb} = R_E(\psi_{hb}, \vartheta_{hb}, \eta_{hb})$, lautet die der $SO(3)$ -Anfangswertaufgabe

$$\dot{R}_{hb} = R_{hb} \Omega_{ib} - \Omega_{ih} R_{hb}, \quad R_{hb}(t_0) = R_{hb_0}$$

⁷⁾ $(\alpha_{hb_0}, \beta_{hb_0}, \gamma_{hb_0})^T$ folgt aus R_{hb_0} durch Umkehrung der Kartenabbildung.

⁸⁾ $(\psi_{eb_0}, \vartheta_{eb_0}, \eta_{eb_0})^T$ folgt aus R_{eb_0} durch Umkehrung der Kartenabbildung.

entsprechende Orientierungsanfangswertaufgabe für die Euler-Winkel

$$\begin{cases} \dot{\psi}_{hb} &= \frac{1}{\sin \vartheta_{hb}} (\omega_{ib_1} \sin \eta_{hb} + \omega_{ib_2} \cos \eta_{hb}) - \cot \vartheta_{hb} (\dot{\varphi} \sin \psi_{hb} + (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi \cos \psi_{hb}) - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin \varphi \\ \dot{\vartheta}_{hb} &= \omega_{ib_1} \cos \eta_{hb} - \omega_{ib_2} \sin \eta_{hb} + \dot{\varphi} \cos \psi_{hb} - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi \sin \psi_{hb} \\ \dot{\eta}_{hb} &= -\cot \vartheta_{hb} (\omega_{ib_1} \sin \eta_{hb} + \omega_{ib_2} \cos \eta_{hb}) + \omega_{ib_3} + \frac{1}{\sin \vartheta_{hb}} (\dot{\varphi} \sin \psi_{hb} + (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi \cos \psi_{hb}) \end{cases}$$

$$(\psi_{hb}(t_0), \vartheta_{hb}(t_0), \eta_{hb}(t_0))^T = (\psi_{hb_0}, \vartheta_{hb_0}, \eta_{hb_0})^T{}^9$$

Die Orientierungsparameterdifferentialgleichungen aus beiden Sätzen sind nichtlinear, inhomogen und singular für $\vartheta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ferner sei wiederum angemerkt, daß die Orientierungsparameterdifferentialgleichungen aus dem Satz 2.16 unabhängig von Position und Geschwindigkeit sind, während sie im Satz 2.17 davon abhängen.

3. Cayley-Orientierungsdifferentialgleichungen

Im Gegensatz zu den trigonometrischen Parametrisierungen der letzten beiden Unterabschnitte ist die Auflösung nach den zeitlichen Ableitungen der Cayley-Parameter übersichtlicher:

$$\begin{aligned} R_{ab} &= R_C(\mathbf{s}_{ab}) := (I_3 + S_{ab})(I_3 - S_{ab})^{-1} \quad | \cdot (I_3 - S_{ab}) \\ \Rightarrow \quad R_C(\mathbf{s}_{ab})(I_3 - S_{ab}) &= (I_3 + S_{ab}) \quad \left| \frac{d}{dt} \right. \\ \Rightarrow \quad \underbrace{\dot{R}_C(\mathbf{s}_{ab})}_{R_C(\mathbf{s}_{ab})\Omega_{ab}^{10}} (I_3 - S_{ab}) - R_C(\mathbf{s}_{ab})\dot{S}_{ab} &= \dot{S}_{ab} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{S}_{ab} &= (I_3 + R_C(\mathbf{s}_{ab}))^{-1} R_C(\mathbf{s}_{ab}) \Omega_{ab} (I_3 - S_{ab}) \\ &= ((I_3 - S_{ab})(I_3 - S_{ab})^{-1} + (I_3 + S_{ab})(I_3 - S_{ab})^{-1})^{-1} (I_3 + S_{ab})(I_3 - S_{ab})^{-1} \Omega_{ab} (I_3 - S_{ab}) \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{(I_3 - S_{ab})(I_3 + S_{ab})}_{\text{kommutativ!}} (I_3 - S_{ab})^{-1} \Omega_{ab} (I_3 - S_{ab}) \\ &= \frac{1}{2} (I_3 + S_{ab}) \Omega_{ab} (I_3 - S_{ab}) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Durch Einsetzen der veck^{-1} -transformierten Form von (2.61)

$$\Omega_{ab} = \Omega_{ib} - R_{ab}^T \Omega_{ia} R_{ab} \quad (2.68)$$

folgt

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \frac{1}{2} (I_3 + S_{ab}) \Omega_{ib} (I_3 - S_{ab}) - (I_3 + S_{ab}) \underbrace{R_{ab}^T}_{(I_3 + S_{ab})^{-1}(I_3 - S_{ab})} \Omega_{ia} \underbrace{R_{ab}}_{(I_3 + S_{ab})(I_3 - S_{ab})^{-1}} (I_3 - S_{ab}) \\ &= \frac{1}{2} [(I_3 + S_{ab}) \Omega_{ib} (I_3 - S_{ab}) - (I_3 - S_{ab}) \Omega_{ia} (I_3 + S_{ab})] \end{aligned} \quad (2.69)$$

Durch Anwendung des veck -Operators ergibt sich nach Satz B.3 und Satz B.4

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}_{ib} - \boldsymbol{\omega}_{ia} + \mathbf{s} \times (\boldsymbol{\omega}_{ib} + \boldsymbol{\omega}_{ia}) + (\mathbf{s}^T (\boldsymbol{\omega}_{ib} - \boldsymbol{\omega}_{ia})) \mathbf{s}] \quad (2.70)$$

Mit $\boldsymbol{\omega}_{ie} = (0, 0, \omega_{ie})^T$ (s. (C.1)) folgt der

Satz 2.18:

Bei Parametrisierung von $R_{eb} \in SO(3)$ mit Cayley-Parametern, d.h. $R_{eb} = R_C(\mathbf{s}_{eb})$, lautet die der $SO(3)$ -Anfangswertaufgabe

$$\dot{R}_{eb} = R_{eb} \Omega_{ib} - \Omega_{ie} R_{eb}, \quad R_{eb}(t_0) = R_{eb_0}$$

⁹⁾ $(\psi_{hb_0}, \vartheta_{hb_0}, \eta_{hb_0})^T$ folgt aus R_{hb_0} durch Umkehrung der Kartenabbildung.

¹⁰⁾ nach Definition einer Zusammenhangsmatrix

entsprechende Orientierungsanfangswertaufgabe für die Cayley-Parameter

$$\dot{s}_{eb} = \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\omega}_{ib} - \boldsymbol{\omega}_{ie} + s_{eb} \times (\boldsymbol{\omega}_{ib} + \boldsymbol{\omega}_{ie}) + (s_{eb}^T (\boldsymbol{\omega}_{ib} - \boldsymbol{\omega}_{ie})) s_{eb} \right]$$

bzw.

$$\begin{cases} \dot{s}_{eb_1} = \frac{1}{2} [\omega_{ib_1} + (\omega_{ib_3} + \omega_{ie}) s_{eb_2} - \omega_{ib_2} s_{eb_3} + \omega_{ib_1} s_{eb_1}^2 + \omega_{ib_2} s_{eb_1} s_{eb_2} + (\omega_{ib_3} - \omega_{ie}) s_{eb_1} s_{eb_3}] \\ \dot{s}_{eb_2} = \frac{1}{2} [\omega_{ib_2} - (\omega_{ib_3} + \omega_{ie}) s_{eb_1} + \omega_{ib_1} s_{eb_3} + \omega_{ib_1} s_{eb_1} s_{eb_2} + \omega_{ib_2} s_{eb_2}^2 + (\omega_{ib_3} - \omega_{ie}) s_{eb_2} s_{eb_3}] \\ \dot{s}_{eb_3} = \frac{1}{2} [\omega_{ib_3} - \omega_{ie} + \omega_{ib_2} s_{eb_1} - \omega_{ib_1} s_{eb_2} + \omega_{ib_1} s_{eb_1} s_{eb_3} + \omega_{ib_2} s_{eb_2} s_{eb_3} + (\omega_{ib_3} - \omega_{ie}) s_{eb_3}^2] \end{cases}$$

$$s_{eb}(t_0) = s_{eb_0}^{11)}$$

■

Analog ergibt sich mit $\boldsymbol{\omega}_{ih} = (-\dot{\varphi}, (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi, (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin \varphi)^T$ (s. (C.6)) der

Satz 2.19:

Bei Parametrisierung von $R_{hb} \in SO(3)$ mit Cayley-Parametern, d.h. $R_{hb} = R_C(s_{hb})$, lautet die der $SO(3)$ -Anfangswertaufgabe

$$\dot{R}_{hb} = R_{hb} \Omega_{ib} - \Omega_{ih} R_{hb}, \quad R_{hb}(t_0) = R_{hb_0}$$

entsprechende Orientierungsanfangswertaufgabe für die Cayley-Parameter

$$\dot{s}_{hb} = \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\omega}_{ib} - \boldsymbol{\omega}_{ih} + s_{hb} \times (\boldsymbol{\omega}_{ib} + \boldsymbol{\omega}_{ih}) + (s_{hb}^T (\boldsymbol{\omega}_{ib} - \boldsymbol{\omega}_{ih})) s_{hb} \right]$$

bzw.

$$\begin{cases} \dot{s}_{hb_1} = \frac{1}{2} [\omega_{ib_1} + \dot{\varphi} + (\omega_{ib_3} + (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin \varphi) s_{hb_2} - (\omega_{ib_2} + (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi) s_{hb_3} \\ \quad + (\omega_{ib_1} + \dot{\varphi}) s_{hb_1}^2 + (\omega_{ib_2} - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi) s_{hb_1} s_{hb_2} + (\omega_{ib_3} - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin \varphi) s_{hb_1} s_{hb_3}] \\ \dot{s}_{hb_2} = \frac{1}{2} [\omega_{ib_2} - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi - (\omega_{ib_3} + (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin \varphi) s_{hb_1} + (\omega_{ib_1} - \dot{\varphi}) s_{hb_3} \\ \quad + (\omega_{ib_1} + \dot{\varphi}) s_{hb_1} s_{hb_2} + (\omega_{ib_2} - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi) s_{hb_2}^2 + (\omega_{ib_3} - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin \varphi) s_{hb_2} s_{hb_3}] \\ \dot{s}_{hb_3} = \frac{1}{2} [\omega_{ib_3} - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin \varphi + (\omega_{ib_2} + (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi) s_{hb_1} - (\omega_{ib_1} - \dot{\varphi}) s_{hb_2} \\ \quad + (\omega_{ib_1} + \dot{\varphi}) s_{hb_1} s_{hb_3} + (\omega_{ib_2} - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi) s_{hb_2} s_{hb_3} + (\omega_{ib_3} - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin \varphi) s_{hb_3}^2] \end{cases}$$

$$s_{hb}(t_0) = s_{hb_0}^{12)}$$

■

Die Orientierungsparameterdifferentialgleichungen aus beiden Sätzen sind nichtlinear (genauer: bilinear) und inhomogen. Das Kartengebiet der Cayley-Parameter ist unbeschränkt! Ferner sei wiederum angemerkt, daß die Orientierungsparameterdifferentialgleichungen aus dem Satz 2.18 unabhängig von Position und Geschwindigkeit sind, während sie im Satz 2.19 davon abhängen.

4. Hamilton-Orientierungsparameterdifferentialgleichungen

Die bislang betrachteten minimalen Parametrisierungen transformieren die linearen, homogenen $SO(3)$ -Differentialgleichungen in 3 nichtlineare, skalare Orientierungsparameterdifferentialgleichungen. Diese Dimensionsreduktion ist jedoch nur unter Inkaufnahme der diskutierten parametrisierungsbedingten Schwierigkeiten möglich. Daß mit den im folgenden betrachteten $\mathbb{H}_1$ -Hamilton-Quaternionen – als Vertreter 4-dimensionaler (redundanter) Parametrisierungen – diese Probleme nicht bestehen, folgt aus Unterabschnitt 2.2.2 und dem

Satz 2.20:

Sei $\tilde{q} \in \mathbb{H}_1$ Lösung der linearen, homogenen Quaternionen-Anfangswertaufgabe

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{1}{2} (\tilde{q} \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 \tilde{q}) \quad \text{mit} \quad \tilde{q}(t_0) = \tilde{q}_0 \in \mathbb{H}_1 \quad \text{und} \quad \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 \in \mathbb{H}_0$$

¹¹⁾ s_{eb_0} folgt aus R_{eb_0} durch Umkehrung der Kartenabbildung.

¹²⁾ s_{hb_0} folgt aus R_{hb_0} durch Umkehrung der Kartenabbildung.

bzw. Vektor-Anfangswertaufgabe

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2)^T \\ \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 & -(\Omega_1 + \Omega_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } q_0^2 + \|\mathbf{q}\|_2^2 = 1 \quad \text{und } \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \in \mathbb{R}_3.$$

Dann ist $R_H(\tilde{q})$ Lösung der $SO(3)$ -Anfangswertaufgabe

$$\dot{R}_H(\tilde{q}) = R_H(\tilde{q})\Omega_1 - \Omega_2 R_H(\tilde{q}) \quad , \quad R_H(\tilde{q}(t_0)) = R_H(\tilde{q}_0)$$

$$\text{mit } \Omega_1 = \text{veck}^{-1} \boldsymbol{\omega}_1 \quad , \quad \Omega_2 = \text{veck}^{-1} \boldsymbol{\omega}_2.$$

Beweis von Satz 2.20:

Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\tilde{\mathbf{x}} = (0, \mathbf{x})$ die zugehörige $\mathbb{H}_0$ -Quaternion und $\tilde{q} \in \mathbb{H}_1$. Dann ist

$$\begin{aligned} (0, \dot{R}_H(\tilde{q})\mathbf{x} + R_H(\tilde{q})\dot{\mathbf{x}}) &= \frac{\partial}{\partial t} (0, R_H(\tilde{q})\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{q}\tilde{\mathbf{x}}\tilde{q}^{-1}) = \dot{\tilde{q}}\tilde{\mathbf{x}}\tilde{q}^{-1} + \tilde{q}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{q}^{-1} + \tilde{q}\tilde{\mathbf{x}}\dot{\tilde{q}}^{-1} = \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{q}\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2\tilde{q})\tilde{\mathbf{x}}\tilde{q}^{-1} + \tilde{q}\tilde{\mathbf{x}}\frac{1}{2}(\tilde{q}\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2\tilde{q})^{-1} + \tilde{q}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{q}^{-1} = \\ &= \frac{1}{2}[\tilde{q}\tilde{\omega}_1\tilde{\mathbf{x}}\tilde{q}^{-1} - \tilde{\omega}_2\tilde{q}\tilde{\mathbf{x}}\tilde{q}^{-1} - \tilde{q}\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\omega}_1\tilde{q}_1 + \tilde{q}\tilde{\mathbf{x}}\tilde{q}^{-1}\tilde{\omega}_2] + \tilde{q}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{q}^{-1} = \\ &= \frac{1}{2}[\tilde{q}(\tilde{\omega}_1\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\omega}_1)\tilde{q}^{-1} - (\tilde{\omega}_2\tilde{q}\tilde{\mathbf{x}}\tilde{q}^{-1} - \tilde{q}\tilde{\mathbf{x}}\tilde{q}^{-1}\tilde{\omega}_2)] + \tilde{q}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{q}^{-1} = \\ &= \frac{1}{2}[\tilde{q}(0, 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{x})\tilde{q}^{-1} - (0, 2\boldsymbol{\omega}_2 \times (R_H(\tilde{q})\mathbf{x}))] + \tilde{q}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{q}^{-1} = \\ &= (0, R_H(\tilde{q})\Omega_1\mathbf{x}) - (0, \Omega_2 R_H(\tilde{q})\mathbf{x}) + (0, R_H(\tilde{q})\dot{\mathbf{x}}) = \\ &= (0, (R_H(\tilde{q})\Omega_1 - \Omega_2 R_H(\tilde{q}))\mathbf{x} + R_H(\tilde{q})\dot{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

q.e.d.

Mit $\boldsymbol{\omega}_{ie} = (0, 0, \omega_{ie})^T$ (s. (C.1)) folgt der

Satz 2.21:

Bei Parametrisierung von $R_{eb} \in SO(3)$ mittels einer $\mathbb{H}_1$ -Quaternion, d.h. $R_{eb} = R_H(\tilde{q}_{eb})$, lautet die der $SO(3)$ -Anfangswertaufgabe

$$\dot{R}_{eb} = R_{eb}\Omega_{ib} - \Omega_{ie}R_{eb} \quad , \quad R_{eb}(t_0) = R_{eb_0}$$

entsprechende Orientierungsanfangswertaufgabe für die $\mathbb{H}_1$ -Quaternion

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}}_{eb} &= \frac{1}{2}(\tilde{q}_{eb}\tilde{\omega}_{ib} - \tilde{\omega}_{ie}\tilde{q}_{eb}) \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{q}_{eb_0} \\ \dot{\mathbf{q}}_{eb} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -(\boldsymbol{\omega}_{ib} - \boldsymbol{\omega}_{ie})^T \\ \boldsymbol{\omega}_{ib} - \boldsymbol{\omega}_{ie} & -(\Omega_{ib} + \Omega_{ie}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{eb_0} \\ \mathbf{q}_{eb} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{q}_{eb_0} = \frac{1}{2}(-\omega_{ib_1}q_{eb_1} - \omega_{ib_2}q_{eb_2} - (\omega_{ib_3} - \omega_{ie})q_{eb_3}) \\ \dot{q}_{eb_1} = \frac{1}{2}(\omega_{ib_1}q_{eb_0} + (\omega_{ib_3} + \omega_{ie})q_{eb_2} - \omega_{ib_2}q_{eb_3}) \\ \dot{q}_{eb_2} = \frac{1}{2}(\omega_{ib_2}q_{eb_0} - (\omega_{ib_3} + \omega_{ie})q_{eb_1} + \omega_{ib_1}q_{eb_3}) \\ \dot{q}_{eb_3} = \frac{1}{2}((\omega_{ib_3} - \omega_{ie})q_{eb_0} + \omega_{ib_2}q_{eb_1} - \omega_{ib_1}q_{eb_2}) \end{cases} \\ \tilde{q}_{eb}(t_0) &= \tilde{q}_{eb_0} \in \mathbb{H}_1^{13)} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \tilde{\omega}_{ib} = (0, \boldsymbol{\omega}_{ib}) = (0, \text{veck}(\Omega_{ib})) \quad \text{und} \quad \tilde{\omega}_{ie} = (0, \boldsymbol{\omega}_{ie}) = (0, \text{veck}(\Omega_{ie})).$$

¹³⁾ $\tilde{q}_{eb_0}$ folgt aus R_{eb_0} durch Umkehrung der Kartenabbildung.

Analog ergibt sich mit $\omega_{ih} = (-\dot{\varphi}, (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi, (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin \varphi)^T$ (s. (C.6)) der

Satz 2.22:

Bei Parametrisierung von $R_{hb} \in SO(3)$ mittels einer $\mathbb{H}_1$ -Quaternion, d.h. $R_{hb} = R_H(\tilde{q}_{hb})$, lautet die der $SO(3)$ -Anfangswertaufgabe

$$\dot{R}_{hb} = R_{hb}\Omega_{ib} - \Omega_{ih}R_{hb}, \quad R_{hb}(t_0) = R_{hb_0}$$

entsprechende Orientierungsanfangswertaufgabe für die $\mathbb{H}_1$ -Quaternion

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}}_{hb} &= \frac{1}{2}(\tilde{q}_{hb}\tilde{\omega}_{ib} - \tilde{\omega}_{ih}\tilde{q}_{hb}) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{q}_{hb_0} \\ \dot{\mathbf{q}}_{hb} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -(\omega_{ib} - \omega_{ih})^T \\ \omega_{ib} - \omega_{ih} & -(\Omega_{ib} + \Omega_{ih}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{hb} \\ \mathbf{q}_{hb} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{q}_{hb_0} = \frac{1}{2} \left(-(\omega_{ib_1} + \dot{\varphi})q_{hb_1} - (\omega_{ib_2} - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi)q_{hb_2} - (\omega_{ib_3} - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin \varphi)q_{hb_3} \right) \\ \dot{q}_{hb_1} = \frac{1}{2} \left((\omega_{ib_1} + \dot{\varphi})q_{hb_0} + (\omega_{ib_3} + (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin \varphi)q_{hb_2} - (\omega_{ib_2} + (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi)q_{hb_3} \right) \\ \dot{q}_{hb_2} = \frac{1}{2} \left((\omega_{ib_2} - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi)q_{hb_0} - (\omega_{ib_3} + (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin \varphi)q_{hb_1} + (\omega_{ib_1} - \dot{\varphi})q_{hb_3} \right) \\ \dot{q}_{hb_3} = \frac{1}{2} \left((\omega_{ib_3} - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin \varphi)q_{hb_0} + (\omega_{ib_2} + (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi)q_{hb_1} - (\omega_{ib_1} - \dot{\varphi})q_{hb_2} \right) \end{cases} \\ \tilde{q}_{hb}(t_0) &= \tilde{q}_{hb_0} \in \mathbb{H}_1^{14)} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \tilde{\omega}_{ib} = (0, \omega_{ib}) = (0, \text{veck}\Omega_{ib}) \quad \text{und} \quad \tilde{\omega}_{ih} = (0, \omega_{ih}) = (0, \text{veck}\Omega_{ih}) \quad .$$

Anmerkung 2.13: Das Vorzeichen der durch die Kartenabbildung (2.56) der Anfangsorientierung R_0 zu berechnenden Startquaternion $\tilde{q}_0$ überträgt sich demnach aufgrund der Linearität der Hamilton-Orientierungsdifferentialgleichung auf deren Lösung. Wegen $R_H(\tilde{q}) = R_H(-\tilde{q})$ ist die Eindeutigkeit der Darstellung der gemessenen Beschleunigungen im der Berechnung zugrundegelegten Bezugssystem (s. 3. Kapitel) gewährleistet. ■

Anmerkung 2.14: Im Falle einer zeitvariablen Koeffizientenmatrix ist die Lösung der Vektor-Anfangswertaufgabe

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) \quad , \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.71)$$

nur noch dann mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion darstellbar als

$$\mathbf{x}(t) = e^{\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau} \mathbf{x}_0 \quad , \quad (2.72)$$

wenn die Koeffizientenmatrizen zu verschiedenen Zeiten kommutieren. Ansonsten lautet die Lösung in (ebenfalls) nicht-geschlossener Form (s. z.B. [C.K. Chui; G. Chen(1989)], [J. Honerkamp(1990)]); Herleitung mit Picard-Iteration)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \left[I_3 - \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} A(t_1) A(t_2) dt_2 dt_1 + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{i+1} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \dots \int_{t_0}^{t_i} A(t_1) A(t_2) \dots A(t_{i+1}) dt_{i+1} \dots dt_2 dt_1 + \dots \right] \mathbf{x}_0 . \end{aligned} \quad (2.73)$$

¹⁴⁾ $\tilde{q}_{hb_0}$ folgt aus R_{hb_0} durch Umkehrung der Kartenabbildung.

Anmerkung 2.15: Nach Abschnitt 1 gilt für den Fall konstanter Zusammenhangsmatrizen

$$\dot{R}(t) = R(t)\Omega, \quad R(t_0) = R_0 \quad \xrightarrow{\text{Satz A.8}} \quad R(t) = R_0 e^{\Omega(t-t_0)}$$

$$\xrightarrow{\text{Satz 2.7}} \quad R(t) = R_0 \left(I_3 + \frac{\sin(\|\omega\|(t-t_0))}{\|\omega\|} \Omega + \frac{1 - \cos(\|\omega\|(t-t_0))}{\|\omega\|^2} \Omega^2 \right)$$

bzw.

$$\dot{R}(t) = R(t)\Omega_1 - \Omega_2 R(t), \quad R(t_0) = R_0 \quad \xrightarrow{\text{Satz A.8}} \quad R(t) = e^{-\Omega_2(t-t_0)} R_0 e^{\Omega_1(t-t_0)}$$

$$\xrightarrow{\text{Satz 2.7}} \quad R(t) = \left(I_3 - \frac{\sin(\|\omega_2\|(t-t_0))}{\|\omega_2\|} \Omega_2 + \frac{1 - \cos(\|\omega_2\|(t-t_0))}{\|\omega_2\|^2} \Omega_2^2 \right) R_0 \left(I_3 + \frac{\sin(\|\omega_1\|(t-t_0))}{\|\omega_1\|} \Omega_1 + \frac{1 - \cos(\|\omega_1\|(t-t_0))}{\|\omega_1\|^2} \Omega_1^2 \right).$$

Nach Satz 2.20 lauten die korrespondierenden in Quaternionen formulierten Gleichungen

$$\dot{\tilde{q}}(t) = \frac{1}{2} \tilde{q} \tilde{\omega}, \quad \tilde{q}(t_0) = \tilde{q}_0 \quad \xrightarrow{\text{Anm. 2.10}} \quad \tilde{q}(t) = \tilde{q}_0 \left(\begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \cos \frac{\|\omega\|(t-t_0)}{2}, \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \sin \frac{\|\omega\|(t-t_0)}{2} \frac{\omega}{\|\omega\|} \right)$$

bzw.

$$\dot{\tilde{q}}(t) = \frac{1}{2} (\tilde{q} \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 \tilde{q}), \quad \tilde{q}(t_0) = \tilde{q}_0$$

$$\xrightarrow{\text{Anm. 2.10}} \quad \tilde{q}(t) = \left(\begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \cos \frac{\|\omega_2\|(t-t_0)}{2}, \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \sin \frac{\|\omega_2\|(t-t_0)}{2} \frac{\omega_2}{\|\omega_2\|} \right) \tilde{q}_0 \left(\begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \cos \frac{\|\omega_1\|(t-t_0)}{2}, \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \sin \frac{\|\omega_1\|(t-t_0)}{2} \frac{\omega_1}{\|\omega_1\|} \right).$$

Im Vergleich folgt eine Reduktion der notwendigen Rechenoperationen. ■

5. Laning-Bortz-Stuelpnagel-Orientierungsdifferentialgleichungen

In [J.E. Bortz(1971)] wird das zur $SO(3)$ -Matrixdifferentialgleichung $\dot{R}(t) = R(t)\Omega(t)$, $\omega = \text{veck}(\Omega)$, korrespondierende Differentialgleichungssystem in Laning-Bortz-Stuelpnagel-Parametern hergeleitet zu

$$\dot{\sigma}(t) = \omega(t) + \frac{1}{2} \sigma(t) \times \omega(t) + \frac{1}{\|\sigma(t)\|^2} \left(1 - \frac{\|\sigma(t)\| \sin \|\sigma(t)\|}{2(1 - \cos \|\sigma(t)\|)} \right) \sigma(t) \times (\sigma(t) \times \omega(t)).$$

Mittels Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{\|\sigma(t)\|^2} \left(1 - \frac{\|\sigma(t)\| \sin \|\sigma(t)\|}{2(1 - \cos \|\sigma(t)\|)} \right) = \frac{1}{\|\sigma(t)\|^2} \left(1 - \frac{\|\sigma(t)\| \cot \frac{\|\sigma(t)\|}{2}}{2} \right) = \frac{1}{12} + \mathcal{O}^2(\|\sigma(t)\|)$$

folgt nach [P.G. Savage(1984)] bzw. [P.G. Savage(1998)]

$$\dot{\sigma}(t) = \omega(t) + \frac{1}{2} \sigma(t) \times \omega(t) + \frac{1}{12} \sigma(t) \times (\sigma(t) \times \omega(t)) + \mathcal{O}^4.$$

Die von P.G. Savage angegebene Lösung

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \omega(\tau) d\tau \times \omega(t^*) dt^* + \mathcal{O}^3$$

genügt i.a. nur der verkürzten Differentialgleichung

$$\dot{\sigma}(t) = \omega(t) + \frac{1}{2} \sigma(t) \times \omega(t) + \mathcal{O}^2,$$

wovon man sich durch Einsetzen leicht überzeugt.

Für den allgemeineren Fall der Verknüpfung von drei Koordinatensystemen berechnet sich die Orientierungsparameterdifferentialgleichung nach

Satz 2.23:

Bei Parametrisierung von $R \in SO(3)$ mittels Laning-Bortz-Stuelpnagel-Parameter, d.h. $R = e^\Sigma$ mit $\sigma = \text{veck}(\Sigma)$ und $\sigma = \|\sigma\|$, lautet die der $SO(3)$ -Anfangswertaufgabe

$$\dot{R} = R\Omega_1 - \Omega_2 R, \quad R(t_0) = R_0$$

entsprechende Orientierungsanfangswertaufgabe für die Laning-Bortz-Stuelpnagel-Parameter

$$\dot{\sigma}(t) = \omega_1(t) - \omega_2(t) + \frac{1}{2} \sigma(t) \times (\omega_1(t) + \omega_2(t)) + \frac{1}{\|\sigma(t)\|^2} \left(1 - \frac{\|\sigma(t)\| \sin \|\sigma(t)\|}{2(1 - \cos \|\sigma(t)\|)} \right) \sigma(t) \times (\sigma(t) \times (\omega_1(t) - \omega_2(t))),$$

mit $\omega_1 = \text{veck}(\Omega_1)$ und $\omega_2 = \text{veck}(\Omega_2)$. ■

KAPITEL 3:

Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen

Die Akzelerometertriade im Trägheitsnavigationssystem registriert nicht nur den Vektor der inertialen Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{x}}_i(P_b)(t)$ ¹⁾ des Triadenzentrums P_b bzgl. eines Inertialsystems, sondern auch den der gravitativen Beschleunigungen $\text{grad}_{\mathbf{x}_i} V(\mathbf{x}_i(P_b)(t))$, welche das Triadenzentrum P_b am Ort $\mathbf{x}_i(P_b)(t)$ aufgrund der zum Zeitpunkt t vorliegenden Massenverteilung im Universum erfährt. Sei $\mathbf{f}_b$ der von der – als fehlerfrei angenommenen – Akzelerometertriade im Beobachtungssystem $(P_b, \mathbf{b})$ registrierte Beschleunigungsvektor. Dann gilt

$$\ddot{\mathbf{x}}_i(P_b)(t) = \mathbf{i} \left[R_{ib}(t) \mathbf{f}_b(P_b)(t) + \text{grad}_{\mathbf{x}_i} V(\mathbf{x}_i(P_b)(t)) \right]. \quad (3.1)$$

Dabei werden die Gravitationpotentialwerte, wie in der Geodäsie üblich, positiv definiert, d.h. das Gravitationspotential wächst, wenn man sich Massen nähert. Zur Transparenz der Richtigkeit der Vorzeichen in Beziehung (3.1) dient das folgende eindimensionale Schema (s. [K.P. Schwarz(1980)]).

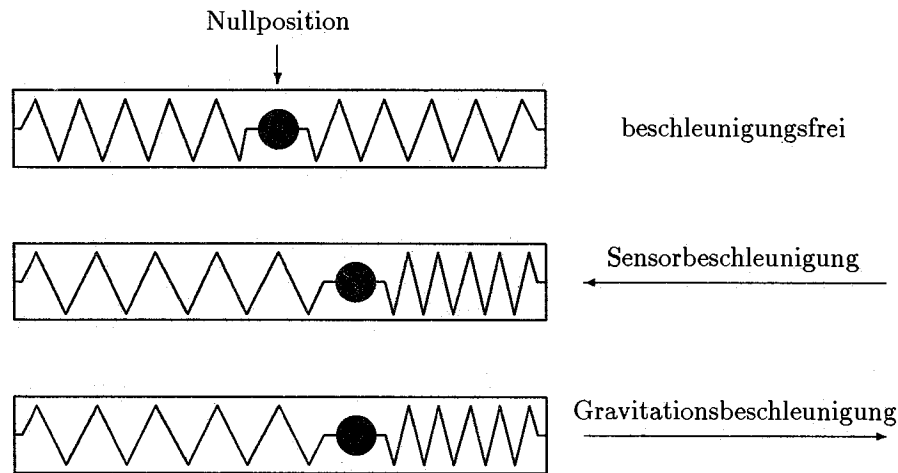


Abbildung 3.1: Schematischer Querschnitt eines einachsigen Beschleunigungsmessers beim Angreifen verschiedener Kräfte entlang der sensitiven Achse

Die nichtlinearen Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen 1. Ordnung im $(P_i, \mathbf{i})$ -System folgen aus (3.1) durch Zerlegung in ein System 1. Ordnung²⁾

$$\dot{\mathbf{x}}_i(P_b)(t) = \mathbf{v}_i(P_b)(t) \quad (3.2)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_i(P_b)(t) = R_{ib}(t) \mathbf{f}_b(P_b)(t) + \text{grad}_{\mathbf{x}_i} V(\mathbf{x}_i(P_b)(t)). \quad (3.3)$$

Aufgrund der Zeitabhängigkeit des Gravitationsvektorfeldmodells $\text{grad}_{\mathbf{x}_i} V$ im Quasi-Inertialsystem, der bereits diskutierten Notwendigkeit der Definition eines „absoluten“ Quasi-Inertialsystems in obigem Fall und dem naheliegenden Wunsch den Zustand bzgl. des $(P_e, \mathbf{e})$ - bzw. $(P_h, \mathbf{h})$ -Systems auszudrücken, leiten wir in den folgenden beiden Abschnitten aus der Beschleunigungsbilanz (3.1) die entsprechenden Beziehungen in diesen Bezugssystemen her.

Im weiteren werden wir sowohl die Angabe der expliziten Zeitabhängigkeit, als auch speziell die Angabe, daß sich die Sensordaten auf das Triadenzentrum P_b beziehen, unterdrücken, soweit keine Verwechslungsgefahr besteht. Ein Überblick über technologische Realisierungen von Akzelerometern ist beispielsweise in [J.M. Rüeger(1986)] (s.a. [P.G. Savage(1978)] und [P.G. Savage(1984)] für Pendelbeschleunigungsmesser) gegeben.

1. Darstellung in kartesischen Koordinaten

Analog zu (1.15) bzw. (1.16) ist

¹⁾ $\mathbf{x}_i(P_b)$ ist der Ortsvektor des Triadenzentrums P_b im Quasi-Inertialsystem, welcher eine Funktion der Zeit t ist.

²⁾ In Kombination mit der $SO(3)$ -Differentialgleichung $\dot{R}_{ib}(t) = R_{ib}(t) \Omega_{ib}(t)$ wäre das Trägheitsnavigationsdifferentialgleichungssystem im $(P_i, \mathbf{i})$ -System komplett.

$$P_i \vec{P}_b = P_i \vec{P}_e + P_e \vec{P}_b \quad (3.4)$$

bzw.

$$\mathbf{i} \mathbf{x}_i(P_b) = \mathbf{i} [\mathbf{x}_i(P_e) + R_{ie} \mathbf{x}_e(P_b)] \quad (3.5)$$

1. Ableitung nach der Zeit t :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{i} \right) \mathbf{x}_i(P_b) + \mathbf{i} \dot{\mathbf{x}}_i(P_b) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{i} \right) [\mathbf{x}_i(P_e) + R_{ie} \mathbf{x}_e(P_b)] + \mathbf{i} \left[\dot{\mathbf{x}}_i(P_e) + \underbrace{\dot{R}_{ie}}_{R_{ie} \Omega_{ie}} \mathbf{x}_e(P_b) + R_{ie} \dot{\mathbf{x}}_e(P_b) \right] \\ \Rightarrow \mathbf{i} \dot{\mathbf{x}}_i(P_b) &= \mathbf{i} [\dot{\mathbf{x}}_i(P_e) + R_{ie} (\Omega_{ie} \mathbf{x}_e(P_b) + \dot{\mathbf{x}}_e(P_b))] \end{aligned} \quad (3.6)$$

2. Ableitung nach der Zeit t :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{i} \right) \dot{\mathbf{x}}_i(P_b) + \mathbf{i} \ddot{\mathbf{x}}_i(P_b) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{i} \right) [\dot{\mathbf{x}}_i(P_e) + R_{ie} (\Omega_{ie} \mathbf{x}_e(P_b) + \dot{\mathbf{x}}_e(P_b))] \\ &+ \mathbf{i} \left[\ddot{\mathbf{x}}_i(P_e) + \underbrace{\dot{R}_{ie}}_{R_{ie} \Omega_{ie}} (\Omega_{ie} \mathbf{x}_e(P_b) + \dot{\mathbf{x}}_e(P_b)) + R_{ie} (\dot{\Omega}_{ie} \mathbf{x}_e(P_b) + \Omega_{ie} \dot{\mathbf{x}}_e(P_b) + \ddot{\mathbf{x}}_e(P_b)) \right] \\ \Rightarrow \mathbf{i} \ddot{\mathbf{x}}_i(P_b) &= \mathbf{i} [\ddot{\mathbf{x}}_i(P_e) + R_{ie} (\ddot{\mathbf{x}}_e(P_b) + 2\Omega_{ie} \dot{\mathbf{x}}_e(P_b) + \Omega_{ie}^2 \mathbf{x}_e(P_b) + \dot{\Omega}_{ie} \mathbf{x}_e(P_b))] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Drückt man die linke Seite der erhaltenen Beschleunigungsbilanz (3.7) durch die inertialen und gravitativen Beschleunigungen nach (3.1) aus, so folgt

$$\mathbf{i} [R_{ib} \mathbf{f}_b + \text{grad}_{\mathbf{x}_i} V(\mathbf{x}_i(P_b))] = \mathbf{i} [\ddot{\mathbf{x}}_i(P_e) + R_{ie} (\ddot{\mathbf{x}}_e(P_b) + 2\Omega_{ie} \dot{\mathbf{x}}_e(P_b) + \Omega_{ie}^2 \mathbf{x}_e(P_b) + \dot{\Omega}_{ie} \mathbf{x}_e(P_b))] \quad (3.8)$$

$V(\mathbf{x}_i(P_b))$ – das Gravitationspotential aller Massen im Universum im Triadenzentrum P_b am Ort $\mathbf{x}_i$ – zerlegen wir additiv in das Gravitationspotential terrestrischer Massen $V_e(\mathbf{x}_i(P_b))$ und das extraterrestrischer Massen $V_{ex}(\mathbf{x}_i(P_b))$ und betrachten den Ausdruck

$$\ddot{\mathbf{x}}_i(P_e) + \text{grad}_{\mathbf{x}_i} V_{ex}(\mathbf{x}_i(P_b)) \quad (3.9)$$

Da die Erde „frei um die Sonne fällt“, muß (3.9) evaluiert im Geozentrum ($P_b = P_e$, $\text{grad } V_e(P_e) = 0$) verschwinden (s. z.B. [K.R. Britting(1971)]). (3.9) repräsentiert eine durch die Abweichung des Triadenzentrums P_b vom Geozentrum P_e bedingte Beschleunigung und heißt gemeinhin Gezeitenbeschleunigung (engl. “tidal acceleration”). Wir bezeichnen (3.9) deshalb mit $\text{grad}_{\mathbf{x}_i} V_t(\mathbf{x}_i(P_b), t)^{3)}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{i} [R_{ib} \mathbf{f}_b + \text{grad}_{\mathbf{x}_i} V_e(\mathbf{x}_i(P_b)) + \text{grad}_{\mathbf{x}_i} V_t(\mathbf{x}_i(P_b))] &= \\ = \mathbf{i} R_{ie} [\ddot{\mathbf{x}}_e(P_b) + 2\Omega_{ie} \dot{\mathbf{x}}_e(P_b) + \Omega_{ie}^2 \mathbf{x}_e(P_b) + \dot{\Omega}_{ie} \mathbf{x}_e(P_b)] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Mittels der Vektorbasistransformation $\mathbf{e} = \mathbf{i} R_{ie}$ bzw. $\mathbf{i} = \mathbf{e} R_{ei}$ folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{e} [R_{eb} \mathbf{f}_b + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_e(\mathbf{x}_e(P_b)) + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_t(\mathbf{x}_e(P_b))] &= \\ = \mathbf{e} [\ddot{\mathbf{x}}_e(P_b) + 2\Omega_{ie} \dot{\mathbf{x}}_e(P_b) + \Omega_{ie}^2 \mathbf{x}_e(P_b) + \dot{\Omega}_{ie} \mathbf{x}_e(P_b)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

bzw. aufgelöst nach der erdbezogenen Fahrzeugbeschleunigung

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \ddot{\mathbf{x}}_e(P_b) &= \mathbf{e} [R_{eb} \mathbf{f}_b - 2\Omega_{ie} \dot{\mathbf{x}}_e(P_b) - \Omega_{ie}^2 \mathbf{x}_e(P_b) - \dot{\Omega}_{ie} \mathbf{x}_e(P_b) \\ &+ \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_e(\mathbf{x}_e(P_b)) + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_t(\mathbf{x}_e(P_b))] \end{aligned} \quad (3.12)$$

³⁾ Da die – durch die zeitvariate Planetenkonstellation verursachte – explizite Zeitabhängigkeit des Gezeitenpotentials kaum von Bedeutung ist, notieren wir sie im weiteren nicht explizit.

Interpretation der Summanden in der Beschleunigungsbilanz (3.12):

$\ddot{\mathbf{x}}_e(P_b)$	Vektor der translativen Beschleunigung des Triadenzentrums P_b bzgl. des (P_e, e) -Systems
$R_{eb}\mathbf{f}_b$	ins (P_e, e) -System vektortransformierte Akzelerometerdaten (bisher als fehlerfrei angenommen)
$2\Omega_{ie}\dot{\mathbf{x}}_e(P_b)$	Coriolisbeschleunigung im Triadenzentrum P_b (bzgl. des (P_e, e) -Systems)
$\Omega_{ie}^2\mathbf{x}_e(P_b)$	Zentrifugalbeschleunigung im Triadenzentrum P_b (bzgl. des (P_e, e) -Systems)
$\dot{\Omega}_{ie}\mathbf{x}_e(P_b)$	Eulerbeschleunigung im Triadenzentrum P_b (bzgl. des (P_e, e) -Systems)
$\text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_e(\mathbf{x}_e(P_b))$	Gradient des Gravitationspotentials terrestrischer Massen im Triadenzentrum P_b mit Ortsvektor $\mathbf{x}_e(P_b)$ (bzgl. des (P_e, e) -Systems)
$\text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_t(\mathbf{x}_e(P_b))$	Gradient des von extraterrestrischen Massen verursachten Gezei- tenpotentials im Triadenzentrum P_b mit Ortsvektor $\mathbf{x}_e(P_b)$ (bzgl. des (P_e, e) -Systems)

Bedeutung der spezifischen Trägheitskräfte:

- Coriolisbeschleunigung $2\Omega_{ie}\dot{\mathbf{x}}_e(P_b) = 2\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \dot{\mathbf{x}}_e(P_b)$ ($\boldsymbol{\omega}_{ie} = \text{veck}(\Omega_{ie})$)
Dieser Anteil ist verschieden von Null, wenn sich das Triadenzentrum P_b bzgl. des (P_e, e) -Systems mit von Null verschiedener Geschwindigkeit bewegt und $\boldsymbol{\omega}_{ie} \nparallel \dot{\mathbf{x}}_e(P_b)$ gilt. Die Coriolisbeschleunigung ist bei konstanter Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}_e(P_b)$ extremal für $\boldsymbol{\omega}_{ie} \perp \dot{\mathbf{x}}_e(P_b)$. Bei horizontaler Bewegung in meridionaler Richtung in der nördlichen (südlichen) Hemisphäre ist die Coriolisbeschleunigung nach rechts (links), bei Bewegung in zenitaler (nadiraler) Richtung nach Westen (Osten) und bei Bewegung in östlicher (westlicher) Richtung in Richtung des Zenits (Nadirs) gerichtet.
- Zentrifugalbeschleunigung $\Omega_{ie}^2\mathbf{x}_e(P_b) = \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{x}_e(P_b))$
Dieser Anteil liefert auch dann einen Beitrag zur Gesamtbilanz, wenn das Triadenzentrum P_b im (P_e, e) -System ruht. Die Zentrifugalbeschleunigung ist orthogonal zur Erdrotationsachse $\boldsymbol{\omega}_{ie}$. Ihr Betrag ist $\omega_{ie}^2 r$ mit dem Achsabstand r .
- Eulerbeschleunigung $\dot{\Omega}_{ie}\mathbf{x}_e(P_b) = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie} \times \mathbf{x}_e(P_b)$
Läßt man für die Zwecke der Navigation Polwanderung und -bewegung außer acht (keine Änderung in für die Navigation relevanten Zeiträumen), so verbleibt lediglich der die Ungleichförmigkeit der Erdrotation beschreibende Anteil. Nach [B.H. Chovitz(1988)] ist $\dot{\omega}_{ie} = -4,6 \pm 0,4 \cdot 10^{-22} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ und der Beitrag der Eulerbeschleunigung zur Gesamtbilanz somit sehr gering.

(3.12) ist eine gewöhnliche, nichtlineare Vektordifferentialgleichung 2. Ordnung, welche aus dem $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^3$ abbildet. Mittels der Substitution $\mathbf{v}_e(P_b) = \dot{\mathbf{x}}_e(P_b)$ folgt das gewöhnliche, nichtlineare, inhomogene Vektordifferentialgleichungssystem 1. Ordnung aus dem

Satz 3.1:

Sei die Position in kartesischen Koordinaten und die Geschwindigkeit bzgl. des erdfesten Bezugsachsensystems e dargestellt.

Dann lauten die Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_e(P_b) &= \mathbf{v}_e(P_b) \\ \dot{\mathbf{v}}_e(P_b) &= R_{eb}\mathbf{f}_b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e(P_b) - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{x}_e(P_b)) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie} \times \mathbf{x}_e(P_b) \\ &\quad + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_e(\mathbf{x}_e(P_b)) + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_t(\mathbf{x}_e(P_b))\end{aligned}$$

■

Bei Darstellung von Position und Geschwindigkeit im erdfesten, kartesischen Koordinatensystem (P_e, e) – entspricht dem WGS84 – resultieren somit Differentialgleichungen von einfacher Struktur. Coriolis-, Zentrifugal- und Eulerbeschleunigung sind linear im Zustand und haben konstante Koeffizienten. Lediglich der Gravitationsvektor hängt nichtlinear vom Ort ab.

2. Darstellung in ellipsoidnormalen Koordinaten

Die Darstellung von Position und Geschwindigkeit im (P_e, e) -System ist nicht sehr anschaulich. Vom interpretatorischen Standpunkt bieten sich zur Beschreibung der Position geodätische Koordinaten und die Transformation des Geschwindigkeitsvektors ins rotationsellipsoidische Horizontsystem (P_h, h) mit ost-nord-vertikal-weisenden Bezugsachsen an, d.h.

$$\begin{aligned} (x, y, z)^T &\rightarrow (\lambda, \varphi, h)^T, \\ (v_x, v_y, v_z)^T &\rightarrow (v_o, v_n, v_v)^T. \end{aligned}$$

Diese Transformationen können entweder a priori, d.h. vor Lösung des Differentialgleichungssystems, oder a posteriori, d.h. nach Lösung des Differentialgleichungssystems erfolgen. Stabilität, Beobachtbarkeit und Linearisierungsfehler des resultierenden linearisierten Trägheitsnavigationsdifferentialgleichungssystems sind die adäquaten Kriterien zur Wahl der Reihenfolge. Da die a priori Transformation durch die Verbreitung von Plattformsystemen zur verbreitetsten Parametrisierung von Position und Geschwindigkeit führt, stellen wir sie im weiteren ebenfalls bereit.

Wie man aus Satz 3.1 ersieht, beziehen sich alle auftretenden Positions-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren auf das Triadenzentrum P_b . Wo es zu keinen Verwechslungen kommen kann, verzichten wir im weiteren auf die explizite Angabe des Triadenzentrums.

(a) Positionsdifferentialgleichungen:

Wir definieren

$$\mathbf{v}_h := R_{he} \mathbf{v}_e = R_{he} \dot{\mathbf{x}}_e. \quad (3.13)$$

Mit (1.6) und (1.20) folgt

$$\begin{pmatrix} v_o \\ v_n \\ v_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N(\varphi) + h) \cos \varphi \dot{\lambda} \\ (M(\varphi) + h) \dot{\varphi} \\ h \dot{h} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad M(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.14)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(N(\varphi)+h) \cos \varphi} v_o \\ \frac{1}{M(\varphi)+h} v_n \\ v_v \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (3.15)$$

(b) Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen:

Zeitliche Differentiation von $\mathbf{v}_h = R_{he} \mathbf{v}_e$ ergibt

$$\dot{\mathbf{v}}_h = \dot{R}_{he} \mathbf{v}_e + R_{he} \dot{\mathbf{v}}_e \quad (3.16)$$

und damit

$$\dot{\mathbf{v}}_e = R_{he}^T \dot{\mathbf{v}}_h - \underbrace{R_{he}^T \dot{R}_{he}}_{\Omega_{he}} \underbrace{\mathbf{v}_e}_{R_{he}^T \mathbf{v}_h}. \quad (3.17)$$

Einsetzen von (3.17) und (1.6) in (3.12) liefert

$$\begin{aligned} R_{he}^T \dot{\mathbf{v}}_h - \Omega_{he} R_{he}^T \mathbf{v}_h &= R_{eb} \mathbf{f}_b - 2\Omega_{ie} R_{he}^T \mathbf{v}_h - \Omega_{ie}^2 \mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h) - \dot{\Omega}_{ie} \mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h) \\ &\quad + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_e(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_t(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{\mathbf{v}}_h &= R_{he} R_{eb} \mathbf{f}_b - R_{he} (2\Omega_{ie} - \Omega_{he}) R_{he}^T \mathbf{v}_h - R_{he} \Omega_{ie}^2 \mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h) - R_{he} \dot{\Omega}_{ie} \mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h) \\ &\quad + R_{he} (\text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_e(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_t(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h))). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Unter Berücksichtigung von

$$R_{he} \Omega_{ie} R_{he}^T = \Omega_{ih} - \Omega_{eh} \quad (\text{nach Satz C.6}) \quad (3.20)$$

$$R_{he} \Omega_{he} R_{he}^T = -\Omega_{eh} \quad (\text{nach Satz C.3}) \quad (3.21)$$

folgt schließlich

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_h &= R_{he} R_{eb} \mathbf{f}_b + (\Omega_{eh} - 2\Omega_{ih}) \mathbf{v}_h - R_{he} \Omega_{ie}^2 \mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h) - R_{he} \dot{\Omega}_{ie} \mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h) \\ &\quad + R_{he} \left(\text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_e(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_t(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} &= R_{he} R_{eb} \mathbf{f}_b + (\boldsymbol{\omega}_{eh} - 2\boldsymbol{\omega}_{ih}) \times \mathbf{v}_h - R_{he} \left(\boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) \right) - R_{he} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie} \times \mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) \\ &\quad + R_{he} \left(\text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_e(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_t(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Wir fassen Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen zusammen im

Satz 3.2:

Sei die Position in geodätischen (geographischen, ellipsoidnormalen) Koordinaten und die Geschwindigkeit bzgl. des horizontalen Bezugsachsensystems $\mathbf{h}$ dargestellt.

Dann lauten die Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{h} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{(N(\varphi)+h) \cos \varphi} v_o \\ \frac{1}{M(\varphi)+h} v_n \\ v_v \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{v}}_h &= R_{he} R_{eb} \mathbf{f}_b + (\boldsymbol{\omega}_{eh} - 2\boldsymbol{\omega}_{ih}) \times \mathbf{v}_h - R_{he} \left(\boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) \right) - R_{he} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie} \times \mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) \\ &\quad + R_{he} \left(\text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_e(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_t(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) \right) \end{aligned}$$

■

KAPITEL 4:

Trägheitsnavigationsdifferentialgleichungssysteme (TNDgLS)

Nachdem wir in den beiden vorhergehenden Kapiteln Positions-, Geschwindigkeits- und Orientierungsdifferentialgleichungen in den verschiedensten Parametrisierungen hergeleitet haben, werden wir diese im 1. Abschnitt dieses Kapitels geeignet zu nichtlinearen Trägheitsnavigationsdifferentialgleichungssystemen (TNDgLS) kombinieren. Im Anschluß daran zerlegen wir die bislang als fehlerfrei angenommenen Sensordaten in Näherung und Fehler, diskutieren im 2. Abschnitt das angewandte Linearisierungsprinzip im Falle von TNDgLS und wenden es im 3. Abschnitt auf die im 1. Abschnitt aufgestellten nichtlinearen TNDgLS an. Damit ist die Formulierung von nichtlinearen und linearisierten Zustandsraummodellen für den Einsatz in Kalman-Schätzern und damit die Modellierung abgeschlossen.

Da die $SO(3)$ -Parametrisierung in Hamilton-Quaternionen einen lokalen Homöomorphismus darstellt und die Hamilton-Orientierungsdifferentialgleichungen linear in den Orientierungsparametern (Quaternionenkomponenten) bzw. bilinear in Orientierungsparametern und Kreiselraten sind, geben wir im weiteren generell den Hamilton-Quaternionendifferentialgleichungen gegenüber den Orientierungsdifferentialgleichungen aus anderen Parametrisierungen den Vorzug.

1. Nichtlineare TNDgLS

Nach Definition des rotationsellipsoidischen Horizontsystems $(P_h, \mathbf{h})$ ist dieses abhängig von den Lagekoordinaten (λ, φ) des Triadenzentrums P_b . Damit ist R_{hb} und schließlich auch beliebige R_{hb} parametrisierende Sätze von Orientierungsparametern, z.B. $\tilde{q}_{hb}$, von den Lagekoordinaten abhängig, was aufgrund von $\omega_{ih} = \omega_{ih}(\varphi, \lambda, \dot{\varphi})$ (s. (C.6)) aus (s. Satz 2.22)

$$\dot{R}_{hb} = R_{hb}\Omega_{ib} - \Omega_{ih}R_{hb} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\tilde{q}}_{hb} = \tilde{q}_{hb}\tilde{\omega}_{ib} - \tilde{\omega}_{ih}\tilde{q}_{hb}$$

folgt. Demgegenüber gilt nach Satz 2.21

$$\dot{R}_{eb} = R_{eb}\Omega_{ib} - \Omega_{ie}R_{eb} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\tilde{q}}_{eb} = \tilde{q}_{eb}\tilde{\omega}_{ib} - \tilde{\omega}_{ie}\tilde{q}_{eb}$$

und damit sind R_{eb} und alle R_{eb} parametrisierenden Sätze von Orientierungsparametern unabhängig von Position und Geschwindigkeit. Dies hat den entscheidenden Vorteil (s. 6. Kapitel), daß Positions- und/oder Geschwindigkeitsfehler die Orientierung nicht verschlechtern können. Da Positions-/Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen und Orientierungsdifferentialgleichungen nicht entkoppelt sind, ist eine Umkehrung der Aussage nicht möglich. Daß die Verwendung einer unabhängigen Orientierung nicht auf die Darstellung der Beschleunigungsbilanz im $(P_e, \mathbf{e})$ -System nach Satz 3.1 beschränkt ist, haben wir bei deren Darstellung im $(P_h, \mathbf{h})$ -System in Satz 3.2 bereits durch die Darstellung von R_{hb} als $R_{he}R_{eb}$ angedeutet.

Durch Kombination von Satz 3.1 und Satz 2.21 folgt der

Satz 4.1:

Das gewöhnliche, nichtlineare, homogene $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgLS 1. Ordnung lautet

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_e &= \mathbf{v}_e \\ \dot{\mathbf{v}}_e &= R_H(\tilde{q}_{eb})\mathbf{f}_b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{x}_e) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie} \times \mathbf{x}_e \\ &\quad + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_e(\mathbf{x}_e) + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_t(\mathbf{x}_e) \\ \dot{\tilde{q}}_{eb} &= \frac{1}{2}(\tilde{q}_{eb}\tilde{\omega}_{ib} - \tilde{\omega}_{ie}\tilde{q}_{eb}) \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\omega}_{ib} = (0, \boldsymbol{\omega}_{ib}), \tilde{\omega}_{ie} = (0, \boldsymbol{\omega}_{ie}) \in \mathbb{H}_0, \boldsymbol{\omega}_{ie} = (0, 0, \omega_{ie})^T, \tilde{q}_{eb} \in \mathbb{H}_1$$

$\mathbf{f}_b$ Vektor der Akzelerometerdaten

$\boldsymbol{\omega}_{ib}$ Vektor der Kreiselraten

$$R_H(\tilde{q}_{eb}) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}$$

bzw. explizit mit $\mathbf{f}_e(\tilde{q}_{eb}) = R_H(\tilde{q}_{eb})\mathbf{f}_b$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_e &= v_{x_e} \\
 \dot{y}_e &= v_{y_e} \\
 \dot{z}_e &= v_{z_e} \\
 \dot{v}_{x_e} &= f_{e1}(\tilde{q}_{eb}) + 2\omega_{ie}v_{y_e} + \omega_{ie}^2x_e + \dot{\omega}_{ie}y_e + \frac{\partial}{\partial x_e}(V_e(\mathbf{x}_e) + V_t(\mathbf{x}_e)) \\
 \dot{v}_{y_e} &= f_{e2}(\tilde{q}_{eb}) - 2\omega_{ie}v_{x_e} + \omega_{ie}^2y_e - \dot{\omega}_{ie}x_e + \frac{\partial}{\partial y_e}(V_e(\mathbf{x}_e) + V_t(\mathbf{x}_e)) \\
 \dot{v}_{z_e} &= f_{e3}(\tilde{q}_{eb}) + \frac{\partial}{\partial z_e}(V_e(\mathbf{x}_e) + V_t(\mathbf{x}_e)) \\
 \dot{q}_{eb0} &= \frac{1}{2}(-\omega_{ib1}q_{eb1} - \omega_{ib2}q_{eb2} - (\omega_{ib3} - \omega_{ie})q_{eb3}) \\
 \dot{q}_{eb1} &= \frac{1}{2}(\omega_{ib1}q_{eb0} + (\omega_{ib3} + \omega_{ie})q_{eb2} - \omega_{ib2}q_{eb3}) \\
 \dot{q}_{eb2} &= \frac{1}{2}(\omega_{ib2}q_{eb0} - (\omega_{ib3} + \omega_{ie})q_{eb1} + \omega_{ib1}q_{eb3}) \\
 \dot{q}_{eb3} &= \frac{1}{2}((\omega_{ib3} - \omega_{ie})q_{eb0} + \omega_{ib2}q_{eb1} - \omega_{ib1}q_{eb2})
 \end{aligned}$$

■

Durch Kombination von Satz 3.2 und Satz 2.21 folgt der

Satz 4.2:

Das gewöhnliche, nichtlineare, homogene $((\lambda, \varphi, h)^T, \mathbf{v}_h, \tilde{q}_{eb})$ -TNDglS 1. Ordnung lautet

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{h} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{(N(\varphi)+h) \cos \varphi} v_o \\ \frac{1}{M(\varphi)+h} v_n \\ v_v \end{pmatrix} \\
 \dot{\mathbf{v}}_h &= R_{he} \underbrace{R_H(\tilde{q}_{eb})\mathbf{f}_b}_{\mathbf{f}_e(\tilde{q}_{eb})} + (\boldsymbol{\omega}_{eh} - 2\boldsymbol{\omega}_{ih}) \times \mathbf{v}_h - R_{he}(\boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h))) \\
 &\quad - R_{he}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie} \times \mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) + R_{he} \text{grad}_{\mathbf{x}_e}(V_e(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) + V_t(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h))) \\
 \dot{\tilde{q}}_{eb} &= \frac{1}{2}(\tilde{q}_{eb}\tilde{\omega}_{ib} - \tilde{\omega}_{ie}\tilde{q}_{eb})
 \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\omega}_{ib} = (0, \boldsymbol{\omega}_{ib}), \tilde{\omega}_{ie} = (0, \boldsymbol{\omega}_{ie}) \in \mathbb{H}_0, \boldsymbol{\omega}_{ie} = (0, 0, \omega_{ie})^T, \tilde{q}_{eb} \in \mathbb{H}_1$$

$\mathbf{f}_b$ Vektor der Akzelerometerdaten

$\boldsymbol{\omega}_{ib}$ Vektor der Kreiseldaten

$$\boldsymbol{\omega}_{ih} = \left(-\frac{1}{M(\varphi)+h} v_n, \frac{1}{N(\varphi)+h} v_o + \omega_{ie} \cos \varphi, \frac{1}{N(\varphi)+h} \tan \varphi v_o + \omega_{ie} \sin \varphi \right)^T$$

$$\boldsymbol{\omega}_{eh} = \left(-\frac{1}{M(\varphi)+h} v_n, \frac{1}{N(\varphi)+h} v_o, \frac{1}{N(\varphi)+h} \tan \varphi v_o \right)^T$$

$$\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h) = \begin{pmatrix} (N(\varphi) + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N(\varphi) + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ (\frac{b^2}{a^2} N(\varphi) + h) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{und} \quad M(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

$$R_{he} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$R_H(\tilde{q}_{eb}) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}$$

bzw. explizit mit $\mathbf{f}_e(\tilde{q}_{eb}) = R_H(\tilde{q}_{eb})\mathbf{f}_b$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{1}{(N(\varphi) + h) \cos \varphi} v_o \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{M(\varphi) + h} v_n \\ \dot{h} &= v_v \\ \dot{v}_o &= -\sin \lambda f_{e_1}(\tilde{q}_{eb}) + \cos \lambda f_{e_2}(\tilde{q}_{eb}) - \frac{1}{N(\varphi) + h} v_o (v_v - \tan \varphi v_n) - 2\omega_{ie}(v_v \cos \varphi - v_n \sin \varphi) \\ &\quad - \dot{\omega}_{ie}(N(\varphi) + h) \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial x_h} (V_e(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) + V_t(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h))) \\ \dot{v}_n &= -\cos \lambda \sin \varphi f_{e_1}(\tilde{q}_{eb}) - \sin \lambda \sin \varphi f_{e_2}(\tilde{q}_{eb}) + \cos \varphi f_{e_3}(\tilde{q}_{eb}) - \frac{1}{N(\varphi) + h} \tan \varphi v_o^2 - 2\omega_{ie} \sin \varphi v_o \\ &\quad - \frac{1}{M(\varphi) + h} v_n v_v - \omega_{ie}^2 (N(\varphi) + h) \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial y_h} (V_e(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) + V_t(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h))) \\ \dot{v}_v &= \cos \lambda \cos \varphi f_{e_1}(\tilde{q}_{eb}) + \sin \lambda \cos \varphi f_{e_2}(\tilde{q}_{eb}) + \sin \varphi f_{e_3}(\tilde{q}_{eb}) + \frac{1}{M(\varphi) + h} v_n^2 + \frac{1}{N(\varphi) + h} v_o^2 \\ &\quad + 2\omega_{ie} \cos \varphi v_o + \omega_{ie}^2 (N(\varphi) + h) \cos^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial z_h} (V_e(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h)) + V_t(\mathbf{x}_e(\lambda, \varphi, h))) \\ \dot{q}_{eb_0} &= \frac{1}{2} (-\omega_{ib_1} q_{eb_1} - \omega_{ib_2} q_{eb_2} - (\omega_{ib_3} - \omega_{ie}) q_{eb_3}) \\ \dot{q}_{eb_1} &= \frac{1}{2} (\omega_{ib_1} q_{eb_0} + (\omega_{ib_3} + \omega_{ie}) q_{eb_2} - \omega_{ib_2} q_{eb_3}) \\ \dot{q}_{eb_2} &= \frac{1}{2} (\omega_{ib_2} q_{eb_0} - (\omega_{ib_3} + \omega_{ie}) q_{eb_1} + \omega_{ib_1} q_{eb_3}) \\ \dot{q}_{eb_3} &= \frac{1}{2} ((\omega_{ib_3} - \omega_{ie}) q_{eb_0} + \omega_{ib_2} q_{eb_1} - \omega_{ib_1} q_{eb_2}) \end{aligned}$$

Nach der Anfangsorientierungsphase könnte man sich also alleine auf die Lösung der Orientierungsdifferentialgleichungen beschränken. Allerdings können Positions- und/oder Geschwindigkeitsbeobachtungen dann nicht zur Orientierungsverbesserung verwendet werden (s. 7. Kapitel).

2. Linearisierung nach B. Taylor

Nichtlineare TNDglS sind von der Form

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t), \mathbf{s}(t)), \quad t > t_0 \quad (4.1)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) & \quad \text{Vektor der (fehlerfreien) Systemzustände zum Zeitpunkt } t \\ \mathbf{s}(t) &:= (\boldsymbol{\omega}_{ib}(t), \mathbf{f}_b(t))^T \quad \text{Vektor der (fehlerfreien) Sensordaten zum Zeitpunkt } t \end{aligned}$$

und bilden zusammen mit der Anfangsbedingung $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ ein Anfangswertproblem. Die Gleichungen wurden mit den Prinzipien der Newtonschen Mechanik hergeleitet und gelten demnach für die tatsächlichen, d.h. fehlerfreien, Größen. Die Berechnungen sind jedoch auf den teils gemessenen, teils geschätzten Anfangswert des Zustandsvektors $\mathbf{z}_0$ und kontinuierlich¹⁾ gemessene Sensordaten $\tilde{\mathbf{s}}(t), t \geq t_0$, also fehlerbehaftete Größen, zu

¹⁾Diese Forderung wird bei der Diskretisierung in Kapitel 8 zugunsten der praxisorientierten Voraussetzung der zu diskreten, äquidistanten Zeitpunkten gegebenen Sensormeßdaten fallengelassen. Bis dorthin bedienen wir uns einer fiktiven Interpolation der quantisierten Sensordaten – z.B. durch Konvexkombination aufeinanderfolgender Werte.

stützen. O.B.d.A. nehmen wir an, daß zum Zeitpunkt t_k bis zum Zeitpunkt t_{k+1} kontinuierlich gemessene Sensordaten $\tilde{s}(t)$, $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, vorliegen und der Anfangszustand $\mathbf{z}(t_k)$ bekannt ist. Gesucht ist der Zustandsvektor $\mathbf{z}(t)$ für $t_k \leq t \leq t_{k+1}$.

Dazu linearisieren wir das nichtlineare TNDgIS am Zustandsvektor $\mathbf{z}(t_k)$ und am Vektor der gemessenen Sensordaten $\tilde{s}(t_k)$ und erhalten in 1. Näherung das linearisierte TNDgIS

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) \doteq \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{z}(t_k), \tilde{s}(t_k))}_{\dot{\mathbf{z}}(t_k)} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}(t_k), \tilde{s}(t_k)) (\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t_k)) \\ + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{z}(t_k), \tilde{s}(t_k)) (\mathbf{s}(t) - \tilde{s}(t_k)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

bzw.

$$\dot{\mathbf{z}}(t) - \dot{\mathbf{z}}(t_k) \doteq \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}(t_k), \tilde{s}(t_k)) (\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t_k)) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{z}(t_k), \tilde{s}(t_k)) (\mathbf{s}(t) - \tilde{s}(t_k)), \quad (4.3)$$

welches aufgrund der Linearisierung nur lokal, d.h. für $|t - t_k| < \varepsilon$, gültig ist. Zerlegt man den Vektor der Sensordaten $\mathbf{s}(t)$ nach dem Prinzip „exakter Wert = gemessener Wert + Störung“ in $\tilde{s}(t) + (\mathbf{s}(t) - \tilde{s}(t))$, so folgt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) - \dot{\mathbf{z}}(t_k) \doteq \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}(t_k), \tilde{s}(t_k)) (\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t_k)) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{z}(t_k), \tilde{s}(t_k)) (\tilde{s}(t) - \tilde{s}(t_k)) \\ + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{z}(t_k), \tilde{s}(t_k)) (\mathbf{s}(t) - \tilde{s}(t)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Zur verkürzten Inbezugnahme definieren wir

$$\Delta \mathbf{z}(t) \doteq A(t_k) \Delta \mathbf{z}(t) + B(t_k) \Delta \tilde{s}(t) + B(t_k) \delta \mathbf{s}(t) \quad (4.5)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{z}(t) &= \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t_k) && \text{Zustandsinkrement} \\ \Delta \tilde{s}(t) &= \tilde{s}(t) - \tilde{s}(t_k) && \text{Sensormeßdateninkrement} \\ \delta \mathbf{s}(t) &= \mathbf{s}(t) - \tilde{s}(t) && \text{Sensormeßdatenstörung zum Zeitpunkt } t \\ A(t_k) &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}(t_k), \tilde{s}(t_k)) && \text{Dynamikmatrix zum Zeitpunkt } t_k \\ B(t_k) &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{z}(t_k), \tilde{s}(t_k)) && \text{Steuermatrix zum Zeitpunkt } t_k. \end{aligned}$$

Anmerkung 4.1: Um eine reine Störungsdifferentialgleichung, d.h. ohne inkrementellen Zustandsanteile, zu erhalten, müßte man an a priori kontinuierlich gegebenen Näherungszuständen (Position + Geschwindigkeit + Orientierung + etc.) – d.h. einer „Näherungstrajektorie“ – linearisieren. Beobachtungen würden zwar den Zustand, aber nicht die „Näherungstrajektorie“ verbessern. Linearisierung an einer kontinuierlich gegebenen „Näherungstrajektorie“ führt zu zeitvariablen Koeffizientenmatrizen. Wird die „Näherungstrajektorie“ zudem als stochastisch angenommen, so gilt dies auch für die Koeffizientenmatrizen. In [H.-F. Chen; P.R. Kumar; J.H. van Schuppen(1989)] wird eine für diesen Fall entwickelte Kalman-Filtervariante beschrieben. ■

Anmerkung 4.2: Bei der statistischen Linearisierung (s. z.B. [N. Ahlbrendt; V. Kempe(1984)]) wird versucht die Wahl der Koeffizientenmatrizen eines linearen Zustandsraummodells so zu treffen, daß dem Einfluß der Nichtlinearität mit Rechnung getragen wird. Dies setzt das Vorliegen einer Näherungsdichte zum allgemeinen nichtlinearen Zustandsraummodell voraus. ■

Anmerkung 4.3: Im Erweiterten Kalman-Filter wird neben dem linearisierten TNDgIS auch das nichtlineare TNDgIS verwendet, wofür die fehlerfreien Sensordaten $\mathbf{s}(t)$ zu zerlegen sind in Meßwert $\tilde{s}(t)$ und Sensorfehler $\delta \mathbf{s}(t)$. Aufgrund der strukturellen Linearität (Affinität) nichtlinearer TNDgIS bzgl. der Sensordaten $\mathbf{s}(t)$ gilt unabhängig von den verwendeten Parametrisierungen

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t), \mathbf{s}(t)) = \mathbf{f}^*(\mathbf{z}(t)) + F^*(\mathbf{z}(t)) \mathbf{s}(t) = \mathbf{f}^*(\mathbf{z}(t)) + F^*(\mathbf{z}(t)) \tilde{s}(t) + F^*(\mathbf{z}(t)) \delta \mathbf{s}(t). \quad \blacksquare$$

Anmerkung 4.4: Eine Umgruppierung von Gleichung (4.4) bzw. (4.5) führt auf die linearisierte Vektordifferentialgleichung in absoluten Zuständen

$$\dot{\mathbf{z}}(t) \doteq A(t_k)\mathbf{z}(t) + \mathbf{u}_k(t) + B(t_k)\delta\mathbf{s}(t)$$

mit

$$\mathbf{u}_k(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t_k), \tilde{\mathbf{s}}(t_k)) - A(t_k)\mathbf{z}(t_k) + B(t_k)\Delta\tilde{\mathbf{s}}(t).$$

■

3. Linearisierte TNDgIS

Die Anwendung des Linearisierungsprinzips aus dem vorhergehenden Abschnitt auf die im 1. Abschnitt formulierten nichtlinearen TNDgIS in kartesischen bzw. ellipsoidnormalen Koordinaten ist Gegenstand der folgenden beiden Unterabschnitte. Aus Gründen die in der Einleitung des 1. Abschnitts dieses Kapitels bereits erläutert wurden, beschränken wir uns auf die Verwendung von Quaternionen als Orientierungsparameter.

Ein Blick auf die resultierenden Dynamikmatrizen zeigt deutliche Unterschiede in der Struktur der Koeffizienten, wobei sich unmittelbar die Frage stellt: Welche Parametrisierung führt zum effektivsten Algorithmus? Entsprechende Untersuchungen sind in [M. Wei; K.P. Schwarz(1989)] und [M. Wei; K.P. Schwarz(1990)] für TNDgIS mit multiplikativen Kardan-Winkeländerungen (s.a. Anhang D) protokolliert und zeigen – im Hinblick auf die Rechenzeit – einen klaren Vorteil für das $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgIS.

Das linearisierte $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgIS

Nach Satz 3.1 lautet der Zustandsvektor $\mathbf{z}(t)$ des nichtlinearen TNDgIS in kartesischen Koordinaten und Hamilton-Quaternionen

$$\mathbf{z} = (\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})^T \in \mathbb{R}^{10} \quad (4.6)$$

und damit nach (4.5) der Vektor der Zustandsinkremente

$$\Delta\mathbf{z} = (\Delta\mathbf{x}_e, \Delta\mathbf{v}_e, \Delta\tilde{q}_{eb})^T \in \mathbb{R}^{10}. \quad (4.7)$$

Die Dynamikmatrix $A(t_k)$ des kontinuierlichen, linearisierten TNDgIS, d.h. $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$, ist auf Seite 55 explizit aufgeführt.

Die Steuermatrix $B(t_k)$ des kontinuierlichen, linearisierten TNDgIS, d.h. $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} \in \mathbb{R}^{10 \times 6}$, lautet mit $\mathbf{s} = (\boldsymbol{\omega}_{ib}, \mathbf{f}_b)^T \in \mathbb{R}^6$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_H(\tilde{q}_{eb}) \\ -\frac{1}{2}\mathbf{q}_{eb}^T & 0 \\ \frac{1}{2}q_{eb0}I_3 + \frac{1}{2}vec\mathbf{k}^{-1}\mathbf{q}_{eb} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Das linearisierte $((\lambda, \varphi, h)^T, \mathbf{v}_h, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgIS

Nach Satz 3.2 lautet der Zustandsvektor $\mathbf{z}(t)$ des nichtlinearen TNDgIS in ellipsoidnormalen Koordinaten und Hamilton-Quaternionen

$$\mathbf{z} = ((\lambda, \varphi, h)^T, \mathbf{v}_h, \tilde{q}_{eb})^T \in \mathbb{R}^{10} \quad (4.9)$$

und damit nach (4.5) der Vektor der Zustandsinkremente

$$\Delta\mathbf{z} = ((\Delta\lambda, \Delta\varphi, \Delta h)^T, \Delta\mathbf{v}_h, \Delta\tilde{q}_{eb})^T \in \mathbb{R}^{10}. \quad (4.10)$$

Die Dynamikmatrix $A(t_k)$ des kontinuierlichen, linearisierten TNDgIS, d.h. $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$, ist auf den Seiten 56 (Spalten 1-6) und 57 (Spalten 7-10) explizit aufgeführt.

Die Steuermatrix $B(t_k)$ des kontinuierlichen, linearisierten TNDgLS, d.h. $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} \in \mathbb{R}^{10 \times 6}$, lautet mit $\mathbf{s} = (\boldsymbol{\omega}_{ib}, \mathbf{f}_b)^T \in \mathbb{R}^6$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{he}(\lambda, \varphi) R_H(\tilde{\mathbf{q}}_{eb}) \\ \frac{1}{2} q_{eb0} I_3 + \frac{1}{2} \text{veck}^{-1} \mathbf{q}_{eb} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

[illegible]

Abbildung 4.1: Dynamikmatrix des $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDglS

0	$\frac{v_o}{\cos \varphi (N(\varphi)+h)} \left[\tan \varphi - \frac{N'(\varphi)}{N(\varphi)+h} \right]$	$-\frac{v_o}{\cos \varphi (N(\varphi)+h)^2}$	$\frac{1}{\cos \varphi (N(\varphi)+h)}$	0	0
0	$-\frac{v_n M'(\varphi)}{(M(\varphi)+h)^2}$	$-\frac{v_n}{(M(\varphi)+h)^2}$	0	$\frac{1}{M(\varphi)+h}$	0
0	0	0	0	0	1
$-f_{e1} \cos \lambda$ $-f_{e2} \sin \lambda$ $+\frac{\partial^2}{\partial x_h \partial \lambda} V$	$\frac{v_o v_n}{\cos^2 \varphi (N(\varphi)+h)} + \frac{v_o (v_v - v_n \tan \varphi) N'(\varphi)}{(N(\varphi)+h)^2}$ $+2\omega_{ie} (v_n \cos \varphi + v_v \sin \varphi) + \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial \varphi} V$ $+\dot{\omega}_{ie} (\sin \varphi (N(\varphi)+h) - \cos \varphi N'(\varphi))$	$\frac{v_o (v_v - v_n \tan \varphi)}{(N(\varphi)+h)^2}$ $-\omega_{ie} \cos \varphi + \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial h} V$	$-\frac{v_v - v_n \tan \varphi}{N(\varphi)+h}$	$2\omega_{ie} \sin \varphi$ $+\frac{v_o \tan \varphi}{N(\varphi)+h}$	$-2\omega_{ie} \cos \varphi$ $-\frac{v_o}{N(\varphi)+h}$
$f_{e1} \sin \lambda \sin \varphi$ $-f_{e2} \cos \lambda \sin \varphi$ $+\frac{\partial^2}{\partial y_h \partial \lambda} V$	$-(f_{e1} \cos \lambda + f_{e2} \sin \lambda) \cos \varphi - f_{e3} \sin \varphi$ $-\frac{v_o^2}{\cos^2 \varphi (N(\varphi)+h)} + \frac{v_n v_v M'(\varphi)}{(M(\varphi)+h)^2} + \frac{v_o^2 \tan \varphi N'(\varphi)}{(N(\varphi)+h)^2}$ $+ \omega_{ie}^2 ((N(\varphi)+h)(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) - \sin \varphi \cos \varphi N'(\varphi))$ $-2v_o \omega_{ie} \cos \varphi + \frac{\partial^2}{\partial y_h \partial \varphi} V$	$+\frac{v_o^2 \tan \varphi}{(N(\varphi)+h)^2} + \frac{v_n v_v}{(M(\varphi)+h)^2}$ $-\omega_{ie}^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2}{\partial y_h \partial h} V$	$-\frac{2v_o \tan \varphi}{N(\varphi)+h}$ $-2\omega_{ie} \sin \varphi$	$-\frac{v_v}{M(\varphi)+h}$	$-\frac{v_n}{M(\varphi)+h}$
$-f_{e1} \sin \lambda \cos \varphi$ $+f_{e2} \cos \lambda \cos \varphi$ $+\frac{\partial^2}{\partial x_h \partial \lambda} V$	$-(f_{e1} \cos \lambda + f_{e2} \sin \lambda) \sin \varphi + f_{e3} \cos \varphi$ $-\frac{v_n^2 M'(\varphi)}{(M(\varphi)+h)^2} - \frac{v_o^2 N'(\varphi)}{(N(\varphi)+h)^2}$ $+ \omega_{ie}^2 \cos \varphi (\cos \varphi N'(\varphi) - 2 \sin \varphi (N(\varphi)+h))$ $-2v_o \omega_{ie} \sin \varphi + \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial \varphi} V$	$-\frac{v_n^2}{(M(\varphi)+h)^2} - \frac{v_o^2}{(N(\varphi)+h)^2}$ $+ \omega_{ie}^2 \cos^2 \varphi + \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial h} V$	$\frac{2v_o}{N(\varphi)+h}$ $+2\omega_{ie} \cos \varphi$	$\frac{2v_n}{M(\varphi)+h}$	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Abbildung 4.2: 1. bis 6. Spalte der Dynamikmatrix des $((\lambda, \varphi, h)^T, \mathbf{v}_h, \ddot{q}_{eb})$ -TNDglS

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
$-2 \sin \lambda (q_{eb0} f_{b1} - q_{eb3} f_{b2} + q_{eb2} f_{b3})$ $+2 \cos \lambda (q_{eb3} f_{b1} + q_{eb0} f_{b2} - q_{eb1} f_{b3})$	$-2 \sin \lambda (q_{eb1} f_{b1} + q_{eb2} f_{b2} + q_{eb3} f_{b3})$ $+2 \cos \lambda (q_{eb2} f_{b1} - q_{eb1} f_{b2} - q_{eb0} f_{b3})$	$-2 \sin \lambda (-q_{eb2} f_{b1} + q_{eb1} f_{b2} + q_{eb0} f_{b3})$ $+2 \cos \lambda (q_{eb1} f_{b1} + q_{eb2} f_{b2} + q_{eb3} f_{b3})$	$-2 \sin \lambda (-q_{eb3} f_{b1} - q_{eb0} f_{b2} + q_{eb1} f_{b3})$ $+2 \cos \lambda (q_{eb0} f_{b1} - q_{eb3} f_{b2} + q_{eb2} f_{b3})$
$-2 \cos \lambda \sin \varphi (q_{eb0} f_{b1} - q_{eb3} f_{b2} + q_{eb2} f_{b3})$ $-2 \sin \lambda \sin \varphi (q_{eb3} f_{b1} + q_{eb0} f_{b2} - q_{eb1} f_{b3})$ $2 \cos \varphi (-q_{eb2} f_{b1} + q_{eb1} f_{b2} + q_{eb0} f_{b3})$	$-2 \cos \lambda \sin \varphi (q_{eb1} f_{b1} + q_{eb2} f_{b2} + q_{eb3} f_{b3})$ $-2 \sin \lambda \sin \varphi (q_{eb2} f_{b1} - q_{eb1} f_{b2} - q_{eb0} f_{b3})$ $2 \cos \varphi (q_{eb3} f_{b1} + q_{eb0} f_{b2} - q_{eb1} f_{b3})$	$-2 \cos \lambda \sin \varphi (-q_{eb2} f_{b1} + q_{eb1} f_{b2} + q_{eb0} f_{b3})$ $-2 \sin \lambda \sin \varphi (q_{eb1} f_{b1} + q_{eb2} f_{b2} + q_{eb3} f_{b3})$ $2 \cos \varphi (-q_{eb0} f_{b1} + q_{eb3} f_{b2} - q_{eb2} f_{b3})$	$-2 \cos \lambda \sin \varphi (-q_{eb3} f_{b1} - q_{eb0} f_{b2} + q_{eb1} f_{b3})$ $-2 \sin \lambda \sin \varphi (q_{eb0} f_{b1} - q_{eb3} f_{b2} + q_{eb2} f_{b3})$ $2 \cos \varphi (q_{eb1} f_{b1} + q_{eb2} f_{b2} + q_{eb3} f_{b3})$
$2 \cos \lambda \cos \varphi (q_{eb0} f_{b1} - q_{eb3} f_{b2} + q_{eb2} f_{b3})$ $+2 \sin \lambda \cos \varphi (q_{eb3} f_{b1} + q_{eb0} f_{b2} - q_{eb1} f_{b3})$ $+2 \sin \varphi (-q_{eb2} f_{b1} + q_{eb1} f_{b2} + q_{eb0} f_{b3})$	$2 \cos \lambda \cos \varphi (q_{eb1} f_{b1} + q_{eb2} f_{b2} + q_{eb3} f_{b3})$ $+2 \sin \lambda \cos \varphi (q_{eb2} f_{b1} - q_{eb1} f_{b2} - q_{eb0} f_{b3})$ $+2 \sin \varphi (q_{eb3} f_{b1} + q_{eb0} f_{b2} - q_{eb1} f_{b3})$	$2 \cos \lambda \cos \varphi (-q_{eb2} f_{b1} + q_{eb1} f_{b2} + q_{eb0} f_{b3})$ $+2 \sin \lambda \cos \varphi (q_{eb1} f_{b1} + q_{eb2} f_{b2} + q_{eb3} f_{b3})$ $+2 \sin \varphi (-q_{eb0} f_{b1} + q_{eb3} f_{b2} - q_{eb2} f_{b3})$	$2 \cos \lambda \cos \varphi (-q_{eb3} f_{b1} - q_{eb0} f_{b2} + q_{eb1} f_{b3})$ $+2 \sin \lambda \cos \varphi (q_{eb0} f_{b1} - q_{eb3} f_{b2} + q_{eb2} f_{b3})$ $+2 \sin \varphi (q_{eb1} f_{b1} + q_{eb2} f_{b2} + q_{eb3} f_{b3})$
0	$-\frac{1}{2} \omega_{ib1}$	$-\frac{1}{2} \omega_{ib2}$	$-\frac{1}{2} (\omega_{ib3} - \omega_{ie})$
$\frac{1}{2} \omega_{ib1}$	0	$\frac{1}{2} (\omega_{ib3} + \omega_{ie})$	$-\frac{1}{2} \omega_{ib2}$
$\frac{1}{2} \omega_{ib2}$	$-\frac{1}{2} (\omega_{ib3} + \omega_{ie})$	0	$\frac{1}{2} \omega_{ib1}$
$\frac{1}{2} (\omega_{ib3} - \omega_{ie})$	$\frac{1}{2} \omega_{ib2}$	$-\frac{1}{2} \omega_{ib1}$	0

Abbildung 4.3: 7. bis 10. Spalte der Dynamikmatrix des $((\lambda, \varphi, h)^T, \mathbf{v}_h, \tilde{q}_{eb})$ -TNDglS

KAPITEL 5:

Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten

Nachdem im vorhergehenden Kapitel die nichtlinearen TNDgLS hergeleitet und anschließend linearisiert wurden, stellt sich die Frage, ob die daraus resultierenden (deterministischen) Anfangswertaufgaben (AWA) korrekt gestellt sind, d.h. ob die zugehörigen Lösungen existieren, eindeutig sind und stetig von den Anfangsdaten abhängen. Die Betrachtungen dieses Kapitels dienen der Validierung der vorhergehenden Modellierung von Trägheitsnavigationssystemen. Diesbezügliche Sätze aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen werden in den ersten beiden Abschnitten vorgestellt. Mit ihrer Hilfe wird im 3. Abschnitt gezeigt, daß das nichtlineare $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgLS mit geeigneten Anfangswerten eine (über einem maximalen Existenzintervall) korrekt gestellte AWA beschreibt. Ferner wird in Abschnitt 4 gezeigt, daß auch das linearisierte $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgLS mit geeigneten Anfangswerten eine lokal korrekt gestellte AWA beschreibt und diese Aussage auf andere Parametrisierungen übertragen werden kann (Zustandstransformationsinvarianz), falls die Jacobi-Matrix der zugehörigen Zustandstransformation beschränkt ist.

1. Existenz und Eindeutigkeit

Nach dem

Satz 5.1 (Existenzsatz von Peano, s. z.B. [Werner;Arndt(1986)]):

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{f} \in C(G, \mathbb{R}^n)$ und $(\mathbf{z}_0, t_0) \in G$. Dann existiert ein $\tau > 0$, derart daß für die AWA

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t), t) \quad , \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$$

eine Lösung auf dem Intervall $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ existiert. ■

existiert zwar eine Lösung der AWA für stetige Vektorfunktionen $\mathbf{f}$ in einer Umgebung von $(\mathbf{z}_0, t_0)$; diese ist aber nicht notwendigerweise eindeutig. Der nachfolgende Satz von Picard-Lindelöf besagt, daß die zusätzliche Bedingung der Lipschitz-Stetigkeit von $\mathbf{f}$ bzgl. $\mathbf{z}$ die Eindeutigkeit der Lösung der AWA gewährleistet.

Definition 5.1 :

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Die Vektorfunktion $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt genau dann in G bzgl. $\mathbf{z}$ Lipschitz-stetig, wenn gilt

$$\exists \quad \forall \quad \begin{array}{l} L \in \mathbb{R}^+ \quad (\mathbf{z}, t), (\mathbf{z}^*, t) \in G \end{array} : \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{z}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{z}^*, t)\| \leq L \|\mathbf{z} - \mathbf{z}^*\|.$$

Aus der Definition der Lipschitz-Stetigkeit folgt, daß eine Vektorfunktion, welche Lipschitz-stetig in G bzgl. $\mathbf{z}$ ist, auch stetig in G bzgl. $\mathbf{z}$ ist. ■

Satz 5.2 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf, s. z.B. [Werner;Arndt(1986)]):

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{f} \in C(G, \mathbb{R}^n)$, $\|\mathbf{f}(\mathbf{z}, t)\| \leq M \quad \forall (\mathbf{z}, t) \in G$, $Q := \{(\mathbf{z}, t) \mid |t - t_0| \leq \tau \wedge \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| \leq \tau M\} \subset G$ und $\mathbf{f}$ in Q bzgl. $\mathbf{z}$ Lipschitz-stetig.

Dann existiert eine eindeutige Lösung der AWA

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, t) \quad , \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$$

im Intervall $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$. ■

Es sei auf den lokalen Charakter beider Sätze hingewiesen. Ferner sei angemerkt, daß Fortsetzungssätze von Lösungen auf ein maximales Existenzintervall bekannt sind (s. z.B. [Werner;Arndt(1986)]). Für nicht explizit gegebene Vektorfunktionen $\mathbf{f}$ läßt sich die Lipschitz-Stetigkeit über bestimmten Gebieten aus der stetigen Differenzierbarkeit folgern.

Lemma 5.3 (s. z.B. [Arnold(1991)]):

Sei $U \subset G$ konvex und kompakt, dann genügt jede stetig differenzierbare Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ einer Lipschitz-Bedingung in U . ■

Ferner gilt

Lemma 5.4 (s. z.B. [Kreyszig(1978)]):

Sei Ω ein endlich dimensionaler normierter Raum. Eine Teilmenge $U \subset \Omega$ ist genau dann kompakt, wenn U abgeschlossen und beschränkt ist. ■

2. Stetige Abhängigkeit von Anfangswert, -zeit und Modell

Nach dem Existenz- und Eindeigkeitssatz von Picard-Lindelöf existiert unter gewissen Voraussetzungen lokal, d.h. in einer Umgebung von (z_0, t_0) , eine eindeutige Lösung der gestellten AWA.

In praxisrelevanten Problemen sind Anfangszeit t_0 , Anfangswert z_0 und Modell f oftmals gestört (z.B. durch Einfließen gemessener Größen oder Modellannahmen). Die Forderung der stetigen Abhängigkeit von diesen "Anfangsdaten" besagt, daß sich die Lösungen der gestörten und ungestörten AWA in endlicher Zeit nicht unendlich weit entfernen und daß diese Lösungen sich für gegen Null strebende Fehler zu jeder Zeit beliebig nahe kommen. Die stetige Abhängigkeit der Lösung von Anfangswert und Modell folgt aus dem

Satz 5.5 (s. [Werner;Arndt(1986)]):

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f, f^* \in C(G, \mathbb{R}^n)$, $(z_0, t_0), (z_0^*, t_0^*) \in G$, die Vektorfunktion $f(z, t)$ Lipschitz-stetig bzgl. z mit der Lipschitz-Konstanten L und für $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ gelte

$$\begin{aligned} \|z_0 - z_0^*\| &\leq \varepsilon_1 \quad \text{und} \\ \forall (z, t) \in G &: \|f(z, t) - f^*(z, t)\| \leq \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Ist $z(t)$ bzw. $z^*(t)$ im gemeinsamen Existenzintervall I mit $t_0 \in I$ Lösung der AWA

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z, t), & z(t_0) &= z_0 \quad \text{bzw.} \\ \dot{z}^* &= f^*(z^*, t), & z^*(t_0) &= z_0^*, \end{aligned}$$

dann gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|z(t) - z^*(t)\| &\leq \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \int_0^{|t-t_0|} e^{-L\tau} d\tau \right) e^{L|t-t_0|} \\ &= \varepsilon_1 e^{L|t-t_0|} + \varepsilon_2 \frac{e^{L|t-t_0|} - 1}{L} \\ &\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 |t - t_0|) e^{L|t-t_0|} \quad \text{für } t \in I. \end{aligned}$$

Da nur von der Vektorfunktion f die Lipschitz-Stetigkeit bzgl. z gefordert wird, ist nach dem Satz von Picard-Lindelöf auch nur die Eindeutigkeit von $z(t)$ und nicht von $z^*(t)$ gewährleistet.

Die stetige Abhängigkeit der Lösung von Anfangszeit und -wert folgt aus dem

Satz 5.6 (s. [Werner;Arndt(1986)]):

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ und die Vektorfunktion $f(z, t)$ Lipschitz-stetig bzgl. z mit der Lipschitz-Konstanten L und beschränkt über G , d.h.

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (z, t) \in G: \|f(z, t)\| \leq M.$$

Dann existiert für $t_0, t_0^* \in I$ (gemeinsames Existenzintervall) die eindeutige Lösung $z(t)$ bzw. $z^*(t)$ der AWA

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z, t), & z(t_0) &= z_0 \quad \text{bzw.} \\ \dot{z}^* &= f(z^*, t^*), & z^*(t_0^*) &= z_0^* \end{aligned}$$

und es gilt die Abschätzung

$$\|z(t) - z^*(t)\| \leq (\|z_0 - z_0^*\| + |t - t_0|M)e^{L \min(|t-t_0|, |t-t_0^*|)} \quad \text{für } t \in I.$$

Die einzig relevanten Kriterien für die lokale Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von Anfangsdaten der Lösung der AWA

$$\dot{z} = f(z, t), \quad z(t_0) = z_0 \quad (5.1)$$

über einem endlichen Gebiet G sind somit die Stetigkeit von f bzgl. t in G und die Lipschitz-Stetigkeit von f bzgl. z in G .

3. Zur Lipschitz-Stetigkeit nichtlinearer TNDgls

Bei nichtlinearen TNDgls

$$\dot{z}(t) = f(z(t), s(t)) \quad , \quad z(t_0) = z_0 \quad (5.2)$$

handelt es sich aufgrund der in die rechte Seite eingehenden Sensordaten um nichtautonome Systeme. Zunächst untersuchen wir die via Sensordaten explizit auftretende Zeitabhängigkeit der rechten Seite f . Ist f bzgl. t stetig? Dazu das

Lemma 5.7:

Die rechte Seite im $(x_e, v_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDglS von Satz 4.1

$$f(z, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ R_H(\tilde{q}_{eb})f_b - 2\Omega_{ie}v_e - \Omega_{ie}^2x_e - \dot{\Omega}_{ie}x_e + g_e(x_e) + g_t(x_e)^{1)} \\ \frac{1}{2}(\tilde{q}_{eb}\tilde{\omega}_{ib} - \tilde{\omega}_{ie}\tilde{q}_{eb}) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } z = (x_e, v_e, \tilde{q}_{eb})^T, \quad s = (f_b, \omega_{ib})^T$$

ist Lipschitz-stetig bzgl. s .

Beweis von Lemma 5.7:

$$\begin{aligned} \|f(z, s_1) - f(z, s_2)\|_2^2 &= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ R_H(\tilde{q}_{eb})(f_{b_1} - f_{b_2}) \\ \frac{1}{2}\tilde{q}_{eb}(\tilde{\omega}_{ib_1} - \tilde{\omega}_{ib_2}) \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \|R_H(\tilde{q}_{eb})(f_{b_1} - f_{b_2})\|_2^2 + \frac{1}{4}\|\tilde{q}_{eb}(\tilde{\omega}_{ib_1} - \tilde{\omega}_{ib_2})\|_2^2 \\ &\leq \underbrace{\|R_H(\tilde{q}_{eb})\|_2^2}_3 \|f_{b_1} - f_{b_2}\|_2^2 + \frac{1}{4}\underbrace{\|\tilde{q}_{eb}\|_2^2}_1 \|\tilde{\omega}_{ib_1} - \tilde{\omega}_{ib_2}\|_2^2 \leq 3 \left\| \begin{pmatrix} f_{b_1} - f_{b_2} \\ \tilde{\omega}_{ib_1} - \tilde{\omega}_{ib_2} \end{pmatrix} \right\|_2^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(z, s)$ ist Lipschitz-stetig bzgl. s mit der Lipschitz-Konstanten $\sqrt{3}$.

q.e.d.

Da der Beweis nur verwendet, daß der Vektor der Beschleunigungen via einer Rotationsmatrix in das verwendete Koordinatensystem gedreht wird und die $\mathbb{H}_0$ -Quaternion $\tilde{\omega}_{ib} = (0, \omega_{ib})$ mit $\frac{1}{2}$ und einer $\mathbb{H}_1$ -Quaternion multipliziert wird, läßt sich das Lemma auch auf andere TNDgls ausdehnen.

Aus der Lipschitz-Stetigkeit von f bzgl. s folgt unter Voraussetzung der Stetigkeit von s bzgl. t (im Existenzintervall) die Stetigkeit von f bzgl. t (im Existenzintervall).

Bevor wir weiterfahren mit der Lipschitz-Stetigkeit von f bzgl. z , beweisen wir zwei Hilfsaussagen.

Lemma 5.8:

Seien $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \in \mathbb{H}_1, f_b \in \mathbb{R}^3$ und $R_H(\tilde{q})$ die Rodriguez-Darstellung einer Drehmatrix mit $\tilde{q} \in \mathbb{H}_1$.

Dann gilt

$$\|R_H(\tilde{q}_1)f_b - R_H(\tilde{q}_2)f_b\|_2 \leq 4\|f_b\|_2\|\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2\|_2.$$

¹⁾Zur verkürzten Inbezugnahme finden im vorliegenden Abschnitt die Abkürzungen $g_e(x_e) = \text{grad}_{x_e} V_e(x_e)$ und $g_t(x_e) = \text{grad}_{x_e} V_t(x_e)$ Verwendung.

Beweis von Lemma 5.8:

$$(0, R_H(\tilde{q}_1)\mathbf{f}_b - R_H(\tilde{q}_2)\mathbf{f}_b) = \tilde{q}_1 \tilde{f}_b \tilde{q}_1^{-1} - \tilde{q}_2 \tilde{f}_b \tilde{q}_2^{-1} \quad \text{mit} \quad \tilde{f}_b = (0, \mathbf{f}_b) .$$

Mit $\tilde{q}_2 = \tilde{q}_1 + (\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1)$ folgt

$$\tilde{q}_1 \tilde{f}_b \tilde{q}_1^{-1} - \tilde{q}_2 \tilde{f}_b \tilde{q}_2^{-1} = \tilde{q}_1 \tilde{f}_b \tilde{q}_1^{-1} - \tilde{q}_1 \tilde{f}_b \tilde{q}_1^{-1} - \tilde{q}_1 \tilde{f}_b (\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1)^{-1} - (\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1) \tilde{f}_b \tilde{q}_1^{-1} - (\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1) \tilde{f}_b (\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1)^{-1} \in \mathbb{H}_0 .$$

Aus $\|\tilde{q}\|_2 = \|\tilde{q}^{-1}\|_2$ und $\|\tilde{q}\|_2 = \|\mathbf{q}\|_2$ für $\tilde{q} = (0, \mathbf{q}) \in \mathbb{H}_0$ folgt schließlich

$$\begin{aligned} \|R_H(\tilde{q}_1)\mathbf{f}_b - R_H(\tilde{q}_2)\mathbf{f}_b\|_2 &= \|\tilde{q}_1 \tilde{f}_b (\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1)^{-1} + (\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1) \tilde{f}_b \tilde{q}_1^{-1} + (\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1) \tilde{f}_b (\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1)^{-1}\|_2 \\ &\leq \|\tilde{q}_1 \tilde{f}_b (\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1)^{-1}\|_2 + \|(\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1) \tilde{f}_b \tilde{q}_1^{-1}\|_2 + \|(\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1) \tilde{f}_b (\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1)^{-1}\|_2 \\ &= (2 \underbrace{\|\tilde{q}_1\|_2 \|\mathbf{f}_b\|_2 \|\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2\|_2}_{=1} + \underbrace{\|\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2\|_2 \|\mathbf{f}_b\|_2 \|\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2\|_2}_{\leq 2}) \\ &\leq 16 \|\mathbf{f}_b\|_2 \|\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2\|_2 \end{aligned}$$

q.e.d.

Lemma 5.9:

Sei U eine konvexe und kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ und frei von Masse, d.h. die Massendichteverteilung $\rho(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U$.

Dann ist jede endliche räumliche Ableitung von $V_e(\mathbf{x}) + V_t(\mathbf{x})$, d.h.

$$\frac{\partial^r}{\partial \mathbf{x}^r} (V_e(\mathbf{x}) + V_t(\mathbf{x})) , \quad r \in \mathbb{N} \cup \{0\} ,$$

Lipschitz-stetig in U bzgl. $\mathbf{x}$. ■

Beweis von Lemma 5.9: Das Gravitationspotentialfeld $V_e(\mathbf{x}) + V_t(\mathbf{x})$ ist im „Außenraum von Massen“ harmonisch und damit analytisch. Jede endliche räumliche Ableitung ist somit stetig differenzierbar und nach dem Lemma 5.3 genügt jede stetig differenzierbare Abbildung von einer konvexen und kompakten Menge U in $\mathbb{R}^n$ einer Lipschitz-Bedingung. q.e.d.

Es sei angemerkt, daß die Forderung nach einer konvexen und kompakten Definitionsmenge mit dem quaderförmigen Gebiet $Q \subset G$ aus dem Satz von Picard-Lindelöf harmonisiert. Natürlich stellt die Forderung, daß U bzw. Q im „Außenraum von Massen“ ist, für die Trägheitsnavigation keine Einschränkung dar.

Damit sind die Vorbereitungen abgeschlossen für den Beweis von

Lemma 5.10:

Die rechte Seite im $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgls

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{s}) = \begin{pmatrix} R_H(\tilde{q}_{eb})\mathbf{f}_b - 2\Omega_{ie}\mathbf{v}_e - (\Omega_{ie}^2 + \dot{\Omega}_{ie})\mathbf{x}_e + \mathbf{g}_e(\mathbf{x}_e) + \mathbf{g}_t(\mathbf{x}_e) \\ \frac{1}{2}(\tilde{q}_{eb}\ddot{\omega}_{ib} - \ddot{\omega}_{ie}\tilde{q}_{eb}) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{z} = (\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})^T , \quad \mathbf{s} = (\mathbf{f}_b, \boldsymbol{\omega}_{ib})^T$$

ist Lipschitz-stetig bzgl. $\mathbf{z}$. ■

Beweis von Lemma 5.10: Sei $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_e(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_t(\mathbf{x})$. Es ist

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{f}(\mathbf{z}_1, \mathbf{s}) - \mathbf{f}(\mathbf{z}_2, \mathbf{s})\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\ (R_H(\tilde{q}_{eb_1}) - R_H(\tilde{q}_{eb_2}))\mathbf{f}_b - 2\Omega_{ie}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) - (\Omega_{ie}^2 + \dot{\Omega}_{ie})(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_2) \\ \frac{1}{2}(\tilde{q}_{eb_1} - \tilde{q}_{eb_2})\ddot{\omega}_{ib} - \frac{1}{2}\ddot{\omega}_{ie}(\tilde{q}_{eb_1} - \tilde{q}_{eb_2}) \end{pmatrix} \right\|_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \|_2^2 + 16 \| \mathbf{f}_b \|_2^2 \| \check{q}_{eb1} - \check{q}_{eb2} \|_2^2 + 4 \underbrace{\| \Omega_{ie} \|_2^2}_{2\omega_{ie}^2} \| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \|_2^2 + \underbrace{\| \Omega_{ie} \|_2^4}_{4\omega_{ie}^4} \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \|_2^2 \\
&+ L_{Grav.}^2 \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \|_2^2 + \underbrace{\| \dot{\Omega}_{ie} \|_2^2}_{2\dot{\omega}_{ie}^2} \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \|_2^2 + \| \boldsymbol{\omega}_{ib} \|_2^2 \| \check{q}_{eb1} - \check{q}_{eb2} \|_2^2 + \underbrace{\| \boldsymbol{\omega}_{ie} \|_2^2}_{\omega_{ie}^2} \| \check{q}_{eb1} - \check{q}_{eb2} \|_2^2 \\
&= (L_{Grav.}^2 + 4\omega_{ie}^4 + 2\dot{\omega}_{ie}^2) \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \|_2^2 + (1 + 8\omega_{ie}^2) \| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \|_2^2 + (16 \| \mathbf{f}_b \|_2^2 + \| \boldsymbol{\omega}_{ib} \|_2^2 + \omega_{ie}^2) \| \check{q}_{eb1} - \check{q}_{eb2} \|_2^2 \\
&\leq \max(L_{Grav.}^2 + 4\omega_{ie}^4 + 2\dot{\omega}_{ie}^2, 1 + 8\omega_{ie}^2, 16 \| \mathbf{f}_b \|_2^2 + \| \boldsymbol{\omega}_{ib} \|_2^2 + \omega_{ie}^2) \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\ \check{q}_{eb1} - \check{q}_{eb2} \end{pmatrix} \right\|_2^2
\end{aligned}$$

q.e.d.

Zusammenfassung der Einzelergebnisse führt zum

Satz 5.11:

Unter der Voraussetzung stetiger Sensordaten existiert lokal (bzw. über einem maximalen Existenzintervall) eine eindeutige Lösung des $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \check{q}_{eb})$ -TNDgls (mit Anfangswert $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$), welche stetig von den Anfangsdaten abhängt. ■

Beweis von Satz 5.11:

Die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes 5.2 von Picard-Lindelöf und der Sätze 5.5 und 5.6 über die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten sind nach Lemma 5.10, Lemma 5.7 und der Voraussetzung stetiger Sensordaten erfüllt. q.e.d.

Damit ist fürs $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \check{q}_{eb})$ -TNDgls die lokale Existenz und Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von Anfangszeitpunkt, Anfangszustand und Modellfehlern gezeigt. Die "local well-posedness" zeigt, daß das physikalische Problem mathematisch sinnvoll modelliert wurde.

Für das $((\lambda, \varphi, h)^T, \mathbf{v}_h, \check{q}_{eb})$ -TNDgls ist im Gegensatz zur Lipschitz-Stetigkeit bzgl. $\mathbf{s}$ die Lipschitz-Stetigkeit bzgl. $\mathbf{z}$ kritisch. Nach Lemma 5.3 genügt jede stetig differenzierbare Abbildung $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, U konvex und kompakt, einer Lipschitz-Bedingung. Im Falle des $((\lambda, \varphi, h)^T, \mathbf{v}_h, \check{q}_{eb})$ -TNDgls ist $\mathbf{f}$ singular für $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, d.h. entlang der Rotationsachse des biaxialen Ellipsoids. Nimmt man eine ε -Umgebung um die Rotationsachse aus, d.h. $\varphi \in [-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so ist $\mathbf{f}$ stetig differenzierbar bzgl. $\mathbf{z}$ und es existiert eine Lipschitz-Konstante $L = L(\varepsilon)$, welche für ε gegen Null divergiert. Wir begnügen uns der Übersichtlichkeit halber mit der Untersuchung des linearisierten $((\lambda, \varphi, h)^T, \mathbf{v}_h, \check{q}_{eb})$ -TNDgls von Satz 4.2.

4. Lipschitz-Stetigkeit linearisierter TNDgls

Für jedes an Näherungszustand und gestörten Sensordaten linearisierte TNDgls

$$\Delta \mathbf{z}(t) = A(t_k) \Delta \mathbf{z}(t) + B(t_k) \Delta \mathbf{s}(t) \quad (5.3)$$

folgt die Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite bzgl. des Zustandsänderungsvektors $\Delta \mathbf{z}$ direkt aus der Beschränktheit der Systemmatrix, denn es ist

$$\begin{aligned}
&\left\| A(t_k) \Delta \mathbf{z}_1(t) + B(t_k) (\Delta \tilde{\mathbf{s}}(t) + \delta \mathbf{s}(t)) - A(t_k) \Delta \mathbf{z}_2(t) - B(t_k) (\Delta \tilde{\mathbf{s}}(t) + \delta \mathbf{s}(t)) \right\| \\
&= \left\| A(t_k) (\Delta \mathbf{z}_1(t) - \Delta \mathbf{z}_2(t)) \right\| \leq \| A(t_k) \| \| \Delta \mathbf{z}_1(t) - \Delta \mathbf{z}_2(t) \|
\end{aligned} \quad (5.4)$$

Bei Darstellung im geozentrischen, erdfesten, kartesischen Koordinatensystem folgt die Beschränktheit der Systemmatrix im wesentlichen aus der Beschränktheit einer Norm der Sensordaten $\boldsymbol{\omega}_{ib}, \mathbf{f}_b$, wie man aus der Systemmatrix von Seite 55 ersehen kann.

Dies reicht jedoch bei Darstellung im rotationsellipsoidischen Horizontsystem für die Beschränktheit der Systemmatrix nicht aus. Durch die Singularitäten der Länge-Breite-Parametrisierung des Rotationsellipsoids an den Polen muß für die Lipschitz-Stetigkeit in diesem Fall ferner gelten

$$|\varphi| < \frac{\pi}{2} \quad , \quad (5.5)$$

d.h. an Positionen auf der Erdrotationsachse darf nicht linearisiert werden.

Nachfolgender Satz zeigt die lokale Invarianz der Lipschitz-Stetigkeit bzw. die Beschränktheit der Systemmatrix bei Zustandstransformationen.

Satz 5.12:

Gegeben seien das nichtlineare dynamische System

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t), \mathbf{s}(t))$$

und das daraus durch Linearisierung bzgl. des Zustandsvektors $\mathbf{z}(t)$ und des Systemeingangsvektors $\mathbf{s}(t)$ im Zeitpunkt t_k gewonnene linear(isiert)e dynamische System

$$\Delta \dot{\mathbf{z}}(t) = A(t_k) \Delta \mathbf{z}(t) + B(t_k) \Delta \mathbf{s}(t)$$

mit beschränkter Systemmatrix, d.h. $\|A\| \leq C_1$.

Dann ist die rechte Seite jedes durch dimensionserhaltende Zustandstransformation mit beschränkter Jacobimatrix gewonnene linearisierte dynamische System Lipschitz-stetig bzgl. des Zustandsvektors. ■

Beweis von Satz 5.12:

Sei $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(\mathbf{y}(t))$ eine dimensionserhaltende, d.h. $\dim \mathbf{y} = \dim \mathbf{z}$, Zustandstransformation mit beschränkter Jacobimatrix, d.h. $\left\| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \right\| \leq C_2$.

Dann folgt durch Einsetzen in das nichtlineare dynamische System

$$\frac{d}{dt} \mathbf{z}(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(\mathbf{y}(t)), \mathbf{s}(t))$$

und anschließende Taylor-Entwicklung bzgl. des neuen Zustandsvektors $\mathbf{y}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \mathbf{z}(\mathbf{y}) \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0} + \left. \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0} (\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_0) &= \left. \mathbf{f}(\mathbf{z}(\mathbf{y}), \mathbf{s}) \right|_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0 \\ \mathbf{s}=\mathbf{s}_0}} + \left. \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \right) \right|_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0 \\ \mathbf{s}=\mathbf{s}_0}} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} \right|_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0 \\ \mathbf{s}=\mathbf{s}_0}} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) + \mathcal{O}^2 \\ \Rightarrow \Delta \dot{\mathbf{y}} &= \left. \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \right) \right|_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0 \\ \mathbf{s}=\mathbf{s}_0}} \Delta \mathbf{y} + \left. \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} \right) \right|_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0 \\ \mathbf{s}=\mathbf{s}_0}} \Delta \mathbf{s} + \mathcal{O}^2. \end{aligned}$$

Die Beschränktheit der auftretenden Systemmatrix folgt schließlich unter Verwendung der Ungleichung

$$\|J^{-1}AJ\| \leq \|J^{-1}\| \|A\| \|J\|.$$

Damit ist die Systemmatrix jedes – durch dimensionserhaltende Zustandstransformation mit beschränkter Jacobimatrix gewonnenen – dynamischen Systems beschränkt und damit nach (5.4) die Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite des zugehörigen linearisierten TNDgLS bzgl. des neuen Zustandsvektors bewiesen. q.e.d.

Damit ist (unter der Voraussetzung endlicher Sensordaten) fürs linearisierte $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgLS die lokale Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von Anfangszeitpunkt, -zustand und Modellfehlern gezeigt. Die Übertragbarkeit dieser Aussagen ist nach Satz 5.12 auf andere (dimensionserhaltende) Parametrisierungen des Euklidischen Raumes und der Rotationsgruppe unter recht allgemeinen Voraussetzungen gewährleistet. Entsprechend ist das linearisierte $((\lambda, \varphi, h)^T, \mathbf{v}_h, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgLS lokal korrekt gestellt für Gebiete, welche die Erdrotationsachse nicht schneiden. Dieser Ausschluß ist durch Singularitäten in der zur Transformation von kartesischen Koordinaten in ellipsoidnormale Koordinaten korrespondierenden Jacobimatrix begründet.

KAPITEL 6:

Stabilitätsanalyse

In diesem Kapitel werden wir untersuchen, welche Aussagen über das Stabilitätsverhalten von TNDgLS gemacht werden können und erklären dabei insbesondere die in der Praxis beobachtete Instabilität anhand der verwendeten Modelle. In diesem Zusammenhang stellen wir somit die Frage nach dem Stabilitätsverhalten bei ungestützter Anwendung, d.h. zunächst ohne die Hinzunahme der Beobachtungen externer Sensoren (z.B. GPS). Diesbezügliche Aussagen sind jedoch auch im Falle von Beobachtungen mit niedriger Wiederholungsrate und bei Stützung mit nur schwach beobachtbaren Zuständen von Interesse.

Bei Linearisierung nichtlinearer TNDgLS um einen Anfangszustand und gemessene Sensordaten haben wir im 3. Kapitel linearisierte TNDgLS mit zeitinvarianter Systemmatrix erhalten. Allerdings ist zu beachten, daß die Systemmatrix i.a. nur im Intervall $[t_k; t_{k+1}]$ als konstant betrachtet werden kann und dann das nichtlineare TNDgLS am aktuellen Zustand erneut linearisiert werden muß. Da die Stabilität des linearisierten Systems eine globale Eigenschaft ist, während sie für das nichtlineare System aufgrund der Linearisierung nur eine lokale Eigenschaft ist (s. [P.C. Müller(1995)]), ist ein Rückschluß auf das Stabilitätsverhalten des nichtlinearen Systems nicht zwangsläufig möglich (s. z.B. [R. Bellman(1969)], [P. Glendinning(1994)], [R. Rothfuß; M. Zeitz(1995)] und [F. Verhulst(1990)]). Wenn auch nicht die volle Information über das Stabilitätsverhalten des nichtlinearen Systems aus der Analyse des zugehörigen linearisierten Systems folgt, so gestattet sie doch eine erste (und manchmal auch die einzige) Aussage (s. [R. Rothfuß; M. Zeitz(1995)]). Wie wir im Rahmen dieses Kapitels noch sehen werden, gelingt zwar nicht die vollständige, aber doch eine weitgehende Klärung des Stabilitätsverhaltens nichtlinearer TNDgLS.

Im 1. Abschnitt gehen wir von der bekannten Definition der Ljapunov-Stabilität aus und erweitern diesen Stabilitätsbegriff geeignet für die vorliegende Problemstellung. Dabei werden zusätzlich Fehler in den von der Kreisel- und der Akzelerometertriade beobachteten Winkelgeschwindigkeiten und Beschleunigungen, welche als zeitvariante Koeffizienten im TNDgLS auftreten, berücksichtigt. Dabei wollen wir ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung stabil nennen, wenn der Effekt von beschränkten Fehlern in Anfangswerten und Modell (Koeffizienten) auf die Lösung für alle Zeiten stets beschränkt bleibt. Zur Unterscheidung wird die Untersuchung der Abhängigkeit von Modellparametern in der Literatur gelegentlich auch als Sensitivitätsanalyse bezeichnet.

Im 2. Abschnitt beweisen wir einen Satz für lineare zeitinvariante Differentialgleichungssysteme, welcher notwendige und hinreichende Bedingungen für die Ljapunov-Stabilität des Systems bzgl. Fehlern in den Anfangswerten an die Systemmatrix knüpft. Aus dem Beweis des Satzes folgen Kriterien zur Klassifizierung einer Instabilität (zeitlich lineares, quadratisches, ..., exponentielles Anwachsen von Fehlern in den Anfangswerten).

Gegenstand von Abschnitt 3 ist es zu zeigen, daß dimensionserhaltende Zustandstransformationen (z.B. kartesische $\rightarrow$ ellipsoidnormale Positionskoordinaten oder Kardan-Winkel $\rightarrow$ Euler-Winkel) das Stabilitätsverhalten qualitativ nicht verändern, falls die Jacobimatrix der Transformation endliche Kondition aufweist. Dies sichert i.a. die qualitative Übertragbarkeit der erhaltenen Ergebnisse, wenn auch quantitative Unterschiede bestehen.

Im 4. Abschnitt leiten wir aus dem im 2. Abschnitt bewiesenen Satz Aussagen zur Ljapunov-Stabilität des linearisierten $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgLS durch separate Betrachtung der Positions-/Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen und Orientierungsdifferentialgleichungen ab. Mit anderen Worten wird die Stabilität von linearisierten TNDgLS mit zeitinvarianten Koeffizienten bzgl. Fehlern in den Anfangswerten, unter Berücksichtigung der speziellen Gestalt der Systemmatrix im Falle des $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgLS, diskutiert. Dabei werden wir zeigen, daß Fehler in der radialen Komponente von Anfangsposition und Anfangsgeschwindigkeit zeitlich exponentiell anwachsen. Dieses Verhalten kann auf das nichtlineare System übertragen werden.

Unter Ausnutzung von Struktur und Linearität der in Rotationsmatrizen (und Quaternionen) formulierten Orientierungsdifferentialgleichungen wird im 5. Abschnitt die (Ljapunov-)Stabilität bzgl. Fehlern in den Anfangswerten und Instabilität bzgl. Fehlern in den zeitvariablen Koeffizienten (Winkelgeschwindigkeitsvektoren) bewiesen. Dieses Ergebnis ist global gültig, da zu seiner Gewinnung keine Linearisierung notwendig ist. In diesem Zusammenhang werden wir auch die Propagation von strukturellen Fehlern in der Anfangsorientierung (z.B. Orthogonalisierungs- und Normierungsfehler in der die Anfangsorientierung beschreibenden Matrix) diskutieren.

Neben Fehlern in den Anfangswerten, Sensorfehlern und Modellfehlern treten bei linearisierten TNDgLS noch Linearisierungsfehler auf. Da die linearisierten TNDgLS nur lokal gültig sind, ist auch ihre Lösung nur kurzzeitig hinreichend genau. Nach einer kurzen Zeitspanne ist das nichtlineare TNDgLS an dieser Lösung erneut zu linearisieren und anschließend das linearisierte TNDgLS zu lösen. Damit kumulieren die ursprünglichen Fehler in den Anfangswerten (nach der Anfangsorientierung) und die Zustandsfehler aufgrund bis zum Linearisierungszeitpunkt aufgetretener Sensor-, Linearisierungs- und Modellfehler, was zur sukzessiven Verschlechterung der Linearisierungsstelle und damit zur Divergenz zwischen berechneter und tatsächlicher Trajektorie führt.

Anmerkung 6.1: Da die wenigen bekannten Sätze (z.B. "stable manifold theorem", "Hartman's theorem") zur lokalen Übertragbarkeit von Stabilitätseigenschaften des linearisierten Differentialgleichungssystems auf das zugehörige nichtlineare Differentialgleichungssystem nur an im allgemeinen hyperbolischen¹⁾, stationären Punkten (s. z.B. [P. Glendinning(1994)], [F. Verhulst(1990)]) gelten, sind sie für TNDgIS nicht anwendbar, denn hier kommen zahlreiche imaginäre Eigenwerte vor.

In diesen Fällen ist der Einfluß der nichtlinearen Terme auf das Stabilitätsverhalten zu berücksichtigen. Dazu dient beispielsweise die "Methode der Zentrumsmanigfaltigkeit" (s. z.B. [J. Carr(1981)], [A. Isidori(1989)], [H. Nijmeijer; A. van der Schaft(1991)]).

1. Stabilitätsbegriff

Ausgangspunkt bildet die Vektordifferentialgleichung

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t), \mathbf{s}(t), t) \quad (6.1)$$

Eine Klassifizierung wird durch folgende Definition gegeben.

Definition 6.1:

$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t), \mathbf{s}(t), t)$ heißt *frei* für verschwindende Eingangsgrößen, d.h. $\mathbf{s}(t) = 0$, und *stationär*, wenn $\mathbf{f}$ nicht explizit von der Zeit abhängt. Ein freies und stationäres Differentialgleichungssystem, d.h. $\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t))$, heißt *autonom*.

Dabei besteht mathematisch natürlich kein Unterschied zwischen einem freien System und einem mit bekannter Anregung. Sind bei einer Anfangswertaufgabe lediglich die Anfangswerte und nicht die Koeffizienten unsicher, so ist der im folgenden definierte konventionelle Stabilitätsbegriff ausreichend.

Definition 6.2 (Ljapunov-Stabilität):

Die Lösung einer Vektordifferentialgleichung, welche zum Zeitpunkt $t = t_0$ in $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ startet, werde mit $\mathbf{z}(t; \mathbf{z}_0, t_0)$ bezeichnet.

Die Lösung $\mathbf{z}(t; \mathbf{z}_0, t_0)$ heißt *Ljapunov-stabil*, wenn für jedes t_0 und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ derart existiert, daß aus

$$\|\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}_1\| < \delta(t_0, \varepsilon)$$

folgt

$$\|\mathbf{z}(t; \mathbf{z}_0, t_0) - \mathbf{z}(t; \mathbf{z}_1, t_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

Die Lösung $\mathbf{z}(t; \mathbf{z}_0, t_0)$ heißt *asymptotisch stabil*, wenn sie Ljapunov-stabil ist und für jedes t_0 ein $\delta = \delta(t_0) > 0$ derart existiert, daß aus

$$\|\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}_1\| < \delta(t_0)$$

folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}(t; \mathbf{z}_0, t_0) - \mathbf{z}(t; \mathbf{z}_1, t_0)\| = 0.$$

Die Lösung $\mathbf{z}(t; \mathbf{z}_0, t_0)$ heißt *global asymptotisch stabil*, wenn sie für beliebiges $\delta = \delta(t_0) > 0$ asymptotisch stabil ist. Die Lösung $\mathbf{z}(t; \mathbf{z}_0, t_0)$ heißt *Ljapunov-instabil*, wenn sie nicht Ljapunov-stabil ist.

Die Ljapunov-Stabilität einer AWA besagt somit, daß ihre Lösung zu einem gestörten Anfangswert für alle Zeiten innerhalb einer beliebig kleinen ε -Umgebung der Lösung zum exakten Anfangswert verläuft, wenn nur die Anfangswerte hinreichend kleinen Abstand haben. In der Praxis stammen die Anfangswerte oft aus Messungen und sind als gegeben zu betrachten. Aus der Formulierung der Definition ist abzulesen, daß aus der Ljapunov-Stabilität eines dynamischen Systems i.a. nicht die Existenz eines ε -Schlauches, mit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, um die Lösung der Anfangswertaufgabe zum exakten Anfangswert folgt, welchen die Lösung der Anfangswertaufgabe für alle Zeiten nicht verläßt. Aus der stetigen Abhängigkeit von den Anfangswerten (vgl. Beweis zu Satz 6.1) folgt die Dringlichkeit einer hochgenauen Bestimmung der Anfangswerte.

Obige Definition der Ljapunov-Stabilität berücksichtigt nur die Unsicherheit in den Anfangswerten und nicht im Modell (insbesondere in den Kreisel- und Akzelerometerdaten, welche als zeitvariante Modellkoeffizienten des TNDgIS auftreten). Wir stellen demzufolge im 2. Abschnitt Kriterien zur Klärung der Ljapunov-Stabilität linear(isiert)er zeitinvarianter Vektordifferentialgleichungen auf und behandeln damit im 4. Abschnitt speziell

¹⁾ D.h. die Jacobi-Matrix hat keine Eigenwerte, welche identisch Null oder imaginär sind.

die Ljapunov-Stabilität des linearisierten $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgIS bzgl. fehlerhafter Anfangswerte. Abschnitt 5 ist schließlich der Untersuchung des Stabilitätsverhaltens von TNDgIS bzgl. fehlerhafter Anfangswerte und fehlerhaftem Systemeingangsvektor (Sensordatenvektor) unter Berücksichtigung der speziellen Struktur von (in Rotationsmatrizen oder Hamilton-Quaternionen formulierten) Orientierungsdifferentialgleichungen gewidmet. Dabei ist intuitiv klar, daß wir ein TNDgIS genau dann als stabil bezeichnen wollen, wenn sich beschränkte Fehler (z.B. Kreisel- oder Akzelerometerbias) in den Sensordaten stets zu beschränkten Zustandsfehlern integrieren. Wir konkretisieren dies in folgender Definition.

Definition 6.3 (Ljapunov-Stabilität bei Systemeingang $\mathbf{s}(t)$):

Die Lösung einer Vektordifferentialgleichung, welche zum Zeitpunkt $t = t_0$ in $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ startet und auf dem Systemeingangsvektor $\mathbf{s}(t)$ basiert, werde mit $\mathbf{z}(\mathbf{s}(t), t; \mathbf{z}_0, t_0)$ bezeichnet.

Die Lösung $\mathbf{z}(\mathbf{s}(t), t; \mathbf{z}_0, t_0)$ heißt Ljapunov-stabil bei Systemeingang $\mathbf{s}(t)$, wenn für jedes t_0 und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta_0 = \delta_0(t_0, \varepsilon) > 0$ und ein $\delta_1 = \delta_1(t_0, \varepsilon) > 0$ derart existieren, daß aus

$$\|\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}_1\| < \delta_0(t_0, \varepsilon) \quad \text{und} \quad \|\mathbf{s}_0(t) - \mathbf{s}_1(t)\| < \delta_1(t_0, \varepsilon)$$

folgt

$$\|\mathbf{z}(\mathbf{s}_0(t), t; \mathbf{z}_0, t_0) - \mathbf{z}(\mathbf{s}_1(t), t; \mathbf{z}_1, t_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

Die Lösung $\mathbf{z}(\mathbf{s}(t), t; \mathbf{z}_0, t_0)$ heißt Ljapunov-instabil bei Systemeingang $\mathbf{s}(t)$, wenn sie nicht Ljapunov-stabil bei Systemeingang $\mathbf{s}(t)$ ist. ■

Es sei darauf hingewiesen, daß eine Kreisel- oder Akzelerometerdrift den Annahmen der Definition nicht genügt.

Anmerkung 6.2: Seien $\mathbf{z}(t; \mathbf{z}_0, t_0)$ und $\mathbf{z}(t; \mathbf{z}_1, t_0)$ Lösungen des linearen, zeitvarianten, inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (6.2)$$

zu verschiedenen Anfangswerten. Wie beeinflußt dann die zeitvariante Inhomogenität $\mathbf{b}(t)$ die Stabilität? Dazu definieren wir

$$\zeta(t) := \mathbf{z}(t; \mathbf{z}_0, t_0) - \mathbf{z}(t; \mathbf{z}_1, t_0) \quad (6.3)$$

$$\text{mit } \zeta(t_0) = \zeta_0 = \mathbf{z}_0 - \mathbf{z}_1 \quad (6.4)$$

Durch zeitliche Differentiation und Einsetzen des Differentialgleichungssystems folgt

$$\dot{\zeta}(t) = \dot{\mathbf{z}}(t; \mathbf{z}_0, t_0) - \dot{\mathbf{z}}(t; \mathbf{z}_1, t_0) = \mathbf{A}(t) (\mathbf{z}(t; \mathbf{z}_0, t_0) - \mathbf{z}(t; \mathbf{z}_1, t_0)) = \mathbf{A}(t) \zeta(t).$$

Damit ist die Stabilitätseigenschaft der Nulllösung der homogenen Vektordifferentialgleichung $\dot{\zeta}(t) = \mathbf{A}(t) \zeta(t)$ identisch mit derjenigen der Lösung der inhomogenen Vektordifferentialgleichung $\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}(t)$. ■

Anmerkung 6.3: Ein Vergleich mit dem im 2. Abschnitt besprochenen Linearisierungsprinzip zeigt, daß die Situation der vorhergehenden Anmerkung die Linearisierung an einer identischen Realisierung des Sensordatenvektors $\tilde{\mathbf{s}}(t)$ voraussetzt. Linearisiert man an unterschiedlichen Realisierungen des Sensordatenvektors, d.h. $\tilde{\mathbf{s}}_1(t)$ und $\tilde{\mathbf{s}}_2(t)$, so resultieren linearisierte dynamische Systeme mit unterschiedlichen Systemmatrizen und Inhomogenitäten, d.h. $\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}_1(t) \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}_1(t)$ und $\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}_2(t) \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}_2(t)$, wodurch sich die Aussage obiger Anmerkung nicht auf diesen Fall übertragen läßt. Dies beschreibt gerade den Unterschied zwischen fehlerfreiem und fehlerbehaftetem Systemeingangsvektor bzw. zwischen „Ljapunov-Stabilität“ und „Ljapunov-Stabilität bei Systemeingang $\mathbf{s}(t)$ “. ■

2. Stabilitätsverhalten linearer zeitinvarianter Differentialgleichungssysteme

Ein bzgl. eines Anfangszustandsvektors und eines gegebenen Sensordatenvektors linearisiertes TNDgIS ist von der Form

$$\Delta \mathbf{z}(t) = A(t_k) \Delta \mathbf{z}(t) + \underbrace{B(t_k) \Delta \tilde{\mathbf{s}}(t)}_{=: \mathbf{b}(t)} \quad (6.5)$$

mit der Systemmatrix $A(t_k)$ und der Steuermatrix $B(t_k)$. Unter Berücksichtigung der in der Kapiteleinleitung dargelegten Einschränkungen bzgl. der Übertragbarkeit auf das nichtlineare System bestimmt nach den Überlegungen aus Anmerkung 6.2 alleine die (als zeitinvariant angenommene) Systemmatrix $A(t_k)$ (nach Anmerkung 6.3 unter der Annahme fehlerfreier Sensordaten) das Stabilitätsverhalten des linear(isiert)en Systems. In der Tat gibt es einfache Kriterien zur Klärung der Stabilitätseigenschaft einer linearen, zeitinvarianten Vektordifferentialgleichung. Da in den Sätzen der Standardliteratur der Grenzbereich zwischen Stabilität und Instabilität meist nicht enthalten ist, werden wir nachfolgenden Satz beweisen, wobei aus dem Beweis Kriterien zur Beurteilung des zeitlichen Fehlerwachstums im Falle von Instabilität folgen.

Definition 6.4:

Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ der Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren zum Eigenwert λ . ■

Satz 6.1 (s. [J.L. Willems(1973)]):

Die Lösung $\zeta(t; \zeta_0, t_0)$ der AWA

$$\dot{\zeta}(t) = A \zeta(t) \quad , \quad \zeta(t_0) = \zeta_0$$

ist genau dann Ljapunov-stabil, wenn die Systemmatrix A keinen Eigenwert mit positivem Realteil hat und für Eigenwerte mit Realteil Null algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen, d.h. Jordanblöcke der Dimension 1 gehören. ■

Beweis von Satz 6.1:

Die Lösung der gestellten AWA läßt sich explizit angeben zu

$$\zeta(t; \zeta_0, t_0) = e^{A(t-t_0)} \zeta_0$$

$$\text{mit} \quad e^{A(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (t-t_0)^k}{k!}$$

Es gilt der Satz A.1 über die Existenz der Jordanschen Normalform $J = \text{diag}(J(\lambda_1, n_1), \dots, J(\lambda_s, n_s))$ zu einer beliebigen Matrix A . Die Anzahl s der Diagonalblöcke von J stimmt mit der Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren von A überein. Je Diagonalblock $J(\lambda_i, n_i)$ erhöht sich die algebraische Vielfachheit von λ_i um n_i und die geometrische Vielfachheit von λ_i um 1.

Mit $A = T J T^{-1}$ (keine Ähnlichkeitstransformation) folgt

$$\begin{aligned} e^{A(t-t_0)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T J T^{-1})^k (t-t_0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T J^k T^{-1} (t-t_0)^k}{k!} = \\ &= T e^{J(t-t_0)} T^{-1} = T \text{diag}(e^{J(\lambda_1, n_1)(t-t_0)}, \dots, e^{J(\lambda_s, n_s)(t-t_0)}) T^{-1} \end{aligned}$$

Wir definieren $\text{diag}_{+k}(\dots)$ als diejenige Matrix der Dimension n_j , welche nur in der k -ten oberen Nebendiagonale die $n_j - |k|$ in der runden Klammer angegebenen, von Null verschiedenen Elemente enthält. Für $\text{diag}_0(\dots)$ schreiben wir – wie üblich – kurz $\text{diag}(\dots)$. Durch ein negatives Vorzeichen von k wird die k -te untere Nebendiagonale generiert.

Aufgrund der speziellen Bandstruktur der Jordanblöcke resultiert

$$e^{J(\lambda_j, n_j)(t-t_0)} = 2) \underbrace{e^{\lambda_j I_{n_j}(t-t_0)}}_{e^{\lambda_j(t-t_0)} I_{n_j}} e^{\text{diag}_{+1}(t-t_0, \dots, t-t_0)}$$

$$2) \text{ Gilt, da } I_{n_j} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & t-t_0 & & & 0 \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & t-t_0 & \\ & & & 0 & t-t_0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ kommutativ sind.}$$

und aus der Definition der Matrixexponentialfunktion

$$e^{\text{diag}_{+1}(t-t_0, \dots, t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\text{diag}_{+1}(t-t_0, \dots, t-t_0))^k}{k!}$$

Potenzen der Matrix im Exponenten zu

$$\underbrace{(\text{diag}_{+1}(t-t_0, \dots, t-t_0))^k}_{n_j-1 \text{ Einträge}} = \text{diag}_{+k}(\underbrace{(t-t_0)^k, \dots, (t-t_0)^k}_{n_j-|k| \text{ Einträge}}).$$

Damit folgt unmittelbar, daß $\text{diag}_{+1}(t-t_0, \dots, t-t_0)$ nilpotent vom Index n_j ist, d.h.

$$(\text{diag}_{+1}(t-t_0, \dots, t-t_0))^k = 0_{n_j} \quad \forall k \geq n_j \quad \wedge \quad (\text{diag}_{+1}(t-t_0, \dots, t-t_0))^{n_j-1} \neq 0_{n_j},$$

und somit

$$e^{J(\lambda_j, n_j)(t-t_0)} = e^{\lambda_j(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 & t-t_0 & \frac{(t-t_0)^2}{2!} & \dots & \frac{(t-t_0)^{n_j-2}}{(n_j-2)!} & \frac{(t-t_0)^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ & 1 & t-t_0 & \ddots & \vdots & \frac{(t-t_0)^{n_j-2}}{(n_j-2)!} \\ & & 1 & \ddots & \frac{(t-t_0)^2}{2!} & \vdots \\ & & & \ddots & t-t_0 & \frac{(t-t_0)^2}{2!} \\ 0 & & & & 1 & t-t_0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Ausgehend von der anfangs genannten expliziten Lösung folgt

$$\zeta(t; \zeta_0, t_0) - \zeta(t; \zeta_1, t_0) = e^{A(t-t_0)} (\zeta_0 - \zeta_1) = T e^{J(t-t_0)} T^{-1} (\zeta_0 - \zeta_1).$$

D.h. hat ein Eigenwert positiven Realteil oder sind algebraische und geometrische Vielfachheit von λ_i nicht $\forall i \in \{i \in \mathbb{N} | i \leq n\}$ identisch, so divergiert mindestens eine Komponente der Lösung. Unter Verwendung verträglicher Matrix- und Vektornormen folgt

$$\|\zeta(t; \zeta_0, t_0) - \zeta(t; \zeta_1, t_0)\| \leq \|e^{J(t-t_0)}\| \underbrace{\|T\| \|T^{-1}\|}_{\text{cond}(T)} \|\zeta_0 - \zeta_1\|.$$

Die Differenz zweier Lösungen einer linearen, zeitinvarianten Vektordifferentialgleichung zu verschiedenen Anfangswerten ist damit nur dann Lipschitz-stetig bzgl. der Anfangswerte mit der Lipschitz-Konstanten

$$L = \|e^{J(t-t_0)}\| \text{cond}(T) = \|e^{J(\lambda_1, n_1)(t-t_0)}\| \dots \|e^{J(\lambda_s, n_s)(t-t_0)}\| \text{cond}(T),$$

wenn $\|e^{J(\lambda_1, n_1)(t-t_0)}\| \dots \|e^{J(\lambda_s, n_s)(t-t_0)}\| \leq \text{const}$ und somit nur Jordan-Blöcke der Dimension 1 auftreten. Speziell führen imaginäre Eigenwerte zu periodischem Fehlverhalten. Treten Jordan-Blöcke höherer Dimension auf, so ist die Norm der Differenz der Lösungen proportional zu einem Polynom in der Zeit, der Konditionszahl der nichtsingulären Transformationsmatrix T und der Norm der Differenz der Anfangswerte. Damit beschreibt obige Ungleichung für Jordan-Blöcke höherer Dimension lediglich die stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten. Aus der Definition der Ljapunov-Stabilität folgt schließlich die Behauptung des Satzes. q.e.d.

Zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Eigenvektoren sind stets linear unabhängig und die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren einer Matrix ist gleich der Summe der geometrischen Vielfachheiten ihrer Eigenwerte. Daraus ergeben sich offensichtliche Kriterien für Stabilitätsuntersuchungen beim Vorliegen eines mehrfachen Eigenwerts mit Realteil Null. Die Bedingung, daß Eigenwerte mit Realteil Null nur mit der Vielfachheit 1 auftreten dürfen, ist hinreichend aber nicht notwendig.

3. Zustandstransformationsinvarianz des lokalen Stabilitätsverhaltens

Gelingt es mittels Satz 6.1 die Ljapunov-Stabilität eines TNDgLS zu zeigen, so stellt sich unmittelbar die Frage nach der Übertragbarkeit auf andere Parametrisierungen. Da beispielsweise die Systemmatrix des linearisierten $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgLS im Vergleich zur Systemmatrix des linearisierten $((\lambda, \varphi, h)^T, \mathbf{v}_h, \tilde{q}_{hb})$ -TNDgLS eine wesentlich einfachere Struktur aufweist, ist diese Frage von vitalem Interesse.

Satz 6.2:

Gegeben seien das nichtlineare dynamische System

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t), \mathbf{s}(t))$$

und das daraus durch Linearisierung bzgl. des Zustandsvektors $\mathbf{z}(t)$ und des Systemeingangsvektors $\mathbf{s}(t)$ gewonnene linear(isiert)e dynamische System

$$\Delta \dot{\mathbf{z}}(t) = A(t_k) \Delta \mathbf{z}(t) + B(t_k) \Delta \mathbf{s}(t).$$

Unterscheiden sich zwei nichtlineare dynamische Systeme lediglich um eine (dimensionerhaltende) Zustands-Transformation mit regulärer Jacobi-Matrix, so ist das Stabilitätsverhalten nach Satz 6.1 der zugehörigen linear(isiert)en dynamischen Systeme äquivalent (im Sinne der Äquivalenz der Eigenwerte der Systemmatrizen und ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheiten). ■

Beweis von Satz 6.2:

Sei $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(\mathbf{y}(t))$ eine dimensionerhaltende, d.h. $\dim \mathbf{y} = \dim \mathbf{z}$, Zustandstransformation mit regulärer Jacobi-Matrix, d.h. $\det \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \right) \neq 0$.

Dann folgt durch Einsetzen in das nichtlineare dynamische System

$$\frac{d}{dt} \mathbf{z}(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(\mathbf{y}(t)), \mathbf{s}(t))$$

und anschließende Taylor-Entwicklung bzgl. des neuen Zustandsvektors $\mathbf{y}$

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{z}(\mathbf{y}) \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0} + \left. \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0} (\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_0) = \left. \mathbf{f}(\mathbf{z}(\mathbf{y}), \mathbf{s}) \right|_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0 \\ \mathbf{s}=\mathbf{s}_0}} + \left(\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \right) \right|_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0 \\ \mathbf{s}=\mathbf{s}_0}} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} \right|_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0 \\ \mathbf{s}=\mathbf{s}_0}} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) + \mathcal{O}^2.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta \dot{\mathbf{y}} &= \left(\left. \frac{\partial \mathbf{z}^{-1}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \right) \right|_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0 \\ \mathbf{s}=\mathbf{s}_0}} \Delta \mathbf{y} + \left(\left. \frac{\partial \mathbf{z}^{-1}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} \right) \right|_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0 \\ \mathbf{s}=\mathbf{s}_0}} \Delta \mathbf{s} + \mathcal{O}^2 \\ &= \left. J^{-1} A J \right|_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0 \\ \mathbf{s}=\mathbf{s}_0}} \Delta \mathbf{y} + \left. J^{-1} B \right|_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_0 \\ \mathbf{s}=\mathbf{s}_0}} \Delta \mathbf{s} + \mathcal{O}^2 \\ &= J^{-1}(t_k) A(t_k) J(t_k) \Delta \mathbf{y}(t) + J^{-1}(t_k) B(t_k) \Delta \mathbf{s}(t) + \mathcal{O}^2. \end{aligned}$$

Ist $\boldsymbol{\xi}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ der Systemmatrix $A(t_k)$, d.h.

$$A(t_k) \boldsymbol{\xi} = \lambda \boldsymbol{\xi},$$

dann ist $\boldsymbol{\zeta} := J^{-1}(t_k) \boldsymbol{\xi}$ nach

$$J^{-1}(t_k) A(t_k) J(t_k) \boldsymbol{\zeta} = J^{-1}(t_k) A(t_k) \boldsymbol{\xi} = \lambda J^{-1}(t_k) \boldsymbol{\xi} = \lambda \boldsymbol{\zeta}$$

Eigenvektor zum selben Eigenwert λ der Systemmatrix $J^{-1}(t_k) A(t_k) J(t_k)$. Eine nichtlineare Zustandstransformation eines nichtlinearen dynamischen Systems bewirkt somit eine Ähnlichkeitstransformation der Systemmatrix des zugehörigen linearisierten dynamischen Systems. Dabei bleiben die Eigenwerte der Systemmatrix (und damit ihre algebraische Vielfachheit) invariant. Dasselbe gilt auch für die geometrische Vielfachheit, unter der Annahme einer regulären Jacobimatrix $J(t_k)$, da die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren sich durch Multiplikation mit einer regulären quadratischen Matrix nicht ändert. q.e.d.

4. Zum Stabilitätsverhalten linear(isiert)er TNDgls

Wenden wir uns zunächst dem $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgls zu. Nach Satz 6.1 sind die Eigenwerte der Systemmatrix für das Stabilitätsverhalten linearer, zeitinvarianter Systeme von zentraler Bedeutung. Aufgrund der Blockdreiecksstruktur der zugehörigen Systemmatrix von Seite 55 sind nach Satz A.2 die Eigenwerte der Systemmatrix mit den Eigenwerten der Diagonalblöcke identisch. Wie bereits besprochen wurde, bringt diese Blockdreiecksstruktur zum Ausdruck, daß in der gewählten Parametrisierung die Orientierungsdifferentialgleichungen unabhängig sind

von Position und Geschwindigkeit, während die Differentialgleichungen für Position und Geschwindigkeit von den Orientierungsparametern abhängen.

Wir betrachten deshalb zunächst den unteren (4×4) -Diagonalblock A_4 in der Systemmatrix des linearisierten $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgIS von Seite 55. Sollte sich für dieses unabhängige Teilsystem die Ljapunov-Instabilität bzgl. Fehlern in den Anfangswerten ergeben, so würde sich diese auch auf das davon abhängige Teilsystem für Position und Geschwindigkeit übertragen, da die resultierende Orientierung verwendet wird, um die Beobachtungen der Beschleunigungsmessertriade ins kartesische erdfeste Bezugssystem zu transformieren und Orientierungsfehler demnach Fehlbeschleunigungen nach sich ziehen würden.

Für den unteren (4×4) -Diagonalblock A_4 ist das Stabilitätsverhalten eindeutig. Es gilt der

Satz 6.3:

Die Eigenwerte der Systemmatrix

$$A_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{ib1} & -\omega_{ib2} & -(\omega_{ib3} - \omega_{ie}) \\ \omega_{ib1} & 0 & \omega_{ib3} + \omega_{ie} & -\omega_{ib2} \\ \omega_{ib2} & -(\omega_{ib3} + \omega_{ie}) & 0 & \omega_{ib1} \\ \omega_{ib3} - \omega_{ie} & \omega_{ib2} & -\omega_{ib1} & 0 \end{pmatrix}$$

des Orientierungsdifferentialgleichungssystems in Quaternionenparametrisierung

$$\dot{\tilde{q}}_{eb} = \frac{1}{2} (\tilde{q}_{eb} \tilde{\omega}_{ib} - \tilde{\omega}_{ie} \tilde{q}_{eb})$$

lauten

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \frac{1}{2} i (\omega_{ie} \pm \|\omega_{ib}\|_2) .$$

Algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte stimmen überein. ■

Beweis von Satz 6.3:

Das charakteristische Polynom zum vierdimensionalen Diagonalblock A_4 lautet

$$\det(A_4 - \lambda I_4) = \lambda^4 + \frac{1}{2} \lambda^2 (\omega_{ie}^2 + \|\omega_{ib}\|^2) + \frac{1}{16} (\omega_{ie}^2 - \|\omega_{ib}\|^2)^2 = 0 .$$

Da es sich um ein quadratisches Polynom in λ^2 handelt, ist die Berechnung der Quadratwurzeln

$$\lambda_{1,2}^2 = -\frac{1}{4} (\omega_{ie} \pm \|\omega_{ib}\|)^2$$

trivial. Die vier Eigenwerte des Diagonalblocks resultieren daraus zu

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \frac{1}{2} i (\omega_{ie} \pm \|\omega_{ib}\|) .$$

Die Systemmatrix A_4 ist schiefsymmetrisch, d.h. $A_4^T = -A_4$. Dann ist $\Sigma := iA_4$ hermitesch, d.h. $\Sigma^T = \bar{\Sigma}$. Hermitesche Matrizen haben reelle charakteristische Wurzeln und ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren (s. z.B. [Gantmacher(1986)]). Ist ξ_i Eigenvektor zum reellen Eigenwert μ_i der hermiteschen Matrix Σ , d.h.

$$\Sigma \xi_i = \mu_i \xi_i , \quad (i = 1(1)4) ,$$

so ist ξ_i Eigenvektor zum imaginären Eigenwert $\lambda_i = -i\mu_i$ der schiefsymmetrischen Matrix A_4 . Damit besitzen alle schiefsymmetrischen Matrizen imaginäre Eigenwerte und ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren. q.e.d.

Korollar 6.4:

Das an den Sensordaten linearisierte Orientierungsdifferentialgleichungssystem in Quaternionenparametrisierung

$$\dot{\tilde{q}}_{eb} = \frac{1}{2} (\tilde{q}_{eb} \tilde{\omega}_{ib} - \tilde{\omega}_{ie} \tilde{q}_{eb})$$

ist Ljapunov-stabil. ■

Beweis von Korollar 6.4:

Konsequenz aus Satz 6.3 und Satz 6.1.

q.e.d.

Anmerkung 6.4: Natürlich lassen sich die Aussagen von Satz 6.3 und Korollar 6.4 auch auf Orientierungsdifferentialgleichungen in Quaternionenparametrisierung zwischen beliebigen Bezugssystemen verallgemeinern. Dies ist auch eine Folge von Satz 6.2. ■

Die Unabhängigkeit der Orientierungsdifferentialgleichung von Position und Geschwindigkeit bringt zum Ausdruck, daß im Falle eines nicht mit anderen Sensoren kombinierten Trägheitsnavigationssystems nach der Anfangsorientierung die Orientierung alleine durch Verwendung der Kreiselraten unabhängig von Position und Geschwindigkeit über einen beliebig großen Zeitraum vorprozessiert und als gegeben betrachtet werden kann. Ist die Orientierung in diesem Sinne gegeben, so folgen Position und Orientierung durch Lösen des resultierenden linear(isiert)en, sechsdimensionalen, inhomogenen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung, wobei die zugehörige Systemmatrix

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega_{ie}^2 + V_{xx} & \dot{\omega}_{ie} + V_{xy} & V_{xz} & 0 & 2\omega_{ie} & 0 \\ -\dot{\omega}_{ie} + V_{yx} & \omega_{ie}^2 + V_{yy} & V_{yz} & -2\omega_{ie} & 0 & 0 \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

mit dem oberen (6×6)-Diagonalblock A_6 der 10-dimensionalen Systemmatrix des linearisierten $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgls übereinstimmt. Die Untersuchung des Eigenraumes dieses oberen Diagonalblocks gibt nach Satz 6.1 Aufschluß über die Ljapunov-Stabilität von Linearkombinationen aus Positions- und Geschwindigkeitskomponenten.

Die Koeffizienten im charakteristischen Polynom einer Matrix A

$$|A - \lambda I| = (-\lambda)^{\dim A} + a_1 (-\lambda)^{\dim A - 1} + \dots + a_{\dim A - 1} (-\lambda) + a_{\dim A} = 0 \quad (6.7)$$

können mit Hilfe der Hauptminoren (Hauptunterdeterminanten) von A ausgedrückt werden (s. z.B. [F.R. Gantmacher (1986)]), genauer

$$a_i = \text{Summe der Hauptminoren } i\text{-ter Ordnung von } A. \quad (6.8)$$

Unter Vernachlässigung der zeitlichen Änderung der Erddrehrate³⁾, d.h. $\dot{\omega}_{ie} = 0$, folgen die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms 6.7 des linken oberen (6×6)-Diagonalblocks A_6 der Systemmatrix des linearisierten $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgls zu

$$a_1 = 0 \quad (\text{Spurfreiheit des Diagonalblocks!}) \quad (6.9)$$

$$a_2 = -\underbrace{\text{Spur} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} V(\mathbf{x}) \right)}_0 + 2\omega_{ie}^2 = 2\omega_{ie}^2 > 0 \quad (6.10)$$

$$a_3 = -2\omega_{ie}(V_{xy} - V_{yx}) = 0 \quad (6.11)$$

$$a_4 = \begin{vmatrix} V_{xx} & V_{xy} \\ V_{yx} & V_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} V_{xx} & V_{xz} \\ V_{zx} & V_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zy} & V_{zz} \end{vmatrix} - 3V_{zz}\omega_{ie}^2 + \omega_{ie}^4 \quad (6.12)$$

$$a_5 = 2\omega_{ie} \left(\begin{vmatrix} V_{xy} & V_{xz} \\ V_{zy} & V_{zz} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} V_{yx} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zz} \end{vmatrix} \right) = 0 \quad (6.13)$$

$$a_6 = -\left| \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} V(\mathbf{x}) + \Omega_{ie}^2 \right| = -\left| \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} V(\mathbf{x}) \right| - \omega_{ie}^2 \left(\begin{vmatrix} V_{xx} & V_{xz} \\ V_{zx} & V_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zy} & V_{zz} \end{vmatrix} \right) - V_{zz}\omega_{ie}^4. \quad (6.14)$$

Aus der Symmetrie der Hessematrix des Gravitationspotentials folgt im vorliegenden Fall, daß alle Koeffizienten mit ungeradem Index Null sind und das charakteristische Polynom in λ vom Grad 6 somit degeneriert zum kubischen Polynom in λ^2

³⁾Die von ω_{ie} beigetragene Information ist unterhalb der Rauschgrenze der in der Trägheitsnavigation eingesetzten inertialen Sensoren und damit nicht praxisrelevant.

$$\lambda^6 + 2\omega_{ie}^2 \lambda^4 + \left(\begin{vmatrix} V_{xx} & V_{xy} \\ V_{yx} & V_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} V_{xx} & V_{xz} \\ V_{zx} & V_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zy} & V_{zz} \end{vmatrix} - 3V_{zz}\omega_{ie}^2 + \omega_{ie}^4 \right) \lambda^2 - \left| \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} V(\mathbf{x}) + \Omega_{ie}^2 \right| = 0. \quad (6.15)$$

Das kubische charakteristische Polynom in λ^2 hat entweder eine reelle und zwei konjugiert komplexe oder drei reelle Nullstellen. Seien $|c|(\cos \varphi_0 \pm i \sin \varphi_0)$ Nullstellen des kubischen charakteristischen Polynoms in λ^2 . Dann sind die Quadratwurzeln $\pm \sqrt{|c|}(\cos \frac{\varphi_0}{2} \pm i \sin \frac{\varphi_0}{2})$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms vom Grad 6 in λ und damit Eigenwerte des oberen Diagonalblocks. Um der notwendigen Bedingung $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, 6\}$, für Ljapunov-Stabilität nach Satz 6.1 zu genügen, dürfen somit nur imaginäre Nullstellen des charakteristischen Polynoms vom Grad 6 in λ und somit nur nichtpositive Nullstellen des kubischen Polynoms in λ^2 auftreten.

Satz 6.5:

Das Teilsystem für Position und Geschwindigkeit des linearisierten $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \dot{q}_{eb})$ -TNDglS – unter Vernachlässigung der zeitlichen Änderung der Erddrehrate, d.h. $\dot{\omega}_{ie} = 0$ – ist niemals asymptotisch Ljapunov-stabil, d.h. der linke obere (6×6) -Diagonalblock A_6 des linearisierten $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \dot{q}_{eb})$ -TNDglS hat niemals ausschließlich Eigenwerte mit negativem Realteil. Ist das Teilsystem Ljapunov-stabil, so sind alle Eigenwerte des linearisierten $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \dot{q}_{eb})$ -TNDglS imaginär. ■

Mittels der Substitution $\lambda^2 = \mu^2 - \frac{2}{3}\omega_{ie}^2$ erhalten wir ein kubisches Polynom in μ^2 in reduzierter Form (d.h. ohne μ^4 -Term)

$$\mu^6 + a\mu^2 + b := \mu^6 + \left(a_4 - \frac{a_2^2}{3}\right)\mu^2 + \left(a_6 - \frac{a_2 a_4}{3} + \frac{2a_2^3}{27}\right) = 0. \quad (6.16)$$

Die (Kubik-)Wurzeln eines kubischen Polynoms lassen sich mit Hilfe der Cardanoschen Formel (s. z.B. [W. Heitzinger et al.(1985)]) – aufgrund einer Nebenbedingung – nur formal explizit angeben. Es gilt jedoch

Satz 6.6 (s. [W. Heitzinger et al.(1985)]):

Gegeben sei das kubische Polynom $z^3 + az + b = 0$ mit reellen Koeffizienten.

Dann treten für

$$D := \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$$

3 voneinander verschiedene reelle Nullstellen, für

$$D := \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0 \quad \wedge \quad ab \neq 0$$

eine reelle Doppel- und eine reelle Einfachwurzel, für

$$D := \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0 \quad \wedge \quad a = 0 \quad \wedge \quad b = 0$$

eine reelle Dreifachwurzel und für

$$D := \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0$$

eine reelle Wurzel und ein Paar konjugiert komplexer Wurzeln auf. ■

Natürlich übertragen sich diese Aussagen, wie man aus der Substitution $\lambda^2 = \mu^2 - \frac{2}{3}\omega_{ie}^2$ erkennt, entsprechend auf das kubische charakteristische Polynom in λ^2 .

Können wir neben $D \leq 0$ noch eine Bedingung angeben, welche aus der Menge der reellen, evtl. *mehrfachen* Nullstellen eines kubischen Polynoms nur die nichtpositiven zuläßt, so haben wir ein hinreichendes Kriterium dafür, daß kein Eigenwert mit positivem Realteil auftritt bzw. ein notwendiges Kriterium für Ljapunov-Stabilität (algebraische und geometrische Vielfachheit müssen nicht übereinstimmen). Geben wir dagegen neben $D < 0$ noch eine Bedingung an, welche aus der Menge der reellen, *verschiedenen* Nullstellen eines kubischen Polynoms nur die negativen zuläßt, so haben wir ein hinreichendes Kriterium dafür, daß kein Eigenwert mit positivem Realteil oder mehrfacher Eigenwert identisch null auftritt bzw. ein hinreichendes Kriterium für Ljapunov-Stabilität (algebraische und geometrische Vielfachheit müssen übereinstimmen).

Satz 6.7 (Zeichenregel von Descartes):

Die Anzahl der positiven Wurzeln eines Polynoms

$$p(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n, \quad b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n \in \mathbb{R}$$

ist gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge ihrer Koeffizienten, $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n$, oder um eine ganze Zahl kleiner. ■

In der Koeffizientenfolge $1, 2\omega_{ie}^2, a_4, a_6$ des kubischen charakteristischen Polynoms in λ^2 können – in Abhängigkeit der verwendeten Realisierung des Eötvös-Tensors – maximal zwei Zeichenwechsel auftreten. Es folgt der

Satz 6.8:

Für den oberen (6×6) -Diagonalblock A_6 im linearisierten $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \dot{q}_{eb})$ -TNDgls (mit $\dot{\omega}_{ie} = 0$) gilt:

1. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz von sechs verschiedenen imaginären Eigenwerten (hinreichende Bedingung für Ljapunov-Stabilität) ist

$$D < 0 \quad \wedge \quad a_4 \geq 0 \quad \wedge \quad a_6 > 0 \quad .$$

2. Eine notwendige Bedingung für die Existenz von sechs (teilweise mehrfachen) imaginären Eigenwerten (notwendige Bedingung für Ljapunov-Stabilität) ⁴⁾ ist

$$D \leq 0 \quad \wedge \quad a_6 \geq 0 \quad .$$

3. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Eigenwertes mit positivem Realteil (hinreichende Bedingung für Instabilität) ist

$$D > 0 \quad .$$

Wie wir im vorletzten Abschnitt gesehen haben, wachsen Fehler in den Anfangswerten im Falle mehrfacher imaginärer Eigenwerte mit größerer algebraischer als geometrischer Vielfachheit polynomial und im Falle von Eigenwerten mit positivem Realteil exponentiell mit der Zeit.

Zweck der folgenden drei Beispiele ist es durch zusätzliche Vereinfachungen einen Spezialfall zu kreieren, welcher noch eine analytische Untersuchung erlaubt und bzgl. dessen der allgemeine Fall als nur leicht gestört betrachtet werden kann. Weist dieser Spezialfall ein eindeutiges Stabilitätsverhalten auf, so kann daraus geschlossen werden, daß kleine Störungen dieses nicht verändern und es somit auf den allgemeinen Fall übertragen werden kann. Die Übertragbarkeit – d.h. die Robustheit des Eigensystems gegen kleine Störungen – ist numerisch zu gewährleisten.

Beispiel 6.1 (gleichförmig rotierende Erde und (lokal) homogenes Gravitationsvektorfeld):

Vereinfachungen:

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} (V_e(\mathbf{x}) + V_t(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\omega}_{ie} = 0$$

Systemmatrix:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega_{ie}^2 & 0 & 0 & 0 & 2\omega_{ie} & 0 \\ 0 & \omega_{ie}^2 & 0 & -2\omega_{ie} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

reelle Koeffizienten des kubischen charakteristischen Polynoms in λ^2 (Hauptminoren):

$$a_2 = 2\omega_{ie}^2, \quad a_4 = \omega_{ie}^4, \quad a_6 = 0$$

Hilfsgrößen:

$$D = \left(-\frac{1}{3}\omega_{ie}^6 + \frac{8}{27}\omega_{ie}^6 \right)^2 + \left(\frac{1}{3}\omega_{ie}^4 - \frac{4}{9}\omega_{ie}^4 \right)^3 = 0 \quad \rightarrow \text{mehrfache reelle Nullstelle}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= a_4 - \frac{a_2^2}{3} = -\frac{1}{3}\omega_{ie}^4 \\ b &= a_6 - \frac{a_2 a_4}{3} + \frac{2a_2^3}{27} = -\frac{2}{27}\omega_{ie}^6 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{reelle Doppel- und Einfachkubikwurzel}$$

⁴⁾ Wie wir im vorletzten Abschnitt gesehen haben, ist das Teilsystem hier genau dann Ljapunov-stabil, wenn algebraische und geometrische Vielfachheit der mehrfachen Eigenwerte übereinstimmen.

kubisches charakteristisches Polynom in λ^2 :

$$\lambda^6 + 2\omega_{ie}^2 \lambda^4 + \omega_{ie}^4 \lambda^2 = \lambda^2 (\lambda^4 + 2\omega_{ie}^2 \lambda^2 + \omega_{ie}^4) = 0$$

Kubikwurzeln $\lambda_i^2 (i = 1, 2, 3)$:

$$\lambda_1^2 = 0 \quad , \quad \lambda_{2,3}^2 = -\omega_{ie}^2$$

Eigenwerte des Diagonalblocks $\lambda_i (i = 1(1)6)$:

$$\lambda_{1,2} = 0 \quad , \quad \lambda_{3,4} = +i\omega_{ie} \quad , \quad \lambda_{5,6} = -i\omega_{ie}$$

Es resultieren demnach drei imaginäre Eigenwerte der algebraischen Vielfachheit zwei. Dies ist notwendig, aber nicht hinreichend für die Ljapunov-Stabilität des Teilsystems.

Mittels der Eigenwerte λ_i errechnen sich die korrespondierenden Eigenvektoren zu

$$\mathbf{x}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ i\omega_{ie} \\ -\omega_{ie} \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}_{5,6} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ -i\omega_{ie} \\ -\omega_{ie} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die geometrische Vielfachheit der drei Eigenwerte (der algebraischen Vielfachheit 2) ist für $\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} W(\mathbf{x}) = 0$ demnach jeweils nur eins und das Teilsystem deshalb Ljapunov-instabil. Fehler in den Anfangswerten wachsen *linear* mit der Zeit. ■

Beispiel 6.2 (nichtrotierende Erde und radialsymmetrisches Gravitationsfeld):

Vereinfachungen:

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} V_e(\mathbf{x}) = GM \begin{pmatrix} \frac{3x^2-r^2}{r^5} & \frac{3xy}{r^5} & \frac{3xz}{r^5} \\ \frac{3xy}{r^5} & \frac{3y^2-r^2}{r^5} & \frac{3yz}{r^5} \\ \frac{3xz}{r^5} & \frac{3yz}{r^5} & \frac{3z^2-r^2}{r^5} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} V_t(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \omega_{ie} = 0$$

Systemmatrix:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3x^2-r^2}{r^5} & \frac{3xy}{r^5} & \frac{3xz}{r^5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3xy}{r^5} & \frac{3y^2-r^2}{r^5} & \frac{3yz}{r^5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3xz}{r^5} & \frac{3yz}{r^5} & \frac{3z^2-r^2}{r^5} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

reelle Koeffizienten des kubischen charakteristischen Polynoms in λ^2 (Hauptminoren):

$$a_2 = 0 \quad , \quad a_4 = -3 \left(\frac{GM}{r^3} \right)^2 = -3\omega_s^4 \quad , \quad a_6 = -2 \left(\frac{GM}{r^3} \right)^3 = -2\omega_s^6$$

mit der Schuler-Winkelgeschwindigkeit $\omega_s := \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$

Hilfsgrößen:

$$\begin{aligned} D &= (-\omega_s^6)^2 + (-\omega_s^4)^3 = 0 && \rightarrow \text{mehrfache reelle Nullstelle} \\ \left. \begin{aligned} a &= a_4 - \frac{a_2^2}{3} = -3\omega_s^4 \\ b &= a_6 - \frac{a_2 a_4}{3} + \frac{2a_2^3}{27} = -2\omega_s^6 \end{aligned} \right\} && \rightarrow \text{reelle Doppel- und Einfachkubikwurzel} \end{aligned}$$

kubisches charakteristisches Polynom in λ^2 :

$$\lambda^6 - 3\omega_s^4 \lambda^2 - 2\omega_s^6 = 0$$

Kubikwurzeln $\lambda_i^2 (i = 1, 2, 3)$:

$$\lambda_{1,2}^2 = -\omega_s^2 \quad , \quad \lambda_3^2 = 2\omega_s^2$$

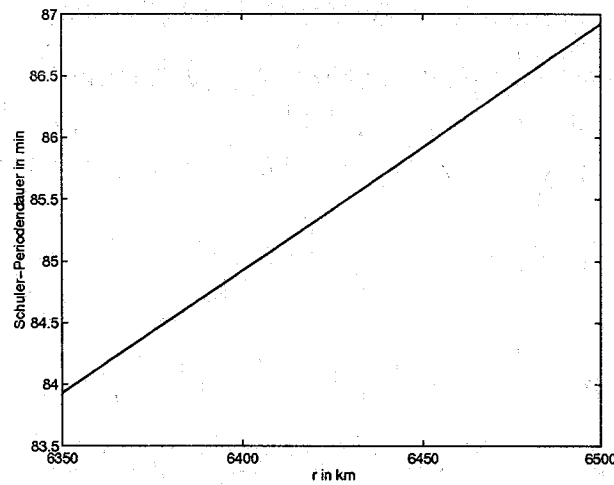


Abbildung 6.1: Schuler-Periodendauer

Eigenwerte des Diagonalblocks λ_i ($i = 1(1)6$):

$$\lambda_{1,2} = -i\omega_s, \quad \lambda_{3,4} = +i\omega_s, \quad \lambda_5 = -\sqrt{2}\omega_s, \quad \lambda_6 = +\sqrt{2}\omega_s$$

Es resultieren demnach zwei imaginäre Eigenwerte der algebraischen Vielfachheit zwei und zwei reelle Eigenwerte der algebraischen Vielfachheit eins. Da ein reeller Eigenwert positiv ist, ist das Teilsystem für Position und Geschwindigkeit Ljapunov-instabil.

Eigenvektoren des Diagonalblocks $\mathbf{x}_i$ ($i = 1(1)6$):

Mittels der Eigenwerte λ_i errechnen sich die korrespondierenden Eigenvektoren zu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} -iz \\ 0 \\ ix \\ -\omega_s z \\ 0 \\ \omega_s x \end{pmatrix}, & \mathbf{x}_2 &= \begin{pmatrix} -iy \\ ix \\ 0 \\ -\omega_s y \\ \omega_s x \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{x}_3 &= \begin{pmatrix} iz \\ 0 \\ -ix \\ -\omega_s z \\ 0 \\ \omega_s x \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_4 &= \begin{pmatrix} iy \\ -ix \\ 0 \\ -\omega_s y \\ \omega_s x \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{x}_5 &= \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \\ \sqrt{2}\omega_s x \\ \sqrt{2}\omega_s y \\ \sqrt{2}\omega_s z \end{pmatrix}, & \mathbf{x}_6 &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \sqrt{2}\omega_s x \\ \sqrt{2}\omega_s y \\ \sqrt{2}\omega_s z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Eigenwerte der sechsdimensionalen Systemmatrix stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit demnach überein, d.h. es existiert ein vollständiges System von Eigenvektoren. Die Systemmatrix ist diagonalisierbar.

Identifikation der instabilen Komponente:

Das Teilsystem für Position und Geschwindigkeit des linear(isiert)en $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \check{q}_{eb})$ -TNDgIS ist von der Form

$$\Delta \dot{\mathbf{z}}(t) = A_6 \Delta \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}(t) \quad \text{mit dem Anfangswert} \quad \Delta \mathbf{z}(t_0) = \Delta \mathbf{z}_0.$$

Die allgemeine Lösung dieses inhomogenen Systems folgt als Summe der allgemeinen Lösung des homogenen Systems und einer partikulären Lösung des inhomogenen Systems zu

$$\Delta \mathbf{z}(t) = e^{A_6(t-t_0)} \Delta \mathbf{z}_0 + \int_{t_0}^t e^{A_6(t-\tau)} \mathbf{b}(\tau) d\tau.$$

Unter Ausnutzung der Diagonalisierbarkeit folgt mit $X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6)$ nach Satz 6.1

$$\Delta \mathbf{z}(t) = X \operatorname{diag}_0 \left(e^{-i\omega_s(t-t_0)}, e^{-i\omega_s(t-t_0)}, e^{+i\omega_s(t-t_0)}, e^{+i\omega_s(t-t_0)}, e^{-\sqrt{2}\omega_s(t-t_0)}, e^{+\sqrt{2}\omega_s(t-t_0)} \right) X^{-1} \Delta \mathbf{z}_0$$

$$+ \int_{t_0}^t X \operatorname{diag}_0 \left(e^{-i\omega_s(t-\tau)}, e^{-i\omega_s(t-\tau)}, e^{+i\omega_s(t-\tau)}, e^{+i\omega_s(t-\tau)}, e^{-\sqrt{2}\omega_s(t-\tau)}, e^{+\sqrt{2}\omega_s(t-\tau)} \right) X^{-1} \mathbf{b}(\tau) d\tau.$$

Mit Hilfe der Basistransformationen $\Delta \mathbf{z}_0 = X \Delta \zeta_0$ und $\mathbf{b} = X \sigma$ – Anfangswert und Inhomogenität werden in der Eigenbasis repräsentiert – folgt schließlich

$$\Delta \mathbf{z}(t) = \left(e^{-i\omega_s(t-t_0)} \mathbf{x}_1, e^{-i\omega_s(t-t_0)} \mathbf{x}_2, e^{+i\omega_s(t-t_0)} \mathbf{x}_3, e^{+i\omega_s(t-t_0)} \mathbf{x}_4, e^{-\sqrt{2}\omega_s(t-t_0)} \mathbf{x}_5, e^{+\sqrt{2}\omega_s(t-t_0)} \mathbf{x}_6 \right) \Delta \zeta_0 \\ + \int_{t_0}^t \left(e^{-i\omega_s(t-\tau)} \mathbf{x}_1, e^{-i\omega_s(t-\tau)} \mathbf{x}_2, e^{+i\omega_s(t-\tau)} \mathbf{x}_3, e^{+i\omega_s(t-\tau)} \mathbf{x}_4, e^{-\sqrt{2}\omega_s(t-\tau)} \mathbf{x}_5, e^{+\sqrt{2}\omega_s(t-\tau)} \mathbf{x}_6 \right) \Delta \sigma(\tau) d\tau.$$

Betrachten wir die Basistransformationen $X \Delta \zeta_0 = \Delta \mathbf{z}_0$ als lineares algebraisches Gleichungssystem und Lösen dieses zur Bestimmung von $\Delta \zeta_0$, so folgt für den zeitlich exponentiell wachsenden Summanden der Lösung

$$\Delta \zeta_{0,6} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta \mathbf{x}_0 | \mathbf{x} \rangle}{r^2} + \frac{1}{\sqrt{8}\omega_s} \frac{\langle \Delta \mathbf{v}_0 | \mathbf{x} \rangle}{r^2}.$$

Enthalten die Anfangswerte demnach radiale Orts- und/oder Geschwindigkeitsfehler, so wachsen diese zeitlich exponentiell an! Dasselbe gilt für radiale Fehler in der Inhomogenität (Einfluß der Sensordaten). ■

Beispiel 6.3 (gleichförmig rotierende Erde und radialsymmetrisches Gravitationsfeld):

Vereinfachungen:

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} V_e(\mathbf{x}) = GM \begin{pmatrix} \frac{3x^2-r^2}{r^5} & \frac{3xy}{r^5} & \frac{3xz}{r^5} \\ \frac{3xy}{r^5} & \frac{3y^2-r^2}{r^5} & \frac{3yz}{r^5} \\ \frac{3xz}{r^5} & \frac{3yz}{r^5} & \frac{3z^2-r^2}{r^5} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} V_t(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\omega}_{ie} = 0$$

Systemmatrix:

$$A_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega_{ie}^2 + \frac{3x^2-r^2}{r^5} & \frac{3xy}{r^5} & \frac{3xz}{r^5} & 0 & 2\omega_{ie} & 0 \\ \frac{3xy}{r^5} & \omega_{ie}^2 + \frac{3y^2-r^2}{r^5} & \frac{3yz}{r^5} & -2\omega_{ie} & 0 & 0 \\ \frac{3xz}{r^5} & \frac{3yz}{r^5} & \frac{3z^2-r^2}{r^5} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

reelle Koeffizienten des kubischen charakteristischen Polynoms in λ^2 (Hauptminoren):

$$a_2 = 2\omega_{ie}^2, \quad a_4 = \omega_{ie}^4 - 3\omega_{ie}^2\omega_s^2(3\sin^2\phi - 1) - 3\omega_s^4, \quad a_6 = -\omega_s^2\omega_{ie}^4(3\sin^2\phi - 1) + \omega_s^4\omega_{ie}^2(3\sin^2\phi + 1) - 2\omega_s^6$$

mit der sphärischen Breite ϕ , $\sin\phi := \frac{z}{r}$, und der Schuler-Winkelgeschwindigkeit $\omega_s := \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$.

Hilfsgrößen:

$$a = a_4 - \frac{a_2^2}{3} = -\frac{1}{3}\omega_{ie}^4 - 3\omega_{ie}^2\omega_s^2(3\sin^2\phi - 1) - 3\omega_s^4 \\ b = a_6 - \frac{a_2a_4}{3} + \frac{2a_2^3}{27} = -\frac{2}{27}\omega_{ie}^6 - 2\omega_s^6 + 3\omega_{ie}^2\omega_s^4(1 + \sin^2\phi) + \omega_{ie}^4\omega_s^2(3\sin^2\phi - 1)$$

Wie man aus Abbildung 6.1 erkennt, ist die Schuler-Periodendauer von nautischen bis avionischen Anwendungen viel kleiner als die Periodendauer der Erdrotation und somit

$$\omega_s \gg \omega_{ie} \quad \text{bzw.} \quad \omega_s \approx 17\omega_{ie}.$$

Demzufolge ist das vorliegende Beispiel gegenüber Beispiel 6.2 nur leicht gestört (im Sinne geringfügig gestörter Koeffizienten des charakteristischen Polynoms) und somit auch die zugehörigen Eigenwerte nur leicht gestört. Demnach ist ein positiver reeller Eigenwert bzw. Ljapunov-Instabilität zu erwarten.

kubisches charakteristisches Polynom in λ^2 :

$$\lambda^6 + a_2\lambda^4 + a_4\lambda^2 + a_6 = 0$$

Kubikwurzeln $\lambda_i^2 (i = 1, 2, 3)$ mittels Cardanoscher Formel:

$$\lambda^2 = u + v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Infolge der Dreideutigkeit der Kubikwurzeln ergeben sich formal neun Kombinationsmöglichkeiten, wobei nur diejenigen drei zulässig sind, für welche $uv = -\frac{a}{3}$ gilt. Hat man ein Paar von Kubikwurzeln u_1 und v_1 ausgewählt, für welches $u_1 v_1 = -\frac{a}{3}$ gilt, so folgen die verbleibenden beiden Kubikwurzeln durch Drehung um 120° bzw. 240° , d.h.

$$u_2 = u_1 \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad v_2 = v_1 \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

$$u_3 = u_1 \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad v_3 = v_1 \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Die Kubikwurzeln ergeben sich dementsprechend zu

$$\lambda_1^2 = u_1 + v_1$$

$$\lambda_2^2 = u_2 + v_2 = u_1 \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + v_1 \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_3^2 = u_3 + v_3 = u_1 \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + v_1 \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Eigenwerte des Diagonalblocks $\lambda_i (i = 1(1)6)$:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{u_1 + v_1}, \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{u_2 + v_2}, \quad \lambda_{5,6} = \pm\sqrt{u_3 + v_3}$$

Die Größen a_4, a_6, a, b und D sind bivariate Polynome in $\sin \phi$ und ω_s bzw. r und in den Abbildung 6.2 bis 6.6 visualisiert.

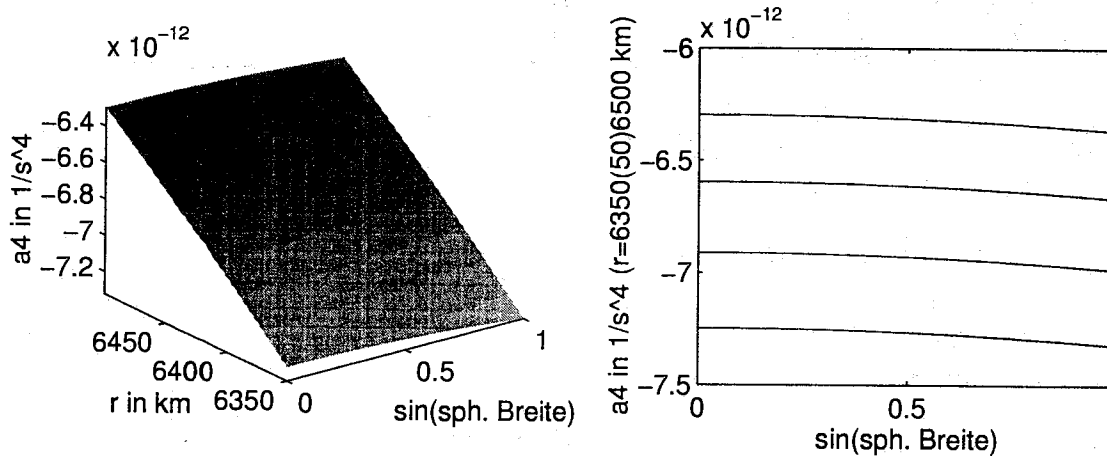
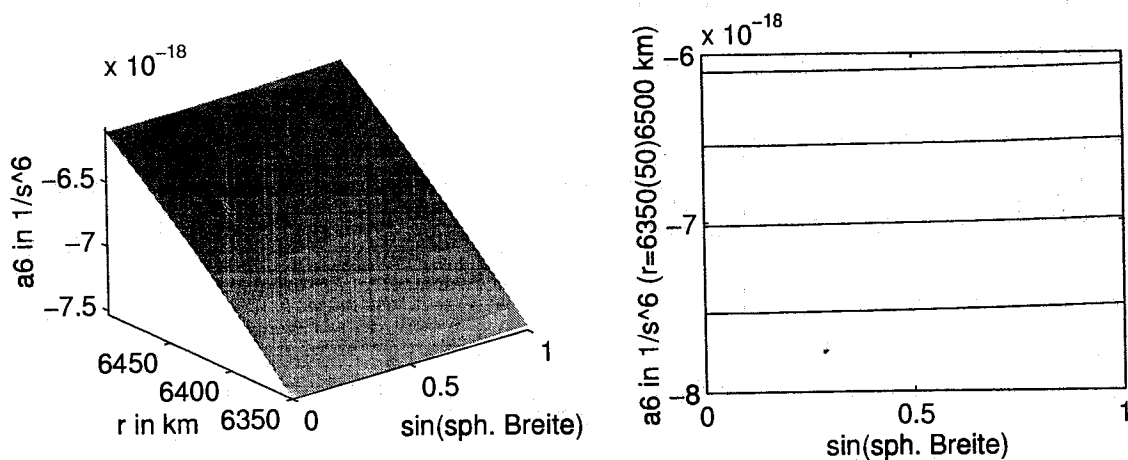
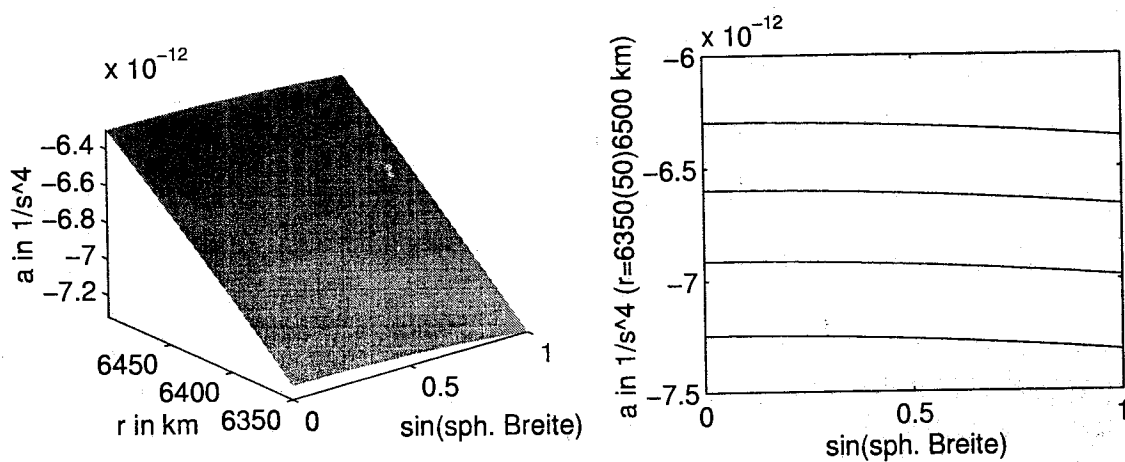
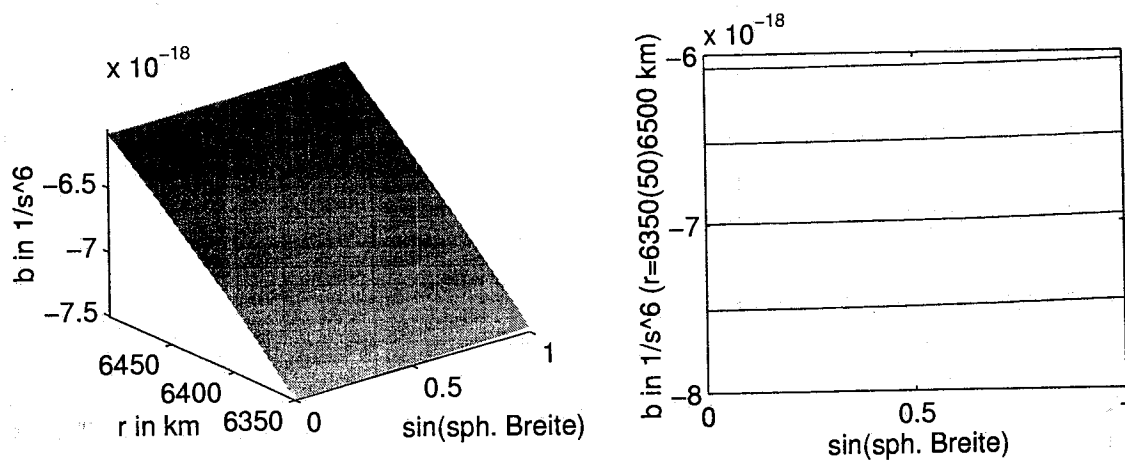
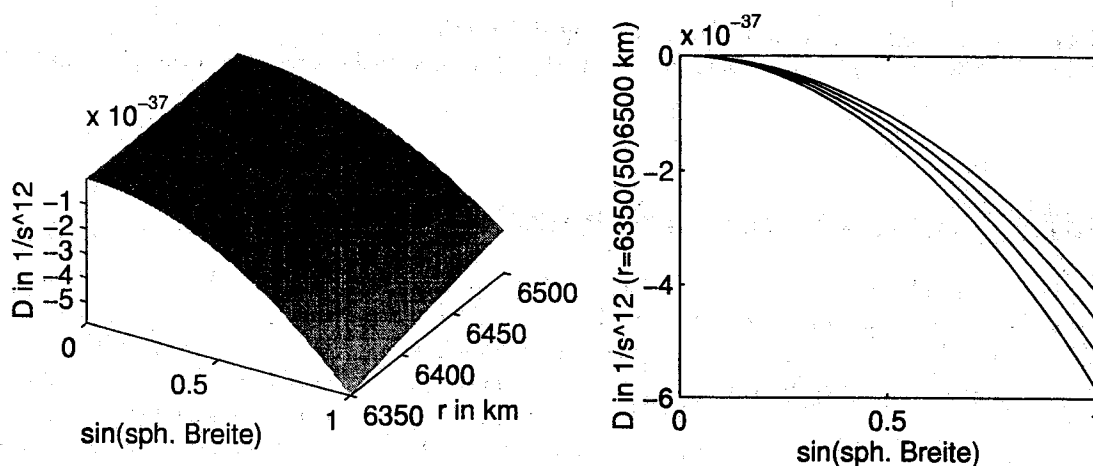


Abbildung 6.2: Koeffizient a_4 des charakteristischen Polynoms

Zunächst ist festzuhalten, daß keine der Größen aus den Abbildungen 6.2 bis 6.6 über dem geplotteten Bereich das Vorzeichen wechselt und alle negativ sind. Aus $D < 0$ folgt nach Satz 6.6, daß drei voneinander verschiedene reelle Nullstellen des kubischen charakteristischen Polynoms in λ^2 auftreten und aus $a_0 = 1 > 0$, $a_2 = 2\omega_{ie}^2 > 0$ und $a_4 < 0$, $a_6 < 0$ aus Abbildungen 6.2 und 6.3 nach der Descartesschen Zeichenregel die Existenz einer positiven Nullstelle des kubischen charakteristischen Polynoms in λ^2 . Die Quadratwurzeln der beiden nichtpositiven reellen Nullstellen des kubischen charakteristischen Polynoms in λ^2 führen demnach zu vier imaginären Nullstellen des charakteristischen Polynoms vom Grad sechs in λ und die positive reelle Nullstelle des kubischen charakteristischen Polynoms in λ^2 auf eine negative und eine positive reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms vom Grad sechs in λ . Aus der Existenz des positiven reellen Eigenwertes folgt die Ljapunov-Instabilität des Teilsystems für Position und Geschwindigkeit.

Abbildung 6.3: Koeffizient a_6 des charakteristischen PolynomsAbbildung 6.4: Koeffizient a des reduzierten charakteristischen PolynomsAbbildung 6.5: Koeffizient b des reduzierten charakteristischen Polynoms

Abbildung 6.6: Diskriminante D

Numerisches Beispiel für einen Punkt im Raum Stuttgart unter Verwendung von WGS-84-Konstanten:

$$\lambda = 9^\circ, \quad \varphi = 48^\circ, \quad h = 0 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 = -1.6789 \cdot 10^{-6}, \quad \lambda_2^2 = -1.4102 \cdot 10^{-6}, \quad \lambda_3^2 = +3.0891 \cdot 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 \approx \lambda_2^2 \approx -\omega_s^2 = -1.5448 \cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \lambda_3^2 \approx 2\omega_s^2 = +3.0895 \cdot 10^{-6}$$

Dieses numerische Beispiel belegt exemplarisch die Übertragbarkeit der Ljapunov-Instabilität des vorhergehenden Beispiels auf das vorliegende. D.h. die Berücksichtigung der Erdrotation kann gegenüber der Existenz eines Zentralfeldes der Gravitation als kleine Störung betrachtet werden, welche das Stabilitätsverhalten nicht qualitativ verändert.

Ebenso stellen die Erdrotationsverzögerung $\dot{\omega}_e$ und zusätzliche (die Abweichung des Gravitationsfeldes vom Zentralfeld beschreibende) Terme im Eötvös-Tensor kleine Störungen dar, welche das Stabilitätsverhalten nicht qualitativ verändern. ■

Zusammenfassend wurde die Ljapunov-Stabilität der linearisierten Quaternionen-Orientierungsdifferentialgleichungen bzgl. Fehlern in der Anfangsquaternion (-orientierung) und die Ljapunov-Instabilität der Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen bzgl. Fehlern in den vertikalen Komponenten von Anfangsposition und -geschwindigkeit gezeigt. Fehler in den horizontalen Komponenten von Anfangsposition und -geschwindigkeit bleiben dagegen beschränkt.

Anmerkung 6.5: Verwendet man anstatt dem linearisierten $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgLS als Ausgangsbasis das linearisierte $((\lambda, \varphi, h)^T, \mathbf{v}_h, \tilde{q}_{hb})$ -TNDgLS, so ist eine analoge Betrachtung aufgrund der Kompliziertheit des oberen (6×6) -Diagonalblocks (alle Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind verschieden von Null) nicht mehr ohne weiteres möglich⁵⁾. Zur Gewährleistung der Lösbarkeit wären somit zusätzliche, d.h. über das Maß obiger Ausführungen hinausgehende, Vereinfachungen zu treffen, was jedoch die Gültigkeit des Ergebnisses einschränkt. Aufgrund der bewiesenen Transformationsinvarianz ist jedoch eine Übertragung der erhaltenen Aussagen auf diese Parametrisierung i.a. problemlos möglich.

In [E.W. Grafarend(1989)], [K.P. Schwarz(1986)], [K.P. Schwarz; A.A. Vassiliou(1985)] und [A.A. Vassiliou; K.P. Schwarz(1985)] wurden für den Fall der Parametrisierung in ellipsoidnormalen Positionskoordinaten und der Verwendung multiplikativer Kardan-Winkel Eigenwert- und -vektorberechnungen durchgeführt, wobei diesen – im Vergleich zu den Ausführungen dieses Abschnitts – zusätzliche Vereinfachungen (z.B. stationäre Navigationsphase und spezielles Signal der Akzelerometertriade) zugrundeliegen. Dementsprechend ergeben sich trotz der bewiesenen Transformationsinvarianz abweichende Ergebnisse. ■

Anmerkung 6.6: Aufgrund der Positions- und Geschwindigkeitsabhängigkeit der Koeffizientenmatrix Ω_{ih} bzw. Koeffizientenquaternion $\tilde{\omega}_{ih}$ sind im Falle des $((\lambda, \varphi, h)^T, \mathbf{v}_h, \tilde{q}_{hb})$ -TNDgLS Positions-, Geschwindigkeits- und Orientierungsdifferentialgleichungen vollständig gekoppelt. Die unabhängigen $\tilde{q}_{eb}$ - haben gegenüber den positions-

⁵⁾Der norwegische Mathematiker Niels Henrik Abel bewies 1826, daß eine allgemeine Auflösung algebraischer Gleichungen von höherem als 4. Grad durch Wurzelziehen unmöglich ist (s. z.B. [H. Tietze(1985)], [W. Heitzinger et al.(1985)]). C.F. Gauß merkte diesen Sachverhalt bereits 1799 in seiner Dissertation an, blieb jedoch den Beweis schuldig.

und geschwindigkeitsabhängigen $\check{q}_{hb}$ -Hamilton-Orientierungsdifferentialgleichungen den Vorteil, daß eine (aufgrund von Instabilität) divergierende Position oder Geschwindigkeit sich nicht negativ auf die Genauigkeit der Orientierung auswirken kann. ■

5. Zum Stabilitätsverhalten nichtlinearer TNDgLS

Bislang haben wir das Stabilitätsverhalten linear(isiert)er TNDgLS bzgl. fehlerhafter Anfangswerte betrachtet. Sensorfehler entsprechen Koeffizientenfehler und diese generieren eine fehlerhafte Trajektorie. Da das linear(isiert)e TNDgLS nur lokal gültig ist, wird in kurzen Zeitabständen am aktuellen Zustand erneut linearisiert. Dadurch finden sich am Beginn jedes Schrittes alle seit der Anfangsorientierung kumulierten Fehler im Anfangszustand wieder. Die Instabilität des Vertikalkanals ist in diesem Sinne übertragbar auf das zugehörige nichtlineare TNDgLS und aufgrund der Zustandstransformationsinvarianz auf diverse andere Parametrisierungen. Es kann jedoch nicht zwingend von der Stabilität der horizontalen Zustandskomponenten auf die Stabilität der entsprechenden Komponenten des nichtlinearen TNDgLS geschlossen werden. Dasselbe gilt fuer die Übertragbarkeit des bei der Untersuchung der linearisierten Quaternionen-Orientierungsparameterdifferentialgleichung gefundenen Stabilitätsverhaltens auf den allgemeinen Fall mit zeitvarianten Koeffizienten. Der vorliegende Abschnitt dient u.a. dem Beweis, daß Orientierungsparameterdifferentialgleichungen stabil sind bezüglich einer fehlerhaften Anfangsorientierung, was in Übereinstimmung mit den anhand der linearisierten Gleichungen gefundenen Ergebnisse steht.

Die explizite Untersuchung des Einflusses von Fehlern im Systemeingangsvektor (d.h. in den Sensordaten) erfordert die Rückkehr zum global gültigen nichtlinearen TNDgLS. Aufgrund der Unabhängigkeit der Orientierungsdifferentialgleichung $\dot{R}_{eb}(t) = R_{eb}(t)\Omega_{ib}(t) - \Omega_{ie}(t)R_{eb}(t)$ von Position und Geschwindigkeit und ihrer einfachen Struktur bilde sie den Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen dieses Abschnitts. Ist die Lösung der Orientierungsdifferentialgleichung instabil bzgl. einer Fehlerquelle, so wird der von der Akzelerometertriade registrierte Beschleunigungsvektor in den Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen falsch orientiert, woraus eine Fehlbeschleunigung resultiert, welche zur Divergenz von Geschwindigkeit und Position führt. Neben Fehlern in der Anfangsorientierung (Anfangswert für Rotationsmatrix beschreibt nicht die tatsächliche Anfangsorientierung, Störung der Orthogonalität⁶⁾ und Normierung) stehen v.a. (systematische und/oder zufällige) Fehler im von der Kreiseltriade registrierten Winkelgeschwindigkeitsvektor (z.B. Bias, Drift oder Rauschen) im Mittelpunkt nachfolgender Untersuchungen.

Zur Klärung der unterschiedlichen Auswirkungen der angesprochenen Fehlerquellen dient nachfolgender Satz und sein Beweis.

Satz 6.9:

Die Lösung der $SO(3)$ -AWA

$$\dot{R}_{eb}(t) = R_{eb}(t)\Omega_{ib}(t) - \Omega_{ie}(t)R_{eb}(t) \quad , \quad R_{eb}(t_0) = R_{eb_0}$$

mit $\Omega_{ib}^T = -\Omega_{ib}$ und $\Omega_{ie}^T = -\Omega_{ie}$ ist (global)

- stabil bzgl. eines fehlerhaften Anfangswerts für die Rotationsmatrix und
- instabil bzgl. fehlerhafter Koeffizientenmatrizen (Winkelgeschwindigkeiten).

Beweis von Satz 6.9:

Sei $R_{eb}(t)$, für $t \geq t_0$, Lösung der ungestörten AWA

$$\dot{R}_{eb}(t) = R_{eb}(t)\Omega_{ib}(t) - \Omega_{ie}(t)R_{eb}(t) \quad , \quad R_{eb}(t_0) = R_{eb_0} \quad ,$$

$$\text{mit } \Omega_{ib}(t) = -\Omega_{ib}^T(t) \quad \text{und} \quad \Omega_{ie}(t) = -\Omega_{ie}^T(t) \quad ,$$

Wie im Beweis von Satz 2.5 gezeigt wurde, ist

$$R_{eb}(t) = R_{ie}^T(t)R_{eb_0}R_{ib}(t)$$

⁶⁾Die Nichtorthogonalität der Anfangsorientierung tritt natürlich bei Verwendung einer Parametrisierung der $SO(3)$ -Gruppe nicht in Erscheinung.

Lösung der ungestörten AWA, wenn $R_{ie}(t)$ und $R_{ib}(t)$ Lösungen der ungestörten AWA

$$\begin{aligned}\dot{R}_{ie}(t) &= R_{ie}(t)\Omega_{ie}(t) \quad , \quad R_{ie}(t_0) = I_3 \quad \text{und} \\ \dot{R}_{ib}(t) &= R_{ib}(t)\Omega_{ib}(t) \quad , \quad R_{ib}(t_0) = I_3\end{aligned}$$

sind. Nach Satz 2.4 gilt dann ($R_{eb_0} \in SO(3)$)

$$R_{ie}(t), R_{ib}(t), R_{eb}(t) \in SO(3) \quad \forall t \geq t_0 \quad .$$

(a) Fehler im Anfangswert für die Rotationsmatrix:

Sei $\tilde{R}_{eb}(t)$, für $t \geq t_0$, Lösung der AWA mit gestörtem Anfangswert und ungestörten Koeffizientenmatrizen (Winkelgeschwindigkeiten)

$$\dot{\tilde{R}}_{eb}(t) = \tilde{R}_{eb}(t)\Omega_{ib}(t) - \Omega_{ie}(t)\tilde{R}_{eb}(t) \quad , \quad \tilde{R}_{eb}(t_0) = \tilde{R}_{eb_0} \quad ,$$

$$\text{mit } \Omega_{ib}(t) = -\Omega_{ib}^T(t) \quad \text{und} \quad \Omega_{ie}(t) = -\Omega_{ie}^T(t) \quad .$$

Wie im Beweis von Satz 2.5 gezeigt wurde, ist

$$\tilde{R}_{eb}(t) = R_{ie}^T(t)\tilde{R}_{eb_0}R_{ib}(t)$$

Lösung dieser gestörten AWA, wenn $R_{ie}(t)$ und $R_{ib}(t)$ Lösungen der ungestörten AWA

$$\begin{aligned}\dot{R}_{ie}(t) &= R_{ie}(t)\Omega_{ie}(t) \quad , \quad R_{ie}(t_0) = I_3 \quad \text{und} \\ \dot{R}_{ib}(t) &= R_{ib}(t)\Omega_{ib}(t) \quad , \quad R_{ib}(t_0) = I_3\end{aligned}$$

sind. Nach Satz 2.4 gilt dann

$$R_{ie}(t), R_{ib}(t) \in SO(3) \quad \forall t \geq t_0 \quad .$$

Wir nehmen an, daß $\tilde{R}_{eb_0}$ sowohl durch strukturelle Fehler im Sinne nicht orthogonaler und normierter Zeilen- bzw. Spaltenvektoren, als auch durch Orientierungsfehler im Sinne einer Abweichung zwischen tatsächlicher und modellierter Orientierung gestört ist.

Durch Subtraktion der Lösung der gestörten und der ungestörten AWA folgt

$$R_{eb}(t) - \tilde{R}_{eb}(t) = R_{ie}^T(t) \left(R_{eb_0} - \tilde{R}_{eb_0} \right) R_{ib}(t)$$

und daraus

$$\|R_{eb}(t) - \tilde{R}_{eb}(t)\| = \|R_{eb_0} - \tilde{R}_{eb_0}\|.$$

Als Ergebnis folgern wir, daß sich die Fehler im Anfangswert für die Rotationsmatrix im Sinne der verwendeten Norm unverstärkt und ungedämpft fortpflanzen.

Dieses Ergebnis schließt jedoch nicht aus, daß die Orthogonalitäts- und Normierungsfehler zwischen bzw. in den Zeilen- bzw. Spaltenvektoren im Anfangswert für die Rotationsmatrix in der Lösung der Orientierungsdifferentialgleichung nicht konstant bleiben, sondern ein dynamischer Austausch der Orthogonalitäts- und Normierungsfehler zwischen den Zeilen- bzw. Spaltenvektoren der Lösung einsetzt, wobei natürlich im Sinne obiger Matrixnorm der Gesamtfehler unverändert bleibt. Aus dem Ansatz

$$\tilde{R}_{eb}(t)\tilde{R}_{eb}^T(t) = R_{ie}^T(t)\tilde{R}_{eb_0}\underbrace{R_{ib}(t)R_{ib}^T(t)}_{I_3}\tilde{R}_{eb_0}^T R_{ie}(t)$$

können wir ablesen, daß $R_{eb}(t)$ nicht orthonormal ist, da für eine strukturell gestörte initiale Rotationsmatrix gilt

$$\tilde{R}_{eb_0} \notin SO(3) \quad \Rightarrow \quad \tilde{R}_{eb_0}\tilde{R}_{eb_0}^T \neq I_3$$

und damit $\tilde{R}_{eb}(t)\tilde{R}_{eb}^T(t)$ i.a. nur symmetrisch und nicht gleich der Identität ist.

Die Zeitvariabilität von Längen und Zwischenwinkel der Zeilen- bzw. Spaltenvektoren der Lösung $\tilde{R}_{eb}(t)$ der gestörten AWA folgt aus

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\tilde{R}_{eb}(t)\tilde{R}_{eb}^T(t) \right) &= \dot{\tilde{R}}_{eb}(t)\tilde{R}_{eb}^T(t) + \tilde{R}_{eb}(t)\dot{\tilde{R}}_{eb}^T(t) \\ &= \left(\tilde{R}_{eb}(t)\Omega_{ib}(t) - \Omega_{ie}(t)\tilde{R}_{eb}(t) \right) \tilde{R}_{eb}^T(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{R}_{eb}(t) \left(\tilde{R}_{eb}(t) \Omega_{ib}(t) - \Omega_{ie}(t) \tilde{R}_{eb}(t) \right)^T \\
& = \tilde{R}_{eb}(t) \Omega_{ib}(t) \tilde{R}_{eb}^T(t) - \Omega_{ie}(t) \left(\tilde{R}_{eb}(t) \tilde{R}_{eb}^T(t) \right) \\
& \quad - \tilde{R}_{eb}(t) \Omega_{ib}(t) \tilde{R}_{eb}^T(t) + \left(\tilde{R}_{eb}(t) \tilde{R}_{eb}^T(t) \right) \Omega_{ie}(t) \\
& = \left(\tilde{R}_{eb}(t) \tilde{R}_{eb}^T(t) \right) \Omega_{ie}(t) - \Omega_{ie}(t) \left(\tilde{R}_{eb}(t) \tilde{R}_{eb}^T(t) \right),
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\tilde{R}_{eb}^T(t) \tilde{R}_{eb}(t) \right) & = \dot{\tilde{R}}_{eb}^T(t) \tilde{R}_{eb}(t) + \tilde{R}_{eb}^T(t) \dot{\tilde{R}}_{eb}(t) \\
& = \left(\tilde{R}_{eb}(t) \Omega_{ib}(t) - \Omega_{ie}(t) \tilde{R}_{eb}(t) \right)^T \tilde{R}_{eb}(t) \\
& \quad + \tilde{R}_{eb}^T(t) \left(\tilde{R}_{eb}(t) \Omega_{ib}(t) - \Omega_{ie}(t) \tilde{R}_{eb}(t) \right) \\
& = -\Omega_{ib}(t) \left(\tilde{R}_{eb}^T(t) \tilde{R}_{eb}(t) \right) + \tilde{R}_{eb}^T(t) \Omega_{ie}(t) \tilde{R}_{eb}(t) \\
& \quad + \left(\tilde{R}_{eb}^T(t) \tilde{R}_{eb}(t) \right) \Omega_{ib}(t) - \tilde{R}_{eb}^T(t) \Omega_{ie}(t) \tilde{R}_{eb}(t) \\
& = \left(\tilde{R}_{eb}^T(t) \tilde{R}_{eb}(t) \right) \Omega_{ib}(t) - \Omega_{ib}(t) \left(\tilde{R}_{eb}^T(t) \tilde{R}_{eb}(t) \right),
\end{aligned}$$

da symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen i. a. nicht kommutativ sind.

Somit führen Orthonormalitätsfehler im Anfangswert für die Rotationsmatrix in der Lösung der derart gestörten AWA zu einem dynamischen Austausch der Orthonormalitätsfehler, wobei – wie gezeigt – der Gesamtfehler im Sinne der verwendeten Matrixnorm konstant bleibt. Ferner ist zu ersehen, daß dieser dynamische Austausch nicht einsetzt, wenn R_{eb_0} zwar nicht die tatsächliche Anfangsorientierung beschreibt, aber strukturell exakt eine Rotationsmatrix ist, d.h. $R_{eb_0} \in SO(3)$.

In der Praxis läßt sich dieser dynamische Fehleraustausch durch eine präzise Orthonormierung des initial geschätzten Anfangswertes für die Rotationsmatrix (und aufgrund von Rundungsfehlern auch wiederholt von $R_{eb}(t)$) oder durch Verwendung einer Parametrisierung der $SO(3)$ -Gruppe vermeiden.

Zusammenfassend ist somit die unverstärkte Fortpflanzung von Fehlern im Anfangswert der $SO(3)$ -Orientierungsdifferentialgleichung festzuhalten. Diese Aussage ist unabhängig von der zugrundeliegenden Dynamik, d.h. unabhängig von $\Omega_{ie}(t)$ und $\Omega_{ib}(t)$. Die Lösung der $SO(3)$ -AWA ist somit Ljapunov-stabil bzgl. eines fehlerhaften Anfangswertes für die Rotationsmatrix.

(b) Fehler in den Koeffizientenmatrizen (Winkelgeschwindigkeiten):

Sei $\tilde{R}_{eb}(t)$, für $t \geq t_0$, Lösung der AWA mit ungestörter Anfangsorientierung und gestörten Koeffizientenmatrizen (Winkelgeschwindigkeiten)

$$\dot{\tilde{R}}_{eb}(t) = \tilde{R}_{eb}(t) \tilde{\Omega}_{ib}(t) - \tilde{\Omega}_{ie}(t) \tilde{R}_{eb}(t) \quad , \quad \tilde{R}_{eb}(t_0) = R_{eb_0} \quad ,$$

$$\text{mit } \tilde{\Omega}_{ib}(t) = -\tilde{\Omega}_{ib}^T(t) \quad \text{und} \quad \tilde{\Omega}_{ie}(t) = -\tilde{\Omega}_{ie}^T(t) \quad .$$

Wie im Beweis von Satz 2.5 gezeigt wurde, ist

$$\tilde{R}_{eb}(t) = \tilde{R}_{ie}^T(t) R_{eb_0} \tilde{R}_{ib}(t)$$

Lösung der gestörten AWA, wenn $\tilde{R}_{ie}(t)$ und $\tilde{R}_{ib}(t)$ Lösungen der gestörten AWA

$$\dot{\tilde{R}}_{ie}(t) = \tilde{R}_{ie}(t) \tilde{\Omega}_{ie}(t) \quad , \quad \tilde{R}_{ie}(t_0) = I_3 \quad \text{und}$$

$$\dot{\tilde{R}}_{ib}(t) = \tilde{R}_{ib}(t) \tilde{\Omega}_{ib}(t) \quad , \quad \tilde{R}_{ib}(t_0) = I_3$$

sind. Nach Satz 2.4 gilt dann

$$\tilde{R}_{ie}(t), \tilde{R}_{ib}(t), \tilde{R}_{eb}(t) \in SO(3) \quad \forall t \geq t_0 \quad .$$

Für die weiteren Ausführungen nutzen wir die Tatsache, daß $SO(3)$ bzgl. der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist (vgl. [N. Euler; W.-H. Steeb(1992)]).

Nummehr setzen wir die gestörten und ungestörten Größen in Relation

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{ia}(t) & = \delta R_{ia}(t) R_{ia}(t) \\
\tilde{\Omega}_{ia}(t) & = \Omega_{ia}(t) + \delta \Omega_{ia}(t) \quad a \in \{e, b\}
\end{aligned}$$

$$\text{mit } \delta R_{ia}(t) \in SO(3) \text{ und } \delta \Omega_{ia}^T(t) = -\delta \Omega_{ia}(t) .$$

Damit interpretieren wir die (additiven) Fehler auf den Koeffizientenmatrizen (Winkelgeschwindigkeiten) $\delta \Omega_{ie}(t)$ und $\delta \Omega_{ib}(t)$ als Ursache für die (multiplikativen) Fehlerorientierungen $\delta R_{ie}(t)$ und $\delta R_{ib}(t)$, welche für $\delta \Omega_{ie}(t) = 0$ und $\delta \Omega_{ib}(t) = 0$ gleich der Identität sind. Unter Berücksichtigung der ungestörten $SO(3)$ -Orientierungsdifferentialgleichung $\dot{R}_{ia}(t) = R_{ia}(t)\Omega_{ia}$ folgt durch Substitution obiger Ansätze in die gestörte $SO(3)$ -Orientierungsdifferentialgleichung $\dot{\tilde{R}}_{ia}(t) = \tilde{R}_{ia}(t)\tilde{\Omega}_{ia}$ die $SO(3)$ -Orientierungsstörendifferentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{R}}_{ia}(t) &= \delta \dot{R}_{ia}(t) R_{ia}(t) + \delta R_{ia}(t) \dot{R}_{ia}(t) = \delta R_{ia}(t) R_{ia}(t) (\Omega_{ia}(t) + \delta \Omega_{ia}(t)) \\ \Rightarrow \delta \dot{R}_{ia}(t) &= \delta R_{ia}(t) (R_{ia}(t) \delta \Omega_{ia}(t) R_{ia}^T(t)) \quad , \quad a \in \{e, b\} . \end{aligned}$$

Hierin ist nach Satz C.4 $R_{ia}(t) \delta \Omega_{ia}(t) R_{ia}^T(t) = -\Omega_{ai}$ wiederum eine schiefsymmetrische Koeffizientenmatrix.

Da selbst beliebig kleine, konstante Winkelgeschwindigkeitsfehler in endlicher Zeit jeden beliebigen Orientierungsfehler zu generieren vermögen, zeigen obige Beziehungen die (Ljapunov)-Instabilität der Lösung der betrachteten $SO(3)$ -AWA bzgl. fehlerhafter Koeffizientenmatrizen (Winkelgeschwindigkeitsfehler).

D.h. es existiert nicht für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta(t_0, \varepsilon) \in \mathbb{R}^+$, so daß gilt

$$\|\delta \omega_{ia}(t)\| < \delta(t_0, \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \|R_{eb}(t) - \tilde{R}_{eb}(t)\| < \varepsilon \quad \forall \quad t \geq t_0 .$$

q.e.d.

Anmerkung 6.7: Bei ungestützten Einsatz eines TNS zur Orientierungsbestimmung – die Akzelerometertriade wird nur in der Anfangsorientierungsphase benötigt – sind kurzfristig stabile Orientierungen aus dem $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgls und dem $((\lambda, \varphi, h)^T, \mathbf{v}_h, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgls zu erwarten. Langfristig gewinnen Sensor- und Linearisierungsfehler an Bedeutung. Die Berücksichtigung externer Stützinformation für Position und Geschwindigkeit (z.B. von "single-antenna GPS") empfiehlt sich dringend, da – wie zu Beginn des Abschnitts bereits dargestellt – durch Orientierungsfehler eine Fehlbeschleunigung resultiert, welche zur Divergenz von Geschwindigkeit und Position führt. Ferner sei angemerkt, daß nur in der radialen Komponente des von der Akzelerometertriade registrierten Beschleunigungsvektors zwischen Orientierungsfehlern (i.a. als Folge von Sensorfehlern) und Akzelerometerfehlern unterschieden werden kann. ■

Anmerkung 6.8: Bislang ist für $SO(3)$ -AWA der Form $\dot{R} = R\Omega_1 - \Omega_2 R$, $R(t_0) = R_0$ die Instabilität bzgl. Fehler in den Zusammenhangsmatrizen und die Stabilität bzgl. Fehler im Anfangswert für die Rotationsmatrix gezeigt. Aufgrund der identischen Struktur der Differentialgleichungen und der äquivalenten Eigenschaften von Matrizen- und Quaternionenprodukt verläuft eine Übertragung der Ausführungen auf $\mathbb{H}_1$ -AWA der Form $\dot{\tilde{q}} = \tilde{q}\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 \tilde{q}$, $\tilde{q}(t_0) = \tilde{q}_0$ vollständig analog. ■

KAPITEL 7:

Beobachtbarkeitsanalyse

Die Beobachtbarkeitsanalyse befaßt sich mit der Untersuchung folgender alternativer Fragestellungen:

- Lassen die verwendeten Beobachtungen (Systemein- und -ausgänge) auf Basis des verwendeten Modells einen eindeutigen Rückschluß auf den aktuellen Zustand zu?
- Spiegeln sich beliebige Zustandsänderungen auf Basis des verwendeten Modells in den angestrebten Beobachtungen (Systemein- und -ausgänge) wider und kann zwischen dem Einfluß der Änderungen verschiedener Zustände auf die Beobachtungen (Systemein- und -ausgänge) unterschieden werden?

Insbesondere ist dabei von Interesse, ob alle bzw. welche Zustände durch die vorhandenen externen Beobachtungen (Systemausgänge) verbessert werden können. Natürlich sind neben diesen rein qualitativen Aussagen auch quantitative, d.h. wie gut ist das System bzw. ein Zustand beobachtbar, von Bedeutung. Ziel der Beobachtbarkeitsanalyse ist eine optimale Auswahl externer Sensoren zur Stützung eines TNS und die Festlegung von Verfahrensweisen zur Optimierung der Systemgenauigkeit. Um allgemeingültige Ergebnisse erzielen zu können, argumentieren wir analytisch und verzichten auf numerische Betrachtungen mit eingeschränkter Gültigkeit. Dementsprechend handelt es sich bei dem vorgestellten Ansatz für die Beobachtbarkeitsanalyse um eine deterministische Theorie.

In Anlehnung an die Monographie [J. Birk(1992)]¹⁾ gehen wir von nichtlinearen Systemen aus und definieren im 1. Abschnitt verschiedene Formen der Beobachtbarkeit, zunächst ohne zu spezifizieren nach welchen Kriterien ihre Erfüllung überprüft werden soll. Im 2. Abschnitt definieren wir schließlich die Beobachtbarkeitsabbildung, deren globale Invertierbarkeit die globale Beobachtbarkeit gewährleistet (s.a. [J. Birk; M. Zeitz(1992)], [R. Hermann; A.J. Krener(1977)], [J. Schaffner(1997)] und [M. Zeitz(1984)]).

Die explizite Formulierung der nichtlinearen Beobachtbarkeitsabbildung fürs $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, R_{eb})$ -TNDgLS in Abschnitt 3.1 erlaubt bei kontinuierlicher Positions- und/oder Geschwindigkeitsbeobachtung den Nachweis, daß in stationären Phasen (dies sind Phasen in welchen der von der Akzelerometertriade registrierte Beschleunigungsvektor $\mathbf{f}_b$ seine Richtung bzgl. der Sensorachsen nicht verändert) die Rotation des TNS um den aktuell von der Akzelerometertriade registrierten Beschleunigungsvektor $\mathbf{f}_b$ (im Falle der Anfangsorientierung ist dies in guter Näherung der Kurswinkel) global nur schwach beobachtbar ist. Daraus läßt sich die schwache Beobachtbarkeit des Kurswinkels bei nahezu stationären Navigationsphasen ableiten, was die Ursache für das in der Flugnavigation durchgeführte "weave manoeuvre" zur Verbesserung des Kurswinkels ist. Die Beobachtbarkeit der Orientierung mittels Beobachtung der Sensordaten (Systemeingang = Systemausgang) im Rahmen der stationären Anfangsorientierung beschreibt aufgrund der unterschiedlichen Beobachtungen eine etwas andere Situation. In Abschnitt 3.2 wird auf Basis des $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, R_{hb}, \mathbf{b}_{gyros}, \mathbf{b}_{accel}, \mathbf{d}_{gyros}, \mathbf{d}_{accel})$ -TNDgLS die globale Beobachtbarkeit der Anfangsorientierung R_{hb} mittels Sensorbeobachtungen gezeigt. Allerdings erweisen sich Anfangsorientierung und Sensorbias in stationären Phasen als nicht (gleichzeitig) beobachtbar.

Im 4. Abschnitt schränken wir uns auf die lokale Invertierbarkeit als hinreichendes Kriterium für die lokale Beobachtbarkeit ein. Diese bedingt den vollen Rang der Beobachtbarkeitsmatrix (Jacobi-Matrix der Beobachtbarkeitsabbildung).

Ferner wird die Invarianz des Ranges der Beobachtbarkeitsmatrix und damit der (lokalen) Beobachtbarkeit linear(isiert)er Systeme bzgl. regulärer Zustandstransformationen gezeigt.

Die Struktur der Beobachtbarkeitsmatrix für allgemeine linear(isiert)e Systeme ist Gegenstand des 5. Abschnitts. Im 6. Abschnitt wenden wir schließlich das zuvor gewonnene Kriterium für die lokale Beobachtbarkeit linear(isiert)er Systeme auf einige linearisierte TNDgLS an (s.a. [H.-H. Kothe(1987)]). Dabei zeigt sich die bekannte Tatsache, daß die Geschwindigkeitskomponenten durch Positionsbeobachtungen problemlos (lokal) beobachtbar sind, während Positionskomponenten durch Geschwindigkeitsbeobachtungen praktisch nicht beobachtbar sind. Der Nachweis, daß der Kurswinkel in stationären Phasen mittels Positions- und/oder Geschwindigkeitsbeobachtungen nur schwach beobachtbar ist, erweist sich hier – im Gegensatz zu den Untersuchungen auf Basis der Beobachtbarkeitsabbildung – als ungleich schwieriger. Im Falle der Trägheitsnavigation ist es deshalb bei Verwendung geeigneter Parametrisierungen paradoxerweise ungleich einfacher globale Aussagen über die Zustandsbeobachtbarkeit zu gewinnen, als lokale.

Insgesamt sind regelmäßige Positions- und/oder Geschwindigkeitsbeobachtungen mittels "single-antenna GPS" zur Stützung eines TNS aus theoretischer Sicht ideal zur Begrenzung des im Stabilitätskapitel gezeigten Fehlerwachstums, jedoch ist in stationären Phasen die Rotation des TNS um den aktuell von der Akzelerometertriade registrierten Beschleunigungsvektor $\mathbf{f}_b$ nur schwach beobachtbar. Diesem Effekt ist durch ein geeignetes Vorgehen

¹⁾ Hierin findet der interessierte Leser eine Zusammenstellung der neueren Literatur des Arbeitsgebiets Beobachtbarkeitsanalyse.

bei der Anfangsorientierung und/oder geeignete regelmäßige Manöver in nahezu stationären Navigationsphasen zu begegnen.

Wir legen im weiteren in Zustände vorprozessierte GPS-Beobachtungen zugrunde, um die Struktur der Beobachtungsmatrix möglichst übersichtlich zu gestalten. Bei expliziter Berücksichtigung der Rohdaten externer Sensoren (z.B. DGPS: Signallaufzeiten bzw. fraktionale Trägerphasen) sind i.a. nur noch numerische Betrachtungen möglich. Natürlich greift auch hier die Transformationsinvarianz bzgl. regulärer Zustandstransformationen, wodurch die getroffene Annahme vorprozessierter Beobachtungen keine Einschränkung für die Gültigkeit der erzielten qualitativen Aussagen darstellt.

1. Formen der Beobachtbarkeit

Den Ausgangspunkt bildet das nichtlineare System

Definition 7.1 (Navigationsgleichungssystem):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{z}(t), \mathbf{s}(t)), & \mathbf{z}(t_0) &= \mathbf{z}_0, \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{z}(t), \mathbf{s}(t))\end{aligned}$$

$$\text{mit } \mathbf{z} \in \mathcal{D}_{\mathbf{z}} \subseteq \mathbb{R}^{\dim \mathbf{z}}, \quad \mathbf{s} \in \mathcal{D}_{\mathbf{s}} \subseteq \mathbb{R}^{\dim \mathbf{s}} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{\mathbf{y}} \subseteq \mathbb{R}^{\dim \mathbf{y}}.$$

bestehend aus der Zustandsvektordifferentialgleichung (TNDgLS) und der algebraischen Beobachtungsvektorgleichung (Beobachtungsgleichungssystem). $\mathcal{D}_{\mathbf{z}}, \mathcal{D}_{\mathbf{s}}$ bzw. $\mathcal{D}_{\mathbf{y}}$ sind die Definitionsgebiete des Zustandsvektors $\mathbf{z}$, des Systemeingangsvektors (Vektor der internen Beobachtungen) $\mathbf{s}$ bzw. des Systemausgangsvektors (Vektor der externen Beobachtungen) $\mathbf{y}$. Systemeingangsvektor $\mathbf{s}$ und Systemausgangsvektor $\mathbf{y}$ betrachten wir im Zeitintervall $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ als funktional gegeben und hinreichend oft stetig differenzierbar. Die Modellfunktionen $\mathbf{f}$ und $\mathbf{g}$ setzen wir ebenfalls als hinreichend oft stetig differenzierbar bzgl. ihrer Argumente voraus.

Wie wir bereits erwähnt haben, befaßt sich die Beobachtbarkeitsanalyse im wesentlichen mit der Frage, ob bei bekanntem Systemeingang und -ausgang durch das System aus Definition 7.1 der Zustand eindeutig bestimmt ist. Je nach Definitionsgebiet unterscheidet man verschiedene Formen der Beobachtbarkeit.

Definition 7.2 (Formen der Beobachtbarkeit):

Das nichtlineare System aus Definition 7.1 heißt

- global beobachtbar, wenn für beliebig gegebenen Systemeingang $\mathbf{s}(t) \in \mathcal{D}_{\mathbf{s}}$ und beliebig gegebenen Systemausgang $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{D}_{\mathbf{y}}$ über dem Zeitintervall $(t_0, t_1) \subset \mathbb{R} \quad \forall t \in (t_0, t_1)$ ein eindeutiger Zustand $\mathbf{z}(t) \in \mathcal{D}_{\mathbf{z}}$ existiert.
- lokal beobachtbar, wenn zu jedem beliebigen Zustand $\mathbf{z}^* = \mathbf{z}(t^*) \in \mathcal{D}_{\mathbf{z}}$ eine – durch das Zeitintervall $[t_0^* - \Delta t_0^*, t_0^* + \Delta t_0^*] \subset (t_0, t_1) \subset \mathbb{R}$ charakterisierte – lokale Umgebung von t^* existiert, d.h. $t^* \in [t_0^* - \Delta t_0^*, t_0^* + \Delta t_0^*]$, in welcher für beliebig gegebenen Systemeingang $\mathbf{s}(t) \in \mathcal{D}_{\mathbf{s}}$ und beliebig gegebenen Systemausgang $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{D}_{\mathbf{y}}$ über $[t_0^* - \Delta t_0^*, t_0^* + \Delta t_0^*] \quad \forall t \in [t_0^* - \Delta t_0^*, t_0^* + \Delta t_0^*]$ ein eindeutiger Zustand $\mathbf{z}(t) \in \mathcal{D}_{\mathbf{z}}$ existiert.
- lokal beobachtbar im Zustand $\mathbf{z}^*$, wenn zum Zustand $\mathbf{z}^* = \mathbf{z}(t^*) \in \mathcal{D}_{\mathbf{z}}$ eine – durch das Zeitintervall $[t_0^* - \Delta t_0^*, t_0^* + \Delta t_0^*] \subset (t_0, t_1) \subset \mathbb{R}$ charakterisierte – lokale Umgebung von t^* existiert, d.h. $t^* \in [t_0^* - \Delta t_0^*, t_0^* + \Delta t_0^*]$, in welcher für beliebig gegebenen Systemeingang $\mathbf{s}(t) \in \mathcal{D}_{\mathbf{s}}$ und beliebig gegebenen Systemausgang $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{D}_{\mathbf{y}}$ über $[t_0^* - \Delta t_0^*, t_0^* + \Delta t_0^*] \quad \forall t \in [t_0^* - \Delta t_0^*, t_0^* + \Delta t_0^*]$ ein eindeutiger Zustand $\mathbf{z}(t) \in \mathcal{D}_{\mathbf{z}}$ existiert.
- lokal beobachtbar im Zustand $\mathbf{z}^*$ bei Systemeingang $\mathbf{s}^*$, wenn zum Zustand $\mathbf{z}^* = \mathbf{z}(t^*) \in \mathcal{D}_{\mathbf{z}}$ bei Systemeingang $\mathbf{s}^* = \mathbf{s}(t^*) \in \mathcal{D}_{\mathbf{s}}$ eine – durch das Zeitintervall $[t_0^* - \Delta t_0^*, t_0^* + \Delta t_0^*] \subset (t_0, t_1) \subset \mathbb{R}$ charakterisierte – lokale Umgebung von t^* existiert, d.h. $t^* \in [t_0^* - \Delta t_0^*, t_0^* + \Delta t_0^*]$, in welcher für beliebig gegebenen Systemausgang $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{D}_{\mathbf{y}}$ über $[t_0^* - \Delta t_0^*, t_0^* + \Delta t_0^*] \quad \forall t \in [t_0^* - \Delta t_0^*, t_0^* + \Delta t_0^*]$ ein eindeutiger Zustand $\mathbf{z}(t) \in \mathcal{D}_{\mathbf{z}}$ existiert.

2. Beobachtbarkeitsabbildung – globale Beobachtbarkeit

Für die Beobachtbarkeitsanalyse nichtlinearer Systeme ist die durch die Beobachtungsvektorgleichung aus Definition 7.1 definierte Abbildung

$$g : \mathbb{R}^{\dim \mathbf{z}} \times \mathbb{R}^{\dim \mathbf{s}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim \mathbf{y}}$$

von zentraler Bedeutung. Im Sinne der Beobachtbarkeitsanalyse repräsentiert die Beobachtungsvektorgleichung ein System von $\dim \mathbf{y}$ nichtlinearen algebraischen Gleichungen für $n := \dim \mathbf{z}$ unbekannte Zustände. Um sicherzustellen, daß die Anzahl der Gleichungen mindestens so groß wie die Anzahl der Unbekannten ist, gruppiert man die Beobachtungsvektorgleichung mit ihren ersten $(n-1)$ zeitlichen Ableitungen zur

Definition 7.3 (Beobachtbarkeitsabbildung):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{[n-1]} &:= \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \\ \frac{d}{dt} \mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \\ \vdots \\ \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}} \mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \end{bmatrix} =: \mathbf{q}(\mathbf{z}, \mathbf{s}^{[n-1]}) \quad (7.1) \\ \text{mit } \frac{d}{dt} \mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{s}) &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \underbrace{\dot{\mathbf{z}}}_{\mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{s})} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \dot{\mathbf{s}}, \quad \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{s}) = \dots^2) \\ \text{und } \mathbf{s}^{[n-1]} &:= (\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \dots, \mathbf{s}^{(n-1)})^T \in \mathbb{R}^{\dim \mathbf{z} + \dim \mathbf{s}}. \end{aligned}$$

Solange mindestens eine skalare (analytische) Beobachtung verfügbar ist, d.h. $\dim \mathbf{y} \geq 1$, stehen mindestens $\dim \mathbf{z}$ algebraische Gleichungen zur Verfügung. Mit anderen Worten führt man im analytischen Sinne (kontinuierliche, deterministische) Beobachtungen durch und hat damit nicht nur die direkt beobachteten Größen zur Verfügung, sondern betrachtet damit auch beliebige zeitliche Ableitungen dieser Größen als gegeben. Dies ist sicherlich eine idealisierte Annahme und zeigt zunächst nur die prinzipielle Beobachtbarkeit. Vor allem Sensor- und Diskretisierungsfehler führen bei zunehmender Berücksichtigung höherer zeitlicher Ableitungen der beobachteten Größen zu einer Abschwächung der nachfolgend analytisch gewonnenen Aussagen über die Beobachtbarkeit der Zustände. In [J. Birk(1992)] wird zur Definition der Beobachtbarkeitsabbildung die Lie-Ableitung herangezogen.

Definition 7.4 (Bedingung für globale Beobachtbarkeit):

Das nichtlineare System aus Definition 7.1 ist genau dann global beobachtbar, wenn $\forall t \in [t_0, t_1]$ die nichtlineare Beobachtbarkeitsabbildung

$$\mathbf{y}^{[n-1]} = \mathbf{q}(\mathbf{z}, \mathbf{s}^{[n-1]})$$

$\forall \mathbf{s} \in C^{(n-1)}(\mathcal{D}_{\mathbf{s}})$ und $\forall \mathbf{y} \in C^{(n-1)}(\mathcal{D}_{\mathbf{y}})$ eindeutig bzgl. des Zustandsvektors $\mathbf{z}(t)$ invertierbar ist.

Da keine allgemein anwendbaren Kriterien zur globalen Invertierbarkeit eines nichtlinearen algebraischen Gleichungssystems existieren (s.a. [J. Birk(1992)]), ist mit den bislang angestellten Überlegungen i.a. lediglich eine Negativentscheidung möglich. Ist nämlich $\mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{s})$ unabhängig von einer Zustandskomponente, so ist das System aus Definition 7.1 bzw. die Zustandskomponente nicht global beobachtbar.

3. Anwendungen der globalen Beobachtbarkeitsanalyse auf TNDgIS

Grundsätzlich ist die zuletzt getroffene Aussage richtig. Allerdings eröffnen sich im Falle der Trägheitsnavigation gerade aus der nichtlinearen Beobachtbarkeitsabbildung ausgesprochen interessante Interpretationsmöglichkeiten. In der Einleitung von [D. Goshen-Meskin; I.Y. Bar-Itzhack(1992)] ist zu lesen: „The method of analyzing the observability ... is applied to the analysis of in-flight alignment (IFA) of inertial navigation systems (INS) whose estimability is known to be enhanced by maneuvers. ... Although INS IFA was handled to various degrees in the past, a comprehensive control theoretic approach to the problem is introduced in this work for the first time.“ (s.a. [I.Y. Bar-Itzhack; B. Porat(1980)]). Da der in dieser Arbeit verwendete Zugang auf linearisierten TNDgIS beruht, wurden – ebenso wie in [H.-H. Kothe(1987)] – lediglich numerische Ergebnisse erzielt. Damit wird nachfolgend erstmals die schwache globale (!) Beobachtbarkeit einer Orientierungskomponente anhand geeigneter nichtlinearer (!) Systemgleichungen gezeigt.

$(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, R_{eb})$ -TNDgIS mit Positionsbeobachtungen

Ein Blick auf die nichtlineare Beobachtbarkeitsabbildung der Trägheitsnavigation bei kontinuierlichen Positionsbeobachtungen erlaubt eine interessante Interpretation. Wir legen die $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, R_{eb})$ -Parametrisierung des TNDgIS zugrunde. $\boldsymbol{\omega}_{ie}$ sei konstant.

²⁾ Bei $(n-1)$ -maliger zeitlicher Differentiation der Beobachtungsvektorgleichung können zeitliche Ableitungen des Systemeingangsvektors $\mathbf{s}$ bis zur Ordnung $(n-1)$ auftreten.

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_e \quad (7.2)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v}_e \quad (7.3)$$

$$\ddot{\mathbf{y}} = R_{eb}\mathbf{f}_b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{x}_e) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_e} (V_e(\mathbf{x}_e) + V_t(\mathbf{x}_e, t)) \quad (7.4)$$

$$\mathbf{y}^{(3)} = \dot{R}_{eb}\mathbf{f}_b + R_{eb}\dot{\mathbf{f}}_b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \dot{\mathbf{v}}_e - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e) + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_e^2} (V_e(\mathbf{x}_e) + V_t(\mathbf{x}_e, t)) \mathbf{v}_e + \frac{\partial^2}{\partial t \partial \mathbf{x}_e} V_t(\mathbf{x}_e, t) \quad (7.5)$$

$$\mathbf{y}^{(4)} = \dots$$

Zunächst ist klar, daß bei einer direkten, kontinuierlichen Beobachtung der Position durch einmalige zeitliche Differentiation auch die Geschwindigkeit problemlos beobachtbar ist. Damit sind zunächst Position und Geschwindigkeit von dem Systemausgangsvektor problemlos ablesbar. Durch eine zweite zeitliche Differentiation des Systemausgangsvektors folgt unter Berücksichtigung bekannter Position und Geschwindigkeit als Bestimmungsgleichung für die Orientierung

$$R_{eb}\mathbf{f}_b = \ddot{\mathbf{y}} + 2\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{x}_e) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_e} (V_e(\mathbf{x}_e) + V_t(\mathbf{x}_e, t)). \quad (7.6)$$

Die Rotationsmatrix R_{eb} ist demnach so zu wählen, daß der Systemeingang (Beschleunigungsvektor der Akzelerometertriade) $\mathbf{f}_b$ mit der rechten Seite des algebraischen Gleichungssystems übereinstimmt. Natürlich ist die Orientierung des Systems durch eine Vektorbeobachtung nicht eindeutig bestimmt. Gleichung (7.6) läßt die Rotation des TNS um den aktuell von der Akzelerometertriade registrierten Beschleunigungsvektor $\mathbf{f}_b$ unbestimmt. Erst durch die Berücksichtigung der dritten zeitlichen Ableitung des Systemausgangsvektors kann die letzte freie Komponente des Zustandsvektors bestimmt werden.

Allerdings wirkt sich bei diskreten stochastischen Beobachtungen die Verwendung der ersten zeitlichen Ableitung des Systemeingangsvektors und der dritten zeitlichen Ableitung des Systemausgangsvektors in Abhängigkeit der Genauigkeitsklasse des verwendeten TNS mehr oder minder störend bei der Berechnung der letzten Orientierungskomponente aus.

Die stationäre Anfangsorientierung von Trägheitsnavigationssystemen ist gekennzeichnet durch

$$\mathbf{x}_e = \text{const} \quad , \quad \mathbf{v}_e = \dot{\mathbf{v}}_e = \ddot{\mathbf{v}}_e = \dots = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{f}}_b = \ddot{\mathbf{f}}_b = \dots = 0. \quad (7.7)$$

Damit degeneriert Gleichung (7.5) zu

$$\mathbf{y}^{(3)} = \dot{R}_{eb}\mathbf{f}_b + \frac{\partial^2}{\partial t \partial \mathbf{x}_e} V_t(\mathbf{x}_e, t). \quad (7.8)$$

Nach [W. Torge(1989)] beträgt das Maximum der radialen Gezeitenbeschleunigung auf Topographieniveau etwa 0.165 mgal für den Mond und etwa 0.076 mgal für die Sonne. Damit kann in für die Anfangsorientierung relevanten Zeiträumen die zeitliche Änderung der Gezeitenbeschleunigung (ebenso wie die Ungleichförmigkeit der Erdrotation) als identisch Null angenommen werden. Damit sind höhere als zweite Ableitungen der (extern) beobachteten Position identisch Null, falls $\dot{R}_{eb} = R_{eb}\Omega_{ib} - \Omega_{ie}R_{eb} = 0$ ist. Dies ist für einen fehlerhaften Kurswinkel nicht der Fall, wodurch eine von Null verschiedene zeitliche Änderung der Beschleunigung, d.h. $\ddot{\mathbf{v}}_e \neq 0$, resultiert. Positions- und/oder Geschwindigkeitsbeobachtungen beinhalten somit auch im stationären Fall Information über den Kurswinkel.

Damit ist bewiesen

Proposition 7.1 :

Durch Positions- und/oder Geschwindigkeitsabgleiche ist die Orientierung eines Trägheitsnavigationssystems unabhängig von der zugrundeliegenden Dynamik (global) beobachtbar, wobei die Rotation um den von der Akzelerometertriade registrierten Beschleunigungsvektor $\mathbf{f}_b$ nur schwach beobachtbar ist. ■

Korollar 7.2 :

In der stationären Anfangsorientierungsphase, in welcher sich das Trägheitsnavigationssystem (erdbezogen) in absoluter Ruhe befindet, ist der Kurswinkel (Azimut) durch Positions- und Geschwindigkeitsabgleiche nur schwach beobachtbar. ■

Anmerkung 7.1: Kombiniert man mehrere Beobachtbarkeitsabbildungen zu aufeinanderfolgenden Zeitpunkten, so folgt auch die Beobachtbarkeit des sonst nicht beobachtbaren Kurswinkels, falls die zu den Zeitpunkten gehörigen Beschleunigungsvektoren nicht linear abhängig sind. Dies ist auch der Grund für das in der Flugnavigation gebräuchliche "weave manoeuvre" zur Verbesserung des Kurswinkels. ■

$(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, R_{hb}, \mathbf{b}_{gyros}, \mathbf{b}_{accel.}, \mathbf{d}_{gyros}, \mathbf{d}_{accel.})$ -TNDgIS mit Sensorbeobachtungen

Die Beobachtbarkeit der Orientierung mittels Beobachtung der Sensordaten (Systemeingang = Systemausgang) bei bekannter Position und Geschwindigkeit beschreibt im Vergleich zum vorhergehenden Abschnitt aufgrund der unterschiedlichen Beobachtungen eine ganz andere Situation. In diesem Zusammenhang stellen wir nun die Frage nach der Beobachtbarkeit der Anfangsorientierung R_{hb} und der zeitlich linearen Sensorfehler (Bias und Drift) während der Anfangsorientierungsphase (in einer Lage) mittels der von den inertialen Sensortriaden registrierten Beobachtungen.

Den Ausgangspunkt bilde das $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, R_{hb})$ -TNDgIS unter Berücksichtigung der Korrektur der Sensordaten um Bias und Drift:

$$\ddot{\mathbf{x}}_e = R_{eh} R_{hb} [\mathbf{f}_b - \mathbf{b}_{accel.} - (t - t_0) \mathbf{d}_{accel.}] - 2\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \dot{\mathbf{x}}_e + R_{eh} \boldsymbol{\gamma}_h \quad (7.9)$$

$$\dot{R}_{hb} = R_{hb} [\boldsymbol{\Omega}_{ib} - \text{veck}^{-1}(\mathbf{b}_{gyros} + (t - t_0) \mathbf{d}_{gyros})] - \boldsymbol{\Omega}_{ih} R_{hb}. \quad (7.10)$$

Während der stationären Anfangsorientierung gilt

$$\mathbf{x}_e \neq \mathbf{x}_e(t) \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}_e = \ddot{\mathbf{x}}_e = 0, \quad \boldsymbol{\omega}_{ih} = R_{he} \boldsymbol{\omega}_{ie} \quad \text{und} \quad \dot{R}_{hb} = 0.$$

Löst man obiges TNDgIS unter diesen Annahmen nach den Sensorbeobachtungen $\mathbf{f}_b$ bzw. $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ auf, so folgt

$$\mathbf{f}(t) = -R_{bh} \boldsymbol{\gamma}_h + \mathbf{b}_{accel.} + (t - t_0) \mathbf{d}_{accel.} \quad (7.11)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}(t) = R_{bh}(R_{he} \boldsymbol{\omega}_{ie}) + \mathbf{b}_{gyros} + (t - t_0) \mathbf{d}_{gyros}. \quad (7.12)$$

Die Sensorbeobachtungen auf der linken Seite dieser Gleichungen sollen im Sinne der Beobachtbarkeitsanalyse beobachtet werden, d.h.

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} \mathbf{f}_b \\ \boldsymbol{\omega}_{ib} \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß diese Gleichungen sich im wesentlichen durch Hinzunahme der Vektorbeobachtung der Kreiseltriade und der Einführung deterministischer Sensorfehler von den Gleichungen unterscheiden, welche dem vorhergehenden Abschnitt zugrundeliegen. Damit resultiert die Beobachtbarkeitsabbildung zu

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -R_{bh} \boldsymbol{\gamma}_h + \mathbf{b}_{accel.} + (t - t_0) \mathbf{d}_{accel.} \\ R_{bh}(R_{he} \boldsymbol{\omega}_{ie}) + \mathbf{b}_{gyros} + (t - t_0) \mathbf{d}_{gyros} \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{accel.} \\ \mathbf{d}_{gyros} \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

Höhere zeitliche Ableitungen sind identisch Null und beinhalten damit keine weitere Information. Wie zu erwarten war, ist die Beobachtbarkeit der Sensordrift unproblematisch, da sie den einzigen zeitvarianten Signalanteil darstellt. Es verbleibt Gleichung (7.14) zur Bestimmung von Sensorbias und Anfangsorientierung. Dabei handelt es sich um 6 Gleichungen zur Bestimmung der 9 Unbekannten $\alpha_N, \alpha_R, \alpha_K, \mathbf{b}_{accel.}, \mathbf{b}_{gyros}$. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist dies jedoch nicht möglich.

Somit müssen 3 der 9 Unbekannten als bekannt vorausgesetzt werden, um eine Inversion zu ermöglichen. Offensichtlich sind die Gleichungen (7.14) linear im Sensorbias, was der globalen Beobachtbarkeit des Sensorbias bei bekannter Anfangsorientierung entspricht. Dies ist jedoch der Trivialfall, welcher keiner theoretischen Untersuchung bedurfte, und zudem akademisch, da die Anfangsorientierung hochgenau bekannt sein müsste, um eine zuverlässige Berechnung des Sensorbias zu erlauben.

Proposition 7.3:

Während der stationären Anfangsorientierungsphase in polfernen Gebieten sind Anfangsorientierung R_{hb} und Sensordrift $(\mathbf{d}_{gyros}, \mathbf{d}_{accel.})$ global beobachtbar. ■

Wie man leicht zeigt, ist das Vorliegen des Bias einer Sensortriade nicht hinreichend für die Beobachtbarkeit des Bias der anderen Sensortriade und der Anfangsorientierung. Will man somit den Sensorbias während der Anfangsorientierungsphase mitbestimmen, so ist eine N-Lagen-Kalibrierung notwendig. Da diese jedoch den definierten Übergang von einer Lage in die nächste erfordert, benötigt man dafür sehr genaue Angaben über die Lage der Sensorachsen bzgl. der Gehäusekanten des TNS oder einen hochgenau eingemessenen Kalibriertisch. Zudem erschweren die Lageänderungen die Berechnung der Sensordrift. Diese ist aufgrund der für eine N-Lagen-Kalibrierung notwendigen Zeitspanne unbedingt mitzubestimmen, um hinreichend genaue Ergebnisse zu erzielen. Damit folgt

Satz 7.4:

Während der stationären Anfangsorientierungsphase in polfernen Gebieten sind bei bekanntem Sensorbias ($\mathbf{b}_{gyros}, \mathbf{b}_{accel.}$) die Anfangsorientierung R_{hb} und bei bekannter Anfangsorientierung R_{hb} der Sensorbias ($\mathbf{b}_{gyros}, \mathbf{b}_{accel.}$) global beobachtbar. Anfangsorientierung und Sensorbias sind jedoch nicht gleichzeitig beobachtbar. ■

4. Beobachtbarkeitsmatrix – lokale Beobachtbarkeit

Mit dem

Satz 7.5 (Satz über implizite Funktionen, s. z.B. [H. Heuser(1991)]):

Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ und $H \subset \mathbb{R}^m$ nichtleere, offene Gebiete, die Funktion $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : G \times H \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und Punkte $\mathbf{x}^* \in G, \mathbf{y}^* \in H$ gegeben, für die gilt

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{y}=\mathbf{y}^*} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{y}=\mathbf{y}^*} \quad \text{ist invertierbar.}$$

Dann existiert

- eine Umgebung $U \subset G$ von $\mathbf{x}^*$,
- eine Umgebung $V \subset H$ von $\mathbf{y}^*$,
- eine eindeutige, stetige Funktion $\mathbf{f} : V \rightarrow U$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{x}^*$ und $\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{y}^*), \mathbf{y}^*) = 0 \quad \forall \mathbf{y}^* \in V$ und
- eine Umgebung $V^* \subset V$ von $\mathbf{y}^*$ in der $\mathbf{f}$ stetig differenzierbar ist.

steht das adäquate Hilfsmittel zur Untersuchung der lokalen Invertierbarkeit der Beobachtungsabbildung nach dem Zustandsvektor $\mathbf{z}$ zur Verfügung. Dem Problem redundanter Gleichungen in der Beobachtbarkeitsabbildung

$$\mathbf{q}(\mathbf{z}, \begin{bmatrix} n-1 \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}) - \begin{bmatrix} n-1 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = 0 \quad (7.16)$$

begegnen wir mit der Forderung

$$\text{Rang} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}} \right) = \dim \mathbf{z} \quad ^3), \quad (7.17)$$

d.h. voller Spaltenrang bzw. die Existenz von $\dim \mathbf{z}$ linear unabhängigen Gleichungen in der linearisierten Beobachtbarkeitsabbildung. $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}} \in \text{Mat}(\dim \mathbf{y} - \dim \mathbf{z}, \dim \mathbf{z}, \mathbb{R})$ heißt **Beobachtbarkeitsmatrix**. Der volle Spaltenrang der Beobachtbarkeitsmatrix garantiert die Existenz von $\dim \mathbf{z}$ Gleichungen, welche lokal die eindeutige Inversion der Beobachtbarkeitsabbildung nach dem Zustandsvektor $\mathbf{z}$ erlauben.

Anmerkung 7.2:

- Es sei speziell darauf hingewiesen, daß die Beobachtbarkeitsmatrix aufgrund der Forderung, daß die Beobachtbarkeitsabbildung explizit nach dem Systemausgangsvektor aufgelöst werden kann, unabhängig vom Systemausgangsvektor und seinen zeitlichen Ableitungen ist. Läßt man diese Forderung fallen, so gilt dies i.a. nicht mehr.

³⁾ Es sei angemerkt, daß $\text{Rang} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}} \right) = \text{Rang} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}} \right) \right)$ gilt.

- Ändern sich Beobachtungen lokal nicht mit dem Zustand, so kann umgekehrt die Zustandsänderung lokal nicht aus der Beobachtungsänderung durch Inversion ermittelt werden. Die zu den entsprechenden Zustandsänderungen gehörigen Spalten der Beobachtbarkeitsmatrix sind Nullspalten. Ist die Änderung von Beobachtungsgrößen lokal für die Änderung verschiedener Zustände identisch, so kann zwischen dem Einfluß der Zustandsänderungen nicht unterschieden werden und demnach durch Inversion aus den Beobachtungsänderungen nur eine Linearkombination von Zustandsänderungen bestimmt werden. Die zu den Zustandsänderungen gehörigen Spalten der Beobachtbarkeitsmatrix sind linear abhängig.

Die Beobachtbarkeitsmatrix lautet komponentenweise

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{g} \right) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left(\frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}} \mathbf{g} \right) \end{pmatrix} = {}^4) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial z_n} \\ \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{d}{dt} g_1 \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_n} \left(\frac{d}{dt} g_1 \right) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}} g_m \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_n} \left(\frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}} g_m \right) \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

mit $n = \dim \mathbf{z}$ und $m = \dim \mathbf{y}$. Sind $\dim \mathbf{z}$ linear unabhängige Zeilen in der Beobachtbarkeitsmatrix gefunden, so ist das System lokal beobachtbar.

Aus der Definition der Formen der Beobachtbarkeit 7.2 und obigen Überlegungen zur Beobachtbarkeitsmatrix folgt:

Definition 7.5 (Bedingung für die lokale Beobachtbarkeit):

Das System aus Definition 7.1 ist lokal beobachtbar, wenn für die Beobachtbarkeitsmatrix gilt

$$\text{Rang} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{z}, \begin{bmatrix} n-1 \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}) \right) = \dim \mathbf{z} \quad \forall \quad \mathbf{z} \in C(\mathcal{D}_z) \quad \text{und} \quad \mathbf{s} \in C^{(n-1)}(\mathcal{D}_s).$$

Definition 7.6 (Bedingung für die lokale Beobachtbarkeit im Zustand $\mathbf{z}^*$):

Das System aus Definition 7.1 ist lokal beobachtbar im Zustand $\mathbf{z}^*$, wenn für die Beobachtbarkeitsmatrix gilt

$$\text{Rang} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{z}, \begin{bmatrix} n-1 \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}) \bigg|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^*} \right) = \dim \mathbf{z} \quad \forall \mathbf{s} \in C^{(n-1)}(\mathcal{D}_s).$$

Definition 7.7 (Bedingung für die lokale Beobachtbarkeit im Zustand $\mathbf{z}^*$ bei Systemeingang $\mathbf{s}^*$):

Das System aus Definition 7.1 ist lokal beobachtbar im Zustand $\mathbf{z}^*$ bei Systemeingang $\mathbf{s}^*$, wenn für die Beobachtbarkeitsmatrix gilt

$$\text{Rang} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{z}, \begin{bmatrix} n-1 \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}) \bigg|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^*, \mathbf{s}=\mathbf{s}^*} \right) = \dim \mathbf{z}.$$

Untersucht wird jeweils die Jacobi-Matrix der Beobachtbarkeitsabbildung bzgl. des Zustandsvektors (Beobachtbarkeitsmatrix). Die Bedingungen unterscheiden sich dadurch, daß entweder kein, ein oder beide Argumente a priori spezifiziert werden.

⁴⁾ Es sei angemerkt, daß $\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \right) \neq \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \right)$ ist, da $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ gilt.

Zur numerischen Bestimmung des Spaltenranges der Beobachtbarkeitsmatrix bzw. einer beliebigen Teilmatrix dient der

Satz 7.6 (s. z.B. [J. Stoer; R. Bulirsch(1978)]):

Sei $A \in \text{Mat}(m, n, \mathbb{C})$. Dann existieren unitäre Matrizen $U \in \text{Mat}(m, \mathbb{C})$ und $V \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$, so daß $U^H A V = \Sigma \in \text{Mat}(m, n, \mathbb{C})$ eine „Diagonalmatrix“ der Form

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$$

ist. Die $\sigma_i, i \in \{1, 2, \dots, r\}$, heißen die von Null verschiedenen singulären Werte von A . r ist der Rang von A . $U^H A V = \Sigma$ heißt Singulärwertzerlegung von A . ■

Es sei noch angemerkt, daß die Spalten von $U \in \text{Mat}(m, \mathbb{C})$ die m orthonormalen Eigenvektoren der hermiteschen Matrix $A A^H \in \text{Mat}(m, \mathbb{C})$ und die Spalten von $V \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$ die n orthonormalen Eigenvektoren der hermiteschen Matrix $A^H A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$ sind. In [J. Stoer; R. Bulirsch(1978)] ist das Verfahren von Golub und Reinsch zur Berechnung der singulären Werte einer Matrix diskutiert.

Nachfolgender Satz garantiert die qualitative Übertragbarkeit der lokalen Beobachtbarkeit.

Satz 7.7 (Zustandstransformationsinvarianz):

Der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}}$ ist invariant bzgl. Zustandstransformationen

$\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{y})$ mit $\text{Rang}\left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}}\right) = \dim \mathbf{z}$. ■

Beweis von Satz 7.7:

Die Beobachtbarkeitsmatrix hat den gleichen Rang wie die zugehörige Normalgleichungsmatrix, d.h.

$$\text{Rang}\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}}\right) = \text{Rang}\left(\frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}}\right).$$

Unter Berücksichtigung der Zustandstransformation $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{y})$ folgt die Normalgleichungsmatrix zu

$$\frac{\partial \mathbf{z}^T}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}}.$$

Nach Satz A.9 gilt

$$\text{Rang}\left(\frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}}\right) = \text{Rang}\left(\frac{\partial \mathbf{z}^T}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}}\right) \quad \text{für} \quad \text{Rang}\left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}}\right) = \dim \mathbf{z}.$$

q.e.d.

Damit können wir uns analog zur Stabilität auf die lokale Beobachtbarkeitsanalyse exemplarischer Beispiele beschränken.

5. Beobachtbarkeitsanalyse linear(isiert)er Systeme

Zur lokalen Beobachtbarkeitsanalyse des nichtlinearen Systems aus Definition 7.1 folgt die Beobachtbarkeitsmatrix nach (7.18) zu

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{g} \right) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{s}} \dot{\mathbf{s}} \right) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}^2} \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{s}} \dot{\mathbf{s}} \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

In diesem Unterabschnitt beschränken wir uns – aufgrund des eingeschränkten Gültigkeitsgebietes der Gleichungen – auf die lokale Beobachtbarkeitsanalyse des zugehörigen linearisierten Systems und vernachlässigen damit höhere als erste Ableitungen der Modellfunktionen $\mathbf{f}$ und $\mathbf{g}$, wie der Vergleich mit nachfolgenden Ausführungen zeigt.

Linear(isiert)e zeitinvariante Systeme

Ausgangspunkt bilde das linear(isiert)e System

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{z}}(t) &= A\Delta \mathbf{z}(t) + B\Delta \mathbf{s}(t), \\ \Delta \mathbf{y}(t) &= C\Delta \mathbf{z}(t) + D\Delta \mathbf{s}(t)\end{aligned}\quad (7.20)$$

mit den zeitinvarianten Koeffizientenmatrizen A, B, C und D , welche im Falle unserer Navigationsgleichungssysteme durch Linearisierung an einem festen Zustand bei festem Systemeingang resultieren. Für dieses spezielle System folgt nach Definition 7.1 und 7.3 die Beobachtbarkeitsabbildung zu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \\ \ddot{\mathbf{y}} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \Delta \mathbf{z} + D \Delta \mathbf{s} \\ CA \Delta \mathbf{z} + CB \Delta \mathbf{s} + D \Delta \dot{\mathbf{s}} \\ CA^2 \Delta \mathbf{z} + CAB \Delta \mathbf{s} + CB \Delta \dot{\mathbf{s}} + D \Delta \ddot{\mathbf{s}} \\ \vdots \\ CA^{n-1} \Delta \mathbf{z} + CA^{n-2}B \Delta \mathbf{s} + \dots + D \Delta \mathbf{s}^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

und damit die Beobachtbarkeitsmatrix zu

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial (\Delta \mathbf{z})}(\Delta \mathbf{z}, \Delta \begin{bmatrix} n-1 \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

Anmerkung 7.3:

- Da die zeitinvarianten Koeffizientenmatrizen A, B, C und D aus dem nichtlinearen System von Definition 7.1 sich durch Linearisierung am Zustand $\mathbf{z}^*$ bei Systemeingang $\mathbf{s}^*$ ergeben, d.h.

$$\begin{aligned}A &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^*, \mathbf{s}=\mathbf{s}^*}, \quad B = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^*, \mathbf{s}=\mathbf{s}^*}, \\ C &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^*, \mathbf{s}=\mathbf{s}^*} \quad \text{und} \quad D = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^*, \mathbf{s}=\mathbf{s}^*},\end{aligned}$$

folgt aus dem vollen Spaltenrang der Beobachtbarkeitsmatrix die *lokale Beobachtbarkeit im Zustand $\mathbf{z}^*$ bei Systemeingang $\mathbf{s}^*$* .

- Offensichtlich sind im Falle linearer (nicht linearisierter!) zeitinvarianter Systeme die Kriterien aller behandelten Formen der Beobachtbarkeit identisch.
- Werden alle Zustände direkt beobachtet, so ist $C = I$ und $D = 0$ und das System beobachtbar.
- Hat die Dynamikmatrix A eine Nullspalte, so haben auch alle $A^k, k \in \mathbb{N}$, dieselbe Nullspalte und somit auch alle $CA^k, k \in \mathbb{N}$, eine Nullspalte. Wird demnach der zur Nullspalte gehörige Zustand bzw. die zur Nullspalte gehörige Zustandsänderung nicht beobachtet, so weist die Beobachtbarkeitsmatrix eine Nullspalte auf und das System oder genauer der Zustand bzw. die Zustandsänderung ist nicht beobachtbar.
- Ein Rangdefekt der Beobachtbarkeitsmatrix beschreibt die lineare Abhängigkeit mindestens zweier Spaltenvektoren. Entweder können die zugehörigen Zustände bzw. Zustandsänderungen nicht getrennt werden (allgemeiner Fall von vom Nullvektor verschiedener, linear abhängiger Spaltenvektoren) oder ein Zustand ist nicht beobachtbar (Nullspalte). Äußerst problematisch ist der praxisrelevante Fall, daß der Rangdefekt nicht analytisch exakt eintritt, sondern nur näherungsweise gegeben ist.

Linear(isiert)e zeitvariante Systeme

Linearisiert man das nichtlineare System aus Definition 7.1 (nur) am Zustand $\mathbf{z}^*$, so folgt

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{z}}(t) &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^*} \Delta \mathbf{z}(t) =: \mathbf{A}(t) \Delta \mathbf{z}(t), \\ \Delta \dot{\mathbf{y}}(t) &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^*} \Delta \mathbf{z}(t) =: \mathbf{C}(t) \Delta \mathbf{z}(t) \end{aligned} \quad (7.23)$$

mit den zeitvariablen Koeffizientenmatrizen $\mathbf{A}(t)$ und $\mathbf{C}(t)$. Für die Beobachtbarkeitsabbildung folgt nach Definition 7.3

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \\ \ddot{\mathbf{y}} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}(t) \Delta \mathbf{z}(t) \\ (\dot{\mathbf{C}}(t) + \mathbf{C}(t) \mathbf{A}(t)) \Delta \mathbf{z}(t) \\ (\ddot{\mathbf{C}}(t) + 2\dot{\mathbf{C}}(t) \mathbf{A}(t) + \mathbf{C}(t) \dot{\mathbf{A}}(t) + \mathbf{C}(t) \mathbf{A}^2(t)) \Delta \mathbf{z}(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

und daraus direkt die Beobachtbarkeitsmatrix zu

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial (\Delta \mathbf{z})}(\Delta \mathbf{z}, \Delta \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}^{[n-1]}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}(t) \\ \dot{\mathbf{C}}(t) + \mathbf{C}(t) \mathbf{A}(t) \\ \ddot{\mathbf{C}}(t) + 2\dot{\mathbf{C}}(t) \mathbf{A}(t) + \mathbf{C}(t) \dot{\mathbf{A}}(t) + \mathbf{C}(t) \mathbf{A}^2(t) \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

Inhomogenitäten in der Zustandsvektordifferentialgleichung und/oder der algebraischen Beobachtungsvektorgleichung haben offensichtlich auf die Beobachtbarkeitsmatrix keinen Einfluß. Der Fall zeitinvarianter Koeffizientenmatrizen ist als Spezialfall enthalten.

6. Anwendung der lokalen Beobachtbarkeitsanalyse auf TNDgIS

Im 3. Abschnitt haben wir mittels der Beobachtbarkeitsabbildung gezeigt, daß während der stationären Anfangsorientierungsphase der Kurswinkel nur schwach beobachtbar ist. Bei der lokalen Beobachtbarkeitsanalyse werden im wesentlichen die nichtlinearen Gleichungen der Beobachtbarkeitsabbildung linearisiert, wodurch wir in Abschnitt 4 und 5 die Beobachtbarkeitsmatrix erhalten haben. Natürlich muß die global gültige Aussage auch lokal weiter Bestand haben.

Die Bedingung für die lokale Beobachtbarkeit eines TNDgIS ist der volle (Spalten-)Rang der zugehörigen Beobachtbarkeitsmatrix. Die vorgestellten Beispiele dienen der expliziten Darstellung von Beobachtbarkeitsmatrizen und der Demonstration der Komplikation der in Abschnitt 3.1 gewonnenen Aussage durch die Linearisierung. Dabei wird sowohl eine 3-dimensionale (minimale), als auch eine 4-dimensionale Parametrisierung der Gruppe der Rotationsmatrizen $\text{SO}(3)$ verwendet.

Die mit Satz 7.7 bewiesene Zustandstransformationsinvarianz der lokalen Beobachtbarkeit erlaubt die Übertragung der gewonnenen Aussagen auf diverse andere Parametrisierungen des Zustandsraumes.

Anmerkung 7.4: Die Untersuchungen können u.a. dadurch erschwert werden, daß die Beobachtbarkeitsmatrix im analytischen Sinne kein (Spalten-)Rangdefizit aufweist, sondern nur schlecht konditioniert ist (bzgl. der Definition der Kondition einer rechteckigen Matrix s. z.B. [G.H. Golub; C.F. van Loan(1993)]). So deutet beispielsweise eine Spalte in der Beobachtbarkeitsmatrix mit lauter Koeffizienten nahe Null auf eine derartige Situation hin, wie man mit Hilfe des Kreissatzes von Geršgorin aus der zugehörigen, ranggleichen Normalmatrix ablesen kann. Aus der Herleitung der Beobachtbarkeitsmatrix folgt daraus die schwache lokale Beobachtbarkeit der zugehörigen Zustandsänderung. Wir werden diesen Begriff im weiteren ohne die Einführung exakter Schranken verwenden, da diese von der Genauigkeitsklasse des verwendeten TNS abhängig sind. Aus Sicht der Praxis ist die Frage, ob der Unterschied zwischen einem singulären und einem schlecht konditionierten Problem eine Information darstellt, welche über der Rauschgrenze des Systems liegt und damit einen signifikanten Beitrag zum Ergebnis liefert, von der Genauigkeitsklasse des verwendeten TNS abhängig. ■

Lokale Beobachtbarkeitsanalyse des $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{e}_{bb_0})$ -TNDgIS

In Abwandlung zu Abschnitt 4.1 kombinieren wir die kartesische Parametrisierung des dreidimensionalen Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ mit einer Variante der (linearisierten) Orientierungsparameterdifferentialgleichungen in

multiplikativen Kardan-Winkeländerungen aus Anhang D.1 (Näherung von Gleichung (D.34)), da diese die einfachste Struktur aller minimal parametrisierten Orientierungsdifferentialgleichungen aufweisen und dies somit auch für die zugehörige Beobachtbarkeitsmatrix zu erwarten ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_e &= \mathbf{v}_e \\ \dot{\mathbf{v}}_e &= R_{eb_0} R_K(\boldsymbol{\varepsilon}_{b_0 b}) \mathbf{f}_b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{x}_e) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie} \times \mathbf{x}_e \\ &\quad - (\text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_e(\mathbf{x}_e) + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_t(\mathbf{x}_e)) \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{b_0 b} &= -\boldsymbol{\omega}_{ib_0} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{b_0 b} + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}.\end{aligned}\quad (7.26)$$

Durch Linearisierung bzgl. des Zustandsvektors $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \boldsymbol{\varepsilon}_{b_0 b})^T$ folgt die Dynamikmatrix zu (Blockschreibweise)

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 \\ -\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_e^2} (V_e(\mathbf{x}_e) + V_t(\mathbf{x}_e)) - \Omega_{ie}^2 - \dot{\Omega}_{ie} & -2\Omega_{ie} & -R_{eb_0} \text{veck}^{-1}(\mathbf{f}_b) \\ 0_3 & 0_3 & -\Omega_{ib_0} \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

mit $A_{ij} \in \text{Mat}(3, \mathbb{R}) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Positionsbeobachtungen

Die Beobachtungsmatrix lautet (Blockschreibweise)

$$C_{\mathbf{x}} = (I_3, 0_3, 0_3). \quad (7.28)$$

Per Definition folgt daraus die Beobachtbarkeitsmatrix zu

$$\begin{aligned}(C_{\mathbf{x}}, C_{\mathbf{x}}A, C_{\mathbf{x}}A^2, C_{\mathbf{x}}A^3, \dots)^T = \\ = \begin{pmatrix} I_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & I_3 & 0_3 \\ -\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_e^2} (V_e(\mathbf{x}_e) + V_t(\mathbf{x}_e)) & -2\Omega_{ie} & -R_{eb_0} \text{veck}^{-1}(\mathbf{f}_b) \\ -\Omega_{ie}^2 - \dot{\Omega}_{ie} & & \\ 2\Omega_{ie} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_e^2} (V_e(\mathbf{x}_e) + V_t(\mathbf{x}_e)) & -\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_e^2} (V_e(\mathbf{x}_e) + V_t(\mathbf{x}_e)) & 2\Omega_{ie} R_{eb_0} \text{veck}^{-1}(\mathbf{f}_b) \\ +2\Omega_{ie}^3 + 2\Omega_{ie} \dot{\Omega}_{ie} & +3\Omega_{ie}^2 - \dot{\Omega}_{ie} & +R_{eb_0} \text{veck}^{-1}(\mathbf{f}_b) \Omega_{ib_0} \\ \dots & & \end{pmatrix} \quad (7.29)\end{aligned}$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix weist die Struktur einer (rechteckigen) Blockdreiecksmatrix mit Identitäten in den oberen „Blockdiagonalelementen“ auf. Deshalb sind die Spalten der Beobachtbarkeitsmatrix genau dann linear unabhängig, wenn die Spalten der rechten Blockspalte linear unabhängig sind. Die größten Koeffizienten befinden sich im ersten von Null verschiedenen Blockelement, d.h. $-R_{eb_0} \text{veck}^{-1}(\mathbf{f}_b)$. Aus der Matrizen Theorie ist bekannt (s. z.B. [F.R. Gantmacher(1986)]), daß jede schiefsymmetrische Matrix geraden Rang aufweist. $-R_{eb_0} \text{veck}^{-1}(\mathbf{f}_b)$ hat somit einen Rangdefekt (s. Satz A.9). Betrachten wir ausschließlich die ersten 3 Blockzeilen aus der Beobachtbarkeitsmatrix so ergibt die lokale (deterministische) Beobachtbarkeitsanalyse im Falle von Positionsbeobachtungen neben der (natürlich) perfekten lokalen Beobachtbarkeit der Geschwindigkeitskomponenten ferner, daß die Orientierungsparameter nicht vollständig beobachtbar sind.

Mittels der Überlegungen des 3. Abschnitts läßt sich für den Fall einer stationären Navigationsphase die unbestimmte Orientierungskomponente als Rotation um den von der Akzelerometertriade aktuell registrierten Beschleunigungsvektor $\mathbf{f}_b$ identifizieren. Erst durch Hinzunahme mindestens einer geeigneten Zeile in der letzten Blockspalte der Beobachtbarkeitsmatrix kann dieses Problem i.a. überwunden werden. Eine strenge analytische Beweisführung ist jedoch nichttrivial.

Anmerkung 7.5: Im Falle von Positions- und Geschwindigkeitsbeobachtungen lautet die Beobachtungsmatrix $C = (I_6, 0_{6 \times 4})$. Wie man sich leicht überlegt, treten im Vergleich zum oben behandelten Fall reiner Positionsbeobachtungen im wesentlichen einige Blockzeilen doppelt auf. Aus Sicht der lokalen (deterministischen) Beobachtbarkeitsanalyse ist somit weder eine qualitative noch eine quantitative Genauigkeitssteigerung durch Hinzunahme von Geschwindigkeitsbeobachtungen zu erwarten. ■

Geschwindigkeitsbeobachtungen

Die Beobachtungsmatrix lautet (Blockschreibweise)

$$C_v = (0_3, I_3, 0_3). \quad (7.30)$$

Man verifiziert leicht, daß aufgrund der Beziehung $C_v = C_x A$ die Beobachtbarkeitsmatrix für diesen Fall im wesentlichen aus der des letzten Unterabschnitts durch Streichen der ersten Blockzeile folgt. Aufgrund der Kleinheit der Koeffizienten in der ersten und dritten Blockspalte der resultierenden Beobachtbarkeitsmatrix folgt unmittelbar die Übertragbarkeit der lokalen Beobachtbarkeit der Orientierung vom Falle von Positionsbeobachtungen. Positionskomponenten sind im Sinne der Navigation bei Geschwindigkeitsbeobachtungen praktisch nicht beobachtbar.

Orientierungsbeobachtungen

Aufgrund der Blockdreiecksstruktur der Dynamikmatrix führen Orientierungsbeobachtungen, d.h. die Beobachtungsmatrix lautet $C = (0_3, 0_3, I_3)$, auf die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_3 & 0_3 & I_3 \\ 0_3 & 0_3 & -\Omega_{ib_0} \\ 0_3 & 0_3 & \Omega_{ib_0}^2 \\ 0_3 & 0_3 & -\Omega_{ib_0}^3 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (7.31)$$

Die Blockdreiecksstruktur der Dynamikmatrix spiegelt die Unabhängigkeit der Orientierungsparameter von den Positions- und Geschwindigkeitskomponenten wider, welche wir bewußt angestrebt hatten, damit die Orientierung durch die auftretende Instabilität des TNDgIS in Position und Geschwindigkeit nicht verschlechtert wird. Bei Orientierungsbeobachtungen sind demnach fürs $(x_e, v_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgIS Positions- und Geschwindigkeitskomponenten nicht beobachtbar.

Lokale Beobachtbarkeitsanalyse des $(x_e, v_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgIS

In diesem Abschnitt wenden wir uns den in Satz (4.1) zusammengestellten TNDgIS auf Basis der Parametrisierung der $SO(3)$ -Gruppe mittels Hamilton-Quaternionen zu.

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= v_e \\ \dot{v}_e &= R_K(\tilde{q}_{eb})f_b - 2\omega_{ie} \times v_e - \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times x_e) - \dot{\omega}_{ie} \times x_e \\ &\quad - (grad_{x_e} V_e(x_e) + grad_{x_e} V_t(x_e)) \\ \dot{\tilde{q}}_{eb} &= \frac{1}{2}(\tilde{q}_{eb}\tilde{\omega}_{ib} - \tilde{\omega}_{ie}\tilde{q}_{eb}). \end{aligned} \quad (7.32)$$

Die aus dem Linearisierungsprozeß gewonnene 10-dimensionale Dynamikmatrix A (s.S. 55) lautet in Blockschreibweise

$$\begin{pmatrix} 0_3 & I_3 & 0_{3 \times 4} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x_e^2}(V_e(x_e) + V_t(x_e)) - \Omega_{ie}^2 - \dot{\Omega}_{ie} & -2\Omega_{ie} & \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_{eb}}(R_H(\tilde{q}_{eb})f_b) \\ 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -(\omega_{ib} - \omega_{ie})^T \\ \omega_{ib} - \omega_{ie} & -(\Omega_{ib} + \Omega_{ie}) \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (7.33)$$

wobei die Blöcke in den ersten beiden Blockzeilen aus 3 Zeilen und in der 3. Blockzeile aus 4 Zeilen und entsprechend die ersten beiden Blockspalten aus 3 Spalten und die 3. Blockspalte aus 4 Spalten aufgebaut sind.

Positionsbeobachtungen

Die Beobachtungsmatrix lautet (Blockschreibweise)

$$C_x = (I_3, 0_3, 0_3). \quad (7.34)$$

Mit der Dynamikmatrix A und der Beobachtungsmatrix C_x folgt die Beobachtbarkeitsmatrix für das linearisierte $(x_e, v_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgIS zu

$$(C_{\mathbf{x}}, C_{\mathbf{x}}A, C_{\mathbf{x}}A^2, C_{\mathbf{x}}A^3, \dots)^T = \quad (7.35)$$

$$= \begin{pmatrix} I_3 & 0_3 & 0_{3 \times 4} \\ 0_3 & I_3 & 0_{3 \times 4} \\ -\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_e^2}(V_e(\mathbf{x}_e) + V_t(\mathbf{x}_e)) & -2\Omega_{ie} & \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_{eb}}(R_H(\tilde{q}_{eb})\mathbf{f}_b) \\ -\Omega_{ie}^2 - \dot{\Omega}_{ie} & & \\ 2\Omega_{ie}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_e^2}(V_e(\mathbf{x}_e) + V_t(\mathbf{x}_e)) & -\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_e^2}(V_e(\mathbf{x}_e) + V_t(\mathbf{x}_e)) & -2\Omega_{ie}\frac{\partial}{\partial \tilde{q}_{eb}}(R_H(\tilde{q}_{eb})\mathbf{f}_b) \\ +2\Omega_{ie}^3 + 2\Omega_{ie}\dot{\Omega}_{ie} & +3\Omega_{ie}^2 - \dot{\Omega}_{ie} & +\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \tilde{q}_{eb}}(R_H(\tilde{q}_{eb})\mathbf{f}_b) \\ & & \begin{pmatrix} 0 & -(\boldsymbol{\omega}_{ib} - \boldsymbol{\omega}_{ie})^T \\ \boldsymbol{\omega}_{ib} - \boldsymbol{\omega}_{ie} & -(\Omega_{ib} + \Omega_{ie}) \end{pmatrix} \\ \dots & & \end{pmatrix}$$

Aufgrund der speziellen „Blockdreiecksstruktur“ der Beobachtbarkeitsmatrix ist deren Spaltenrangdefekt wiederum identisch mit dem der letzten Blockspalte. Das erste vom Nullblock verschiedene Blockelement darin ist

$$\frac{\partial}{\partial(q_{eb0}, \mathbf{q}_{eb})}(R_H(\tilde{q}_{eb})\mathbf{f}_b) \in \text{Mat}(3, 4, \mathbb{R}).$$

Ein Vergleich mit dessen expliziter Darstellung (s.S. 55) zeigt, daß es für $\tilde{q}_{eb} = 0$ oder $\mathbf{f}_b = 0$ identisch $0_{3 \times 4}$ ist. Aufgrund von $\|\tilde{q}_{eb}\|_2 = 1$ und der allgegenwärtigen Gravitation ($\mathbf{f}_b = 0$ nur im freien Fall) können diese Fälle für die geodätische Praxis ausgeschlossen werden. Auch beim Kunstflug oder im militärischen Einsatz wird der freie Fall nicht über relevante Zeiträume auftreten. Somit liegt kein struktureller Grund vor, weshalb dieser Block i.a. nicht über den vollen (Zeilen-)Rang 3 verfügen sollte. Allerdings sind im Falle von Hamilton-Quaternionen 4 Orientierungsparameter (Quaternionenkomponenten) zu beobachten. Man zeigt leicht, daß auch bei expliziter Berücksichtigung der Normierungsbedingung in ihrer linearisierten Version, d.h.

$$2q_{eb0} + 2q_{eb1} + 2q_{eb2} + 2q_{eb3} = 0, \quad (7.36)$$

ein Rangdefekt in dem betrachteten Blockelement verbleibt, welcher mittels der Überlegungen aus Abschnitt 3 als Unbestimmtheit der Rotation um den von der Akzelerometertriade registrierten Beschleunigungsvektor identifiziert werden kann. Damit ist die Berücksichtigung mindestens einer weiteren (geeigneten) Zeile der Beobachtbarkeitsmatrix notwendig, um die lokale Beobachtbarkeit der Orientierung zu gewährleisten. Eine strenge analytische Beweisführung ist jedoch nichttrivial.

Geschwindigkeitsbeobachtungen

Die Beobachtungsmatrix lautet (Blockschreibweise)

$$C_{\mathbf{v}} = (0_3, I_3, 0_{3 \times 4}). \quad (7.37)$$

Aufgrund von $C_{\mathbf{v}} = C_{\mathbf{x}}A$ folgt die Beobachtbarkeitsmatrix für diesen Fall im wesentlichen wiederum durch Streichen der ersten Blockzeile in der Beobachtbarkeitsmatrix im Falle von Positionsbeobachtungen. Damit zeigt sich wiederum, daß – aus deterministischer Sicht – Geschwindigkeitsbeobachtungen ebenso gut zur Orientierungsverbesserung geeignet sind, wie Positionsbeobachtungen. Ferner sind Positionsverbesserungen durch Geschwindigkeitsbeobachtungen praktisch nicht möglich.

Orientierungsbeobachtungen

Aufgrund der Blockdreiecksstruktur der Dynamikmatrix sind hier wiederum Positions- und Geschwindigkeitskomponenten bei Orientierungsbeobachtungen nicht (lokal) beobachtbar.

KAPITEL 8:

Zeitdiskrete Kalman-Schätzer

In den ersten vier Kapiteln haben wir nichtlineare TNDgIS aus physikalischen Gesetzmäßigkeiten hergeleitet und anschließend linearisiert. Nunmehr tragen wir dem zeitdiskret gegebenen Sensormeßdatenvektor (multivariate Zeitreihe) Rechnung und diskretisieren im 1. Abschnitt die bislang kontinuierlich formulierten Navigationsgleichungssysteme, wobei die Diskretisierung der algebraischen Beobachtungsvektorgleichungen trivial ist und demzufolge keiner Beschreibung bedarf. Bei der Diskretisierung von TNDgIS ist darauf zu achten, daß das resultierende Trägheitsnavigationsdifferenzgleichungssystem die Form eines Zustandsraummodells (s. z.B. [J.V. Candy(1988)], [C.K. Chui; G. Chen(1989)], [A. Gelb(1992)], [P.S. Maybeck(1994)]) hat, um den Voraussetzungen der Kalman-Schätzer zu genügen.

Im 1. Abschnitt gehen wir von (nichtlinearen oder linearisierten) TNDgIS aus und beschreiben Diskretisierungs- bzw. Integrationsverfahren unterschiedlicher Ordnung zur Überführung von TNDgIS in Trägheitsnavigationsdifferenzgleichungssysteme (s. z.B. [H.R. Schwarz(1986)] und [J. Stoer; R. Bulirsch(1978)]). Bei der Diskretisierung gehen die bislang kontinuierlichen Vektorprozesse in zeitdiskrete Vektorprozesse (multivariate Zeitreihen) über. Die Schätzung des Zustandsvektors in diskretisierten, nichtlinearen bzw. linearisierten Trägheitsnavigationsdifferenzgleichungssystemen ist Gegenstand des 2. Abschnitts. Es werden sowohl Kalman-Filter (für „real-time processing“), als auch Kalman-Glätter (für „close-to-real-time“ oder „post-mission processing“) unter diversen Voraussetzungsprofilen beschrieben. Da Minimal-Varianz-Schätzer bereits breiten Einzug in eine Vielzahl etablierter Monographien gehalten haben, verweisen wir bzgl. der Herleitungen der Kalman-Schätzergleichungen auf die Literatur (s. z.B. [B.D.O. Anderson; J.B. Moore(1979)], [R.S. Bucy; P.D. Joseph(1987)], [C.K. Chui; G. Chen(1989)], [A. Gelb(1992)], [G.C. Goodwin; K.S. Sin(1984)], [M.S. Grewal; A.P. Andrews(1993)], [S. Haykin(1991)], [P.S. Maybeck(1994)], [J.S. Meditch(1969)], [G. Minkler; J. Minkler(1993)], [K.-W. Schrick(1977)]) und stellen im vorliegenden Kapitel eine Übersicht der für die Trägheitsnavigation wichtigsten Varianten von Kalman-Schätzern zusammen.

1. Zeitdiskretisierung der Systemgleichungen

Als äquidistante Diskretisierungsstellen bieten sich die Zeitmarken t_k zum Sensormeßdatenvektor $\mathbf{s}(t_k)$ an. Das Gitter der Zeitmarken liegt sowohl der Linearisierung von TNDgIS als auch der Diskretisierung nichtlinearer bzw. linearisierter TNDgIS zugrunde. Den Ausgangspunkt bilden nichtlineare TNDgIS der Form

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{s}(t), \mathbf{z}(t)) \quad (8.1)$$

bzw. linearisierte TNDgIS der Form

$$\Delta \mathbf{z}(t) = A(t_k) \Delta \mathbf{z}(t) + B(t_k) \Delta \tilde{\mathbf{s}}(t) + B(t_k) \mathbf{w}(t). \quad (8.2)$$

Die folgenden beiden Unterabschnitte beinhalten die Herleitung der für die (zeitdiskrete) Kalman-Schätzer benötigten (stochastischen) Differenzgleichungen durch Approximation des in TNDgIS auftretenden Differentialquotienten durch einen Differenzenquotienten (s. 1. Unterabschnitt) bzw. klassischer (Einschritt-)Integrationsverfahren (s. 2. Unterabschnitt).

Anmerkung 8.1: Die Lösung eines linearisierten TNDgIS lautet unter der Annahme konstanter Koeffizientenmatrizen $A(t_k)$ und $B(t_k)$ ($t = t_k + \Delta t = t_{k+1}$)

$$\Delta \mathbf{z}(t_{k+1}) = e^{A(t_k)(t_{k+1}-t_k)} \Delta \mathbf{z}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_k)(t_{k+1}-t^*)} B(t_k) (\Delta \tilde{\mathbf{s}}(t^*) + \mathbf{w}(t^*)) dt^*.$$

Ziel ist die Diskretisierung des Integrals. Um die für die Kalman-Schätzung notwendige Form zu erhalten, trifft man i.a. (s. z.B. [C.K. Chui; G. Chen(1989)], [R. Isermann(1988)]) die Annahme eines konstanten Sensormeßdateninkrements und erhält

$$\Delta \mathbf{z}(t_{k+1}) = e^{A(t_k)(t_{k+1}-t_k)} \Delta \mathbf{z}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_k)(t_{k+1}-t^*)} dt^* B(t_k) (\Delta \tilde{\mathbf{s}}(t_{k+1}) + \mathbf{w}(t_{k+1})).$$

Mit

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_k)(t_{k+1}-t^*)} dt^* = \left(e^{A(t_k)(t_{k+1}-t_k)} - I \right) A^{-1}(t_k) = \Delta t \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(A(t_k)\Delta t)^{i-1}}{i!}$$

folgt schließlich

$$\Delta \mathbf{z}(t_{k+1}) = \underbrace{e^{A(t_k)(t_{k+1}-t_k)}}_{=: A_k} \Delta \mathbf{z}(t_k) + \underbrace{\left(e^{A(t_k)(t_{k+1}-t_k)} - I \right) A^{-1}(t_k) B(t_k)}_{=: B_k} (\Delta \tilde{\mathbf{s}}(t_{k+1}) + \mathbf{w}(t_{k+1})).$$

■

Verwendung von Differenzenquotienten

Gebräuchliche Differenzenquotienten zur Approximation des Differentialquotienten

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \lim_{t^* \rightarrow t} \frac{\Delta \mathbf{z}(t^*) - \Delta \mathbf{z}(t)}{t^* - t} \quad (8.3)$$

sind (s. z.B. [M. Abramowitz, I.A. Stegun(1972)] und [A.A. Samarskij(1984)])
der vorwärtige (bzw. rechte) Differenzenquotient (2-Punkt-Stern $\{t_{k+1}, t_k\}$)

$$\Delta \mathbf{z}(t_k) = \frac{\Delta \mathbf{z}(t_{k+1}) - \Delta \mathbf{z}(t_k)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad \text{mit} \quad \Delta t = t_{k+1} - t_k \quad (8.4)$$

und der zentrale Differenzenquotient (2-Punkt-Stern $\{t_{k+1}, t_{k-1}\}$)

$$\Delta \mathbf{z}(t_k) = \frac{\Delta \mathbf{z}(t_{k+1}) - \Delta \mathbf{z}(t_{k-1})}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad \text{mit} \quad \Delta t = t_k - t_{k-1} = t_{k+1} - t_k \quad (8.5)$$

Die angegebenen Ordnungen der Fehlerterme ergeben sich dabei durch Einsetzen der Taylorreihen

$$\Delta \mathbf{z}(t_k \pm \Delta t) = \Delta \mathbf{z}(t_k) \pm \Delta t \dot{\mathbf{z}}(t_k) + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{\mathbf{z}}(t_k) \pm \frac{\Delta t^3}{3!} \Delta \mathbf{z}^{(3)}(t_k) + \dots \quad (8.6)$$

in die Differenzenquotienten. Während bei Verwendung des vorwärtigen Differenzenquotienten im resultierenden Trägheitsnavigationsdifferenzengleichungssystem nur der Zustandsvektor zum gegenwärtigen Zeitpunkt t_k und der zum zukünftigen Zeitpunkt t_{k+1} eingehen, tritt bei Verwendung des zentralen Differenzenquotienten auch der Zustandsvektor zum vergangenen Zeitpunkt t_{k-1} auf (Mehrschrittverfahren).

Verwendung des vorwärtigen Differenzenquotienten (Polygonzugverfahren von Euler)

$$\dot{\mathbf{z}}(t_k) = \frac{\mathbf{z}(t_{k+1}) - \mathbf{z}(t_k)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) = \mathbf{f}(\mathbf{s}(t_k), \mathbf{z}(t_k)) \quad (8.7)$$

$$\Rightarrow \mathbf{z}(t_{k+1}) = \mathbf{z}(t_k) + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{s}(t_k), \mathbf{z}(t_k)) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (8.8)$$

Verwendung des zentralen Differenzenquotienten

$$\Delta \mathbf{z}(t_k) = \frac{\Delta \mathbf{z}(t_{k+1}) - \Delta \mathbf{z}(t_{k-1})}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) = \mathbf{f}(\mathbf{s}(t_k), \mathbf{z}(t_k)) \quad (8.9)$$

$$\Rightarrow \mathbf{z}(t_{k+1}) = \mathbf{z}(t_{k-1}) + 2\Delta t \mathbf{f}(\mathbf{s}(t_k), \mathbf{z}(t_k)) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (8.10)$$

Die zugehörige Vektordifferenzengleichung beschreibt in der vorliegenden Form kein Zustandsraummodell, was jedoch Voraussetzung für die (Kalman-)Schätzergleichungen des nachfolgenden Abschnittes ist. Zur Behebung dieses Problems bedient man sich einer zur üblichen Transformation einer gewöhnlichen Differentialgleichung n . Ordnung in ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung analogen Vorgehens (s. z.B. [J.D. Hamilton(1994)]). Mit anderen Worten interpretiert man das Zweischrittverfahren im Zustandsvektor $\mathbf{z}_k$ als Einschrittverfahren im Zustandsvektor $(\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_{k-1})^T$ und transformiert damit die Vektordifferenzengleichung auf die Gestalt eines Zustandsraummodells auf Kosten der Verdopplung der Dimension. Begnügt man sich somit nicht mit einem Diskretisierungsfehler der Ordnung Δt^2 , sondern will einen um eins höheren Grad, so ist im Rahmen der Varianz-Kovarianz-Fortpflanzung anstelle eines Systems von n Differenzengleichungen ein System von $2n$ Differenzengleichungen zu behandeln.

Explizite Einschrittverfahren

Die unter Verwendung des vorwärtigen Differenzenquotienten erhaltene Vektordifferenzengleichung stimmt mit der des *Polygonzugverfahrens von Euler der Fehlerordnung 1* überein. Dabei wird zur Gewinnung des Funktionswertes am Ende eines Intervalls zum Funktionswert am Anfang einfach nur die mit der Intervallbreite multiplizierte Steigung am Anfangspunkt addiert. Da die Konvergenz des Verfahrens linear bzgl. der Schrittweite Δt ist, spricht man auch von einem Verfahren der Fehlerordnung 1. Erweist sich die Fehlerordnung dieses einfachsten Einschrittverfahrens als unzureichend, so ist es durch eines der im weiteren zusammengestellten expliziten Einschrittverfahren mit höherer Fehlerordnung (s. z.B. [H.R. Schwarz(1986)] und [J. Stoer; R. Bulirsch(1978)]) zu ersetzen. Bei der Auswahl wurde auf eine bestmögliche Kompatibilität der Stützstellen geachtet. Dadurch kann in Abhängigkeit der aktuellen Dynamik der Trajektorie ohne zusätzlichen Rechenaufwand von einem Verfahren niedriger auf ein Verfahren höherer Fehlerordnung übergegangen werden. Die Fehlerordnung ergibt sich wiederum durch Taylor-Reihenentwicklung. Explizite Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren fünfter und siebenter Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle sind in [E. Fehlberg(1969)] beschrieben, aber höchstens in der Umgebung von singulären Punkten notwendig.

Polygonzugverfahren von Euler der Ordnung 1

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(s(t_k), \mathbf{z}(t_k)) \\ \mathbf{z}(t_{k+1}) &= \mathbf{z}(t_k) + \Delta t \mathbf{k}_1 + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned}$$

Modifiziertes Polygonzugverfahren von Euler der Ordnung 2

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(s(t_k), \mathbf{z}(t_k)) \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(s\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right), \mathbf{z}(t_k) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k}_1\right) \\ \mathbf{z}(t_{k+1}) &= \mathbf{z}(t_k) + \Delta t \mathbf{k}_2 + \mathcal{O}(\Delta t^3) \end{aligned}$$

Verfahren von Kutta der Ordnung 3

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(s(t_k), \mathbf{z}(t_k)) \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(s\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right), \mathbf{z}(t_k) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k}_1\right) \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}\left(s(t_k + \Delta t), \mathbf{z}(t_k) - \Delta t \mathbf{k}_1 + 2\Delta t \mathbf{k}_2\right) \\ \mathbf{z}(t_{k+1}) &= \mathbf{z}(t_k) + \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{k}_1 + 4\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) + \mathcal{O}(\Delta t^4) \end{aligned}$$

Klassisches Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(s(t_k), \mathbf{z}(t_k)) \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(s\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right), \mathbf{z}(t_k) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k}_1\right) \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}\left(s\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right), \mathbf{z}(t_k) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k}_2\right) \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(s(t_k + \Delta t), \mathbf{z}(t_k) + \Delta t \mathbf{k}_3) \\ \mathbf{z}(t_{k+1}) &= \mathbf{z}(t_k) + \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) + \mathcal{O}(\Delta t^5) \end{aligned}$$

Anmerkung 8.2: Die mit Verfahren der Systemidentifikation bestimmten (zeitdiskreten) Sensorfehlermodelle in Form von VARMAX-Prozessen („vector autoregressive moving average process with exogenous input“) (s. hierzu [J.V. Candy(1988)], [C.K. Chui; G. Chen(1991)], [J. Honerkamp(1990)], [G. Minkler; J. Minkler(1993)]) führen auf allgemeine Vektordifferenzengleichungen, welche vor der Verwendung in einem Kalman-Schätzer erst in die Form eines Zustandsraummodells transformiert werden müssen. ■

2. Zeitdiskrete Kalman-Schätzer

Einige Minimal-Varianz-Schätzer gehen von der Annahme eines verschwindenden Systemeingangsvektors aus. Um sie dennoch verwenden zu können, zeigen wir im 1. Unterabschnitt die Möglichkeit einer Zerlegung (s. z.B. [C.K. Chui; G. Chen(1989)], [J.S. Meditch(1969)]) eines allgemeinen Zustandsraummodells in ein deterministisches und ein stochastisches Modell ohne Systemeingangsvektor auf.

Im 2. Unterabschnitt stellen wir Kalman-Filter unter folgenden Annahmen zusammen:

- Linear(isiert)es (diskretisiertes, allgemeines) Zustandsraummodell mit weißem, unkorrelierten Zustands- und Beobachtungsrauschen
- Linear(isiert)es (diskretisiertes, allgemeines) Zustandsraummodell mit weißem, korrelierten Zustands- und Beobachtungsrauschen
- Linear(isiert)es (diskretisiertes, allgemeines) Zustandsraummodell mit farbigem Zustands- und Beobachtungsrauschen, welche über $VAR(q)$ -Prozesse durch weiße, unkorrelierte Vektorprozesse darstellbar sind
- Nichtlineares/linearisiertes (diskretisiertes, verkürztes) Zustandsraummodell mit weißem, unkorrelierten Zustands- und Beobachtungsrauschen

Alle vier Kalman-Filter sind echtzeitfähig. Eine Eigenschaft, die für navigatorische Zwecke unerlässlich ist. Will man zur Genauigkeitssteigerung neben vergangener und gegenwärtiger auch zukünftige Beobachtungen berücksichtigen (und prozessiert damit "close-to-real-time" oder "post-mission"), so gelangt man zu Kalman-Glättern, welche im 3. Unterabschnitt unter folgenden Annahmen zusammengestellt sind:

- Linear(isiert)es (diskretisiertes, verkürztes) Zustandsraummodell mit weißem, unkorrelierten Zustands- und Beobachtungsrauschen unter sukzessiver Berücksichtigung zukünftiger Beobachtungen ("fixed-point smoothing")
- Linear(isiert)es (diskretisiertes, verkürztes) Zustandsraummodell mit weißem, unkorrelierten Zustands- und Beobachtungsrauschen unter Berücksichtigung aller zukünftiger Beobachtungen ("fixed-intervall smoothing")
- Linear(isiert)es (diskretisiertes, verkürztes) Zustandsraummodell mit weißem, unkorrelierten Zustands- und Beobachtungsrauschen unter Berücksichtigung von Beobachtungen der kommenden N zukünftigen Zeitschritte ("fixed-lag smoothing")

1. Zerlegung allgemeiner Zustandsraummodelle

Wir rekapitulieren, daß ein linear(isiert)es, diskretisiertes, allgemeines Zustandsraummodell von der Form

$$\Delta \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A}_k \Delta \mathbf{z}_k + \mathbf{B}_k \Delta \tilde{\mathbf{s}}_k + \Gamma_k \mathbf{w}_k \quad (8.11)$$

$$\Delta \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \Delta \mathbf{z}_k + \mathbf{D}_k \Delta \tilde{\mathbf{s}}_k + \mathbf{v}_k \quad (8.12)$$

mit

$\Delta \mathbf{z}_k$	Zustandsvektorinkrement
$\Delta \tilde{\mathbf{s}}_k$	Systemeingangsvektor (Sensormeßdatenvektorinkrement)
$\Delta \mathbf{y}_k$	Systemausgangsvektor (Beobachtungsvektorinkrement)
$\mathbf{w}_k$	$\sim N(0, \mathbf{Q}_k)$, weißer Zustandsrauschvektor bzw. -prozeß
$\mathbf{v}_k$	$\sim N(0, \mathbf{R}_k)$, weißer Beobachtungsrauschvektor bzw. -prozeß
$\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \Gamma_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{D}_k$	deterministische Koeffizientenmatrizen
$\mathbf{Q}_k, \mathbf{R}_k$	symmetrische und positiv definite Autokorrelationsmatrizen

ist. Dieses läßt sich ins – nach den zur Herleitung von Kalman-Schätzern notwendigen Voraussetzungen – deterministische Zustandsraummodell

$$\Delta \mathbf{z}_{k+1}^* = \mathbf{A}_k \Delta \mathbf{z}_k^* + \mathbf{B}_k \Delta \tilde{\mathbf{s}}_k \quad (8.13)$$

$$\Delta \mathbf{y}_k^* = \mathbf{C}_k \Delta \mathbf{z}_k^* + \mathbf{D}_k \Delta \tilde{\mathbf{s}}_k \quad (8.14)$$

und das verkürzte (stochastische) Zustandsraummodell

$$\Delta \mathbf{z}_{k+1}^{**} = A_k \Delta \mathbf{z}_k^{**} + \Gamma_k \mathbf{w}_k \quad (8.15)$$

$$\Delta \mathbf{y}_k^{**} = C_k \Delta \mathbf{z}_k^{**} + \mathbf{v}_k \quad (8.16)$$

zerlegen, wobei die Lösung des allgemeinen (stochastischen) Zustandsraummodells durch Superposition nach

$$\Delta \mathbf{z}_k = \Delta \mathbf{z}_k^* + \Delta \mathbf{z}_k^{**} \quad (8.17)$$

$$\Delta \mathbf{y}_k = \Delta \mathbf{y}_k^* + \Delta \mathbf{y}_k^{**} \quad (8.18)$$

folgt. Mit der bekannten Lösung des deterministischen Differenzensystems (8.13)

$$\Delta \mathbf{z}_k^* = \left(\prod_{i=0}^{k-1} A_i \right) \Delta \mathbf{z}_0^* + \sum_{j=1}^k \left(\prod_{i=j-1}^{k-1} A_i \right) B_{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{s}}_{j-1} \quad (8.19)$$

$$= A_{k-1} (\Delta \mathbf{z}_{k-1}^* + B_{k-1} \Delta \tilde{\mathbf{s}}_{k-1}) \quad (8.20)$$

folgt das verkürzte Zustandsraummodell zu

$$\Delta \mathbf{z}_{k+1}^{**} = A_k \Delta \mathbf{z}_k^{**} + B_k \Delta \tilde{\mathbf{s}}_k \quad (8.21)$$

$$\Delta \mathbf{y}_k - C_k \Delta \mathbf{z}_k^* - D_k \Delta \tilde{\mathbf{s}}_k = C_k \Delta \mathbf{z}_k^{**} + \mathbf{v}_k. \quad (8.22)$$

Im folgenden formulieren wir – je nach Verfügbarkeit – Kalman-Schätzer für allgemeine und verkürzte Zustandsraummodelle, wobei vor Anwendung letzterer auf allgemeine Zustandsraummodelle obige Zerlegung durchzuführen ist.

2. Zeitdiskrete Kalman-Filter

Filter I

Voraussetzungsprofil:

Linear(isiert)es (diskretisiertes, allgemeines) Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{z}_{k+1} &= A_k \Delta \mathbf{z}_k + B_k \Delta \tilde{\mathbf{s}}_k + \Gamma_k \mathbf{w}_k \\ \Delta \mathbf{y}_k &= C_k \Delta \mathbf{z}_k + D_k \Delta \tilde{\mathbf{s}}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

mit

- gegebenen Momenten des stochastischen Anfangswertes des Zustandsvektorinkrements $E[\Delta \mathbf{z}_0], \text{Var}[\Delta \mathbf{z}_0]$
- gegebenen Koeffizientenmatrizen $A_k, B_k, \Gamma_k, C_k, D_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
- gegebenen Systemeingangsprozeß $\Delta \tilde{\mathbf{s}}_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
- gegebenen Systemausgangsprozeß $\Delta \mathbf{y}_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
- Gaußschen, weißen Zustandsrauschprozeß $\mathbf{w}_k$, d.h.

$$E[\mathbf{w}_k] = 0 \quad \wedge \quad E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_l^T] = Q_k \delta_{kl} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}_0,$$

mit gegebenen symmetrischen und positiv definiten Autokorrelationsmatrizen $Q_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

- Gaußschen, weißen Beobachtungsrauschprozeß $\mathbf{v}_k$, d.h.

$$E[\mathbf{v}_k] = 0 \quad \wedge \quad E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_l^T] = R_k \delta_{kl} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}_0,$$

mit gegebenen symmetrischen und positiv definiten Autokorrelationsmatrizen $R_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

- unkorrelierten Zustands- und Beobachtungsrauschprozeß, d.h.

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_l^T] = 0 \quad \forall k, l \in \mathbb{N}_0$$

- unkorrelierten Zustandsrauschprozeß und stochastischen Anfangswert, d.h.

$$E[\mathbf{w}_k \Delta \mathbf{z}_0^T] = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

- unkorrelierten Beobachtungsrauschprozeß und stochastischen Anfangswert, d.h.

$$E[\mathbf{v}_k \Delta \mathbf{z}_0^T] = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Filtergleichungen:

Initialisierung:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{z}_0^+ &= E[\Delta \mathbf{z}_0] \\ P_0^+ &= \text{Var}[\Delta \mathbf{z}_0] \end{aligned}$$

Prädiktion (ohne Berücksichtigung von Beobachtungen):

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{z}_k^- &= A_{k-1} \Delta \mathbf{z}_{k-1}^+ + B_{k-1} \Delta \tilde{\mathbf{s}}_{k-1} \\ P_k^- &= A_{k-1} P_{k-1}^+ A_{k-1}^T + \Gamma_{k-1} Q_{k-1} \Gamma_{k-1}^T \end{aligned}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Korrektur (durch Berücksichtigung von Beobachtungen):

$$\begin{aligned} G_k &= P_k^- C_k^T (C_k P_k^- C_k^T + R_k)^{-1} \\ \Delta \mathbf{z}_k^+ &= \Delta \mathbf{z}_k^- + G_k (\Delta \mathbf{y}_k - D_k \Delta \tilde{\mathbf{s}}_k - C_k \Delta \mathbf{z}_k^-) \\ P_k^+ &= (I - G_k C_k) P_k^- \end{aligned}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Bzgl. der Herleitung der Filtergleichungen sei auf [C.K. Chui; G. Chen(1991)] und [G. Minkler; J. Minkler(1993)] verwiesen.

Anmerkung 8.3 (zu Filter I):

- Dies ist der klassische Minimal-Varianz-Filter und wird deshalb i.a. als „der Kalman-Filter“ bezeichnet.
- Unter der Annahme stationärer (im engeren Sinne), Gaußscher, weißer Rauschprozesse ist $Q_k = Q$ bzw. $R_k = R \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$. Q und R sind dann während der autonomen initialen Orientierungsphase zu schätzen.
- Zur Berechnung von Koeffizientenmatrizen und absoluten Zuständen ist neben inkrementeller Information auch absolute Information notwendig.

Filter II

Voraussetzungsprofil:

Linear(isiert)es (diskretisiertes, allgemeines) Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{z}_{k+1} &= A_k \Delta \mathbf{z}_k + B_k \Delta \tilde{\mathbf{s}}_k + \Gamma_k \mathbf{w}_k \\ \Delta \mathbf{y}_k &= C_k \Delta \mathbf{z}_k + D_k \Delta \tilde{\mathbf{s}}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

mit

- gegebenen Momenten des stochastischen Anfangswertes des Zustandsvektorkrements $E[\Delta \mathbf{z}_0], \text{Var}[\Delta \mathbf{z}_0]$
- gegebenen Koeffizientenmatrizen $A_k, B_k, \Gamma_k, C_k, D_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
- gegebenen Systemeingangsprozeß $\Delta \tilde{\mathbf{s}}_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
- gegebenen Systemausgangsprozeß $\Delta \mathbf{y}_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

- Gaußschen, weißen Zustandsrauschprozeß $\mathbf{w}_k$, d.h.

$$E[\mathbf{w}_k] = 0 \quad \wedge \quad E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_l^T] = Q_k \delta_{kl} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}_0,$$

mit gegebenen symmetrischen und positiv definiten Autokorrelationsmatrizen $Q_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

- Gaußschen, weißen Beobachtungsrauschprozeß $\mathbf{v}_k$, d.h.

$$E[\mathbf{v}_k] = 0 \quad \wedge \quad E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_l^T] = R_k \delta_{kl} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}_0,$$

mit gegebenen symmetrischen und positiv definiten Autokorrelationsmatrizen $R_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

- korrelierten Zustands- und Beobachtungsrauschprozeß, d.h.

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_l^T] = S_k \delta_{kl} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}_0$$

- unkorrelierten Zustandsrauschprozeß und stochastischen Anfangswert, d.h.

$$E[\mathbf{w}_k \Delta \mathbf{z}_0^T] = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

- unkorrelierten Beobachtungsrauschprozeß und stochastischen Anfangswert, d.h.

$$E[\mathbf{v}_k \Delta \mathbf{z}_0^T] = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Filtergleichungen:

Initialisierung:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{z}_0^+ &= E[\Delta \mathbf{z}_0] \\ P_0^+ &= \text{Var}[\Delta \mathbf{z}_0] \end{aligned}$$

Prädiktion (ohne Berücksichtigung von Beobachtungen):

$$\begin{aligned} K_{k-1} &= \Gamma_{k-1} S_{k-1} R_{k-1}^{-1} \\ \Delta \mathbf{z}_k^- &= A_{k-1} \Delta \mathbf{z}_{k-1}^+ + B_{k-1} \Delta \tilde{\mathbf{s}}_{k-1} + K_{k-1} (\Delta \mathbf{y}_{k-1} - D_{k-1} \Delta \tilde{\mathbf{s}}_{k-1} - C_{k-1} \Delta \mathbf{z}_{k-1}^+) \quad , \quad k \in \mathbb{N} \\ P_k^- &= (A_{k-1} - K_{k-1} C_{k-1}) P_{k-1}^+ (A_{k-1} - K_{k-1} C_{k-1})^T + \Gamma_{k-1} Q_{k-1} \Gamma_{k-1}^T - K_{k-1} R_{k-1} K_{k-1}^T \end{aligned}$$

Korrektur (durch Berücksichtigung von Beobachtungen):

$$\begin{aligned} G_k &= P_k^- C_k^T (C_k P_k^- C_k^T + R_k)^{-1} \\ \Delta \mathbf{z}_k^+ &= \Delta \mathbf{z}_k^- + G_k (\Delta \mathbf{y}_k - D_k \Delta \tilde{\mathbf{s}}_k - C_k \Delta \mathbf{z}_k^-) \quad , \quad k \in \mathbb{N} \\ P_k^+ &= (I - G_k C_k) P_k^- \end{aligned}$$

Bzgl. der Herleitung der Filtergleichungen sei auf [C.K. Chui; G. Chen(1991)] und [G. Minkler; J. Minkler(1993)] verwiesen.

Anmerkung 8.4 (zu Filter II):

- Für $S_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}_0$, sind die klassischen Kalman-Filtergleichungen als Spezialfall enthalten.
- Die Korrelation des Zustands- und Beobachtungsrauschprozesses wirkt sich lediglich auf die Prädiktionsgleichungen aus.
- Unter der Voraussetzung (im engeren Sinne) stationärer Zustands- und Beobachtungsrauschprozesse folgt neben der Konstanz der Autokorrelationsmatrizen Q_k und R_k , d.h. $Q_k = Q$ und $R_k = R \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$, auch die der Kreuzkorrelationsmatrix S_k , d.h. $S_k = S \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Filter III

Voraussetzungsprofil:

Linear(isiert)es (diskretisiertes, verkürztes) Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{z}_{k+1} &= A_k \Delta \mathbf{z}_k + \Gamma_k \boldsymbol{\xi}_k \\ \Delta \mathbf{y}_k &= C_k \Delta \mathbf{z}_k + \boldsymbol{\eta}_k\end{aligned}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

und (farbige) VAR(1)-Zustands- und Beobachtungsvektorprozesse

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}_k &= M_{k-1} \boldsymbol{\xi}_{k-1} + \mathbf{w}_k \\ \boldsymbol{\eta}_k &= N_{k-1} \boldsymbol{\eta}_{k-1} + \mathbf{v}_k\end{aligned}$$

mit

- gegebenen Momenten des stochastischen Anfangswertes des Zustandsvektorinkrements $E[\Delta \mathbf{z}_0], \text{Var}[\Delta \mathbf{z}_0]$
- gegebenen Koeffizientenmatrizen $A_k, \Gamma_k, C_k, M_k, N_k, B_k, D_k$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$
- gegebenen Systemeingangsprozeß $\Delta \tilde{\mathbf{s}}_k$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$
(für die Zerlegung nach Unterabschnitt 10.2.1)
- gegebenen Systemausgangsprozeß $\Delta \mathbf{y}_k$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$
(entsprechend der Zerlegung nach Unterabschnitt 10.2.1)
- Gaußschen, weißen Zustandsrauschprozeß $\mathbf{w}_k$, d.h.

$$E[\mathbf{w}_k] = 0 \quad \wedge \quad E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_l^T] = Q_k \delta_{kl} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}_0,$$

mit gegebenen symmetrischen und positiv definiten Autokorrelationsmatrizen Q_k $\forall k \in \mathbb{N}_0$

- Gaußschen, weißen Beobachtungsrauschprozeß $\mathbf{v}_k$, d.h.

$$E[\mathbf{v}_k] = 0 \quad \wedge \quad E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_l^T] = R_k \delta_{kl} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}_0,$$

mit gegebenen symmetrischen und positiv definiten Autokorrelationsmatrizen R_k $\forall k \in \mathbb{N}_0$

- unkorrelierten Vektorprozessen $\mathbf{w}_k$ und $\mathbf{v}_l$, d.h.

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_l^T] = 0 \quad \forall k, l \in \mathbb{N}_0$$

- unkorrelierten Vektorprozessen $\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$ und stochastischen Anfangswert, d.h.

$$E[\mathbf{w}_k \Delta \mathbf{z}_0^T] = 0 \quad \wedge \quad E[\mathbf{v}_k \Delta \mathbf{z}_0^T] = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

($\boldsymbol{\xi}_0 = \mathbf{w}_0$ und $\boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{v}_0$!)

Filtergleichungen:

Initialisierung:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{z}_0^+ &= E[\Delta \mathbf{z}_0] - \text{Var}[\Delta \mathbf{z}_0] C_0^T (C_0 \text{Var}[\Delta \mathbf{z}_0] C_0^T + R_0)^{-1} (C_0 E[\Delta \mathbf{z}_0] - \Delta \mathbf{y}_0) \\ \boldsymbol{\xi}_0^+ &= 0 \\ P_0^+ &= \begin{pmatrix} \text{Var}[\Delta \mathbf{z}_0] - \text{Var}[\Delta \mathbf{z}_0] C_0^T (C_0 \text{Var}[\Delta \mathbf{z}_0] C_0^T + R_0)^{-1} C_0 \text{Var}[\Delta \mathbf{z}_0] & 0 \\ 0 & Q_0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Prädiktion (ohne Berücksichtigung von Beobachtungen):

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{z}_k \\ \boldsymbol{\xi}_k \end{pmatrix}^- &= \begin{pmatrix} A_{k-1} & \Gamma_{k-1} \\ 0 & M_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{z}_{k-1} \\ \boldsymbol{\xi}_{k-1} \end{pmatrix}^+ \\ P_k^- &= \begin{pmatrix} A_{k-1} & \Gamma_{k-1} \\ 0 & M_{k-1} \end{pmatrix} P_{k-1}^+ \begin{pmatrix} A_{k-1}^T & 0 \\ \Gamma_{k-1}^T & M_{k-1}^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_k \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Korrektion (durch Berücksichtigung von Beobachtungen):

$$\begin{aligned}
 H_{k-1} &= (C_k A_{k-1} - N_{k-1} C_{k-1}, C_k \Gamma_{k-1}) \\
 G_k &= \begin{pmatrix} A_{k-1} & \Gamma_{k-1} \\ 0 & M_{k-1} \end{pmatrix} P_{k-1}^+ H_{k-1}^T (H_{k-1} P_{k-1}^+ H_{k-1}^T + R_k)^{-1} \\
 \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{z}_k \\ \xi_k \end{pmatrix}^+ &= \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{z}_k \\ \xi_k \end{pmatrix}^- + G_k \left(\Delta \mathbf{y}_k - N_k \Delta \mathbf{y}_{k-1} - H_{k-1} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{z}_{k-1} \\ \xi_{k-1} \end{pmatrix}^+ \right) \\
 P_k^+ &= P_k^- G_k H_{k-1} P_{k-1}^+ \begin{pmatrix} A_{k-1}^T & 0 \\ \Gamma_{k-1}^T & M_{k-1}^T \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Bzgl. der Herleitung der Filtergleichungen sei auf [C.K. Chui; G. Chen(1991)] verwiesen.

Anmerkung 8.5 (zu Filter III):

- Für $M_k = 0 \wedge N_k = 0 \forall k \in \mathbb{N}_0$ resultiert Filter I (s. [C.K. Chui; G. Chen(1991)]).
- Die praktische Bedeutung dieser Kalman-Filtervariante liegt in den weitentwickelten zeitdiskreten Methoden der Systemidentifikation. $VAR(q)$ -Prozesse (engl. "vector autoregressive process of order q") erlauben die Modellierung einer breiten Klasse farbiger Prozesse und sind stets auf $VAR(1)$ -Form transformierbar (s. z.B. [J.D. Hamilton(1994)]).
- Eine Transformation von $ARMAX(q,p)$ -Prozessen (engl. "vector autoregressive moving average process with exogeneous input") in die Gestalt eines allgemeinen Zustandsraummodells ist in [C.K. Chui; G. Chen (1991)] beschrieben.
- Ein Kalman-Filter für mittels "shaping filter" modellierten farbigen Zustands- und/oder Beobachtungsrauschprozessen ist in [G. Minkler; J. Minkler(1993)] dargestellt (s.a. [P.S. Maybeck(1994)]).

Filter IV

Voraussetzungsprofil:

Nichtlineares (diskretisiertes, verkürztes) Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{f}_k^*(\mathbf{z}_k) + F_k^*(\mathbf{z}_k) \mathbf{w}_k \\
 \mathbf{y}_k &= \mathbf{g}_k^*(\mathbf{z}_k) + \mathbf{v}_k
 \end{aligned} \quad , \quad k \in \mathbb{N}_0$$

mit

- gegebenen Momenten des stochastischen Anfangswertes des Zustandsvektorkrements $E[\Delta \mathbf{z}_0], Var[\Delta \mathbf{z}_0]$
- gegebenen Funktionen $\mathbf{f}_k^*, F_k^*, \mathbf{g}_k^* \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
- gegebenen Systemeingangsprozeß $\tilde{\mathbf{s}}_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
(für analoge Zerlegung zu Unterabschnitt 10.2.1)
- gegebenen Systemausgangsprozeß $\mathbf{y}_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
(nach analoger Zerlegung zu Unterabschnitt 10.2.1)
- Gaußschen, weißen Systemrauschprozeß $\mathbf{w}_k$, d.h.

$$E[\mathbf{w}_k] = 0 \quad \wedge \quad E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_l^T] = Q_k \delta_{kl} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}_0,$$

mit gegebenen symmetrischen und positiv definiten Autokorrelationsmatrizen $Q_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

- Gaußschen, weißen Beobachtungsrauschprozeß $\mathbf{v}_k$, d.h.

$$E[\mathbf{v}_k] = 0 \quad \wedge \quad E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_l^T] = R_k \delta_{kl} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}_0,$$

mit gegebenen symmetrischen und positiv definiten Autokorrelationsmatrizen $R_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

- unkorrelierten System- und Beobachtungsrauschprozeß, d.h.

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_l^T] = 0 \quad \forall k, l \in \mathbb{N}_0$$

- unkorrelierten Vektorprozessen $\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_l$ und stochastischen Anfangswert, d.h.

$$E[\mathbf{w}_k \Delta \mathbf{z}_0^T] = 0 \quad \wedge \quad E[\mathbf{v}_k \Delta \mathbf{z}_0^T] = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Filtergleichungen:

Initialisierung:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_0^+ &= E[\mathbf{z}_0] \\ P_0^+ &= \text{Var}[\mathbf{z}_0] \end{aligned}$$

Prädiktion (ohne Berücksichtigung von Beobachtungen):

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k^- &= \mathbf{f}_{k-1}^*(\mathbf{z}_{k-1}^+) \\ P_k^- &= \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}^*}{\partial \mathbf{z}_{k-1}}(\mathbf{z}_{k-1}^+) \right) P_{k-1}^+ \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}^*}{\partial \mathbf{z}_{k-1}}(\mathbf{z}_{k-1}^+) \right)^T + F_{k-1}^*(\mathbf{z}_{k-1}^+) Q_{k-1} (F_{k-1}^*(\mathbf{z}_{k-1}^+))^T \end{aligned}$$

Korrektur (durch Berücksichtigung von Beobachtungen):

$$\begin{aligned} G_k &= P_k^- \left(\frac{\partial \mathbf{g}_k^*}{\partial \mathbf{z}_k}(\mathbf{z}_k^-) \right)^T \left[\left(\frac{\partial \mathbf{g}_k^*}{\partial \mathbf{z}_k}(\mathbf{z}_k^-) \right) P_k^- \left(\frac{\partial \mathbf{g}_k^*}{\partial \mathbf{z}_k}(\mathbf{z}_k^-) \right)^T + R_k \right]^{-1} \\ \mathbf{z}_k^+ &= \mathbf{z}_k^- + G_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{g}_k^*(\mathbf{z}_k^-)) \\ P_k^+ &= \left[I - G_k \left(\frac{\partial \mathbf{g}_k^*}{\partial \mathbf{z}_k}(\mathbf{z}_k^-) \right) \right] P_k^- \end{aligned}$$

Bzgl. der Herleitung der Filtergleichungen sei auf [C.K. Chui; G. Chen(1991)] und [V. Krebs(1980)] verwiesen.

Anmerkung 8.6 (zu Filter IV):

- Aufgrund der speziellen Struktur nichtlinearer TNDgIS (s. Anm. 4.3) folgt nach Diskretisierung (s. Abschnitt 8.1) und Zerlegung in ein deterministisches und ein verkürztes (stochastisches) Zustandsraummodell (analog zu Unterabschnitt 10.2.1) letzteres zu

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{f}_k^*(\mathbf{z}_k) + F_k^*(\mathbf{z}_k) \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{g}_k^*(\mathbf{z}_k) + \mathbf{v}_k. \end{aligned}$$

- Filter IV heißt Erweiterter Kalman-Filter (engl. "extended Kalman Filter").
- Zur Modellierung des in der nichtlinearen Vektorfunktion $\mathbf{f}^*$ auftretenden Gravitationsvektors wird ein Gravitationsvektormodell benötigt. Je nach Definitionsgebiet unterscheidet man globale, regionale und lokale Gravitationsmodelle (s. hierzu [H. Denker(1988)], [R. Forsberg(1985)], [R. Forsberg; M.G. Sideris(1989)], [N.C. Thong(1990)], [N.C. Thong(1991)], [N.C. Thong; E.W. Grafarend(1989)], [E. Wildermann(1988)]). Grundsätzlich ist die Häufigkeit der notwendigen Auswertungen vom Auflösungsvermögen abhängig. Zur Untersuchung schwerebedingter Zustandsfehler sei auf [N.C. Thong(1990)], [R. Forsberg(1985)] und [E. Groten; W. Hausch; D. Keller(1985)] verwiesen. Regelmäßige Integration von Beobachtungen externer Sensoren läßt schwerebedingte Fehler nahezu verschwinden.

- Im Falle eines linearen, verkürzten Zustandsraummodells geht Filter IV (Erweiterter Kalman-Filter) in Filter I (klassischer Kalman-Filter) über.

■

Anmerkung 8.7: Die vorgestellten Filtervarianten haben gemeinsam, daß sie von der Verarbeitung aller nicht vorprozessierter Information in einem Filter ausgehen. Solche Filter heißen **zentralisiert**. Kalman-Filtervarianten zur Verarbeitung vorprozessierter Beobachtungen heißen **kaskadiert**, wenn die Ausgangsgrößen als Beobachtungen eines anderen Kalman-Filters eingehen (z.B. vorprozessierte GPS-Position und -Geschwindigkeit als Beobachtungen in Filter für TNS-Zustände) (s. z.B. [M. Napier(1988)]) und **dezentralisiert**, wenn die Daten jedes Navigationssystems separat gefiltert werden und anschließend die Zustände einem Gesamtfiter zur Ermittlung eines „besten“ Zustands zugeführt werden (z.B. separate Filterung der GPS- und TNS-Daten und anschließende Schätzung des Systemzustands aus GPS- und TNS-Zustand) (s. z.B. [M. Wei; K.P. Schwarz(1990)] und [Y. Gao; E.J. Krakiwsky; M.A. Abousalem; J.F. McLellan(1993)]).

Da die **“closed loop architecture”**, d.h. die Rückführung des geschätzten Systemzustands an das TNS für körperfeste (engl. strapdown) Trägheitsnavigationssysteme – im Gegensatz zu horizontierenden Trägheitsnavigationssystemen (s. z.B. [D. Wan; R. Ren; B. Dong(1990)]) – ohne Bedeutung ist, folgt automatisch die Einordnung als **“open loop architecture”**.

■

Anmerkung 8.8: Zur Reduzierung der Sensitivität gegenüber Fehlern in den Ausgangsdaten wurden **robuste** Filtervarianten vorgeschlagen (s. z.B. [P.W. McBurney(1990)], [B. Schaffrin(1991)], [Y.J. Wang; K.K. Kubik(1993)]).

Der **“wave approach”** aus [O. Salychev; A.B. Bykovsky(1991)], [O. Salychev; B. Schaffrin(1992)] und [O. Salychev(1995)] beschreibt die Modell- und Filtererweiterung zur Schätzung polynomialer oder exponentieller Sensorfehleranteile über lokalen Zeitintervallen (ca. 10-20 min) und liegt damit zwischen **“real time”**- und **“post mission”**-Verarbeitung.

In [M. Verhaegen; P. van Dooren(1986)] und [M. Verhaegen; P. van Dooren(1988)] wird für verschiedene Kalman-Filtervarianten die Fehlerfortpflanzung der durch Darstellung in Maschinenzahlen unvermeidlichen Rundungsfehler, von Modellierungs- und von Diskretisierungsfehlern untersucht.

In [V. Krebs(1980)], [L. Schwartz(1970)] und [R.P. Wishner; J.A. Tabaczynski; M. Athans(1969)] werden ferner nichtlineare Filter besprochen.

■

3. Zeitdiskrete Kalman-Glätter

▼ (“fixed-point”-) Glätter I ▼

Voraussetzungsprofil:

s. Filter I (jedoch mit verkürztem Zustandsraummodell)

Glättergleichungen:

Initialisierung:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{z}_{K|K}^{fp} &= \Delta \mathbf{z}_K^+ \\ F_{K|K}^{fp} &= I\end{aligned}$$

Korrektion (durch sukzessive Berücksichtigung zukünftiger Beobachtungen):

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{z}_{K|k+1}^{fp} &= \Delta \mathbf{z}_{K|k}^{fp} + F_{K|k+1}^{fp} (\Delta \mathbf{z}_{k+1}^+ - \Delta \mathbf{z}_{k+1}^-) \\ \text{mit} & \\ F_{K|k+1}^{fp} &= F_{K|k}^{fp} P_k^+ A_k^T (P_{k+1}^-)^{-1}, \quad k = K, K+1, K+2, \dots, N-1\end{aligned}$$

▲

Bzgl. der Herleitung der Glättergleichungen sei auf [G. Minkler; J. Minkler(1993)] verwiesen.

Anmerkung 8.9 (zu Glätter I):

- $\Delta \mathbf{z}_k^+, P_k^+, \Delta \mathbf{z}_k^-, P_k^-$ folgen durch vorherige Schätzung mit Filter I.
- Glätter I ("fixed point smoothing") wird zur Initialisierung des für die Trägheitsnavigation bedeutenderen Glätter III ("fixed lag smoothing") benötigt.

■

("fixed-interval"-) Glätter II

Voraussetzungsprofil:

s. Filter I (jedoch mit verkürztem Zustandsraummodell)

Glättermgleichungen:

Initialisierung:

$$\Delta \mathbf{z}_{N|N}^{fi} = \Delta \mathbf{z}_N^+$$

Korrektur (durch Rückwärtspropagation zukünftiger Beobachtungen):

$$\Delta \mathbf{z}_{k-1|N}^{fi} = \Delta \mathbf{z}_{k-1}^+ + P_{k-1}^+ A_{k-1}^T (P_k^-)^{-1} (\Delta \mathbf{z}_{k|N}^{fi} - \Delta \mathbf{z}_k^-) \quad , \quad k = N, N-1, \dots, 1$$

▲

Bzgl. der Herleitung der Glättermgleichungen sei auf [G. Minkler; J. Minkler(1993)] verwiesen.

Anmerkung 8.10 (zu Glätter II):

- $\Delta \mathbf{z}_k^+, P_k^+, \Delta \mathbf{z}_k^-, P_k^-$ folgen durch vorherige Schätzung mit Filter I.
- Glätter II ist zur "post-mission"-Genauigkeitssteigerung nach "real-time processing" mit Filter I konstruiert.

■

("fixed-lag"-) Glätter III

Voraussetzungsprofil:

s. Filter I (jedoch mit verkürztem Zustandsraummodell)

Glättermgleichungen:

Initialisierung:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{z}_{0|M}^{fl} &= \Delta \mathbf{z}_{0|M}^{fp} \\ F_{0|M}^{fl} &= F_{0|M}^{fp} \end{aligned}$$

Korrektur (durch Berücksichtigung der Beobachtungen in den M kommenden Zeitschritten):

$$\Delta \mathbf{z}_{k|k+M}^{fl} = A_{k-1} \Delta \mathbf{z}_{k-1|k-1+M}^{fl} + Q_{k-1} A_{k-1}^{-T} (P_{k-1}^+)^{-1} (\Delta \mathbf{z}_{k-1|k-1+M}^{fl} - \Delta \mathbf{z}_{k-1}^+) + F_{k|k+M}^{fl} (\Delta \mathbf{z}_{k+M}^+ - \Delta \mathbf{z}_{k+M}^-) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, N-M$$

mit

$$F_{k|k+M}^{fl} = P_k^- A_{k-1}^{-T} (P_{k-1}^+)^{-1} F_{k-1|k-1+M}^{fl} P_{k-1+M}^+ A_{k-1+M}^T (P_{k+M}^-)^{-1}$$

▲

Bzgl. der Herleitung der Glättermgleichungen sei auf [G. Minkler; J. Minkler(1993)] verwiesen.

Anmerkung 8.11 (zu Glätter III):

- $\Delta z_k^+, P_k^+, \Delta z_k^-, P_k^-$ folgen durch vorherige Schätzung mit Filter I und $\Delta z_{0|M}^{fp}, F_{0|M}^{fp}$ durch initiale Schätzung mit Glätter I.
- Bei geeigneter Wahl von M (in Abhängigkeit der Taktrate des TNS) erlaubt Glätter III somit ein "close-to-real-time processing" mit gegenüber Filter I erhöhter Genauigkeit durch eingeschränkte Berücksichtigung zukünftiger Beobachtungen.

■

Anmerkung 8.12:

- **Adaptive** Kalman-Schätzer tragen dem Einfluß unsicherer oder unvollständiger Anfangsdaten Rechnung (s. z.B. [C.F. Ansley; R. Kohn(1985)], [W. Bell; S. Hillmer(1991)], [S.D. Brown; S.C. Ratan(1985)], [G.C. Goodwin; K.S. Sin(1984)], [F.D. Groutage; R.G. Jacquot; R.L. Kirlin(1987)], [F.D. Groutage; R.G. Jacquot; D.E. Smith(1984)], [S. Haykin(1991)], [A.H. Jazwinski(1969)] und [N. Watanabe(1987)]).
- In der Trilogie [T. Kailath(1968)], [T. Kailath; P. Frost(1968)] und [P. Frost; T. Kailath(1971)]

"An Introduction Approach to Least-Squares Estimation

Part I : Linear Filtering in Additive White Noise

Part II : Linear Smoothing in Additive White Noise

Part III : Nonlinear Estimation in White Gaussian Noise"

und dem Übersichtsartikel [T. Kailath(1974)] "A View of Three Decades of Linear Filtering Theory" wird ein guter Überblick über Schätzmethoden vermittelt.

- Im Falle einer Folge korrelierter Beobachtungen sei auch auf die Arbeiten [R.S. Bucy(1967)], [Y. Gao; E.J. Krakiwsky; Z.W. Liu(1992)], [Z.W. Liu; E.J. Krakiwsky; Y. Gao(1992)] und [R.K. Mehra; A.E. Bryson(1968)] verwiesen.
- Ferner sei nicht versäumt mit [R.E. Kalman(1960)], [R.E. Kalman; R.S. Bucy(1961)] und [R.E. Kalman(1963)] auf die Klassiker der Filtertheorie zu verweisen.

■

KAPITEL 9:

Initiale Orientierungsbestimmung

Für die Lösung eines nichtlinearen TNDgLS bzw. zu dessen Linearisierung wird ein Anfangs- bzw. Näherungswert des Zustandsvektors benötigt. Anfangsort und -geschwindigkeit des Triadenzentrums werden als bekannt vorausgesetzt. In Abhängigkeit von der initialen Dynamik unterscheidet man zwei Fälle. Zum einen die autonome initiale Orientierungsbestimmung, bei der das Trägheitsnavigationssystem erdbezogen ruht (lediglich der Anfangsort des Triadenzentrums P_b muß bekannt sein) und damit statische Messungen der von der Akzelerometertriade registrierten Beschleunigung $\mathbf{f}_b$ und der inertialen Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ im Triadenzentrum P_b durchgeführt werden, und die nichtautonome initiale Orientierungsbestimmung (hauptsächlich angewandt in der Flugnavigation), bei der kontinuierliche Beobachtungen von Position und Geschwindigkeit durch externe Sensoren (z.B. GPS) vorliegen und man die Anfangsorientierung zu Beginn einer stationären Navigationsphase ($\mathbf{f}_b$ und $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ sind nahezu konstant) extern näherungsweise bestimmt (z.B. Näherungsorientierung in horizontierter Lage: $\alpha_N = \alpha_R = 0$ und α_K aus der Richtung des Geschwindigkeitsvektors) und auf das Trägheitsnavigationssystem überträgt.

Die Betrachtung eines nichtlinearen TNDgLS zeigt, daß ein Orientierungsfehler unmittelbar zur Fehlinterpretation eines Anteils der spezifischen Trägheits- und Gravitationskräfte als Fahrzeugbeschleunigung führt und damit Positions- und Geschwindigkeitsfehler nach sich zieht.

Wie erhält man jedoch eine möglichst genaue – autonom gewonnene – Anfangsorientierung, um zur (gestützten oder ungestützten) Navigation übergehen zu können? Und wie verbessert man die bei der nichtautonomen Orientierungsbestimmung zu Beginn einer stationären Navigationsphase übertragene Anfangsorientierung?

Im 1. Abschnitt dieses Kapitels wird die autonome (globale) Bestimmung einer Näherungsorientierung eines Trägheitsnavigationssystem für Anfangspositionen in hinreichend großem Abstand von der Rotationsachse der Erde beschrieben (s.a. [J.C. Hung; H.V. White(1975)] und [M.D. Shuster; S.D. Oh(1981)]). Der 2. Abschnitt enthält einen kurzen Abriss über das notwendige Vorgehen für ein "in-flight alignment". In polnahen Regionen ist die nichtautonome Orientierungsbestimmung durch externe Navigationssensoren (z.B. "multi-antenna GPS"), aufgrund der (beinahe) linearen Abhängigkeit der bei der autonomen Orientierungsbestimmung verwendeten Richtungsbeobachtungen, sogar zwingend erforderlich.

Anmerkung 9.1: In der Literatur werden oftmals die Begriffe Anfangsgroborientierung (engl. "coarse alignment") und Anfangsfeinorientierung (engl. "fine alignment") verwendet (s. z.B. [O. Heinze(1996)], [D. Keller(1991)], [Z. Liu (1992)] und [R.V.C. Wong(1988)]), wobei ersteres Verfahren der Bestimmung einer groben Näherungsorientierung und letzteres der Verbesserung der Näherungsorientierung durch einen (möglichst) kontinuierlich durchgeführten Positions- und Nullgeschwindigkeitsabgleich (engl. "CUPT,ZUPT") dient. ■

1. Autonome initiale Orientierungsbestimmung

Der autonomen initialen Orientierungsbestimmung entspricht die globale Lösung eines nichtlinearen TNDgLS nach der Anfangsorientierung unter Berücksichtigung aller dabei zur Verfügung stehender Vorinformation:

- erdfeste (Näherungs-)Koordinaten $\tilde{\mathbf{x}}_e(P_b(t_0))$ des Triadenzentrums P_b während der stationären Anfangsorientierungsphase, d.h. $\tilde{\mathbf{v}}_e(P_b(t_0)) = 0$.
- Gravitationsvektor $\mathbf{g}_h$ im Triadenzentrums P_b während der stationären Anfangsorientierungsphase.

Setzen wir die (zeitinvariante) Anfangsposition und den zugehörigen Gravitationsbeschleunigungsvektor ins nicht-lineare $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgLS nach Satz 4.2 ein, so folgt¹⁾:

$$R_{eb}\mathbf{f}_b - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{x}_e) + R_{eh}\mathbf{g}_h = 0 \quad (9.1)$$

$$\tilde{q}_{eb}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}\tilde{q}_{eb} = 0 \quad (9.2)$$

bzw.

¹⁾Unter Vernachlässigung der Euler-Beschleunigung.

$$R_{eb} \mathbf{f}_b = -R_{eh} \mathbf{g}_h + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{x}_e) =: -R_{eh} \boldsymbol{\gamma}_h \quad (9.3)$$

$$R_{eb} \boldsymbol{\omega}_{ib} = \boldsymbol{\omega}_{ie} \quad (9.4)$$

Unter der Annahme der initialen linearen Unabhängigkeit des Vektors der inertialen Winkelgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ und des Vektors der registrierten Beschleunigungen $\mathbf{f}_b$ – dies entspricht der Forderung nach einer **polfern** durchgeführten autonomen Orientierungsbestimmung – folgt eine dritte linear unabhängige Vektorgleichung zu

$$R_{eb} (\mathbf{f}_b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}) = \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (R_{eh} \boldsymbol{\gamma}_h). \quad (9.5)$$

Die Beziehungen (9.3), (9.4) und (9.5) hätten sich natürlich auch intuitiv formulieren lassen. Die kurze Herleitung über Satz 4.2 macht jedoch die wesentliche der autonomen Orientierungsbestimmung zugrundeliegenden Annahme deutlich, nämlich die Befriedigung des nichtlinearen (deterministischen) TNDgIS von Anfangswert und Systemeingang.

Durch Zusammenfassung der drei Vektorgleichungen (9.3), (9.4) und (9.5) zu einer Matrixgleichung folgt

$$R_{eb} (\mathbf{f}_b, \boldsymbol{\omega}_{ib}, \mathbf{f}_b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}) = (-R_{eh} \boldsymbol{\gamma}_h, \boldsymbol{\omega}_{ie}, \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (R_{eh} \boldsymbol{\gamma}_h)) \quad (9.6)$$

und daraus durch Anwendung des vec-Operators nach Satz B.1

$$\left[(\mathbf{f}_b, \boldsymbol{\omega}_{ib}, \mathbf{f}_b \times \boldsymbol{\omega}_{ib})^T \otimes I_3 \right] \text{vec}(R_{eb}) = \begin{pmatrix} -R_{eh} \boldsymbol{\gamma}_h \\ \boldsymbol{\omega}_{ie} \\ \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (R_{eh} \boldsymbol{\gamma}_h) \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

Aufgrund diverser Fehlereinflüsse (z.B. durch Störungen des Trägheitsnavigationssystem während der als stationär angenommenen Anfangsorientierungsphase, Sensorfehler, Positionsfehler, Fehler des Gravitationsmodells) beschreibt die Lösung von (9.6) bzw. (9.7) keine reine Rotation. Zur Eliminierung von Betragsinkonsistenzen „normieren“ wir durch Projektion auf die Sphäre S_1^2 die Gleichungen (9.3), (9.4) und (9.5) und erhalten unter den zusätzlichen Annahmen $\|\mathbf{f}_b\| = \|\boldsymbol{\gamma}_h\|$ und $\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\| = \boldsymbol{\omega}_{ie}$ schließlich

$$R_{eb} \frac{\mathbf{f}_b}{\|\mathbf{f}_b\|} = -R_{eh} \frac{\boldsymbol{\gamma}_h}{\|\boldsymbol{\gamma}_h\|} \quad (9.8)$$

$$R_{eb} \frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}}{\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|} = \frac{\boldsymbol{\omega}_{ie}}{\boldsymbol{\omega}_{ie}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

$$R_{eb} \frac{\frac{\mathbf{f}_b}{\|\mathbf{f}_b\|} \times \frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}}{\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|}}{\left\| \frac{\mathbf{f}_b}{\|\mathbf{f}_b\|} \times \frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}}{\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|} \right\|} = \frac{\frac{\boldsymbol{\omega}_{ie}}{\boldsymbol{\omega}_{ie}} \times \left(R_{eh} \frac{\boldsymbol{\gamma}_h}{\|\boldsymbol{\gamma}_h\|} \right)}{\left\| \frac{\boldsymbol{\omega}_{ie}}{\boldsymbol{\omega}_{ie}} \times \left(R_{eh} \frac{\boldsymbol{\gamma}_h}{\|\boldsymbol{\gamma}_h\|} \right) \right\|}. \quad (9.10)$$

Durch Zusammenfassen der drei Vektorgleichungen zu einer Matrixgleichung folgt wiederum

$$R_{eb} \left(\frac{\mathbf{f}_b}{\|\mathbf{f}_b\|}, \frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}}{\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|}, \frac{\frac{\mathbf{f}_b}{\|\mathbf{f}_b\|} \times \frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}}{\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|}}{\left\| \frac{\mathbf{f}_b}{\|\mathbf{f}_b\|} \times \frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}}{\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|} \right\|} \right) = \left(-R_{eh} \frac{\boldsymbol{\gamma}_h}{\|\boldsymbol{\gamma}_h\|}, \frac{\boldsymbol{\omega}_{ie}}{\boldsymbol{\omega}_{ie}}, \frac{\frac{\boldsymbol{\omega}_{ie}}{\boldsymbol{\omega}_{ie}} \times \left(R_{eh} \frac{\boldsymbol{\gamma}_h}{\|\boldsymbol{\gamma}_h\|} \right)}{\left\| \frac{\boldsymbol{\omega}_{ie}}{\boldsymbol{\omega}_{ie}} \times \left(R_{eh} \frac{\boldsymbol{\gamma}_h}{\|\boldsymbol{\gamma}_h\|} \right) \right\|} \right) \quad (9.11)$$

und daraus nach Anwendung des vec-Operators nach Satz B.1

$$\left[\left(\frac{\mathbf{f}_b}{\|\mathbf{f}_b\|}, \frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}}{\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|}, \frac{\frac{\mathbf{f}_b}{\|\mathbf{f}_b\|} \times \frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}}{\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|}}{\left\| \frac{\mathbf{f}_b}{\|\mathbf{f}_b\|} \times \frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}}{\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|} \right\|} \right)^T \otimes I_3 \right] \text{vec}(R_{eb}) = \begin{pmatrix} -R_{eh} \frac{\boldsymbol{\gamma}_h}{\|\boldsymbol{\gamma}_h\|} \\ \frac{\boldsymbol{\omega}_{ie}}{\boldsymbol{\omega}_{ie}} \\ \frac{\frac{\boldsymbol{\omega}_{ie}}{\boldsymbol{\omega}_{ie}} \times \left(R_{eh} \frac{\boldsymbol{\gamma}_h}{\|\boldsymbol{\gamma}_h\|} \right)}{\left\| \frac{\boldsymbol{\omega}_{ie}}{\boldsymbol{\omega}_{ie}} \times \left(R_{eh} \frac{\boldsymbol{\gamma}_h}{\|\boldsymbol{\gamma}_h\|} \right) \right\|} \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

Beide Darstellungen repräsentieren wiederum neun lineare, algebraische Gleichungen für die neun unbekannten Komponenten von R_{eb} . Natürlich sind die neun Komponenten von R_{eb} nicht voneinander unabhängig. Inkonsistente Richtungsbeobachtungen im Sinne von

$$\nexists \left(\frac{\mathbf{f}_b}{\|\mathbf{f}_b\|}, \frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}}{\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|} \right) \nexists \left(-R_{eh} \frac{\boldsymbol{\gamma}_h}{\|\boldsymbol{\gamma}_h\|}, \frac{\boldsymbol{\omega}_{ie}}{\boldsymbol{\omega}_{ie}} \right) \quad (9.13)$$

stören die orthonormale Struktur der Lösung R_{eb} , d.h. $R_{eb} \notin SO(3)$, und dazu orthogonale Fehler den Repräsentant R_{eb} der Drehmatrix $R_{eb} \in SO(3)$.

Aufgrund der stochastischen Natur der Sensordaten ist eine arithmetische Mittelung bzw. (im Falle einer Sensordrift) eine lineare Regression zur Verwendung in Gleichung (9.6) bzw. (9.11) notwendig. Die autonome initiale Orientierungsbestimmung nimmt etwa 10 bis 45 min (je nach Genauigkeitsanforderung) in Anspruch.

Mit den in Abschnitt 2.2 beschriebenen Umkehrungsgleichungen lassen sich aus R_{eb} dann die zugehörigen Orientierungsparameter berechnen.

Anmerkung 9.2: Obige Beschreibung der autonomen initialen Orientierungsbestimmung setzt Kreisel und Akzelerometer vergleichbarer Genauigkeitsklassen und die lineare Unabhängigkeit der Sensormeßdatenvektoren der beiden Triaden voraus. Ist dies nicht der Fall, so stellt sich unmittelbar die Frage: Kann die autonome Orientierungsbestimmung auch nur mit Akzelerometern oder nur mit Kreiseln durchgeführt werden?

Die Antwort auf diese Frage ist generell zu verneinen, da – gegeben $\mathbf{x}_a$ und $\mathbf{x}_b$, $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b \in S_1^2$ – aus

$$R_{ba}\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b$$

R_{ba} , und damit letztendlich die Orientierung des Trägheitsnavigationssystem, nur bis auf eine Drehung um den aus zwei Koordinatensystemen beobachteten Richtungsvektor bestimmt ist (s. [K. Kanatani(1990)]). Allerdings ist – wie oben diskutiert – die Beobachtung zweier linear unabhängiger Sensordatenvektoren hinreichend zur Eliminierung des bei der Verwendung nur einer Triade verbleibenden Freiheitsgrades und damit auch zur eindeutigen Bestimmung der Anfangsorientierung. ■

Anmerkung 9.3: Zur Wahrung der orthonormalen Struktur von R_{eb} empfiehlt sich eine Orthonormalisierung der Richtungsbeobachtungen nach Gram-Schmidt. Aufgrund des schlechten Signal-Rausch-Verhältnisses in den Kreiseln während der autonomen Orientierungsbestimmung ist es vorteilhaft, lediglich den für die Bestimmung des Azimuts entscheidenden orthogonalen Anteil von $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ zu $\mathbf{f}_b$, d.h.

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}}{\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|} - \left\langle \frac{\boldsymbol{\omega}_{ib}}{\|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|} \mid \frac{\mathbf{f}_b}{\|\mathbf{f}_b\|} \right\rangle \frac{\mathbf{f}_b}{\|\mathbf{f}_b\|},$$

zu verwenden. ■

Anmerkung 9.4: Liegt eine akzeptable Näherung der Anfangsorientierung vor, so kann parallel zur autonomen initialen Orientierungsbestimmung mit der Initialisierung des Kalman-Filters begonnen werden. Die Initialisierungsphase dauert an, bis alle Zustände und (Ko-)Varianzen stationäre Werte angenommen haben. Durch Streichung der Beobachtungen kann dann zur ungestützten Trägheitsnavigation übergegangen werden. ■

2. Nichtautonome initiale Orientierungsbestimmung

Während der Navigation registriert die Kreiseltriade nach

$$\boldsymbol{\omega}_{ib} = \boldsymbol{\omega}_{eb} + R_{be}\boldsymbol{\omega}_{ie} \quad (9.14)$$

nicht nur die Erdrotation, da dann $R_{be} = R_{be}(t)$ bzw. $\boldsymbol{\omega}_{eb} \neq 0$ ist. Zudem ist aufgrund von Motorvibrationen und Turbulenzen das Signal stark verrauscht. Selbst in stationären Navigationsphasen ist die Bestimmung des Kurswinkels aus den Kreiselbeobachtungen aufgrund allgegenwärtiger Störungen unmöglich.

Beim “in-flight alignment” bestimmt man die Anfangsorientierung zu Beginn einer stationären Navigationsphase ($\mathbf{f}_b$, $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ und $\mathbf{v}_e$ sind hier näherungsweise konstant) extern näherungsweise. Beispielsweise sind in einer näherungsweise horizontalen Lage des Fahrzeugs der Nick- und Rollwinkel identisch Null und der Kurswinkel kann aus der Richtung des Geschwindigkeitsvektors grob geschätzt werden. Unter der getroffenen Annahme einer stationären Navigationsphase kann dann durch arithmetische Mittelung der Sensordaten eine Steigerung der Genauigkeit der initialen Näherungsorientierung erzielt werden.

Natürlich ist aufgrund der unvermeidlichen Fehlereinflüsse diese Näherungsorientierung i.a. noch nicht genau genug, um bereits mit freier Navigation beginnen zu können. Dennoch liegt mit der Näherungsorientierung ein vollständiger Anfangszustandsvektor (mit genauem Anfangsort, genauer Anfangsgeschwindigkeit und ungenauer Anfangsorientierung) vor, an welchem das nichtlineare TNDgIS linearisiert werden kann. Zur Verbesserung der Anfangsorientierung gehen wir mit dem nichtlinearen und linearisierten (diskretisierten) TNDgIS und den

Beobachtungen zeitinvarier Anfangsposition und -geschwindigkeit in den erweiterten Kalman-Filter, führen damit – in Abhängigkeit der Kovarianzmatrizen von Zustands- und Beobachtungsvektor – die Differenz zwischen geschätzten und beobachteten Zustandsvektor auf eine fehlerhafte (Anfangs-)Orientierung zurück und erhalten nach einiger Zeit eine stationäre Schätzung für die (Anfangs-)Orientierung aus dem Kalman-Filter.

Die Beobachtbarkeitsanalyse ergab die (starke) Beobachtbarkeit von zwei und die (schwache) Beobachtbarkeit der dritten Orientierungskomponente mittels Positions- und Geschwindigkeitsbeobachtungen (z.B. mit GPS). Führt man jedoch Manöver durch, welche die Richtung von $\mathbf{f}_b$ bzgl. der Sensorachsen verändern, so ist die zuvor nur schwach beobachtbare Orientierungskomponente mittels Positions- und Geschwindigkeitsbeobachtungen vollständig beobachtbar und schließlich eine Verbesserung aller Orientierungskomponenten erreicht. Das "weave manoeuvre" genannte Manöver setzt natürlich deutliche Orientierungsänderungen voraus und kann somit nicht überall eingesetzt werden.

KAPITEL 10:

Systemsimulation

Bislang wurden zahlreiche Modellvarianten vorgestellt und deren Eigenschaften theoretisch untersucht. Dabei wurden Diskretisierungs- und Linearisierungsfehler eingehend besprochen.

Eine zentrale Größe zur Beurteilung der Güte eines Trägheitsnavigationssystems ist die Systemauflösung genannte Auflösung der Sensordaten nach der AD-Wandlung. Diese bedingt eine Quantelung der verfügbaren Sensordaten. Neben Diskretisierung und Linearisierung ist die Quantelung die dritte bedeutende Fehlerquelle. Natürlich können modelltheoretische Anstrengungen zur Verringerung einer Fehlerquelle nur, wenn der dadurch reduzierte Fehler das Gesamtfehlerbudget dominiert. Für welche Systemauflösungen lohnt somit überhaupt eine rechenaufwendige Verringerung von Diskretisierungsfehler (durch Verwendung eines Integrationsverfahrens höherer Ordnung) oder Linearisierungsfehler (durch Verwendung nichtlinearer Modellgleichungen)? Die Untersuchung einer derart gelagerten quantitativen Fragestellung setzt die strikte Separier- und Steuerbarkeit einzelner Fehlerquellen und das Vorliegen einer hochgenauen Referenzlösung voraus. Dies vermag nur eine Systemsimulation zu leisten.

Dabei soll nicht versucht werden das Meßprinzip der inertialen Sensoren zu modellieren und unkorrigierte Sensorfehler im Sinne von Nichtorthogonalität, Skalierung, etc. zu untersuchen (s. [D. Schröder(1992)]). Vielmehr soll das nichtlineare TNDgLS bei analytisch gegebener Trajektorie nach den Sensordaten (ω_{ib} und f_b) analytisch aufgelöst werden, wodurch kontinuierlich die Beobachtungen fehlerfrei arbeitender inertialer Sensoren zur Verfügung stehen. Die Untersuchung des Einflusses von Diskretisierungs- und Linearisierungsfehlern kann dann auf Basis dieser Referenzlösung für Trägheitsnavigationssysteme unterschiedlicher Auflösung erfolgen.

1. Referenzlösung und Sensordaten

Den Ausgangspunkt bildet das gewöhnliche, nichtlineare, homogene $((\lambda, \varphi, h), \mathbf{v}_h, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgLS 1. Ordnung aus Satz 4.2. Lösen wir dieses nach den Sensordaten auf, so resultieren nach einfachen Umformungen die folgenden Beziehungen:

$$\omega_{ib} = \omega_{hb} + R_{bh}\omega_{ih} \quad (10.1)$$

$$\mathbf{f}_b = R_{bh}(\dot{\mathbf{v}}_h - (\omega_{eh} - 2\omega_{ih}) \times \mathbf{v}_h + R_{he}(\dot{\omega}_{ie} \times \mathbf{x}_e) - \gamma_h) \quad (10.2)$$

Durch zeitlich polynomiale Ansätze für Position und Orientierung

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda(t), & \varphi &= \varphi(t), & h &= h(t), \\ \alpha_N &= \alpha_N(t), & \alpha_R &= \alpha_R(t), & \alpha_K &= \alpha_K(t) \end{aligned} \quad (10.3)$$

sind die rechten Seiten der obigen Beziehungen zur Berechnung der Sensordaten eindeutig bestimmt. Um einen stetigen Beschleunigungsvektor $\mathbf{f}_b(t)$ und einen stetigen Winkelgeschwindigkeitsvektor $\omega_{ib}(t)$ im Definitionsgebiet zu erhalten, ist auf die C^2 -Stetigkeit des polynomialen Positions- und die C^1 -Stetigkeit des polynomialen Orientierungsansatzes zu achten. Speziell der Übergang von stationären Anfangszuständen bzw. zu stationären Endzuständen erfordert deshalb den Einsatz von quintischen Splines für die Position und von kubischen Splines für die Orientierung.

Abbildung 10.1 zeigt die der Systemsimulation zugrundeliegende Trajektorie und Abbildung 10.2 die zugehörigen Sensordaten. Die Trajektorie weist Spitzengeschwindigkeiten von etwa 900 km/h und damit eine hohe absolute Dynamik auf. Da jedoch keine kurzzeitigen Variationen auftreten, ist die sich in den Sensordaten widerspiegelnde relative Dynamik eher gering.

Es wurde nicht angestrebt einen realen Flug zu simulieren. Entsprechend wurden Ost-, Nordgeschwindigkeit und Kurswinkel, Vertikalgeschwindigkeit und Nickwinkel, sowie Kurswinkeländerung und Rollwinkel nicht gekoppelt, sondern unter Beachtung der zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade unabhängig voneinander festgelegt.

2. Navigationslösung

Auf Basis der in Abbildung 10.2 visualisierten Sensordaten und des (perfekten) Anfangszustandsvektors kann nun eine Navigationslösung generiert werden. Die Abweichung der Navigations- von der Referenzlösung erlaubt Rückschlüsse auf die Auswirkung des durch Abweichung vom $((\lambda, \varphi, h), \mathbf{v}_h, \tilde{q}_{eb})$ -TNDgLS von Satz 4.2 eingeführten Modellfehler.

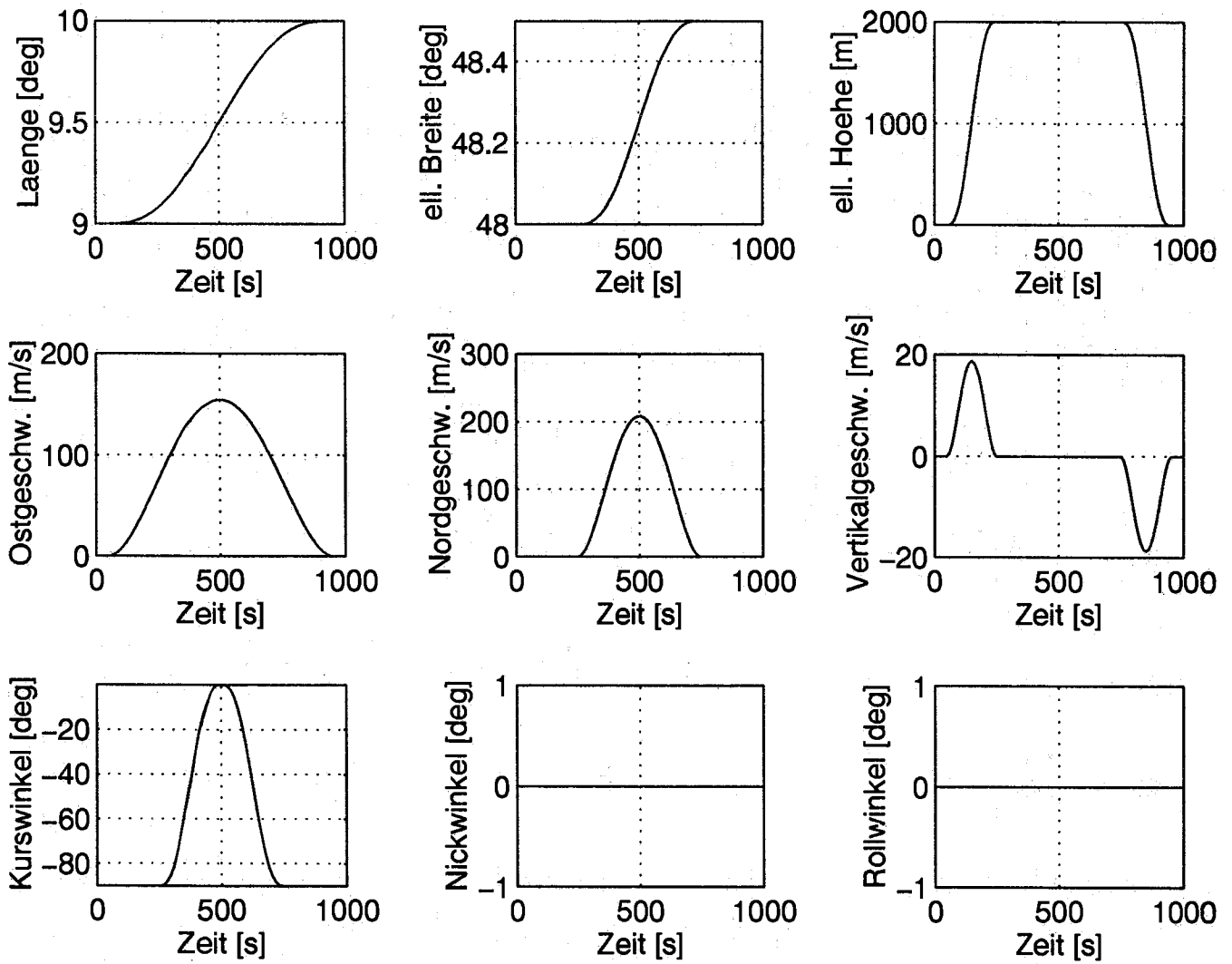


Abbildung 10.1: Der Systemsimulation zugrundeliegende Trajektorie.

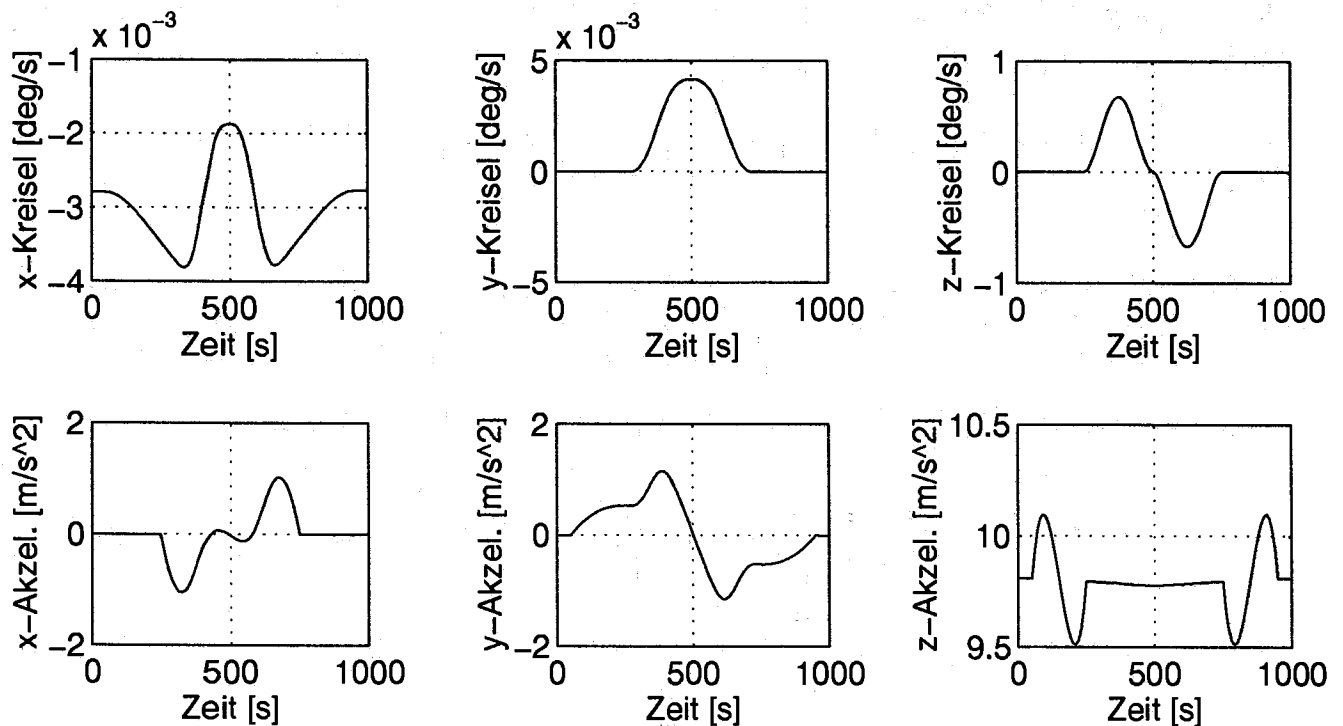


Abbildung 10.2: Sensordaten zur Trajektorie von Abbildung 10.1.

Tabelle 10.1: Finale Zustandsfehler für simulierte Trajektorie in Abhängigkeit von Taktung und Diskretisierungsordnung
(nichtlineares Modell, perfekter Anfangszustand, deterministische Sensordaten, hohe Auflösung)

	vorwärtiger Differenzenquotient (1. Ordnung)	zentraler Differenzenquotient (2. Ordnung)
50 Hz	$\Delta\lambda = +0^\circ0'0.8207''$ $\Delta\varphi = -0^\circ0'0.1936''$ $\Delta h = +0.363m$ $\Delta v_o = +0.028168 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.011708 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.001816 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ0'0.734''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ0'0.178''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ0'0.665''$	$\Delta\lambda = +0^\circ0'0.0482''$ $\Delta\varphi = -0^\circ0'0.0019''$ $\Delta h = -0.013m$ $\Delta v_o = +0.000899 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.000606 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.000006 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ0'0.211''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ0'0.007''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ0'0.083''$
100 Hz	$\Delta\lambda = +0^\circ0'0.4331''$ $\Delta\varphi = -0^\circ0'0.0989''$ $\Delta h = +0.173m$ $\Delta v_o = +0.014530 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.006168 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.000907 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ0'0.477''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ0'0.079''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ0'0.380''$	$\Delta\lambda = +0^\circ0'0.0455''$ $\Delta\varphi = -0^\circ0'0.0041''$ $\Delta h = -0.015m$ $\Delta v_o = +0.001010 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.000512 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.000004 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ0'0.221''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ0'0.017''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ0'0.095''$
200 Hz	$\Delta\lambda = +0^\circ0'0.2395''$ $\Delta\varphi = -0^\circ0'0.0509''$ $\Delta h = +0.079m$ $\Delta v_o = +0.007704 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.003321 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.000454 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ0'0.349''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ0'0.032''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ0'0.245''$	$\Delta\lambda = +0^\circ0'0.0455''$ $\Delta\varphi = -0^\circ0'0.0030''$ $\Delta h = -0.015m$ $\Delta v_o = +0.000952 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.000554 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.000003 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ0'0.221''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ0'0.013''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ0'0.110''$
400 Hz	$\Delta\lambda = +0^\circ0'0.1427''$ $\Delta\varphi = -0^\circ0'0.0272''$ $\Delta h = +0.032m$ $\Delta v_o = +0.004307 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.001934 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.000227 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ0'0.284''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ0'0.008''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ0'0.173''$	$\Delta\lambda = +0^\circ0'0.0460''$ $\Delta\varphi = -0^\circ0'0.0036''$ $\Delta h = -0.015m$ $\Delta v_o = +0.000917 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.000511 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.000002 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ0'0.220''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ0'0.017''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ0'0.101''$

Tabelle 10.2: Finale Zustandsfehler für simulierte Trajektorie in Abhängigkeit von Taktung und Linearisierung
(perfekter Anfangszustand, deterministische Sensordaten, vorwärtiger Differenzenquotient, hohe Auflösung)

	nichtlineares Modell	linearisiertes Modell
50 Hz	$\Delta\lambda = +0^\circ0'0.8207''$ $\Delta\varphi = -0^\circ0'0.1936''$ $\Delta h = +0.363m$ $\Delta v_o = +0.028168 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.011708 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.001816 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ0'0.734''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ0'0.178''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ0'0.665''$	$\Delta\lambda = +0^\circ0'0.6421''$ $\Delta\varphi = -0^\circ0'0.5820''$ $\Delta h = +201.251m$ $\Delta v_o = +0.011849 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.034714 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.805248 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ0'0.569''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ0'1.342''$ $\Delta\alpha_K = +0^\circ0'17.923''$
100 Hz	$\Delta\lambda = +0^\circ0'0.4331''$ $\Delta\varphi = -0^\circ0'0.0989''$ $\Delta h = +0.173m$ $\Delta v_o = +0.014530 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.006168 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.000907 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ0'0.477''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ0'0.079''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ0'0.380''$	$\Delta\lambda = +0^\circ0'0.3437''$ $\Delta\varphi = -0^\circ0'0.2934''$ $\Delta h = +100.640m$ $\Delta v_o = +0.006380 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.017686 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.402652 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ0'0.394''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ0'0.660''$ $\Delta\alpha_K = +0^\circ0'8.915''$
200 Hz	$\Delta\lambda = +0^\circ0'0.2395''$ $\Delta\varphi = -0^\circ0'0.0509''$ $\Delta h = +0.079m$ $\Delta v_o = +0.007704 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.003321 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.000454 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ0'0.349''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ0'0.032''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ0'0.245''$	$\Delta\lambda = +0^\circ0'0.1941''$ $\Delta\varphi = -0^\circ0'0.1490''$ $\Delta h = +50.309m$ $\Delta v_o = +0.003670 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.009136 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.201330 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ0'0.306''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ0'0.320''$ $\Delta\alpha_K = +0^\circ0'4.404''$
400 Hz	$\Delta\lambda = +0^\circ0'0.1427''$ $\Delta\varphi = -0^\circ0'0.0272''$ $\Delta h = +0.032m$ $\Delta v_o = +0.004307 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.001934 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.000227 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ0'0.284''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ0'0.008''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ0'0.173''$	$\Delta\lambda = +0^\circ0'0.1196''$ $\Delta\varphi = -0^\circ0'0.0816''$ $\Delta h = +25.194m$ $\Delta v_o = +0.002479 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.005322 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.100755 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ0'0.255''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ0'0.130''$ $\Delta\alpha_K = +0^\circ0'2.156''$

Tabelle 10.3: Finale Zustandsfehler für simulierte Trajektorie in Abhängigkeit von Taktung und Systemauflösung (nichtlineares Modell, perfekter Anfangszustand, deterministische Sensordaten, vorwärtiger Differenzenquotient)

	niedrige Systemauflösung ($\dot{h}_{accel.} = 0.002 \frac{m}{s^2}$ $\dot{h}_{gyros} = 0.000085 \frac{rad}{s}$)	mittlere Systemauflösung ($\dot{h}_{accel.} = 0.00004 \frac{m}{s^2}$ $\dot{h}_{gyros} = 0.000002 \frac{rad}{s}$)	hohe Systemauflösung ($\dot{h}_{accel.} = 0.000001 \frac{m}{s^2}$ $\dot{h}_{gyros} = 0.00000005 \frac{rad}{s}$)
50 Hz	$\Delta\lambda = +0^\circ 32' 19.2038''$ $\Delta\varphi = +0^\circ 0' 10.4579''$ $\Delta h = +640.278m$ $\Delta v_o = +106.349529 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -3.866522 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +4.958787 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = -1^\circ 5' 23.081''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ 0' 29.173''$ $\Delta\alpha_K = +0^\circ 21' 11.957''$	$\Delta\lambda = -0^\circ 0' 10.1575''$ $\Delta\varphi = -0^\circ 0' 1.4323''$ $\Delta h = -6.933m$ $\Delta v_o = -0.459335 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.147469 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = -0.033543 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ 0' 14.013''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ 0' 5.505''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ 0' 4.855''$	$\Delta\lambda = +0^\circ 0' 0.8207''$ $\Delta\varphi = -0^\circ 0' 0.1936''$ $\Delta h = +0.363m$ $\Delta v_o = +0.028168 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.011708 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.001816 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ 0' 0.734''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ 0' 0.178''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ 0' 0.665''$
100 Hz	$\Delta\lambda = +0^\circ 32' 18.7860''$ $\Delta\varphi = -0^\circ 0' 10.3318''$ $\Delta h = +640.330m$ $\Delta v_o = +106.331775 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -3.857812 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +4.958007 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = -1^\circ 5' 23.235''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ 0' 29.128''$ $\Delta\alpha_K = +0^\circ 21' 12.089''$	$\Delta\lambda = -0^\circ 0' 10.5507''$ $\Delta\varphi = -0^\circ 0' 1.3354''$ $\Delta h = -7.116m$ $\Delta v_o = -0.473384 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.141559 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = -0.034474 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ 0' 13.763''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ 0' 5.593''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ 0' 4.778''$	$\Delta\lambda = +0^\circ 0' 0.4331''$ $\Delta\varphi = -0^\circ 0' 0.0989''$ $\Delta h = +0.173m$ $\Delta v_o = +0.014530 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.006168 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.000907 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ 0' 0.477''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ 0' 0.079''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ 0' 0.380''$
200 Hz	$\Delta\lambda = +0^\circ 32' 18.6404''$ $\Delta\varphi = -0^\circ 0' 10.2942''$ $\Delta h = +640.370m$ $\Delta v_o = +106.327419 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -3.856066 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +4.957933 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = -1^\circ 5' 23.393''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ 0' 29.086''$ $\Delta\alpha_K = +0^\circ 21' 14.389''$	$\Delta\lambda = -0^\circ 0' 10.7475''$ $\Delta\varphi = -0^\circ 0' 1.2883''$ $\Delta h = -7.224m$ $\Delta v_o = -0.480488 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.138783 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = -0.034946 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ 0' 13.640''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ 0' 5.646''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ 0' 4.747''$	$\Delta\lambda = +0^\circ 0' 0.2395''$ $\Delta\varphi = -0^\circ 0' 0.0509''$ $\Delta h = +0.079m$ $\Delta v_o = +0.007704 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.003321 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.000454 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ 0' 0.349''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ 0' 0.032''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ 0' 0.245''$
400 Hz	$\Delta\lambda = +0^\circ 32' 18.5570''$ $\Delta\varphi = -0^\circ 0' 10.2739''$ $\Delta h = +640.287m$ $\Delta v_o = +106.324825 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -3.855200 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +4.957611 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = -1^\circ 5' 23.480''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ 0' 29.048''$ $\Delta\alpha_K = +0^\circ 21' 14.847''$	$\Delta\lambda = -0^\circ 0' 10.8433''$ $\Delta\varphi = -0^\circ 0' 1.2643''$ $\Delta h = -7.271m$ $\Delta v_o = -0.483780 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.137394 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = -0.035169 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ 0' 13.575''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ 0' 5.662''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ 0' 4.449''$	$\Delta\lambda = +0^\circ 0' 0.1427''$ $\Delta\varphi = -0^\circ 0' 0.0272''$ $\Delta h = +0.032m$ $\Delta v_o = +0.004307 \frac{m}{s}$ $\Delta v_n = -0.001934 \frac{m}{s}$ $\Delta v_v = +0.000227 \frac{m}{s}$ $\Delta\alpha_N = +0^\circ 0' 0.284''$ $\Delta\alpha_R = +0^\circ 0' 0.008''$ $\Delta\alpha_K = -0^\circ 0' 0.173''$

Zunächst sei angemerkt, daß die im weiteren geschilderten Ergebnisse stark von der, der Systemsimulation zugrundeliegenden, Trajektorie abhängen. Tabelle 12.1 zeigt die finalen Zustandsfehler bei Approximation des Differentialquotienten des Zustandsvektors durch einen Differenzenquotienten 1. bzw. 2. Ordnung (s. Abschnitt 8.1)

$$\dot{z}(t) = \lim_{t^* \rightarrow t} \frac{z(t^*) - z(t)}{t^* - t} = \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) = \frac{z(t + \Delta t) - z(t - \Delta t)}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad (10.4)$$

welche in Abhängigkeit von Diskretisierungsordnung und Zeitschritt angegeben sind. Ein Blick in die Tabelle zeigt, daß im Falle der Verwendung des zentralen Differenzenquotienten unabhängig vom Zeitschritt eine finale Positionierungsgenauigkeit von etwa 1 m erzielt wurde. Dieser steht bei 50 Hz Systemtakt, d.h. $\Delta t = 0.02s$, bei Verwendung des vorwärtigen Differenzenquotienten ein finaler Positionierungsfehler von etwa 20 m gegenüber. Die Unabhängigkeit vom Zeitschritt gibt die Vernachlässigbarkeit des Diskretisierungs- bzgl. des Systemauflösungsfehlers Ausdruck.

Tabelle 12.2 zeigt den Einfluß des Linearisierungsfehlers auf den finalen Zustandsfehler. Da beim Übergang des TNDgLS in ein Differenzengleichungssystem nicht nur der Differentialquotient des Zustandsvektors durch einen Differenzenquotienten ersetzt, sondern die Gleichung auch mit Δt multipliziert wird (s. Abschnitt 8.1), ist die lineare Abhängigkeit des finalen Zustandsfehlers vom Zeitschritt, bzw. der Systemtaktung, leicht zu erklären. In Lagekoordinaten und Horizontalgeschwindigkeitskomponenten resultiert kein bedeutender Unterschied zwischen nichtlinearem und linearisiertem Modell. In der vertikalen Komponente wirkt sich indes die in Kapitel 6 bewiesene Instabilität des linearisierten Modells voll aus. Auch der finale Kurswinkel wird durch die Linearisierung stark korumpiert.

Für alle bislang diskutierten Fälle haben wir eine hohe Systemauflösung unterstellt. Trägheitsnavigationssysteme dieser Genauigkeitsklasse sind jedoch einerseits extrem teuer und andererseits aufgrund ihrer militärischen Relevanz i.a. nicht frei verfügbar. Welcher Genauigkeitsverlust geht jedoch mit der Verwendung niedrigerer auflösender und damit billigerer Systeme einher?

Tabelle 12.3 zeigt die Dominanz der durch niedrige und mittlere Systemauflösung bedingten finalen Zustandsfehler gegenüber der Halbierung des Zeitschritts. Ferner erweist sich das simulierte Trägheitsnavigationssystem niedriger Auflösung aufgrund eines finalen Lagekoordinatenfehlers von etwa 45 km (bei etwa 136 km Bogenlänge der simulierten Trajektorie) als gänzlich ungeeignet für den Zweck der ungestützten Navigation in einem Zeitintervall von 1000 s. Zudem ist die Auflösung der Kreisel zu grob, um die Erddrotation zu detektieren, was eine autonome Selbstorientierung unmöglich macht. Bei Übergang auf Trägheitsnavigationssysteme mittlerer Auflösung, welche als verfügbar und erschwinglich betrachtet werden können, resultiert ein entscheidender Genauigkeitssprung. Dies spiegelt sich in der finalen Positionierungsgenauigkeit von etwa 250 m wider. Eine weitere deutliche Genauigkeitssteigerung ist beim Übergang auf Trägheitsnavigationssysteme hoher Auflösung zu verzeichnen (Positionierungsgenauigkeit für simulierte Trajektorie etwa 25 m). Durch Verwendung eines zentralen Differenzenquotienten (2. Ordnung) reduziert sich der finale Positionierungsfehler auf etwa 1 m (s. Tabelle 2.).

KAPITEL 11:

Realdatenverarbeitung

Ziel des vorliegenden Kapitels ist die Beschreibung eines realen Experimentes und der dabei typischerweise auftretenden störenden Einflüsse. Exemplarisch seien, neben Linearisierungs-, Diskretisierungs- und Quantelungsfehler, folgende Ursachen für eine limitierte Navigationsgenauigkeit genannt:

- Störungen aller Art während der initialen autonomen Selbstorientierung (z.B. Schwankungen durch ein vorbeifahrendes Fahrzeug)
- fehlerhafte Anfangszustände (z.B. durch zu kurze initiale autonome Selbstorientierung)
- unzureichende Wiederholbarkeit der Sensorbiasschätzung bei der Laborkalibrierung (große Standardabweichung des Ensemblemittels)
- Unsicherheit der Schätzung des zeitlich linearen Sensorfehlerwachstums (z.B. durch zu kurze initiale autonome Selbstorientierung)
- zeitlich nichtlineares Sensorfehlerwachstum
- Temperaturschwankungen während des Experimentes
- Vibrationen (Motor, Lüfter, Dithering, etc.)

Der verwendete Datensatz wurde in der Region Kananaskis vom Department of Geomatics, University of Calgary, Canada aufgezeichnet. Dabei wurde ein modifiziertes Litton LTN-90-100 mit einer Systemtaktung von 64 Hz eingesetzt. Die Systemauflösung beträgt

$$\begin{aligned} \bar{h}_{gyros} &= 0.0001220703125 \frac{\circ}{s} = 0.439453125 \frac{''}{s} \\ \bar{h}_{accel.} &= 0.00003720703125 \frac{m}{s^2} = 3.720703125 \text{ mgal.} \end{aligned} \quad (11.1)$$

Dies entspricht etwa der mittleren Auflösung im vorhergehenden Kapitel.

Anmerkung 11.1: Um a priori einen Eindruck von der bei der Anfangsorientierung erzielbaren Genauigkeit zu bekommen, betrachten wir den Richtungsfehler, welcher durch einen zur initialen Vektorbeobachtung orthogonalen Fehler in der Größenordnung der Systemauflösung verursacht wird.

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{gyros} &= \arctan\left(\frac{\bar{h}_{gyros}}{\omega_{ie}}\right) = 1.6735^\circ = 100.41' \\ \Delta\alpha_{accel.} &= \arctan\left(\frac{\bar{h}_{accel.}}{\|\gamma\|}\right) = 0.0002^\circ = 0.0131' = 0.7831'' \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis trägt dem sehr guten Signal/Rausch-Verhältnis in der Akzelerometertriade und dem sehr schlechten Signal/Rausch-Verhältnis in der Kreiseltriade Rechnung. Somit empfiehlt es sich zur Berechnung von Nick- und Rollwinkel lediglich die initiale Beobachtung des Schwerevektors im Beobachtungssystem heranzuziehen und nur für den Kurswinkel auf die Beobachtung des Erdrotationsvektors im Beobachtungssystem zurückzugreifen. ■

Die Nullpunktfehler (Bias) der inertialen Sensoren sind angegeben zu (s.a. [Z. Liu(1992)])

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{gyros} &= (-0.000058, -0.000059, 0.000060)^T \frac{\circ}{s} \\ \mathbf{b}_{accel.} &= (-0.00040, -0.00012, -0.00030)^T \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Anmerkung 11.2: Die Differentialgleichung zur Beschreibung der Fahrzeugbeschleunigung lautet im Inertialsystem

$$\ddot{\mathbf{x}}_i(t) = R_{ib}(t)\mathbf{f}_b(t) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i(t), t).$$

Verändert man Position und Orientierung des Fahrzeugs bzgl. des Inertialraumes nicht und nimmt $\mathbf{g}_i$ als konstant an, so folgt der Einfluß von Akzelerometerbias und -drift aus

$$\ddot{\mathbf{x}}_i(t) = R_{ib}[\mathbf{f}_0 + \mathbf{b}_{accel.} + \mathbf{d}_{accel.}(t - t_0)] + \mathbf{g}_i.$$

Unter der Annahme $R_{ib}\mathbf{f}_0 + \mathbf{g}_i = 0$ folgt durch doppelte zeitliche Integration der Einfluß von Bias und Drift aus der Beziehung

$$\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_i(t_0) = \frac{1}{2}R_{ib}\mathbf{b}_{accel.}(t - t_0)^2 + \frac{1}{6}R_{ib}\mathbf{d}_{accel.}(t - t_0)^3.$$

In diesem Sinne wächst ein Fehler im Akzelerometerbias quadratisch und ein Fehler in der Akzelerometerdrift kubisch mit der Zeit. Damit ergibt sich folgendes Bild

	Positionsfehler durch 20 mgal Akzelerometer-Bias	Positionsfehler durch 0.1 $\frac{mgal}{s}$ Akzelerometer-Drift
1 min	0.360 m	0.036 m
5 min	9.000 m	4.500 m
10 min	36.000 m	36.000 m
20 min	144.000 m	288.000 m
30 min	324.000 m	972.000 m

Ein Vergleich der verwendeten Akzelerometer-Biases mit den Werten aus [R.V.C. Wong(1988)] zeigt, daß 20 mgal eine durchaus vorsichtige Wahl ist. Nachfolgende Graphiken dokumentieren die Existenz von Driften der Größenordnung $0.1 \frac{mgal}{s}$ in zwei der drei Akzelerometerkanälen. Anfangs dominiert der Effekt des Biasfehlers und später die Auswirkung des Driftfehlers. Da die gewählte Größenordnung von Bias und Drift als eher zu niedrig anzusehen und die durch Kreiselfehler verursachte Fehlbeschleunigung noch unberücksichtigt geblieben ist, geben die angegebenen Positionsfehler lediglich einen Eindruck der zu erwartenden Größenordnung. Das exponentielle Anwachsen vertikaler Fehler in Anfangsposition und -geschwindigkeit (s. Kapitel 6) ist ebenfalls noch nicht berücksichtigt. ■

Der initiale Ort des Triadenzentrums lautet im WGS84-Datum

$$\lambda_0 = -115^\circ 1' 30.0848'', \quad \varphi_0 = 51^\circ 2' 44.8626'', \quad h_0 = 1339.818m.$$

In den ersten 10 Minuten wurden die Sensordaten in einem „stationären“ Umfeld aufgezeichnet. Leider korrigiert das LTN-90-100 im z-Akzelerometer eine breitenabhängige Modellschwere, bevor die „Rohdaten“ ausgelesen werden können. Bei der dabei verwendeten Breite handelt es sich um diejenige der geräteinternen Navigationslösung, welche hier unbekannt ist und damit eine zusätzliche Fehlerquelle darstellt. Als „Rohdaten“ sind dabei ganze Zahlen (als Folge der Analog-Digital-Wandlung) zu verstehen, welche mit der Sensoraufösung zu multiplizieren sind. Dabei wird das Signal betragsmäßig um eine halbe Auflösung vergrößert.

1. Sensordatenanalyse

A priori empfiehlt sich eine Sensordatenanalyse zur Beurteilung des Datensatzes. Abbildung 11.1 zeigt eine Darstellung der Sensorkanäle als Zeitreihe bis zum ersten Nullgeschwindigkeitsabgleich. Bereits hieraus läßt sich eine Störung der „stationären“ Anfangsphase nach etwa 530 s erkennen, welche wahrscheinlich durch ein vorbeifahrendes Fahrzeug verursacht wurde, da die Störung hauptsächlich im y-Kreis (kollinear zur Rollachse) und im x-Akzelerometer (kollinear zur Nickachse) auftritt und somit im wesentlichen einer Schwankung um die Rollachse entspricht. Weitere Störungen sind aufgrund der gewählten Ordinatenkalibrierung zunächst nicht zu erkennen.

Abbildung 11.2 zeigt eine Häufigkeitsverteilung der stationären Sensorrauschprozesse um den Mittelwert in den ersten 512 s. Ein Vergleich der Häufigkeitsverteilung der y-Kreiseldaten um den Mittelwert mit den Häufigkeitsverteilungen für x- und z-Kreisel zeigt eine etwa verdoppelte Rauschbreite. Dies deutet bereits auf Störungen hin, welche hauptsächlich zu einem Rollen des Fahrzeugs führen. Bei den Beschleunigungsmessern erkennt man das bevorzugte Verweilen in verschiedenen Klassen, d.h. eine Art „Hängenbleiben“ der Beschleunigungsmesser bei speziellen Amplituden.

Eine gefensterte Fourier- bzw. Wavelettransformation (s. z.B. [A.K. Louis et al.(1994)]) der Sensordaten in den ersten 1024 s führt zu Abbildung 11.3. Die Transformation erlaubt im Sinne der Heisenbergschen Unschärferelation eine zeitliche Lokalisierung einzelner Frequenzen (Lokalisierung im Phasenraum). Die Darstellung reicht bis zur Nyquist Frequenz von 32 Hz. Neben der Störung nach etwa 530 s erkennt man – vor allem im y-Kreis – neben einigen kleineren Störungen noch zwei bedeutendere bei etwa 95 s und 480 s. Ferner folgt aus der Phasenraumdarstellung die permanente Präsenz bestimmter Frequenzen im Bereich von 9, 20 und 30.5 Hz, welche durch Aliasing der Ditherfrequenz im Bereich von 380 bis 420 Hz resultieren. In [J. Czompo(1991)] wurde am Beispiel des Litton LTN-90-100 der durch Dithering, Lüfter- und Motorvibrationen verursachte Einfluß auf die erzielten Genauigkeiten – durch Eliminierung korrespondierender Frequenzen im Frequenzraum – untersucht. Es zeigte sich, daß diese Einflüsse als sehr gering und dementsprechend diesbezügliche Anstrengungen als ineffektiv erachtet werden können. Deutlich erkennt man in den x- und y-Kanälen während des Nullgeschwindigkeitsabgleichs die durch die Motorzündungen generierten Frequenzen im Bereich von 0 bis 5 Hz.

Abbildung 11.4 zeigt den Innenwinkel zwischen dem von der Kreiseltriade beobachteten Winkelgeschwindigkeitsvektor ω_{ib} und dem von der Akzelerometertriade beobachteten Beschleunigungsvektor f_b , d.h. $\angle(\omega_{ib}, f_b)$, in den ersten 12 Minuten. Die linke Graphik zeigt den Innenwinkel der zu einem Zeitpunkt gemessenen Vektoren ω_{ib} und

f_b . Aufgrund des schlechten Signal-Rausch-Verhältnisses in den Kreiseln nimmt der Innenwinkel beliebige Werte zwischen 0° und 180° an. Durch rekursive arithmetische Mittelung der Sensordaten ergibt sich in der mittleren Graphik ein deutlich besseres Bild. Man erkennt jedoch klar den Einfluß des Driftens der Sensoren. Eliminiert man mittels des Besten Linearen Unverzerrten Schätzers (BLUE, s. z.B. [O. Anderson et al.(1997)]) den Einfluß der (linearen) Drift, so resultiert schließlich die rechte Graphik. Aufgrund der raschen Konvergenz und des robusten Verhaltens eignet sich die arithmetische Mittelung in kurzen und (leicht) gestörten stationären Phasen und der BLU-Schätzer in langen und (möglichst) ungestörten stationären Phasen. Bis auf die meridionale Lotabweichung stimmt der betrachtete Innenwinkel mit der Poldistanz auf Basis der ellipsoidnormalen Breite überein. Nach [P. Vanicek; E. Krakiwsky(1986)] dürfte die meridionale Lotabweichung auch im Gebiet Kananaskis die Größenordnung von $1'$ nicht überschreiten.

initiale Poldistanz	38.95°
$\hat{\chi}(\omega_{ib}, f_b)$ (arith. Mittelung)	38.77°
$\hat{\chi}(\omega_{ib}, f_b)$ (BLUE)	38.72°

Ursachen für die Differenz von etwa $0.20^\circ = 12'$ sind hauptsächlich

- systematische Störungen während der initialen autonomen Selbstorientierung,
- unzureichende Systemauflösung,
- unzureichende Konvergenz innerhalb der zur Verfügung stehenden 10 min,
- Streuung der Nullpunktfehler (Bias) im Sinne von Ensemblebeobachtungen.

Nach 12-minütiger rekursiver Schätzung lautet das Ergebnis wie folgt:

Arithmetische Mittelung:

$$\omega_{ib} = \begin{pmatrix} 0.002485 \\ -0.000661 \\ 0.003302 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0.000248 \\ 0.000239 \\ 0.000261 \end{pmatrix} \frac{^\circ}{s}, \quad f_b = \begin{pmatrix} -0.092230 \\ 0.225283 \\ 9.804425 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0.000123 \\ 0.000139 \\ 0.000168 \end{pmatrix} \frac{m}{s^2}$$

BLU-Schätzung:

$$\omega_{ib} = \left[\begin{pmatrix} 0.002473 \\ -0.000660 \\ 0.003303 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0.000496 \\ 0.000478 \\ 0.000522 \end{pmatrix} \right] + (t - t_0) \left[\begin{pmatrix} 0.0000000323 \\ -0.0000000031 \\ -0.0000000040 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0.0000011927 \\ 0.0000011495 \\ 0.0000012562 \end{pmatrix} \right] \frac{^\circ}{s}$$

$$f_b = \left[\begin{pmatrix} -0.092723 \\ 0.225686 \\ 9.804462 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0.000246 \\ 0.000277 \\ 0.000335 \end{pmatrix} \right] + (t - t_0) \left[\begin{pmatrix} 0.000001367 \\ -0.000001119 \\ -0.000000103 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0.000000591 \\ 0.000000667 \\ 0.000000806 \end{pmatrix} \right] \frac{m}{s^2}$$

Die Standardabweichung der BLU-Schätzung des konstanten Signalanteils in den Kreiseln entspricht etwa der vierfachen Kreiselauflösung, d.h. $4h_{gyros}$. Für den vorliegenden Datensatz war keine signifikante Schätzung der Driften möglich.

Abbildungen 11.5 bis 11.7 zeigen das Ergebnis der rekursiven Schätzung der konstanten bzw. linearen Signalanteile in den stationären Sensorsignalen der ersten 12 min. Es ist darauf zu achten, daß die zugehörigen Standardabweichungen lediglich die abnehmende Rauschbreite der rekursiven Schätzung und nicht durch nichtlineare Signalanteile oder störungsbedingte Diskontinuitäten hervorgerufene Unsicherheiten beschreiben. Sie fallen dementsprechend zu optimistisch aus. Objektiver erscheint die Betrachtung der Variation des Ergebnisses der rekursiven Schätzung am Ende der autonomen Orientierungsphase. Schließlich ist in Abbildung 11.8 das Ergebnis der autonomen initialen (rekursiven) Orientierungsbestimmung in Form von Nick-, Roll- und Kurswinkel dargestellt. Ein Vergleich von arithmetischer Mittelung und BLU-Schätzung macht dabei den Einfluß der Sensor-drift und die finale Rauschbreite der Schätzung des Kurswinkels die Notwendigkeit der Verwendung eines Filters deutlich.

Eine deutliche Verlängerung der Anfangsorientierungsphase und eine Elimination aller dabei auftretenden (systematischen) Störungen läßt eine Schätzung des initialen Kurswinkels mittels des LTN-90-100 im Rahmen der autonomen Selbstorientierung mit einer Genauigkeit von bis zu einer Bogenminute für möglich erscheinen (s.a. [Z. Liu(1992)]).

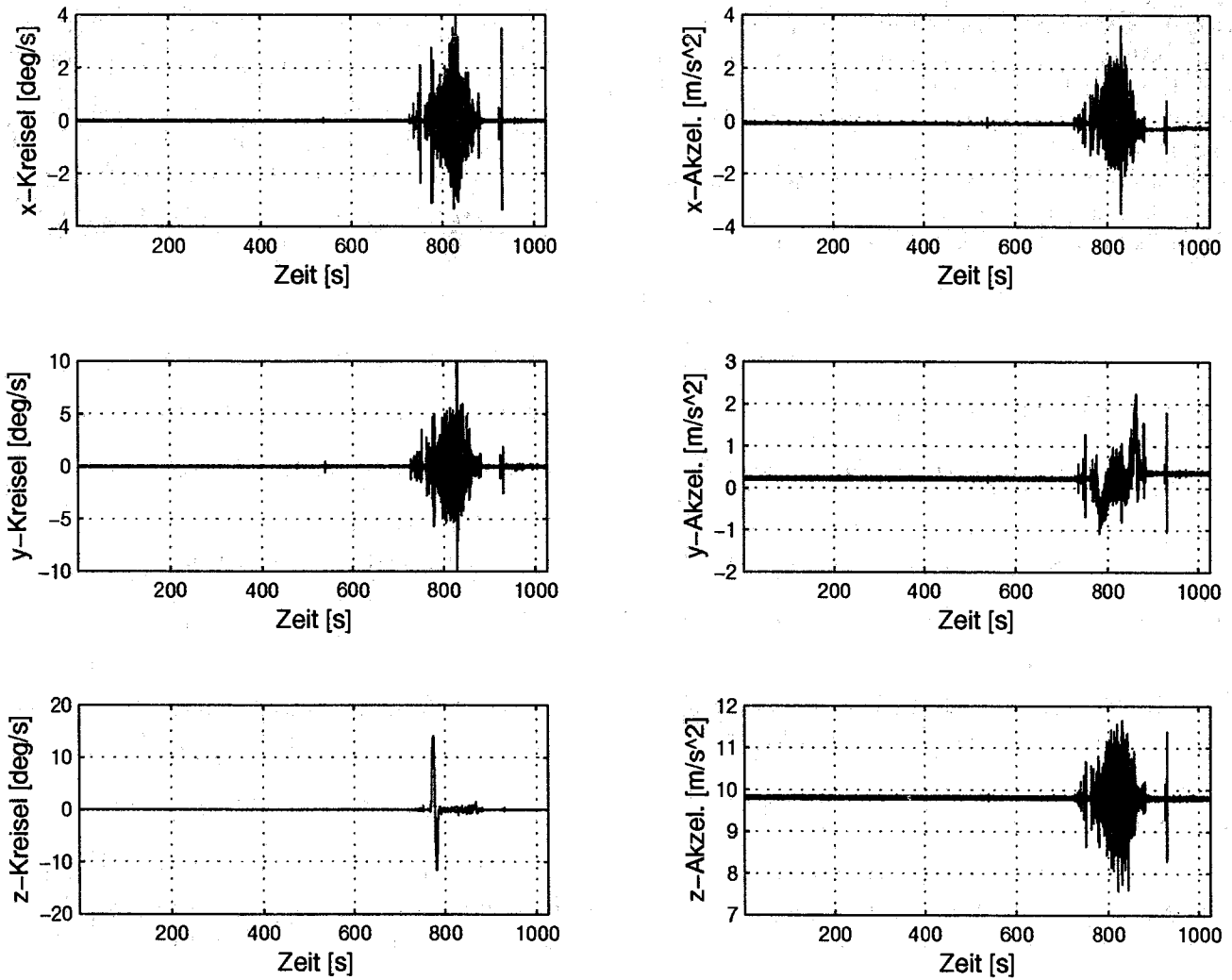


Abbildung 11.1: Sensordaten des LTN-90-100.

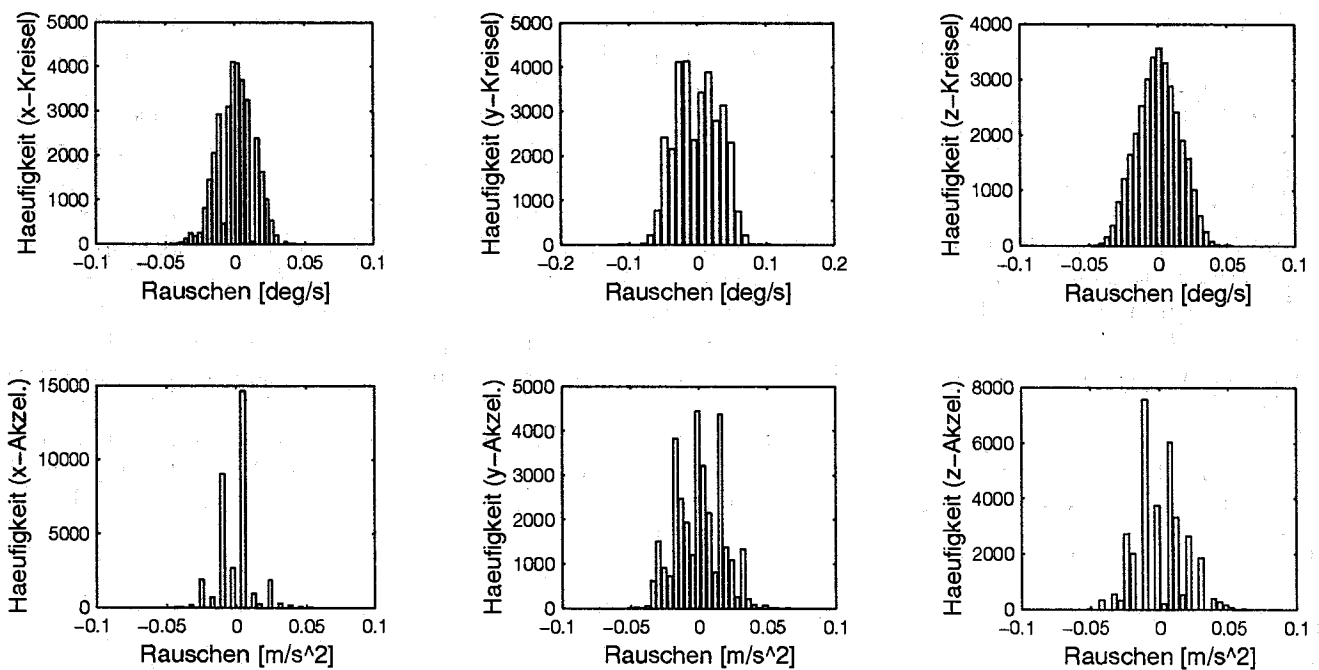


Abbildung 11.2: Häufigkeitsverteilung des (stationären) Sensorrauschens (512 s) des LTN-90-100-Datensatzes.

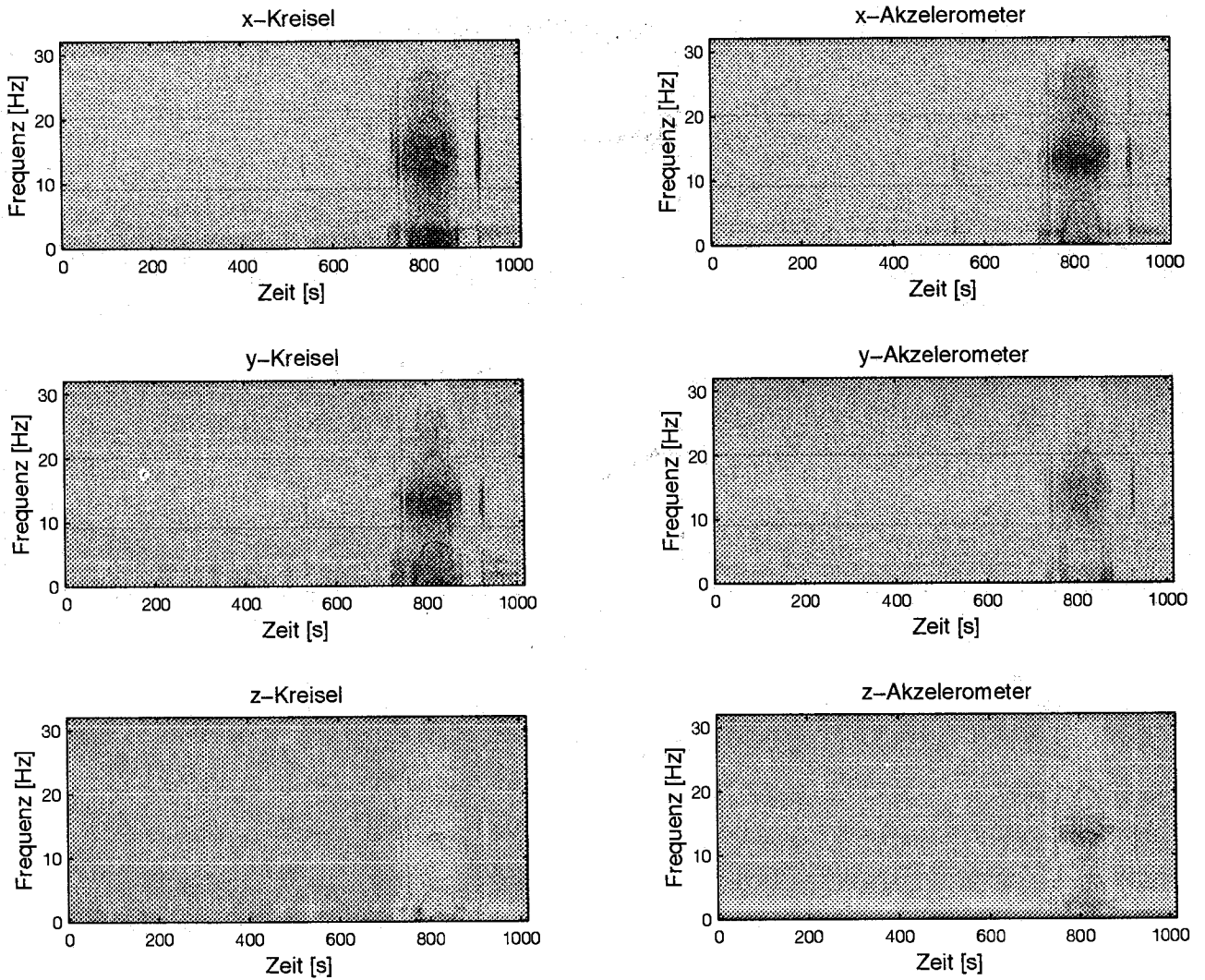


Abbildung 11.3: Gefensterte Fouriertransformation der Sensordaten des LTN-90-100.

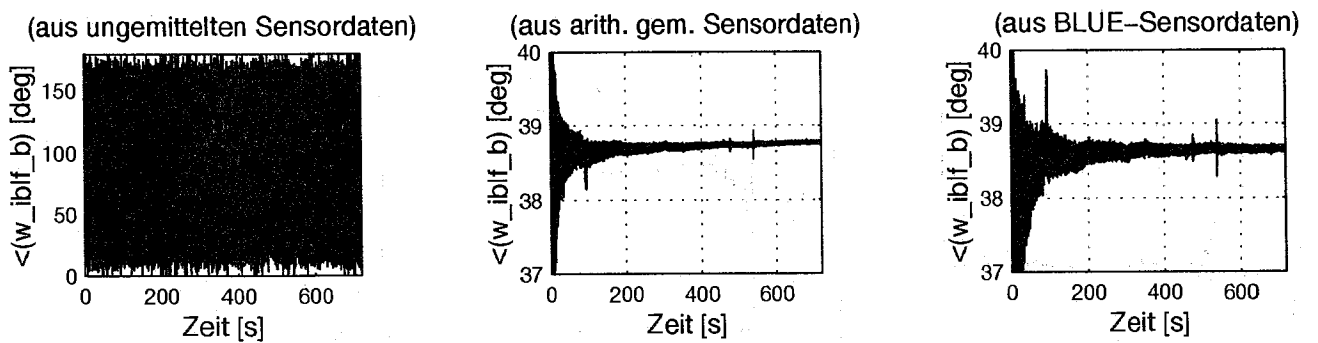


Abbildung 11.4: Innenwinkel zwischen den vektoriellen Kreisel- und Akzelerometerbeobachtungen des LTN-90-100 während der ersten 720 s.

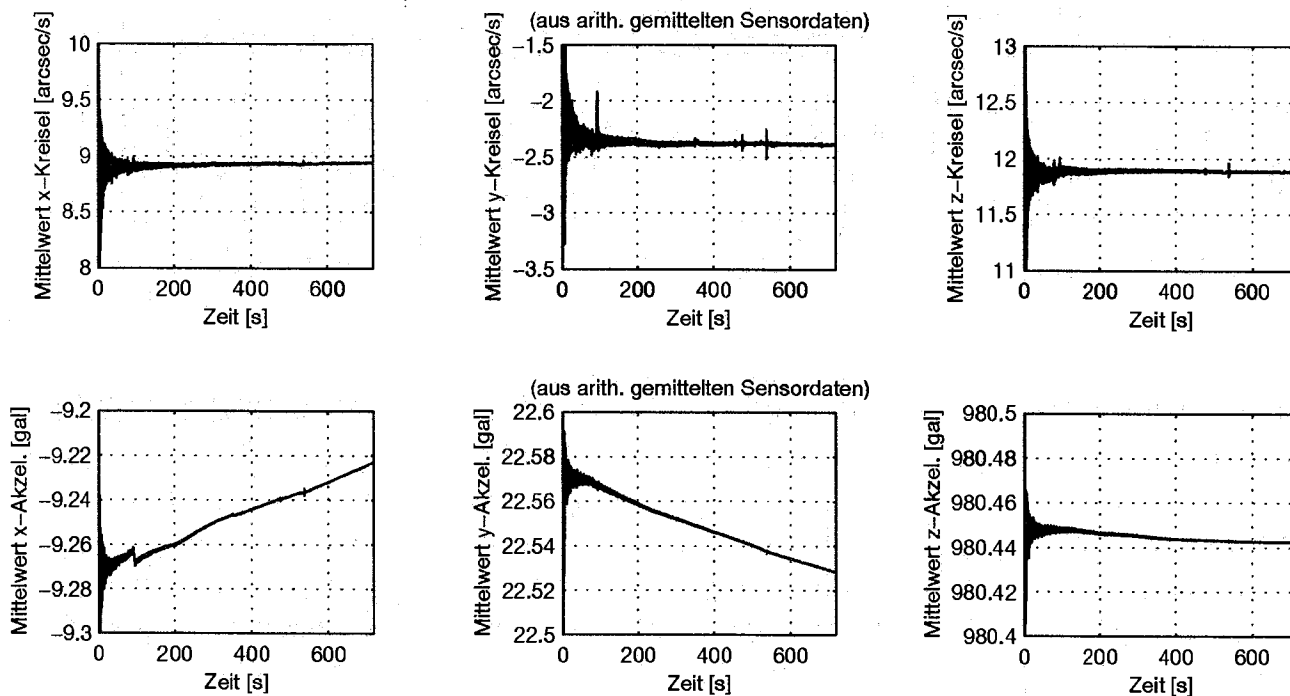


Abbildung 11.5: Arith. Mittelung der Sensordaten des LTN-90-100.

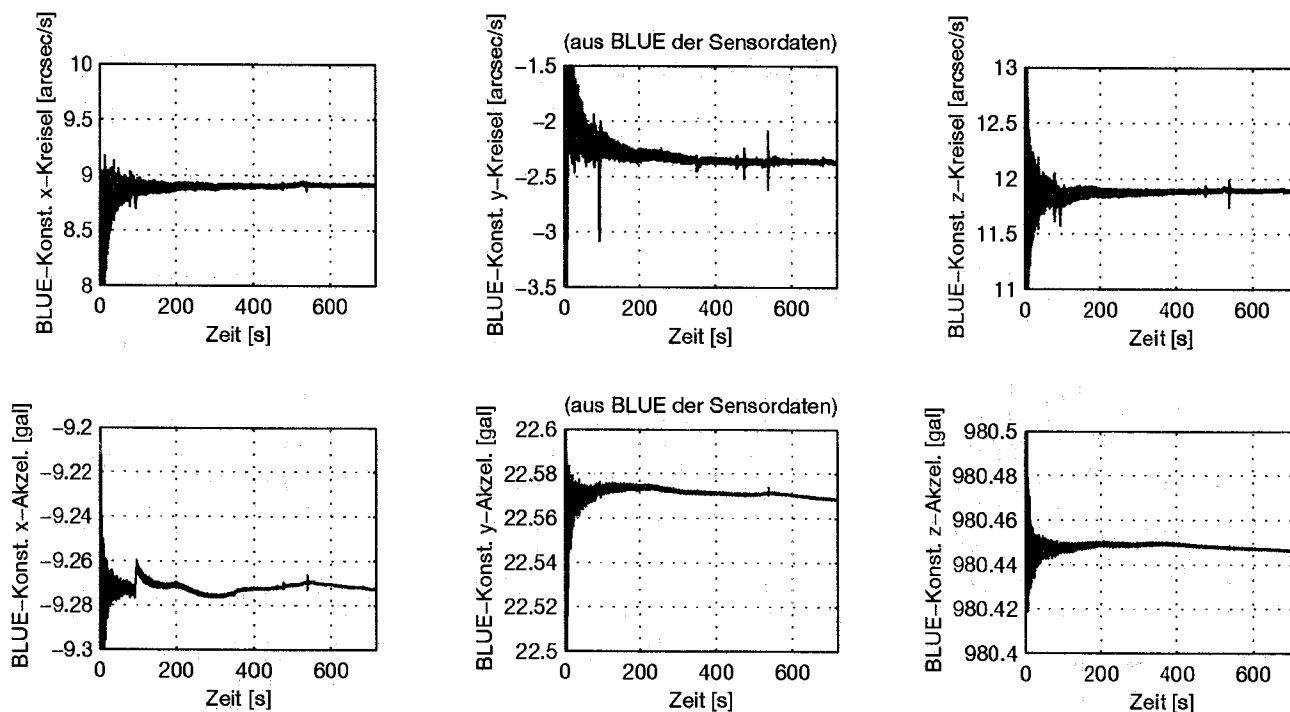


Abbildung 11.6: Konstanter Anteil (BLUE) der Sensordaten des LTN-90-100.

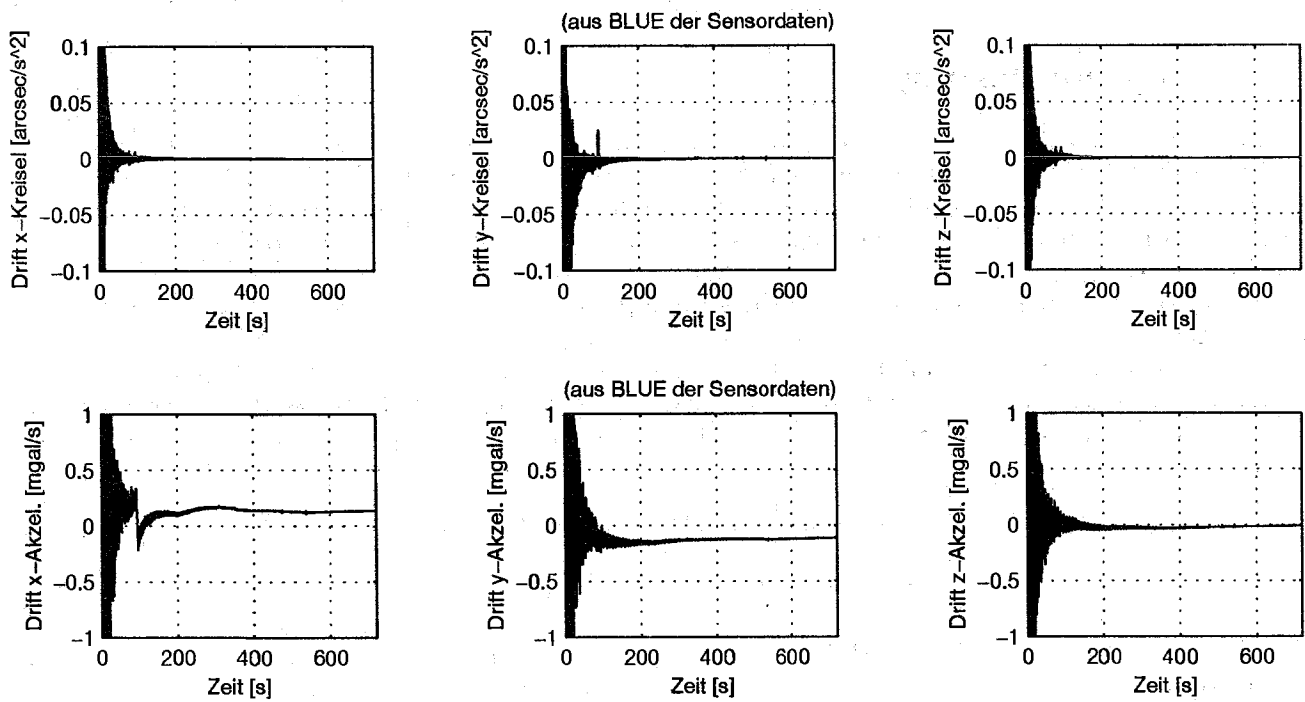


Abbildung 11.7: Linearer Anteil (BLUE) der Sensordaten des LTN-90-100.

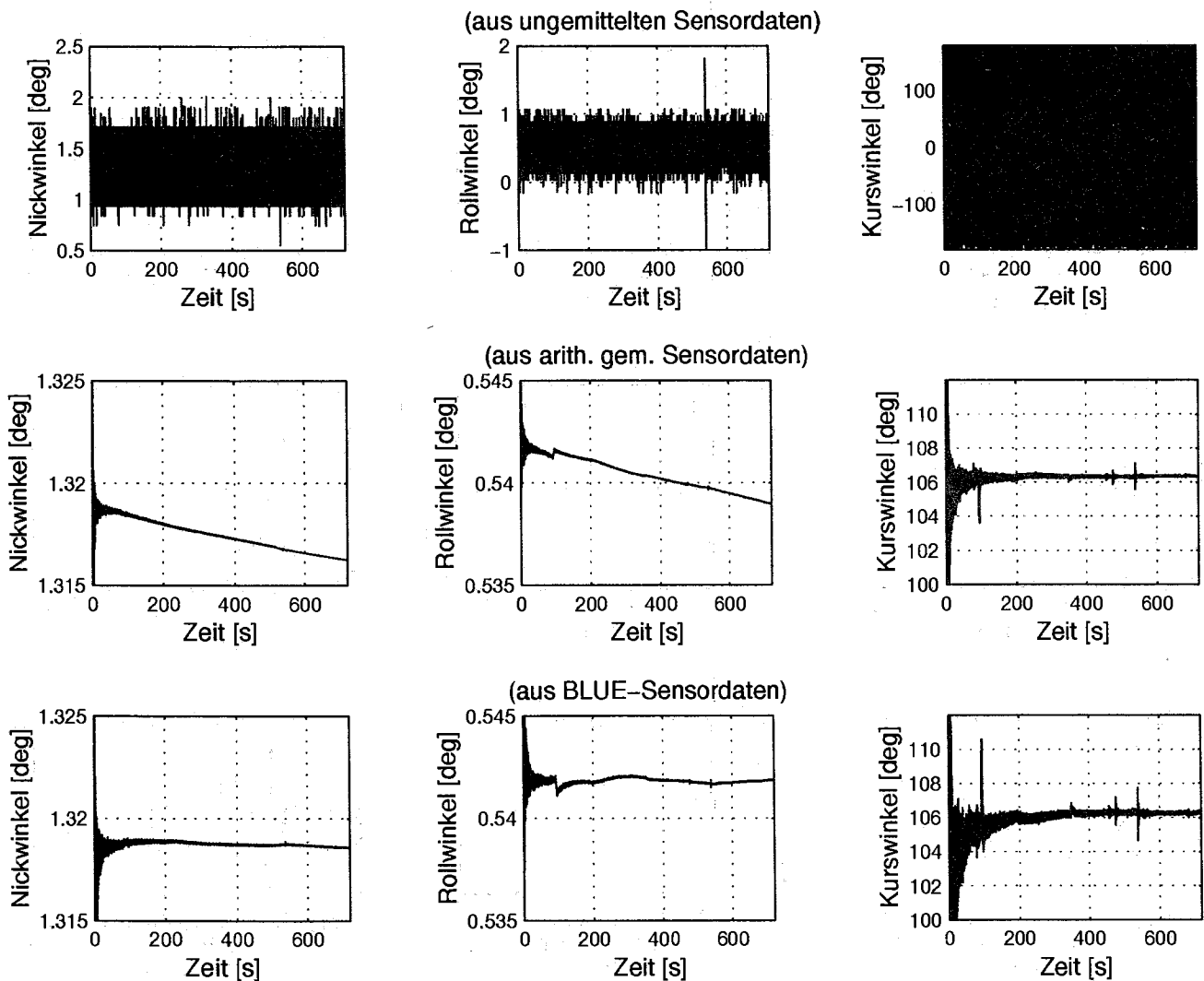


Abbildung 11.8: Nick-, Roll- und Kurswinkel des LTN-90-100.

2. Navigationslösung

Die Anfangsposition haben wir als bekannt vorausgesetzt, die erdbezogene Anfangsgeschwindigkeit als identisch Null angenommen und als Anfangsorientierung liegt die rekursiv verbesserte BLU-Schätzung vor. D.h. nach einer kurzen Anfangsgroborientierungsphase (bis also die BLU-Schätzung der Anfangsorientierung hinreichend konvergiert ist) stehen alle Zustände und damit ein Anfangszustandsvektor für das TNDgLS bzw. den Kalman-Filter zur Verfügung.

Liegen Nullgeschwindigkeits- bzw. Positionsabgleiche im Rhythmus der Systemtaktung (z.B. CUPT und ZUPT) bzw. Positions- und Geschwindigkeitsbeobachtungen mit niedrigerer Frequenz (z.B. DGPS) vor, so ist – wie in Kapitel 7 gezeigt – der Kurswinkel während des verbleibenden Teils der Anfangsorientierungsphase nur aus der zweiten zeitlichen Ableitung der Geschwindigkeitsbeobachtung bzw. der dritten zeitlichen Ableitung der Positionsbeobachtung beobachtbar. Durch den Einfluß von System- und Beobachtungsrauschen in der Beziehung

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{v}}_e(t) = & \dot{R}_{eb}(t)\mathbf{f}_b(t) + R_{eb}(t)\dot{\mathbf{f}}_b(t) - 2\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \dot{\mathbf{v}}_e(t) - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v}_e(t)) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_e^2} (V_e(\mathbf{x}_e) + V_t(\mathbf{x}_e, t)) \mathbf{v}_e + \frac{\partial^2}{\partial t \partial \mathbf{x}_e} V_t(\mathbf{x}_e, t) \end{aligned} \quad (11.2)$$

ist der Kurswinkel nur schwach beobachtbar. Störungen, welche den Rahmen der Unsicherheit, der durch die Varianz-Kovarianz-Matrizen P_0 , Q_k und R_k ausgedrückt wird, verlassen, bewirken Sprünge im (nicht direkt beobachteten) Kurswinkel. Eine Vergrößerung der Unsicherheit der Beobachtung und damit der Standardabweichung des zugehörigen Beobachtungsrauschens behebt zwar diesen Mangel, gleichzeitig wird jedoch die Konvergenz verlangsamt. Durch Verwendung der Ergebnisse der BLU-Schätzung liegen jedoch Sensorbeobachtungen steigender Genauigkeit und damit Orientierungsbeobachtungen steigender Genauigkeit vor. Demzufolge kann die BLU-Schätzung der Anfangsorientierung bis zur Konvergenz des Kurswinkels fortgeführt und neben Position

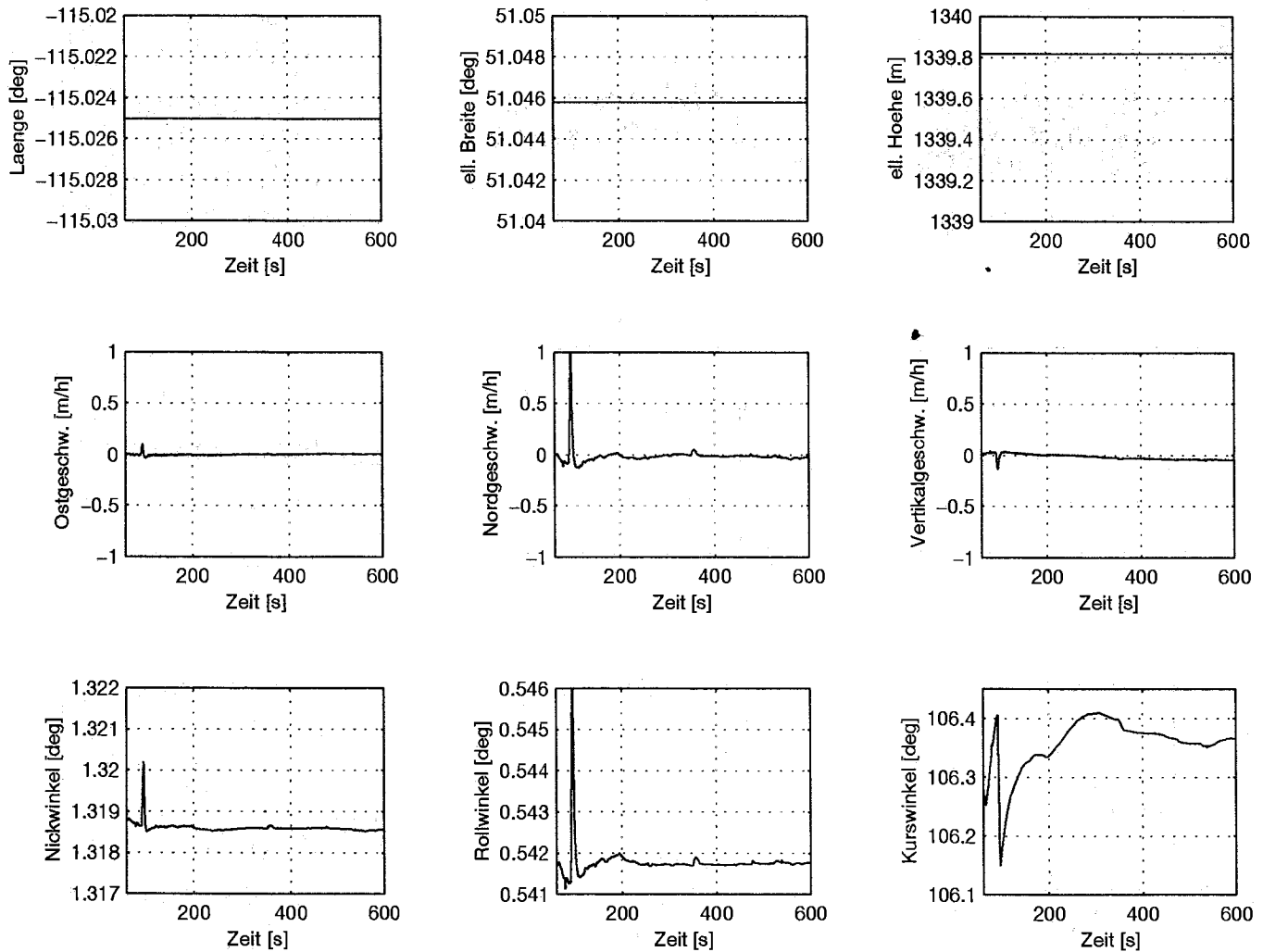


Abbildung 11.9: Anfangsfeinorientierung zur Konvergenz des Kurswinkels

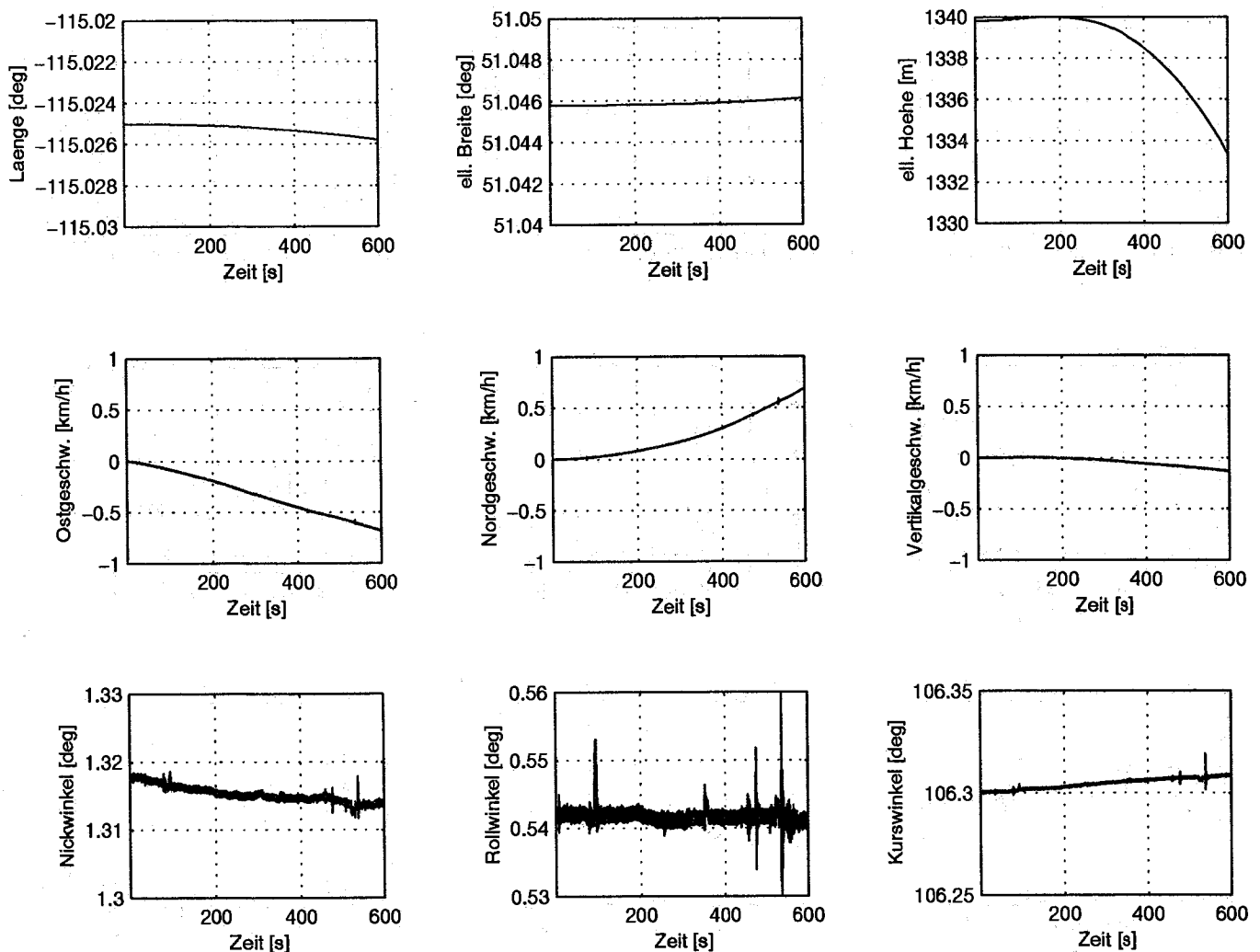


Abbildung 11.10: Ungestützte Navigation in den ersten 10 Minuten zur Detektion von Störungen

und Nullgeschwindigkeit auch die Orientierung beobachtet werden. Letztendlich folgt eine robuste und rasch konvergente Schätzung der Anfangsorientierung.

Im Rahmen der Beobachtbarkeitsanalyse konnten wir nachweisen, daß Anfangsorientierung und Sensorbias nicht in allen Kanälen gleichzeitig beobachtbar sind. Dies gilt jedoch nicht für den radialen Anteil des von der Akzelerometertriade registrierten vektorwertigen Signals. Im Rahmen der Stabilitätsanalyse von Kapitel 6 wurde die mathematische Begründung für das exponentielle Anwachsen initialer vertikaler Positions- und Geschwindigkeitsfehler gegeben. Ursache dafür ist eine vertikale Fehlbeschleunigung. Zur Dämpfung des vertikalen Fehlerwachstums bietet sich somit die Berücksichtigung eines vertikalen Bias bzw. Skalenfaktors in der Akzelerometertriade an.

Damit sind die Ergebnisse der Stabilitäts- und Beobachtbarkeitsanalyse bestmöglich berücksichtigt. Die in Kapitel 10 behandelte Systemsimulation belegt zudem – bei Verwendung eines „Strapdown“-Trägheitsnavigationssystems mittlerer Genauigkeit bzw. Systemauflösung – den mit der Linearisierung von TNDgIS einhergehenden Genauigkeitsverlust. Demzufolge basieren nachfolgende Auswertungen auf der Verwendung des nichtlinearen $(\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e, \hat{q}_{eb})$ -TNDgIS im erweiterten Kalman-Filter. Im Gegensatz zur bei der Systemsimulation verwendeten Trajektorie mit hoher absoluter und geringer relativer Dynamik beschreibt der im weiteren zugrundegelegte reale Datensatz eine Trajektorie mit geringer absoluter und hoher relativer Dynamik. Zur Begrenzung des Einflusses von Diskretisierungsfehlern findet das klassische Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung Verwendung. Die Systemtaktung ist mit 64 Hz fest vorgegeben.

Die das Sensorrauschen charakterisierende empirische Varianz-Kovarianz-Matrix $Q_k = Q$ folgt als Resultat der BLU-Schätzung. Die Sicherheit der aktuell vorliegenden Beobachtung spiegelt sich in der Varianz-Kovarianz-Matrix R_k des Beobachtungsrauschens wider und ist geeignet vorzugeben. Die durch die Varianz-Kovarianz-Matrix P_0 ausgedrückte Sicherheit des initialen Zustandsvektors hat nur mäßigen Einfluß, da P_k aufgrund der Vorgaben aus Q_k und R_k rasch gegen einen stationären Wert konvergiert. Dies komplettiert die Initialisierung des Kalman-Schätzers.

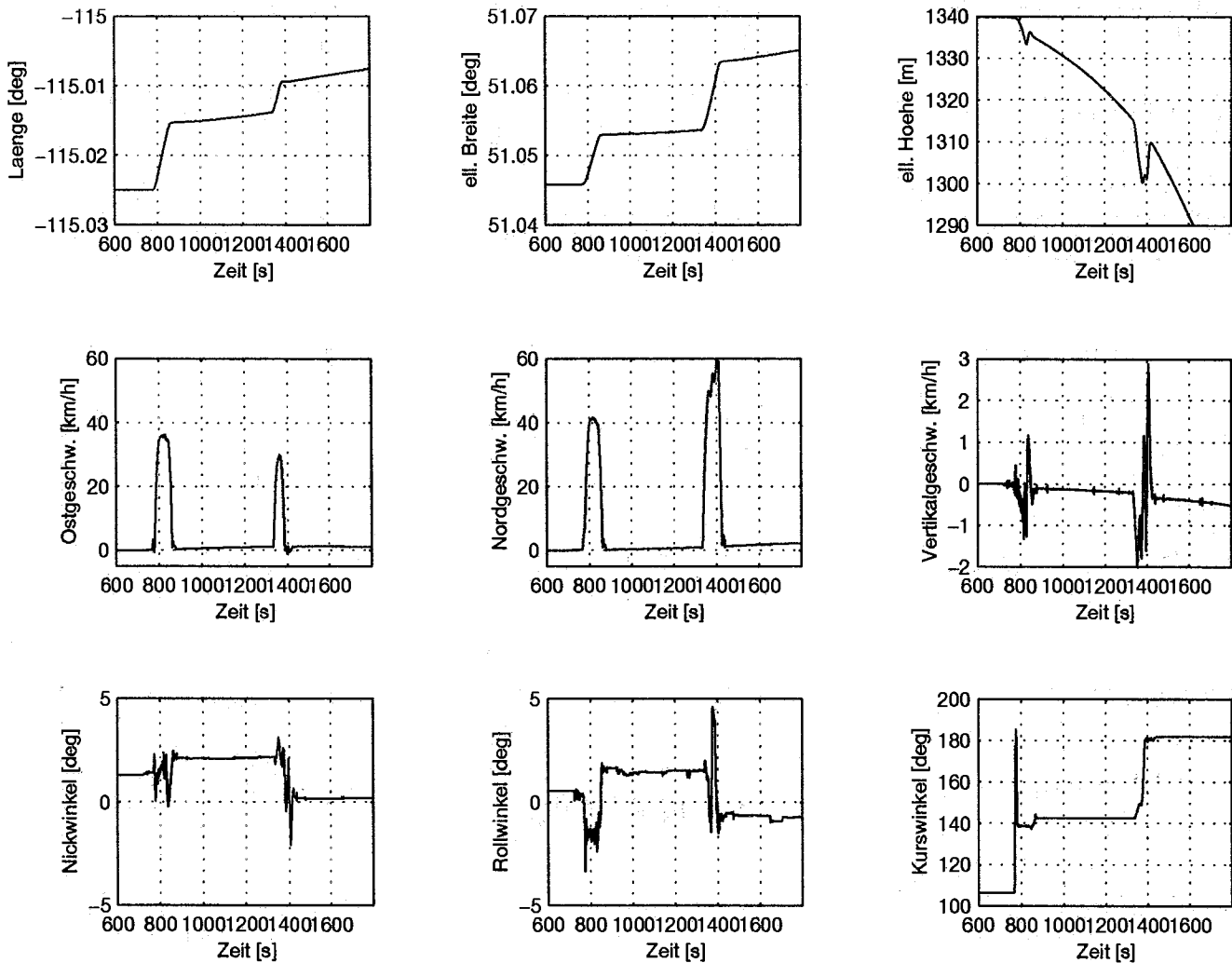


Abbildung 11.11: Ungestützte Navigation in den letzten 20 Minuten

Abbildung 11.9 zeigt das Ergebnis der Anfangsfeinorientierung. Als Anfangsorientierung wird das Ergebnis der im Rahmen der Sensordatenanalyse beschriebenen einminütigen autonomen Selbstorientierung (Anfangsgroborientierung) mit einem Kurswinkel von 106.10° verwendet. Die Akzelerometerdrift wird dabei berücksichtigt. Mit der resultierenden Anfangsorientierung wird der Anfangszustandsvektor komplettiert und der Kalman-Filter geeignet initialisiert. Nick- und Rollwinkel sind bereits mit hoher Genauigkeit bestimmt. Lediglich der nur schwach beobachtbare Kurswinkel ist noch zu ungenau, um zur freien Navigation übergehen zu können. Bis zur Konvergenz des Kurswinkels (hier nach weiteren sechs Minuten, d.h. von $t = 60\text{ s}$ bis $t = 420\text{ s}$) wird neben Position und Nullgeschwindigkeit auch die auf Basis der linearen Regression in den Sensorkanälen mit steigender Genauigkeit vorliegende Orientierung zur Stützung bei vollem Systemtakt verwendet. Die verhältnismäßig dramatische Störung bei $t \approx 100\text{ s}$ macht die Robustheit des Verfahrens deutlich. Trotz der einhergehenden Kurswinkelvariation von etwa $\frac{1}{4}^\circ$ konvergiert der Kurswinkel rasch. Zur Vorbeugung gegen Störungen mit systematischem Einfluß werden ab $t = 420\text{ s}$ nur noch Nullgeschwindigkeitsabgleiche durchgeführt.

Zur Lokalisierung der im Datensatz präsenten Störungen zeigt Abbildung 11.10 die mit einer genäherten Anfangsorientierung (Nickwinkel 1.318° , Rollwinkel 0.542° und Kurswinkel 106.3°) ungestützt ausgewerteten ersten zehn Minuten. Dabei wurde weder eine radiale Fehlbeschleunigungs- noch eine Driftkorrektur in den Akzelerometern angebracht. Die graphische Darstellung des Rollwinkels macht den Einfluß der bei der Sensordatenanalyse gefundenen doppelten Rauschbreite des y-Kreisels deutlich. Ferner wird der Unterschied zwischen systematischen ($t \approx 100\text{ s}$ und $t \approx 350\text{ s}$) und zufälligen ($t \approx 480\text{ s}$ und $t \approx 540\text{ s}$) Störungen klar, wobei bei ersteren nach einer Auslenkung in einer Richtung keine Gegenreaktion in die entgegengesetzte Richtung eintritt, was bei letzteren der Fall ist. Offensichtlich verändert die betragsgrößte systematische Störung ($t \approx 100\text{ s}$) signifikant den Verlauf des Kurswinkels, während bei der betragsgrößten zufälligen Störung ($t \approx 540\text{ s}$) keine Änderung erkennbar ist.

Vor Beginn der ersten Navigationsphase stellt sich die Frage nach der optimalen Verwendung der eingangs geschätzten Drift. Dabei sei nochmals in Erinnerung gerufen, daß selbst die Standardabweichung der in x- und y-Akzelerometer geschätzten Drift noch etwa 50% des Signals beträgt. Unterstellt man die Gültigkeit der Drift

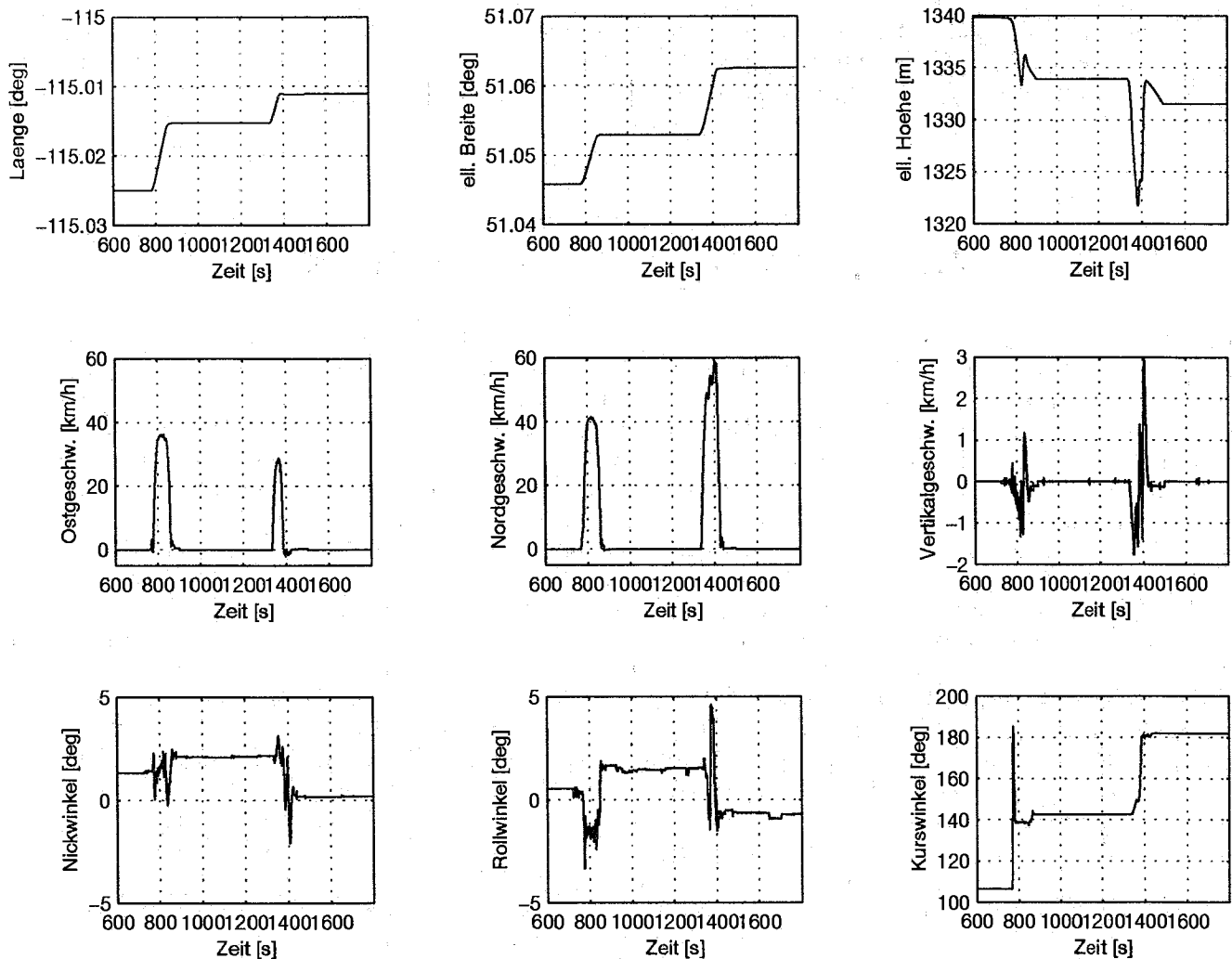


Abbildung 11.12: Gestützte Navigation in den letzten 20 Minuten

für die Gesamtlänge des Datensatzes von 30 min, so verschlechtert sich das Ergebnis gegenüber der Rechnung ohne Berücksichtigung der Drift deutlich. Selbst bei Umwandlung der Drift nach zehn Minuten in den zu diesem Zeitpunkt korrespondierenden Bias tritt keine gleichmäßige Verbesserung auf. Abbildung 11.11 liegt deshalb ein Modell ohne Driftkorrektur zugrunde. Durch Elimination von Störungen bzw. eine zeitliche Ausdehnung der initialen autonomen Selbstorientierung ist jedoch durch eine Driftkorrektur eine deutliche Verbesserung der Navigationsgenauigkeit zu erwarten. Eine Akzelerometerdrift in der erhaltenen Größenordnung von $0.1 \frac{m}{s^3}$ zieht unter den Annahmen von Anmerkung 11.2 nach 30 Minuten eine Fehlgeschwindigkeit von etwa $6 \frac{km}{h}$ nach sich. Die für den Zweck der ungestützten Navigation ungünstige Versuchsplanung verhindert eine Auswertung des Datensatzes mit einer für diese Geräteklasse hohen Genauigkeit. Konstante bzw. lineare Fehler in der Ost- bzw. Nordgeschwindigkeit resultieren durch verschwindende bzw. konstante Fehlbeschleunigungen in der entsprechenden Richtung. Ellipsoidnormale Höhe und Vertikalgeschwindigkeit verdeutlichen das exponentielle Fehlerwachstum. Ein laufender Motor und Personen im Fahrzeug sind die Ursache für den unruhigen Verlauf des Rollwinkels in den stationären Phasen. Dies läßt eine Verbesserung des Kurswinkels mittels Nullgeschwindigkeitsabgleichen aufgrund der hohen Unsicherheit in diesen Zeiträumen als unrealistisch erscheinen. Auch die Präsenz von Störungen und eine Spitzengeschwindigkeit von etwa 70 km/h verdeutlichen die der Aufzeichnung des Datensatzes zugrundeliegenden Rahmenbedingungen.

Abbildung 11.12 zeigt das Ergebnis bei Stützung mit Nullgeschwindigkeitsbeobachtungen (und Positionsbeobachtungen zur Verhinderung von „Positionsverbesserungen“) in den stationären Phasen ($900s < t < 1300s$ und $1500s < t < 1800s$). Die Länge der Trajektorie beträgt etwa 2.6 km. Der finale Positionierungsfehler liegt in der Größenordnung von 1 % der Trajektorienlänge. Da die Versuchsplanung nicht auf die Erzielung hochgenauer Ergebnisse ausgerichtet war, standen folgerichtig Konzepte zur Robustifizierung und Konvergenzbeschleunigung im Zentrum der Betrachtungen.

„The invention of the calculus of quaternions is a step towards the knowledge of quantities related to space which can only be compared for its importance, with the invention of triple coordinates by Descartes. The ideas of this calculus, as distinguished from its operations and symbols, are fitted to be of the greatest use in all parts of science.“¹⁾

(James Clerk Maxwell)

Zusammenfassung und Ausblick

Die Konzeption der Arbeit erlaubte die Gewinnung beinahe aller relevanten Zusammenhänge auf Basis der zuvor angestellten Überlegungen und kann in diesem Sinne als linear bezeichnet werden.

Einfache geometrische Interpretationen aller algebraischen Parametrisierungen wurden mit Hilfe der Darstellung einer räumlichen Starrkörperrotation als Drehung um eine (gerichtete) Raumachse nach dem Satz von L. Euler gegeben. Von den vier ausführlich behandelten Parametrisierungen der Gruppe der Rotationsmatrizen $SO(3)$ haben drei singuläre Umkehrungen (Kardan-Winkel für $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$, Euler-Winkel für $\theta = 0$ und $\theta = \pi$, Cayley-Parameter für $\text{Spur } R = -1$) und nur eine Parametrisierung eine reguläre Umkehrung (Hamilton-Quaternionen). Dies steht im Einklang mit dem auf H. Hopf zitierten Satz, welcher besagt, daß kein globaler Homöomorphismus (bijektive und stetige Abbildung) zwischen der Gruppe der Rotationsmatrizen und dem dreidimensionalen Euklidischen Raum existiert. Die in Rotationsmatrizen formulierten Orientierungsdifferentialgleichungen zwischen dem Beobachtungssachsensystem und dem erdfesten Bezugsachsensystem bzw. dem Horizontachsensystem wurden hergeleitet und gezeigt, daß ihre Lösungen stets orthonormal sind, falls nur die initial gegebene Matrix eine Rotationsmatrix ist. Ferner wurden analytische Lösungen unter der Voraussetzung zeitinvarianter Zusammenhangsmatrizen hergeleitet. Die trigonometrischen Parametrisierungen (Kardan- und Euler-Winkel) sind surjektiv, aber nicht injektiv. Die algebraische Parametrisierung in Cayley-Parametern ist injektiv, aber nicht surjektiv. Dadurch resultieren bei Verwendung der trigonometrischen Parametrisierungen singuläre (nichtlineare) Orientierungsparameterdifferentialgleichungen und bei Verwendung von Cayley-Parametern eine reguläre (quadratische) Orientierungsparameterdifferentialgleichung, wobei die Menge der nicht in Cayley-Parametern darstellbaren Orientierungen als die Gruppe der Spiegelungen identifiziert werden konnte. Die Parametrisierung in Hamilton-Quaternionen ist surjektiv, aber global nicht injektiv. Da jedoch die lokale Bijektivität gezeigt werden konnte – jede Orientierung kann durch zwei verschiedene Quaternionen beschrieben werden, welche als Antipoden der Sphäre S_1^3 interpretiert werden können – unterliegt der Einsatz von Hamilton-Quaternionen zum Zwecke der (Trägheits-)Navigation keinen Einschränkungen. Da die in Hamilton-Quaternionen formulierten Orientierungsparameterdifferentialgleichungen zudem linear in den Quaternionenkomponenten sind und damit kein Zustandslinearisierungsfehler auftritt, eignen sie sich in idealer Weise für den Einsatz in Trägheitsnavigationsmodellen. Für alle auftretenden Rotationsmatrizen wurden die zugehörigen Hamilton-Quaternionen angegeben. Ferner wurden mit Hilfe der Hamilton-Orientierungsdifferentialgleichungen die Orientierungsparameterdifferentialgleichungen in Laning-Bortz-Stuelpnagel-Parametern hergeleitet und die Fehlerordnung der von P.G. Savage angegebenen Lösung diskutiert.

Die Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen wurden in kartesischen und (rotations-)ellipsoidischen Koordinaten hergeleitet und mit Quaternionen-Orientierungsdifferentialgleichungen zu (nichtlinearen) Trägheitsnavigationsdifferentialgleichungssystemen (TNDgLS) kombiniert. Diese wurden linearisiert und die dabei resultierenden Systemmatrizen ohne Vernachlässigungen angegeben. Es erwies sich als vorteilhaft, die positions- und geschwindigkeitsunabhängige Orientierung des Beobachtungssachsensystems bzgl. des erdfesten, geozentrischen Bezugsachsensystems zu verwenden, damit die – aufgrund der Instabilität von Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen – bei ungestützter Navigation einsetzende Divergenz von Position und Geschwindigkeit die globale Orientierung nicht beeinflusst. Dies garantiert eine rasche Konvergenz der Orientierung beim Vorliegen von Positions- und Geschwindigkeitsbeobachtungen.

Die Existenz und Eindeutigkeit der Trajektorien und ihre stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten wurden gezeigt und die lokale Zustandstransformationsinvarianz dieser Eigenschaften bewiesen. Auftretende Einschränkungen waren stets parametrisierungsbedingt.

Die Stabilität von $SO(3)$ - und Quaternionen-Orientierungsdifferentialgleichungen bzgl. einer fehlerhaften Anfangsorientierung wurde bewiesen und die exponentielle Instabilität der Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen bzgl. Fehler in den vertikalen Komponenten der Anfangswerte gezeigt. Im wesentlichen führt ein vertikaler Positionsfehler zu einer betragsmäßig ungenauen Korrektur des gravitativen Anteils im von der Akzelerometertriade registrierten Beschleunigungsvektor und zieht demnach eine vertikale Fehlbeschleunigung nach sich, welche die Divergenz der vertikalen Komponente von Geschwindigkeit und Position verursacht. Dieser Effekt läßt sich jedoch durch Schätzung eines vertikalen Bias bzw. eines vertikalen Skalenfaktors dämpfen. Fer-

¹⁾ Proceedings of the London Mathematical Society 3, 1869, p.226

ner wurde die Instabilität von TNDgIS bzgl. systematischer Sensorfehler nachgewiesen, was die Bedeutung einer hochgenauen Kalibrierung unterstreicht.

Mittels einer Beobachtbarkeitsanalyse wurde die Beobachtbarkeit von Anfangsorientierung und Sensordrift durch initiale statische Beobachtung der inertialen Sensordaten (autonome initiale Orientierungsbestimmung) gezeigt. Allerdings sind Anfangsorientierung und Sensorbias nicht gleichzeitig beobachtbar, wenn nur statische Sensordaten von einer Lage vorliegen. Ferner zeigte die Beobachtbarkeitsanalyse, daß in statischen Phasen der Kurswinkel (Azimut) durch Positions- oder Nullgeschwindigkeitsabgleiche nur schwach beobachtbar ist und in stationären Navigationsphasen dasselbe für die Rotation um den (dann konstanten) von der Akzelerometertriade registrierten Beschleunigungsvektor gilt. Die gewonnene Erkenntnis, daß ein fehlerhafter Kurswinkel sich erst in der dritten zeitlichen Ableitung der kartesischen Positionskoordinaten widerspiegelt, macht die Notwendigkeit von Maßnahmen zur Robustifizierung und Konvergenzbeschleunigung deutlich, welche im Rahmen der Realdatenverarbeitung realisiert wurden. So ist im statischen Fall die zusätzliche Beobachtung der Orientierung (aus der autonomen initialen Orientierungsbestimmung auf der Basis von mittels linearer Regression geschätzten Sensordaten) und im stationären Fall (Flugnavigation) die gezielte Durchführung von Manövern zur Richtungsänderung des von der Akzelerometertriade registrierten Beschleunigungsvektors bzgl. der Sensorachsen erforderlich, um eine rasche Verbesserung der initial bestimmten Näherungsorientierung zu erzielen.

Eine Auswahl von einfachen Diskretisierungsmethoden erster und zweiter Ordnung wurden zur Anwendung auf TNDgIS eingeführt. Weiterentwickelte deterministische Integrationsverfahren (z.B. klassisches Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung) ziehen eine rechenintensive Varianz-Kovarianz-Fortpflanzung nach sich und bringen bestenfalls für hochauflösende Trägheitsnavigationssysteme mit niedriger Taktung (z.B. Plattformsysteme) und ohne regelmäßige Stützung eine signifikante Genauigkeitssteigerung. Die zusammengestellte Auswahl zeitdiskreter Kalman-Filter und -Glätter ermöglicht eine optimale und individuelle Anpassung an die für die vorliegende Applikation zulässige Zeitverzögerung.

Zur Beurteilung des Einflusses von Zustandsfehlern aufgrund von Linearisierung, Diskretisierung und Quantelung der Sensorsignale wurde ein perfektes Trägheitsnavigationssystem simuliert. Dazu wurde mittels quintischer Polynome eine synthetische Trajektorie vorgegeben, in das TNDgIS eingesetzt und nach den Sensordaten analytisch aufgelöst. Damit stand eine perfekte Referenztrajektorie zum Vergleich mit der Navigationstrajektorie zur Verfügung, welche mittels (fehlerfreier oder gequantelter) Sensordaten und perfekten Anfangszuständen generiert wurde. Die Systemsimulation wurde zur Untersuchung der Auswirkung einzelner Fehlerquellen auf die Genauigkeit des Zustandsvektors genutzt. Dabei erwiesen sich Integrationsverfahren mit hohen Fehlerordnungen selbst für hochauflösende Trägheitsnavigationssysteme als unnötig. Im Gegensatz dazu erwies sich der Linearisierungsfehler – trotz der größtenteils bestehenden Linearität bzgl. der Zustände – als unerwartet groß, was i.a. die Verwendung nichtlinearer Modellgleichungen notwendig macht.

Die Verarbeitung eines vom Department of Geomatics, University of Calgary, Canada mittels eines modifizierten Litton LTN-90-100 aufgezeichneten Datensatzes mit ausführlicher Sensordatenanalyse und autonomer initialer Orientierungsbestimmung bildet den Schlußpunkt und dient der Beschreibung der Implementierung von Trägheitsnavigationssystemen und ergänzender Verfahrensweisen zur Robustifizierung und Konvergenzbeschleunigung. Dazu zählt die initial bis zur Konvergenz des Kurswinkels bei der autonomen Selbstorientierung verwendete rekursive beste lineare unverzerrte Kleinste-Quadrate-Schätzung des Signals in den sechs Sensorkanälen. Kleine Varianzen des Beobachtungsrauschens beschreiben eine hohe Sicherheit der Beobachtung und ziehen i.a. eine (relativ) rasche Konvergenz des Kurswinkels nach sich. Die Präsenz von Störungen kann bei Positions- oder Nullgeschwindigkeitsabgleichen allerdings zu un stetigen Veränderungen der Orientierung führen. Je größer die Varianzen, desto robuster, aber auch desto langsamer konvergent ist das Verhalten bei der autonomen Selbstorientierung. Je größer die Signifikanz der mittels linearer Regression geschätzten Signalanteile, desto besser stimmt die geschätzte mit der realen Orientierung überein. Systematische Fehler verursachende Störungen, nichtlineare Signalanteile und eine unzureichende Sicherheit der geschätzten linearen Signalanteile in der zur Verfügung stehenden Zeitspanne erfordern letztendlich für jede Applikation bzw. Realisierung ein individuell abgestimmtes Vorgehen. Zur Feinabstimmung kann schließlich in der verbleibenden Zeit ein Positions- oder Nullgeschwindigkeitsabgleich mit vergleichsweise moderat angenommener Sicherheit der Beobachtungen durchgeführt werden, da die Konvergenzgeschwindigkeit zur Eliminierung einer kleinen Fehlorientierung keine große Rolle mehr spielt.

Vielerorts besteht in Industrie und Forschung die Notwendigkeit, ein Trägheitsnavigationssystem zu modellieren, um aus den Kreisel- und Akzelerometerdaten die aktuelle Position, Geschwindigkeit und Orientierung des Trägheitsnavigationssystems zu schätzen und unter Einbezug einer (z.B. DGPS-)Stützung damit eine Multisensorplattform zu positionieren und zu orientieren. Die vorliegende Arbeit analysiert das Meßprinzip und liefert alle zur Auswertung notwendigen Ansätze. Offen bleiben die hardware- bzw. anwendungsspezifischen Fragen der Labor- oder Feldkalibrierung der verwendeten Sensortriaden, der modelloptimierten Versuchsplanung und der Rechenzeitorientierung für Echtzeitanwendungen.

ANHANG A:

Matrizentheorie

Satz A.1 (s. [Kielbasinski;Schwetlick(1988)]):

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so daß gilt

$$T^{-1}AT = J := \begin{pmatrix} J(\lambda_1, n_1) & & 0 \\ & J(\lambda_2, n_2) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J(\lambda_s, n_s) \end{pmatrix}$$

mit

$$J(\lambda_j, n_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_j \times n_j} \quad \text{und} \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_s.$$

Satz A.2 (s. [Kielbasinski;Schwetlick(1988)]):

Die Eigenwerte der Blockdreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & A_{ss} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$\text{mit } A_{jj} \in \mathbb{C}^{n_j \times n_j}, \quad n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$$

sind die Eigenwerte der Diagonalblöcke.

Definition A.1 (s. [F.R. Gantmacher(1986)]):

Die Unterdeterminante

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ j_1 & j_2 & \dots & j_p \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_p} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_p j_1} & a_{i_p j_2} & \dots & a_{i_p j_p} \end{vmatrix}$$

$$\text{mit } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n$$

heißt Minor p -ter Ordnung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die für $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_p = j_p$ resultierenden Minoren heißen Hauptminoren p -ter Ordnung.

Satz A.3 (s. [F.R. Gantmacher(1986)]):

Das charakteristische Polynom zu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lautet

$$\det(A - \lambda I_n) = (-\lambda)^n + a_1 (-\lambda)^{n-1} + a_2 (-\lambda)^{n-2} + \dots + a_{n-1}(-\lambda) + a_n = 0$$

mit

$$a_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}.$$

Satz A.4:

Alle Eigenwerte von $R \in SO(n)$ haben den Betrag 1. ■

Beweis von Satz A.4:

$$\begin{aligned} R \mathbf{x} &= \lambda \mathbf{x} \Rightarrow R \bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{x}} \Rightarrow \mathbf{x}^T R^T R \bar{\mathbf{x}} = \lambda \bar{\lambda} \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{x}} \\ \Rightarrow \|\mathbf{x}\|_2^2 &= |\lambda|^2 \|\mathbf{x}\|_2^2 \Rightarrow |\lambda| = 1, \text{ da } \|\mathbf{x}\|_2 \neq 0. \end{aligned}$$

q.e.d.

Satz A.5:

Die Eigenwerte von $R \in SO(3)$ lauten

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(\text{Spur } R - 1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\text{Spur } R - 1)^2 - 1}.$$

Beweis von Satz A.5:

Nach Satz A.3 lautet das charakteristische Polynom

$$\det(R - \lambda I_3) = (-\lambda)^3 + a_1(-\lambda)^2 + a_2(-\lambda) + a_3 = 0$$

$$\text{mit } a_1 = r_{11} + r_{22} + r_{33} = \text{Spur } R$$

$$a_2 = R \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = {}^1)r_{11} + r_{22} + r_{33} = \text{Spur } R$$

$$a_3 = \det R = +1$$

Damit folgt das charakteristische Polynom zu

$$\begin{aligned} -\lambda^3 + \text{Spur}(R) \lambda^2 - \text{Spur}(R) \lambda + 1 &= 0 \\ \Rightarrow -(\lambda - 1)(\lambda^2 - (\text{Spur } R - 1)\lambda + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Die Behauptung resultiert nach dem Fundamentallemma der Algebra und den bekannten Nullstellenformeln kubischer bzw. quadratischer algebraischer Gleichungen. ■

q.e.d.

Satz A.6:

Sei Ω schiefsymmetrisch, d.h. $\Omega^T = -\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Dann ist

$$e^\Omega \in SO(n). \quad \blacksquare$$

Beweis von Satz A.6:

1. zu zeigen: $e^\Omega \in O(n)$

$$e^\Omega (e^\Omega)^T = e^\Omega e^{-\Omega} = I_n$$

2. zu zeigen: $e^\Omega \in SL(n)$

Matrizen der Form $H = H_1 + i H_2$ mit $H_1^T = H_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $H_2^T = -H_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißen hermitesch.

Es gilt $H = \bar{H}^T =: H^H$. Hermitesche Matrizen haben nach [F.R. Gantmacher(1986)] ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren, reelle charakteristische Wurzeln und sind unitär-ähnlich.

¹⁾Nach [G.H. Schut(1959)] ist für $R \in SO(3)$ jeder Koeffizient gleich seiner Adjunkten, welche für r_{ij} bis auf den Faktor $(-1)^{i+j}$ mit dem entsprechenden Hauptminor übereinstimmt.

Nun ist $i\Omega$ hermitesch und hat somit n reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und n unitäre Eigenvektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$.
Aus

$$\begin{aligned} i\Omega \mathbf{x} &= \lambda \mathbf{x} \\ \Rightarrow \Omega \mathbf{x} &= (-i\lambda) \mathbf{x} \end{aligned}$$

folgt, daß Ω n imaginäre Eigenwerte und n unitäre Eigenvektoren hat.

Das charakteristische Polynom der schiefsymmetrischen Matrix Ω ist ein Polynom n -ten Grades mit reellen Koeffizienten. Damit treten die imaginären Eigenwerte nur „konjugiert imaginär“ auf, wodurch unmittelbar das Auftreten eines Eigenwertes Null einer schiefsymmetrischen Matrix ungerader Dimension folgt.

Sei X die aus den n unitären Eigenvektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ von Ω gebildete unitäre Matrix. Da hermitesche Matrizen unitär-ähnlich sind, ist

$$X^{-1}(i\Omega)X = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: \Lambda.$$

Damit folgt

$$e^{\Omega} = e^{X(-i\Lambda)X^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X(-i\Lambda)^n X^{-1} = X \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\Lambda)^n \right) X^{-1} = X e^{-i\Lambda} X^{-1}$$

und mit $e^{-i\Lambda} = \text{diag}(e^{-i\lambda_1}, \dots, e^{-i\lambda_n})$ schließlich

$$\det(e^{\Omega}) = \det(X e^{-i\Lambda} X^T) = \det(X) \det(e^{-i\Lambda}) \underbrace{\det(X^{-1})}_{\det^{-1}(X)} = e^{-i\lambda_1} \dots e^{-i\lambda_n} = +1$$

aufgrund der „konjugiert imaginär“ auftretenden Eigenwerte.

q.e.d.

Ferner ist damit bewiesen

Satz A.7:

Schiefsymmetrische Matrizen haben imaginäre Eigenwerte, ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren und geraden Rang. ■

Satz A.8:

Sei $R(t) \in SO(n)$ und $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\Omega_1^T = -\Omega_1$ und $\Omega_2^T = -\Omega_2$.

Dann ist die Lösung der $SO(n)$ -Anfangswertaufgabe

$$\dot{R}(t) = R(t) \Omega_1 + \Omega_2 R(t) \quad , \quad R(t_0) = R_0$$

für konstante Ω_1, Ω_2 gegeben durch

$$R(t) = e^{\Omega_2(t-t_0)} R_0 e^{\Omega_1(t-t_0)} \in SO(n). \quad \blacksquare$$

Beweis von Satz A.8:

Durch Anwendung des vec-Operators auf die $SO(n)$ -Anfangswertaufgabe

$$\dot{R}(t) = I_n R(t) \Omega_1 + \Omega_2 R(t) I_n \quad , \quad R(t_0) = R_0$$

folgt mit Satz B.1

$$\begin{aligned} \text{vec}(\dot{R})(t) &= (\Omega_1^T \otimes I_n) \text{vec}R(t) + (I_n \otimes \Omega_2) \text{vec}R(t) \\ &= (\Omega_1^T \otimes I_n + I_n \otimes \Omega_2) \text{vec}R(t) \\ \text{mit} \quad \text{vec}R(t_0) &= \text{vec}R_0 \end{aligned}$$

Die Lösung dieser homogenen Vektor-Anfangswertaufgabe mit konstanter Koeffizientenmatrix lautet bekanntermaßen

$$\text{vec}R(t) = e^{(\Omega_1^T \otimes I_n + I_n \otimes \Omega_2)(t-t_0)} \text{vec}R_0 \quad t \geq t_0.$$

Nach Satz B.5 folgt

$$\text{vec} R(t) = \left(e^{\Omega_1^T (t-t_0)} \otimes e^{\Omega_2 (t-t_0)} \right) \text{vec} R_0$$

und durch Verwendung von Satz B.5

$$R(t) = e^{\Omega_2(t-t_0)} R_0 e^{\Omega_1(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

$R(t) \in SO(n)$ folgt schließlich nach Satz A.6.

q.e.d.

Satz A.9 (s. [G.E. Shilov(1977)]):

Sei $A \in \text{Mat}(m, n, \mathbb{R})$ und $B \in \text{Mat}(n, p, \mathbb{R})$. Ferner sei der Rang von einer der beiden Matrizen identisch n . Dann ist der Rang des Matrizenproduktes AB gleich dem Rang der anderen Matrix, d.h.

$$\text{Rang}(A) = n \implies \text{Rang}(AB) = \text{Rang}(B)$$

$$\text{Rang}(B) = n \implies \text{Rang}(AB) = \text{Rang}(A) \quad .$$

■

ANHANG B:

vec-/veck-Operator und Kronecker Produkt

Definition B.1:

Sei $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Dann ist

$$\text{vec} A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nm}.$$

$\text{vec}^{1)}$ ist somit ein linearer Operator, der beliebige rechteckige Matrizen auf einen Vektor abbildet. Die Anwendung des vec Operators auf ein Cayley Produkt von Matrizen zeigt die enge Beziehung mit dem Kronecker Produkt.

Definition B.2:

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$.

Dann ist das Kronecker Produkt von A und B definiert durch

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}.$$

Satz B.1 (s. [W.-H. Steeb(1991)]):

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ und $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Dann gilt

$$\text{vec}(ABC) = (C^T \otimes A) \text{vec} B.$$

Definition B.3:

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ schiefssymmetrisch, d.h. $\Omega^T = -\Omega$.

Dann ist

$$\text{veck}(\Omega) = \text{veck} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega}.$$

$\text{veck}^{2)}$ ist demnach ein linearer Operator, der eine dreidimensionale schiefssymmetrische Matrix Ω derart auf den erzeugenden Vektor $\boldsymbol{\omega}$ abbildet, daß $\Omega \mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$ gilt. Andererseits ist $\Omega := \text{veck}^{-1}(\boldsymbol{\omega})$ die vom Vektor $\boldsymbol{\omega}$ erzeugte schiefssymmetrische Matrix.³⁾

¹⁾ Kurzform für "vector".

²⁾ Kurzform für "vector skew".

³⁾ An dieser Stelle sei insbesondere auf die abweichende Definition zum vec-Operator aus [H.V. Henderson; S.R. Searle(1979)] hingewiesen, der die Elemente einer schiefssymmetrischen Matrix unterhalb der Diagonalen auf einen Vektor nach $\text{veck} \Omega = (\omega_{21}, \omega_{31}, \omega_{32})^T$ abbildet und dadurch für die Gegebenheiten der Inertialnavigation nicht geeignet ist.

Satz B.2:

Sei $R \in SO(3)$ und $\Omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ schiefsymmetrisch, d.h. $\Omega^T = -\Omega$.

Dann ist

$$\text{veck}(R^T \Omega R) = R^T \boldsymbol{\omega} \quad \text{mit} \quad \text{veck}(\Omega) = \boldsymbol{\omega}.$$

Im Beweis des Satzes findet Verwendung, daß jeder Koeffizient einer dreidimensionalen orthonormalen Matrix gleich seiner Adjunkten ist (s. z.B. [G.H. Schut(1959)]).

Satz B.3:

Seien $S, \Omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ schiefsymmetrisch, d.h. $S^T = -S$ und $\Omega^T = -\Omega$.

Dann gilt

$$\text{veck}(S \Omega S) = -(\mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}) \mathbf{s} \quad \text{mit} \quad \mathbf{s} = \text{veck}(S) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\omega} = \text{veck}(\Omega).$$

Satz B.4:

Seien $S, \Omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ schiefsymmetrisch, d.h. $S^T = -S$ und $\Omega^T = -\Omega$.

Dann gilt

$$\text{veck}(S \Omega - \Omega S) = \mathbf{s} \times \boldsymbol{\omega} \quad \text{mit} \quad \mathbf{s} = \text{veck}(S) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\omega} = \text{veck}(\Omega).$$

Die Beweise der beiden Sätze folgen durch Einsetzen der Koeffizienten.

Satz B.5 (s. [W.-H. Steeb(1991)]):

Seien A und B quadratische Matrizen der Dimension n . Dann gilt

$$e^{A \otimes I_n + I_n \otimes B} = e^A \otimes e^B.$$

ANHANG C:

Zusammenhangsmatrizen

1. Definition und Eigenschaft

Definition C.1:

Sei $R_{ba} \in SO(3)$.

Dann heißt $\Omega_{ba} := R_{ba}^T \dot{R}_{ba}$ Zusammenhangsmatrix. ■

Satz C.1:

Zusammenhangsmatrizen sind schiefsymmetrisch. ■

Beweis von Satz C.1:

Sei $R_{ba} \in SO(3)$. Dann ist

$$R_{ba}^T R_{ba} = I_3 \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \right. \Rightarrow \dot{R}_{ba}^T R_{ba} + R_{ba}^T \dot{R}_{ba} = 0 \Rightarrow R_{ba}^T \dot{R}_{ba} = -\dot{R}_{ba}^T R_{ba} = -\left(R_{ba}^T \dot{R}_{ba}\right)^T$$

q.e.d.

2. Die Zusammenhangsmatrizen Ω_{ie} und Ω_{ei}

$$\Omega_{ie} := R_{ie}^T \dot{R}_{ie} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{ie} & 0 \\ \omega_{ie} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_{ie} := \text{veck}(\Omega_{ie}) = (0, 0, \omega_{ie})^T \quad (\text{C.1})$$

$$\Omega_{ei} := R_{ei}^T \dot{R}_{ei} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{ie} & 0 \\ -\omega_{ie} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_{ei} := \text{veck}(\Omega_{ei}) = (0, 0, -\omega_{ie})^T \quad (\text{C.2})$$

3. Die Zusammenhangsmatrizen Ω_{eh} und Ω_{he}

$$\Omega_{eh} := R_{eh}^T \dot{R}_{eh} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \varphi \dot{\lambda} & \cos \varphi \dot{\lambda} \\ \sin \varphi \dot{\lambda} & 0 & \dot{\varphi} \\ -\cos \varphi \dot{\lambda} & -\dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_{eh} := \text{veck}(\Omega_{eh}) = (-\dot{\varphi}, \cos \varphi \dot{\lambda}, \sin \varphi \dot{\lambda})^T \quad (\text{C.3})$$

$$\Omega_{he} := R_{he}^T \dot{R}_{he} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\lambda} & \cos \lambda \dot{\varphi} \\ -\dot{\lambda} & 0 & \sin \lambda \dot{\varphi} \\ -\cos \lambda \dot{\varphi} & -\sin \lambda \dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_{he} := \text{veck}(\Omega_{he}) = (-\sin \lambda \dot{\varphi}, \cos \lambda \dot{\varphi}, -\dot{\lambda})^T \quad (\text{C.4})$$

4. Die Zusammenhangsmatrizen Ω_{ih} und Ω_{hi}

$$\Omega_{ih} = R_{eh}^T \Omega_{ie} R_{eh} + \Omega_{eh} = \begin{pmatrix} 0 & -(\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin \varphi & (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi \\ (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \sin \varphi & 0 & \dot{\varphi} \\ -(\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi & -\dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\omega}_{ih} := \text{veck}(\Omega_{ih}) = (-\dot{\varphi}, (\omega_{ie} + \dot{\lambda}) \cos \varphi, (\omega_{ie} + \dot{\lambda}) \sin \varphi)^T \quad (\text{C.6})$$

$$\Omega_{hi} := \begin{pmatrix} 0 & \omega_{ie} + \dot{\lambda} & \cos(\omega_{ie}(t-t_0) + \lambda) \dot{\varphi} \\ -\omega_{ie} - \dot{\lambda} & 0 & \sin(\omega_{ie}(t-t_0) + \lambda) \dot{\varphi} \\ -\cos(\omega_{ie}(t-t_0) + \lambda) \dot{\varphi} & -\sin(\omega_{ie}(t-t_0) + \lambda) \dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\omega}_{hi} := \text{veck}(\Omega_{hi}) = (-\sin(\omega_{ie}(t-t_0) + \lambda) \dot{\varphi}, \cos(\omega_{ie}(t-t_0) + \lambda) \dot{\varphi}, -\omega_{ie} - \dot{\lambda})^T \quad (\text{C.8})$$

5. Die Zusammenhangsmatrizen Ω_{hb} und Ω_{bh}

$$\Omega_{hb} := \begin{pmatrix} 0 & -\cos \alpha_N \cos \alpha_R \dot{\alpha}_K - \sin \alpha_R \dot{\alpha}_N & \sin \alpha_N \dot{\alpha}_K + \dot{\alpha}_R \\ \cos \alpha_N \cos \alpha_R \dot{\alpha}_K + \sin \alpha_R \dot{\alpha}_N & 0 & \cos \alpha_N \sin \alpha_R \dot{\alpha}_K - \cos \alpha_R \dot{\alpha}_N \\ -\sin \alpha_N \dot{\alpha}_K - \dot{\alpha}_R & -\cos \alpha_N \sin \alpha_R \dot{\alpha}_K + \cos \alpha_R \dot{\alpha}_N & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

$$\Rightarrow \omega_{hb} := \text{veck}(\Omega_{hb}) = (-\cos \alpha_N \sin \alpha_R \dot{\alpha}_K + \cos \alpha_R \dot{\alpha}_N, \sin \alpha_N \dot{\alpha}_K + \dot{\alpha}_R, \cos \alpha_N \cos \alpha_R \dot{\alpha}_K + \sin \alpha_R \dot{\alpha}_N)^T \quad (\text{C.10})$$

$$\Omega_{bh} := \begin{pmatrix} 0 & \sin \alpha_N \dot{\alpha}_R + \dot{\alpha}_K & -\cos \alpha_K \cos \alpha_N \dot{\alpha}_R - \sin \alpha_K \dot{\alpha}_N \\ -\sin \alpha_N \dot{\alpha}_R - \dot{\alpha}_K & 0 & -\sin \alpha_K \cos \alpha_N \dot{\alpha}_R + \cos \alpha_K \dot{\alpha}_N \\ \cos \alpha_K \cos \alpha_N \dot{\alpha}_R + \sin \alpha_K \dot{\alpha}_N & \sin \alpha_K \cos \alpha_N \dot{\alpha}_R - \cos \alpha_K \dot{\alpha}_N & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\Rightarrow \omega_{bh} := \text{veck}(\Omega_{bh}) = (\sin \alpha_K \cos \alpha_N \dot{\alpha}_R - \cos \alpha_K \dot{\alpha}_N, -\cos \alpha_K \cos \alpha_N \dot{\alpha}_R - \sin \alpha_K \dot{\alpha}_N, -\sin \alpha_N \dot{\alpha}_R - \dot{\alpha}_K)^T \quad (\text{C.12})$$

6. Transformationsregeln

Satz C.2:

Sei $R_{ba} \in SO(3)$, $R_{ab} = R_{ba}^T$ und Ω_{ab} die zugehörige Zusammenhangsmatrix.

Dann gilt

$$\Omega_{ab} = R_{ba} \dot{R}_{ba}^T$$

■

Beweis von Satz C.2:

$$\Omega_{ab} := R_{ab}^T \dot{R}_{ab} = (R_{ba}^T)^T \dot{R}_{ba}^T = R_{ba} \dot{R}_{ba}^T$$

q.e.d.

Satz C.3:

Sei $R_{ba} \in SO(3)$, $R_{ab} = R_{ba}^T$ und Ω_{ba}, Ω_{ab} die zugehörigen Zusammenhangsmatrizen.

Dann gilt

$$R_{ba} \Omega_{ba} = -\Omega_{ab} R_{ba}$$

■

Beweis von Satz C.3:

Per Definition C.1 ist

$$\Omega_{ba} := R_{ba}^T \dot{R}_{ba} \Rightarrow \dot{R}_{ba} = R_{ba} \Omega_{ba}$$

Nach Satz C.2 ist

$$\Omega_{ab} = R_{ba} \dot{R}_{ba}^T \Rightarrow \dot{R}_{ba} = \Omega_{ab}^T R_{ba} = -\Omega_{ab} R_{ba}$$

Die Behauptung des Satzes folgt durch Gleichsetzen.

q.e.d.

Satz C.4:

Sei $R_{ba} \in SO(3)$, $R_{ab} = R_{ba}^T$ und Ω_{ba}, Ω_{ab} die zugehörigen Zusammenhangsmatrizen.

Dann gilt

$$\dot{R}_{ba} \Omega_{ba} = -\Omega_{ab} \dot{R}_{ba}$$

■

Beweis von Satz C.4:

$$\dot{R}_{ba}\Omega_{ba} = \dot{R}_{ba}R_{ba}^T\dot{R}_{ba} = (R_{ba}\dot{R}_{ba}^T)^T\dot{R}_{ba} = {}^1)\Omega_{ab}^T\dot{R}_{ba} = -\Omega_{ab}\dot{R}_{ba}$$

q.e.d.

Satz C.5:

Sei $R_{ba} \in SO(3)$, $R_{ab} = R_{ba}^T$ und Ω_{ba}, Ω_{ab} die zugehörigen Zusammenhangsmatrizen.

Dann gilt

$$R_{ba}\dot{\Omega}_{ba} = -\dot{\Omega}_{ab}R_{ba}$$

■

Beweis von Satz C.5:

Nach Satz C.3 gilt

$$R_{ba}\Omega_{ba} + \Omega_{ab}R_{ba} = 0 \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \right.$$

$$\dot{R}_{ba}\Omega_{ba} + R_{ba}\dot{\Omega}_{ba} + \dot{\Omega}_{ab}R_{ba} + \Omega_{ab}\dot{R}_{ba} = 0$$

Unter Berücksichtigung von Satz C.4 folgt die Behauptung.

q.e.d.

Satz C.6:

Seien $R_{ba}, R_{ca}, R_{cb} \in SO(3)$, $R_{ab} = R_{ba}^T$, $R_{ac} = R_{ca}^T$, $R_{bc} = R_{cb}^T$ und $\Omega_{ba}, \Omega_{ca}, \Omega_{cb}$ die zugehörigen Zusammenhangsmatrizen. Dann gilt

$$\Omega_{ab} = \Omega_{cb} + R_{cb}^T\Omega_{ac}R_{cb}$$

■

Beweis von Satz C.6:

$$\Omega_{ab} = R_{ab}^T\dot{R}_{ab} = (R_{ac}R_{cb})^T \frac{\partial}{\partial t} (R_{ac}R_{cb}) = R_{cb}^T R_{ac}^T (\dot{R}_{ac}R_{cb} + R_{ac}\dot{R}_{cb}) = R_{cb}^T\Omega_{ac}R_{cb} + \Omega_{cb}$$

q.e.d.

Satz C.7:

Seien $R_{ba}, R_{ca}, R_{cb} \in SO(3)$, $R_{ab} = R_{ba}^T$, $R_{ac} = R_{ca}^T$, $R_{bc} = R_{cb}^T$ und $\Omega_{ba}, \Omega_{ca}, \Omega_{cb}$ die zugehörigen Zusammenhangsmatrizen. Dann gilt

$$\Omega_{ac}^2 R_{cb} = R_{cb}(\Omega_{ab} - \Omega_{cb})^2$$

■

Beweis von Satz C.7:

Nach Satz C.6 ist

$$\begin{aligned} \Omega_{ac}R_{cb} &= R_{cb}(\Omega_{ab} - \Omega_{cb}) \quad | \Omega_{ac} \\ \Omega_{ac}^2 R_{cb} &= \underbrace{\Omega_{ac}R_{cb}}_{R_{cb}(\Omega_{ab} - \Omega_{cb})} (\Omega_{ab} - \Omega_{cb}) = R_{cb}(\Omega_{ab} - \Omega_{cb})^2 \\ &\text{nach Satz C.6} \end{aligned}$$

q.e.d.

¹⁾ Unter Verwendung von Satz C.2.

ANHANG D:

Aufdatierung der Orientierungsparameter

Im 2. Kapitel haben wir für verschiedene Parametrisierungen die nichtlinearen Orientierungsparameterdifferentialgleichungen hergeleitet. Durch Linearisierung im 4. Kapitel ergeben sich dann die Differentialgleichungen der additiven Orientierungsparameterinkremente.

In [K.P. Schwarz; M. Wei(1995)] und [D.H. Titterton; J.L. Weston(1997)] werden (lineare bzw. quadratische) Orientierungsdifferentialgleichungen in multiplikativen Kardan-Winkelinkrementen bzw. -störungen formuliert und in [D. Fritsch et al.(1997)], [O. Heinze(1996)], [D. Keller(1991)] und [S. Röhrich(1993)] eine *direkte zeitliche Integration* des nichtholonomen (s. [K. Magnus(1971)]) Winkelgeschwindigkeitsvektors ω_{eb} durchgeführt. Ziel des vorliegenden Anhangs ist die Diskussion der diesen Ansätzen zugrundeliegenden Annahmen und Approximationen auf Basis der korrespondierenden *nichtlinearen* Orientierungsdifferentialgleichungen. Die vorgestellten Verfahren der Orientierungsparameteraufdatierung lassen sich auf beliebige Parametrisierungen übertragen.

Anmerkung D.1: Im Gegensatz zu den Differentialgleichungen für die additive Kardan-Winkelaufdatierung scheint bei der multiplikativen Kardan-Winkelaufdatierung auf den ersten Blick die Singularität eliminiert zu sein. Da nach dem Ansatz $R_{ab} = \tilde{R}_{ab}\delta R$ bzw. $R_{ab} = \delta R\tilde{R}_{ab}$ die aktuelle Orientierung bei bekannter Aufdatierung δR nur via Kartenabbildung berechnet werden kann, ist die Singularität aus der Differentialgleichung in die Aufdatierung der globalen Kardan-Winkel gewandert. ■

1. Additive Kardan-Winkelaufdatierung

Durch Einsetzen der Parametrisierung der Rotationsmatrix R_{bh} in Nick-, Roll- und Kurswinkel nach (1.21)

$$R_{hb} = R_3(\alpha_K)R_1(\alpha_N)R_2(\alpha_R) \quad (D.1)$$

in die zugehörige SO(3)-Orientierungsdifferentialgleichung aus Kapitel 2

$$\dot{R}_{hb} = R_{hb}\Omega_{ib} - \Omega_{ih}R_{hb} \quad (D.2)$$

folgt (in Analogie zu den Kardan-Orientierungsdifferentialgleichungen aus Kapitel 2)

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_N &= \omega_{ib_1} \cos \alpha_R + \dot{\varphi} \cos \alpha_K + \omega_{ib_3} \sin \alpha_R - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi \sin \alpha_K \\ \dot{\alpha}_R &= \omega_{ib_2} - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \cos \varphi \frac{\cos \alpha_K}{\cos \alpha_N} - \dot{\varphi} \frac{\sin \alpha_K}{\cos \alpha_N} + (\omega_{ib_1} \sin \alpha_R - \omega_{ib_3} \cos \alpha_R) \tan \alpha_N \\ \dot{\alpha}_K &= \omega_{ib_3} \frac{\cos \alpha_R}{\cos \alpha_N} - \omega_{ib_1} \frac{\sin \alpha_R}{\cos \alpha_N} + (\dot{\lambda} + \omega_{ie})(\cos \varphi \cos \alpha_K \tan \alpha_N - \sin \varphi) + \dot{\varphi} \sin \alpha_K \tan \alpha_N \end{aligned} \quad (D.3)$$

bzw. in 1. Näherung

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_N &= \omega_{ib_1} - \omega_{ie} \cos \varphi \sin \alpha_K + \mathcal{O}(\alpha_R, \dot{\lambda}, \dot{\varphi}) \\ \dot{\alpha}_R &= \omega_{ib_2} - \omega_{ie} \cos \varphi \cos \alpha_K + \mathcal{O}(\alpha_N, \alpha_R, \dot{\lambda}, \dot{\varphi}) \\ \dot{\alpha}_K &= \omega_{ib_3} - \omega_{ie} \sin \varphi + \mathcal{O}(\alpha_N, \alpha_R, \dot{\lambda}, \dot{\varphi}). \end{aligned} \quad (D.4)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die direkte Integration der um die Erdrotation reduzierten Kreiselraten

$$\begin{aligned} \omega_{eb} = \omega_{ib} - R_{be}\omega_{ie} &= \begin{pmatrix} \omega_{ib_1} - \omega_{ie} \left[\cos \varphi (\sin \alpha_K \cos \alpha_R + \cos \alpha_K \sin \alpha_N \sin \alpha_R) - \sin \varphi \cos \alpha_N \sin \alpha_R \right] \\ \omega_{ib_2} - \omega_{ie} \left[\cos \varphi \cos \alpha_K \cos \alpha_N + \sin \varphi \sin \alpha_N \right] \\ \omega_{ib_3} - \omega_{ie} \left[\cos \varphi (\sin \alpha_K \sin \alpha_R - \cos \alpha_K \sin \alpha_N \cos \alpha_R) + \sin \varphi \cos \alpha_N \cos \alpha_R \right] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega_{ib_1} - \omega_{ie} \cos \varphi \sin \alpha_K + \mathcal{O}(\alpha_R, \alpha_N) \\ \omega_{ib_2} - \omega_{ie} \cos \varphi \cos \alpha_K + \mathcal{O}(\alpha_N) \\ \omega_{ib_3} - \omega_{ie} \sin \varphi + \mathcal{O}(\alpha_R, \alpha_N) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (D.5)$$

zur Gewinnung *additiver Kardan-Winkelinkremente* nur für den Fall eines *horizontierten* TNS mit *verschwindender Horizontalgeschwindigkeit* erlaubt ist. Dieser Spezialfall ist jedoch für die Zwecke der Navigation unerheblich und die direkte zeitliche Integration zum Zweck der additiven Kardan-Winkelaufdatierung deshalb in allen relevanten Fällen unzulässig.

2. Multiplikative Kardan-Winkelaufdatierung

Den Ausgangspunkt bildet die Rotationsmatrix R_{ab} , wobei diese entweder R_{eb} oder R_{hb} repräsentiert. Zur Herleitung einer Orientierungsdifferentialgleichung in multiplikativen Kardan-Winkelinkrementen starten wir von der in Kapitel 2 hergeleiteten SO(3)-Orientierungsdifferentialgleichung

$$\dot{R}_{ab}(t) = R_{ab}(t)\Omega_{ab}(t). \quad (\text{D.6})$$

$\Omega_{ab}(t)$ ist nicht direkt bekannt und muß dementsprechend auf bekannte Größen zurückgeführt werden. Dies kann entweder approximativ oder exakt geschehen, wobei die approximative Variante weit verbreitet ist.

Nach Anhang C transformiert sich die Zusammenhangsmatrix $\Omega_{ab}(t)$ exakt via

$$\Omega_{ab}(t) = \Omega_{ib}(t) - R_{ab}^T(t)\Omega_{ia}(t)R_{ab}(t). \quad (\text{D.7})$$

Anmerkung D.2: Manchmal wird jedoch zur Herleitung von Orientierungsparameterdifferentialgleichungen auch von einer Näherung $\tilde{R}_{ab}(t)$ für die Rotationsmatrix $R_{ab}(t)$ in D.7 ausgegangen, d.h.

$$\Omega_{ab}(t) \approx \Omega_{ib}(t) - \tilde{R}_{ab}^T(t)\Omega_{ia}(t)\tilde{R}_{ab}(t).$$

Im weiteren wird nur die Verwendung der exakten Zusammenhangsmatrix (D.7) weiterverfolgt. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß die Verwendung der approximativen Zusammenhangsmatrix die Kommutation eines Matrizenproduktes auf der rechten Seite der resultierenden SO(3)-Differentialgleichungen für die Aufdatierungs-Rotationsmatrix bewirken würde, woraus Abweichungen in den daraus hergeleiteten Kardan-Orientierungsdifferentialgleichungen (in den Termen 1. Ordnung) folgen würden. ■

Die Substitution der exakten Zusammenhangsmatrix (D.7) in die SO(3)-Orientierungsdifferentialgleichung (D.6) führt auf die aus Kapitel 2 bekannte Form

$$\dot{R}_{ab}(t) = R_{ab}(t)\Omega_{ib}(t) - \Omega_{ia}(t)R_{ab}(t). \quad (\text{D.8})$$

Zur Formulierung einer SO(3)-Differentialgleichung für die multiplikative Aufdatierung einer Näherungsrotation kann man von einer zeitinvariablen (z.B. Ergebnis des letzten Zeitschritts $\rightarrow$ Inkrement) oder einer zeitvariablen (z.B. um inkrementelle Rotation aufdatiertes Ergebnis des letzten Zeitschritts $\rightarrow$ Störung) Näherungsrotationsmatrix ausgehen. In den folgenden beiden Abschnitten werden beide Möglichkeiten behandelt.

Zeitinvariante Näherungsrotation $\tilde{R}_{ab} \neq \tilde{R}_{ab}(t)$

Liegt eine zeitinvariable Näherungsrotationsmatrix $\tilde{R}_{ab}$ vor, so besteht die im weiteren zu verfolgende Aufgabe in der Beschreibung der Fortpflanzung der zeitvariablen Abweichung $\delta R(t)$ von dieser Näherungsrotationsmatrix $\tilde{R}_{ab}$ in Form einer SO(3)-Differentialgleichung. Da das Matrixprodukt nicht kommutativ ist, sind Rechts- oder Linksmultiplikation, d.h. $R_{ab}(t) = \tilde{R}_{ab}\delta R(t)$ und $R_{ab}(t) = \delta R(t)\tilde{R}_{ab}$, zu unterscheiden. Die daraus resultierenden Varianten werden in den beiden nachfolgenden Abschnitten beschrieben.

Rechtsmultiplikation mit inkrementeller Rotationsmatrix $R_{ab}(t) = \tilde{R}_{ab}\delta R(t)$

Durch Substitution der Zerlegung

$$R_{ab}(t) = \tilde{R}_{ab}\delta R(t) \quad (\text{D.9})$$

in die SO(3)-Differentialgleichung (D.8) folgt die SO(3)-Differentialgleichung

$$\dot{\delta R}(t) = \delta R(t)\Omega_{ib}(t) - \tilde{R}_{ab}^T\Omega_{ia}(t)\tilde{R}_{ab}\delta R(t), \quad (\text{D.10})$$

welche die zeitliche Propagation der Abweichung $\delta R(t)$ von der Näherungsrotation $\tilde{R}_{ab}$ beschreibt.

In den folgenden beiden Abschnitten werden die durch Parametrisierung der inkrementellen Rotationsmatrix $\delta R(t)$ in Kardan-Winkeln resultierenden nichtlinearen und „linearisierten“ Orientierungsparameterdifferentialgleichungen angegeben.

Nichtlinearer Ansatz

Durch Substitution der Parametrisierung der Rotationsmatrix $\delta R(t)$ in Nick-, Roll- und Kurswinkel nach (1.21)

$$\delta R(t) = R_3(\delta\gamma(t)) R_1(\delta\alpha(t)) R_2(\delta\beta(t)) \quad (D.11)$$

in die SO(3)-Differentialgleichung (D.10) folgt unter Verwendung der Abkürzungen

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}(t) = \text{veck}(\Omega_{ib}(t)) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\omega}_{ia}^{b_0}(t) = \tilde{R}_{ab}^T \boldsymbol{\omega}_{ia}(t) = \text{veck}(\tilde{R}_{ab}^T \Omega_{ia}(t) \tilde{R}_{ab}) \quad (D.12)$$

das nichtlineare Kardan-Orientierungsdifferentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{\delta\alpha} &= \omega_{ib_1}(t) \cos \delta\beta + \omega_{ib_3}(t) \sin \delta\beta - \omega_{ia_1}^{b_0}(t) \cos \delta\gamma - \omega_{ia_2}^{b_0}(t) \sin \delta\gamma \\ \dot{\delta\beta} &= \omega_{ib_2}(t) - \omega_{ib_3}(t) \cos \delta\beta \tan \delta\alpha + \omega_{ib_1}(t) \sin \delta\beta \tan \delta\alpha - \omega_{ia_2}^{b_0}(t) \frac{\cos \delta\gamma}{\cos \delta\alpha} + \omega_{ia_1}^{b_0}(t) \frac{\sin \delta\gamma}{\cos \delta\alpha} \\ \dot{\delta\gamma} &= \omega_{ib_3}(t) \frac{\cos \delta\beta}{\cos \delta\alpha} - \omega_{ib_1}(t) \frac{\sin \delta\beta}{\cos \delta\alpha} - \omega_{ia_3}^{b_0}(t) + \omega_{ia_2}^{b_0}(t) \cos \delta\gamma \tan \delta\alpha - \omega_{ia_1}^{b_0}(t) \sin \delta\gamma \tan \delta\alpha \end{aligned} \quad (D.13)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \dot{\delta\alpha} &= \omega_{ib_1}(t) - \omega_{ia_1}^{b_0}(t) + \omega_{ib_3}(t) \delta\beta - \omega_{ia_2}^{b_0}(t) \delta\gamma + \mathcal{O}^2 \\ \dot{\delta\beta} &= \omega_{ib_2}(t) - \omega_{ia_2}^{b_0}(t) - \omega_{ib_3}(t) \delta\alpha + \omega_{ia_1}^{b_0}(t) \delta\gamma + \mathcal{O}^2 \\ \dot{\delta\gamma} &= \omega_{ib_3}(t) - \omega_{ia_3}^{b_0}(t) - \omega_{ib_1}(t) \delta\beta + \omega_{ia_2}^{b_0}(t) \delta\alpha + \mathcal{O}^2 \end{aligned} \quad (D.14)$$

Es ist zu beachten, daß die linearen Terme von der Reihenfolge der Einzeldrehungen bei der Kardan-Parametrisierung abhängen.

Linearisierter Ansatz

Unabhängig von der Reihenfolge der Einzelrotationen gilt für alle Kardan-Parametrisierungen in 1. Näherung

$$\delta R(t) \approx I_3 + \text{veck}^{-1}(\delta\boldsymbol{\alpha}(t)), \quad (D.15)$$

wodurch man jedoch die Struktur der Rotationsmatrix verliert. Mittels Substitution in die SO(3)-Differentialgleichung (D.10) folgt

$$\text{veck}^{-1}(\dot{\delta\boldsymbol{\alpha}}(t)) \approx \left[\Omega_{ib}(t) - \tilde{R}_{ab}^T \Omega_{ia}(t) \tilde{R}_{ab} \right] + \text{veck}^{-1}(\delta\boldsymbol{\alpha}(t)) \Omega_{ib}(t) - \tilde{R}_{ab}^T \Omega_{ia}(t) \tilde{R}_{ab} \text{veck}^{-1}(\delta\boldsymbol{\alpha}(t)). \quad (D.16)$$

Aufgrund der Näherung sind die beiden letzten Summanden auf der rechten Seite keine schiefsymmetrischen Matrizen. Damit lassen sich lediglich die schiefsymmetrischen Anteile dieser Terme berücksichtigen, während die symmetrischen Anteile, welche Terme 1. Ordnung in $\delta\boldsymbol{\alpha}(t)$ enthalten (!), nicht berücksichtigt werden können. Es folgt

$$\begin{aligned} \text{veck}^{-1}(\dot{\delta\boldsymbol{\alpha}}(t)) &\approx \left[\Omega_{ib}(t) - \tilde{R}_{ab}^T \Omega_{ia}(t) \tilde{R}_{ab} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \text{veck}^{-1}(\delta\boldsymbol{\alpha}(t)) \Omega_{ib}(t) - \text{veck}^{-1}(\delta\boldsymbol{\alpha}(t)) \Omega_{ib}(t) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \tilde{R}_{ab}^T \Omega_{ia}(t) \tilde{R}_{ab} \text{veck}^{-1}(\delta\boldsymbol{\alpha}(t)) - \tilde{R}_{ab} \text{veck}^{-1}(\delta\boldsymbol{\alpha}(t)) \tilde{R}_{ab}^T \Omega_{ia}(t) \right\} \end{aligned} \quad (D.17)$$

bzw. nach Anwendung des veck-Operators aus Kapitel B (s. [D. Fritsch et al.(1997)], [O. Heinze(1996)], [D. Keller(1991)] und [S. Röhrich(1993)] in 0. Näherung)

$$\dot{\delta\boldsymbol{\alpha}}(t) \approx \boldsymbol{\omega}_{ib}(t) - \tilde{R}_{ab}^T \boldsymbol{\omega}_{ia}(t) - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_{ib}(t) + \tilde{R}_{ab}^T \boldsymbol{\omega}_{ia}(t)) \times \delta\boldsymbol{\alpha}(t). \quad (D.18)$$

Der direkte Vergleich mit dem nichtlinearen Ergebnis des vorhergehenden Abschnitts zeigt, daß durch die Einführung der Approximation $\delta R(t) \approx I_3 + \text{veck}^{-1}(\delta\boldsymbol{\alpha}(t))$ Fehler in den Termen 1. Ordnung generiert werden.

Linksmultiplikation mit inkrementeller Rotationsmatrix $R_{ab}(t) = \delta R(t) \tilde{R}_{ab}$

Durch Substitution der Zerlegung

$$R_{ab}(t) = \delta R(t) \tilde{R}_{ab} \quad (D.19)$$

in die SO(3)-Differentialgleichung (D.8) folgt die SO(3)-Differentialgleichung

$$\delta R(t) = \delta R(t) \tilde{R}_{ab} \Omega_{ib}(t) \tilde{R}_{ab}^T - \Omega_{ia}(t) \delta R(t), \quad (D.20)$$

welche die zeitliche Propagation der Abweichung $\delta R(t)$ von der Näherungsrotation $\tilde{R}_{ab}$ beschreibt.

In den folgenden beiden Abschnitten werden die durch Parametrisierung der inkrementellen Rotationsmatrix $\delta R(t)$ in Kardan-Winkeln resultierenden nichtlinearen und „linearisierten“ Orientierungsparameterdifferentialgleichungen angegeben.

Nichtlinearer Ansatz

Durch Substitution der Parametrisierung der Rotationsmatrix $\delta R(t)$ in Nick-, Roll- und Kurswinkel nach (1.21)

$$\delta R(t) = R_3(\delta\gamma(t)) R_1(\delta\alpha(t)) R_2(\delta\beta(t)) \quad (D.21)$$

in die SO(3)-Differentialgleichung (D.20) folgt unter Verwendung der Größen

$$\omega_{ib}^{b_0}(t) = \tilde{R}_{ab} \omega_{ib}(t) = \text{veck}(\tilde{R}_{ab} \Omega_{ib}(t) \tilde{R}_{ab}^T) \quad \text{und} \quad \omega_{ia}(t) = \text{veck}(\Omega_{ia}(t)) \quad (D.22)$$

das nichtlineare Kardan-Orientierungsdifferentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{\delta\alpha} &= \omega_{ib_1}^{b_0}(t) \cos \delta\beta + \omega_{ib_3}^{b_0}(t) \sin \delta\beta - \omega_{ia_1}(t) \cos \delta\gamma - \omega_{ia_2}(t) \sin \delta\gamma \\ \dot{\delta\beta} &= \omega_{ib_2}^{b_0}(t) - \omega_{ib_3}^{b_0}(t) \cos \delta\beta \tan \delta\alpha + \omega_{ib_1}^{b_0}(t) \sin \delta\beta \tan \delta\alpha - \omega_{ia_2}(t) \frac{\cos \delta\gamma}{\cos \delta\alpha} + \omega_{ia_1}(t) \frac{\sin \delta\gamma}{\cos \delta\alpha} \\ \dot{\delta\gamma} &= \omega_{ib_3}^{b_0}(t) \frac{\cos \delta\beta}{\cos \delta\alpha} - \omega_{ib_1}^{b_0}(t) \frac{\sin \delta\beta}{\cos \delta\alpha} - \omega_{ia_3}(t) + \omega_{ia_2}(t) \cos \delta\gamma \tan \delta\alpha - \omega_{ia_1}(t) \sin \delta\gamma \tan \delta\alpha \end{aligned} \quad (D.23)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \dot{\delta\alpha} &= \omega_{ib_1}^{b_0}(t) - \omega_{ia_1}(t) + \omega_{ib_3}^{b_0}(t) \delta\beta - \omega_{ia_2}(t) \delta\gamma + \mathcal{O}^2 \\ \dot{\delta\beta} &= \omega_{ib_2}^{b_0}(t) - \omega_{ia_2}(t) - \omega_{ib_3}^{b_0}(t) \delta\alpha + \omega_{ia_1}(t) \delta\gamma + \mathcal{O}^2 \\ \dot{\delta\gamma} &= \omega_{ib_3}^{b_0}(t) - \omega_{ia_3}(t) - \omega_{ib_1}^{b_0}(t) \delta\beta + \omega_{ia_2}(t) \delta\alpha + \mathcal{O}^2 \end{aligned} \quad (D.24)$$

Es ist zu beachten, daß die linearen Terme von der Reihenfolge der Einzeldrehungen bei der Kardan-Parametrisierung abhängen.

Linearisierter Ansatz

Unabhängig von der Reihenfolge der Einzelrotationen gilt für alle Kardan-Parametrisierungen in 1. Näherung

$$\delta R(t) \approx I_3 + \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t)), \quad (D.25)$$

wodurch man jedoch die Struktur der Rotationsmatrix verliert. Mittels Substitution in die SO(3)-Differentialgleichung (D.20) folgt

$$\text{veck}^{-1}(\dot{\delta\alpha}(t)) \approx \left[\tilde{R}_{ab} \Omega_{ib}(t) \tilde{R}_{ab}^T - \Omega_{ia}(t) \right] + \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t)) \tilde{R}_{ab} \Omega_{ib}(t) \tilde{R}_{ab}^T - \Omega_{ia}(t) \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t)). \quad (D.26)$$

Aufgrund der Näherung sind die beiden letzten Summanden auf der rechten Seite keine schiefsymmetrischen Matrizen. Damit lassen sich lediglich die schiefsymmetrischen Anteile dieser Terme berücksichtigen, während die symmetrischen Anteile, welche Terme 1. Ordnung in $\delta\alpha(t)$ enthalten (!), nicht berücksichtigt werden können. Es folgt

$$\begin{aligned} \text{veck}^{-1}(\dot{\delta\alpha}(t)) &\approx \left[\tilde{R}_{ab} \Omega_{ib}(t) \tilde{R}_{ab}^T - \Omega_{ia}(t) \right] - \frac{1}{2} \left\{ \Omega_{ia}(t) \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t)) - \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t)) \Omega_{ia}(t) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t)) \tilde{R}_{ab} \Omega_{ib}(t) \tilde{R}_{ab}^T - \tilde{R}_{ab} \Omega_{ib}(t) \tilde{R}_{ab}^T \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t)) \right\} \end{aligned} \quad (D.27)$$

bzw. nach Anwendung des veck-Operators aus Kapitel B

$$\dot{\delta\alpha}(t) \approx \tilde{R}_{ab}\omega_{ib}(t) - \omega_{ia}(t) - \frac{1}{2} \left(\tilde{R}_{ab}\omega_{ib}(t) + \omega_{ia}(t) \right) \times \delta\alpha(t). \quad (D.28)$$

Der direkte Vergleich mit dem nichtlinearen Ergebnis des vorhergehenden Abschnitts zeigt, daß durch die Einführung der Approximation $\delta R(t) \approx I_3 + \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t))$ Fehler in den Termen 1. Ordnung generiert werden.

Zeitvariante Näherungsrotation $\tilde{R}_{ab} = \tilde{R}_{ab}(t)$

Liegt eine zeitvariable Näherungsrotationsmatrix $\tilde{R}_{ab}(t)$ vor, so besteht die im weiteren zu verfolgende Aufgabe in der Beschreibung der Fortpflanzung der zeitvariablen Störung $\delta R(t)$ dieser Näherungsrotationsmatrix $\tilde{R}_{ab}(t)$ in Form einer SO(3)-Differentialgleichung. Da das Matrixprodukt nicht kommutativ ist, sind Rechts- oder Linksmultiplikation, d.h. $R_{ab}(t) = \tilde{R}_{ab}\delta R(t)$ und $R_{ab}(t) = \delta R(t)\tilde{R}_{ab}$, zu unterscheiden. Die daraus resultierenden Varianten werden in den beiden nachfolgenden Abschnitten beschrieben.

Rechtsmultiplikation mit inkrementeller Rotationsmatrix $R_{ab}(t) = \tilde{R}_{ab}(t)\delta R(t)$

Durch Substitution der Zerlegung

$$R_{ab}(t) = \tilde{R}_{ab}(t) \delta R(t) \quad (D.29)$$

in die SO(3)-Differentialgleichung (D.8) folgt unter der Annahme, daß die zeitvariable Näherungsrotation $\tilde{R}_{ab}(t)$ Lösung der SO(3)-Differentialgleichung

$$\dot{\tilde{R}}_{ab}(t) = \tilde{R}_{ab}(t)\Omega_{ib} - \Omega_{ia}\tilde{R}_{ab}(t) \quad (D.30)$$

mit den konstanten Zusammenhangsmatrizen Ω_{ib} und Ω_{ia} ist, nach kurzer Rechnung die SO(3)-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & \underbrace{\tilde{R}_{ab}(t)\Omega_{ib} - \Omega_{ia}\tilde{R}_{ab}(t)}_{\dot{\tilde{R}}_{ab}(t)} \delta R(t) + \tilde{R}_{ab}(t) \delta \dot{R}(t) = \tilde{R}_{ab}(t) \delta R(t)\Omega_{ib}(t) - \Omega_{ia}(t)\tilde{R}_{ab}(t) \delta R(t) \\ \Rightarrow & \boxed{\delta \dot{R}(t) = \delta R(t)\Omega_{ib}(t) - \left[\Omega_{ib} + \tilde{R}_{ab}^T(t)(\Omega_{ia}(t) - \Omega_{ia})\tilde{R}_{ab}(t) \right] \delta R(t)}, \end{aligned} \quad (D.31)$$

welche die zeitliche Propagation der Abweichung $\delta R(t)$ von der Näherungsrotation $\tilde{R}_{ab}(t)$ beschreibt.

In den folgenden beiden Abschnitten werden die durch Parametrisierung der inkrementellen Rotationsmatrix $\delta R(t)$ in Kardan-Winkeln resultierenden nichtlinearen und „linearisierten“ Orientierungsparameterdifferentialgleichungen angegeben.

Nichtlinearer Ansatz

Durch Substitution der Parametrisierung der Rotationsmatrix $\delta R(t)$ in Nick-, Roll- und Kurswinkel nach (1.21)

$$\delta R(t) = R_3(\delta\gamma(t)) R_1(\delta\alpha(t)) R_2(\delta\beta(t)) \quad (D.32)$$

in die SO(3)-Differentialgleichung (D.31) folgt unter Verwendung der Größen

$$\begin{aligned} \omega_{ib}(t) &= \text{veck}(\Omega_{ib}(t)) \quad , \quad \omega_{ia}^{b_0}(t) = \tilde{R}_{ab}^T(t)\omega_{ia}(t) = \text{veck}(\tilde{R}_{ab}^T(t)\Omega_{ia}(t)\tilde{R}_{ab}(t)), \\ \omega_{ib} &= \text{veck}(\Omega_{ib}) \quad , \quad \omega_{ia}^{b_0} = \tilde{R}_{ab}^T(t)\omega_{ia} = \text{veck}(\tilde{R}_{ab}^T(t)\Omega_{ia}\tilde{R}_{ab}(t)), \\ \delta\omega_{ib}(t) &= \omega_{ib}(t) - \omega_{ib} \quad , \quad \delta\omega_{ia}^{b_0}(t) = \omega_{ia}^{b_0}(t) - \omega_{ia}^{b_0} \end{aligned} \quad (D.33)$$

das nichtlineare Kardan-Orientierungsdifferentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{\delta\alpha} &= \omega_{ib_1}(t) \cos \delta\beta + \omega_{ib_3}(t) \sin \delta\beta - (\omega_{ib_1} + \delta\omega_{ia_1}^{b_0}(t)) \cos \delta\gamma - (\omega_{ib_2} + \delta\omega_{ia_2}^{b_0}(t)) \sin \delta\gamma \\ \dot{\delta\beta} &= \omega_{ib_2}(t) + \omega_{ib_1}(t) \sin \delta\beta \tan \delta\alpha - \omega_{ib_3}(t) \cos \delta\beta \tan \delta\alpha \\ &\quad - (\omega_{ib_2} + \delta\omega_{ia_2}^{b_0}(t)) \frac{\cos \delta\gamma}{\cos \delta\alpha} + (\omega_{ib_1} + \delta\omega_{ia_1}^{b_0}(t)) \frac{\sin \delta\gamma}{\cos \delta\alpha} \\ \dot{\delta\gamma} &= \omega_{ib_3}(t) \frac{\cos \delta\beta}{\cos \delta\alpha} - \omega_{ib_1}(t) \frac{\sin \delta\beta}{\cos \delta\alpha} \\ &\quad - (\omega_{ib_3} + \delta\omega_{ia_3}^{b_0}(t)) + (\omega_{ib_2} + \delta\omega_{ia_2}^{b_0}(t)) \cos \delta\gamma \tan \delta\alpha - (\omega_{ib_1} + \delta\omega_{ia_1}^{b_0}(t)) \sin \delta\gamma \tan \delta\alpha \end{aligned} \quad (D.34)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= \omega_{ib_1}(t) - (\omega_{ib_1} + \delta\omega_{ia_1}^{b_0}(t)) + \omega_{ib_3}(t)\delta\beta - (\omega_{ib_2} + \delta\omega_{ia_2}^{b_0}(t))\delta\gamma + \mathcal{O}^2 \\
&= \delta\omega_{ib_1}(t) - \delta\omega_{ia_1}^{b_0}(t) + (\omega_{ib_3}\delta\beta - \omega_{ib_2}\delta\gamma) + (\delta\omega_{ib_3}(t)\delta\beta - \delta\omega_{ia_2}^{b_0}(t)\delta\gamma) + \mathcal{O}^2 \\
\dot{\beta} &= \omega_{ib_2}(t) - (\omega_{ib_2} + \delta\omega_{ia_2}^{b_0}(t)) - \omega_{ib_3}(t)\delta\alpha + (\omega_{ib_1} + \delta\omega_{ia_1}^{b_0}(t))\delta\gamma + \mathcal{O}^2 \\
&= \delta\omega_{ib_2}(t) - \delta\omega_{ia_2}^{b_0}(t) + (\omega_{ib_1}\delta\gamma - \omega_{ib_3}\delta\alpha) - (\delta\omega_{ib_3}(t)\delta\alpha - \delta\omega_{ia_1}^{b_0}(t)\delta\gamma) + \mathcal{O}^2 \\
\dot{\gamma} &= \omega_{ib_3}(t) - (\omega_{ib_3} + \delta\omega_{ia_3}^{b_0}(t)) - \omega_{ib_1}(t)\delta\beta + (\omega_{ib_2} + \delta\omega_{ia_2}^{b_0}(t))\delta\alpha + \mathcal{O}^2 \\
&= \delta\omega_{ib_3}(t) - \delta\omega_{ia_3}^{b_0}(t) + (\omega_{ib_2}\delta\alpha - \omega_{ib_1}\delta\beta) + (\delta\omega_{ia_2}^{b_0}(t)\delta\alpha - \delta\omega_{ib_1}(t)\delta\beta) + \mathcal{O}^2
\end{aligned} \tag{D.35}$$

Es ist zu beachten, daß die linearen Terme von der Reihenfolge der Einzeldrehungen bei der Kardan-Parametrisierung abhängen.

Linearisierter Ansatz

Unabhängig von der Reihenfolge der Einzelrotationen gilt für alle Kardan-Parametrisierungen in 1. Näherung

$$\delta R(t) \approx I_3 + \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t)), \tag{D.36}$$

wodurch man jedoch die Struktur der Rotationsmatrix verliert. Mittels Substitution in die SO(3)-Differentialgleichung (D.31) folgt

$$\begin{aligned}
\text{veck}^{-1}(\dot{\delta\alpha}(t)) &\approx \left[\delta\Omega_{ib}(t) - \tilde{R}_{ab}^T(t)\delta\Omega_{ia}(t)\tilde{R}_{ab}(t) \right] + \{ \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t))\Omega_{ib} - \Omega_{ib}\text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t)) \} \\
&\quad + \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t))\delta\Omega_{ib}(t) - \tilde{R}_{ab}^T(t)\delta\Omega_{ia}(t)\tilde{R}_{ab}(t)\text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t))
\end{aligned} \tag{D.37}$$

Aufgrund der Näherung sind die beiden letzten Summanden auf der rechten Seite keine schiefsymmetrischen Matrizen. Damit lassen sich lediglich die schiefsymmetrischen Anteile dieser Terme berücksichtigen, während die symmetrischen Anteile, welche Terme 1. Ordnung in $\delta\alpha(t)$ enthalten (!), nicht berücksichtigt werden können. Es folgt

$$\begin{aligned}
\text{veck}^{-1}(\dot{\delta\alpha}(t)) &\approx \left[\delta\Omega_{ib}(t) - \tilde{R}_{ab}^T(t)\delta\Omega_{ia}(t)\tilde{R}_{ab}(t) \right] + \{ \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t))\Omega_{ib} - \Omega_{ib}\text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t)) \} \\
&\quad + \frac{1}{2} \{ \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t))\delta\Omega_{ib}(t) - \delta\Omega_{ib}(t)\delta\alpha(t) \} \\
&\quad - \frac{1}{2} \{ \tilde{R}_{ab}^T(t)\delta\Omega_{ia}(t)\tilde{R}_{ab}(t)\text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t)) - \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t))\tilde{R}_{ab}^T(t)\delta\Omega_{ia}(t)\tilde{R}_{ab}(t) \}
\end{aligned} \tag{D.38}$$

bzw. nach Anwendung des veck-Operators aus Kapitel B

$$\dot{\delta\alpha}(t) \approx \delta\omega_{ib}(t) - \tilde{R}_{ab}^T(t)\delta\omega_{ia}(t) + \delta\alpha(t) \times \omega_{ib} + \frac{1}{2}\delta\alpha(t) \times (\delta\omega_{ib}(t) + \tilde{R}_{ab}(t)\delta\omega_{ia}(t)). \tag{D.39}$$

Der direkte Vergleich mit dem nichtlinearen Ergebnis des vorhergehenden Abschnitts zeigt, daß durch die Einführung der Approximation $\delta R(t) \approx I_3 + \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t))$ Fehler in den Termen 1. Ordnung in $\delta\alpha(t)$ generiert werden.

Linksmultiplikation mit inkrementeller Rotationsmatrix $R_{ab}(t) = \delta R(t)\tilde{R}_{ab}(t)$

Durch Substitution der Zerlegung

$$R_{ab}(t) = \delta R(t)\tilde{R}_{ab}(t) \tag{D.40}$$

in die SO(3)-Differentialgleichung (D.8) folgt unter der Annahme, daß die zeitvariable Näherungsrotation $\tilde{R}_{ab}(t)$ Lösung der SO(3)-Differentialgleichung

$$\dot{\tilde{R}}_{ab}(t) = \tilde{R}_{ab}(t)\Omega_{ib} - \Omega_{ia}\tilde{R}_{ab}(t) \tag{D.41}$$

mit den konstanten Zusammenhangsmatrizen Ω_{ib} und Ω_{ia} ist, nach kurzer Rechnung die SO(3)-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \delta \dot{R}(t) \tilde{R}_{ab}(t) + \delta R(t) \underbrace{\tilde{R}_{ab}(t) \Omega_{ib} - \Omega_{ia} \tilde{R}_{ab}(t)}_{\dot{\tilde{R}}_{ab}(t)} &= \delta R(t) \tilde{R}_{ab}(t) \Omega_{ib}(t) - \Omega_{ia}(t) \delta R(t) \tilde{R}_{ab}(t) \\ \Rightarrow \delta \dot{R}(t) &= \delta R(t) \left[\tilde{R}_{ab}(t) (\Omega_{ib}(t) - \Omega_{ib}) \tilde{R}_{ab}^T(t) + \Omega_{ia} \right] - \Omega_{ia}(t) \delta R(t), \end{aligned} \quad (D.42)$$

welche die zeitliche Propagation der Abweichung $\delta R(t)$ von der Näherungsrotation $\tilde{R}_{ab}(t)$ beschreibt.

In den folgenden beiden Abschnitten werden die durch Parametrisierung der inkrementellen Rotationsmatrix $\delta R(t)$ in Kardan-Winkeln resultierenden nichtlinearen und „linearisierten“ Orientierungsparameterdifferentialgleichungen angegeben.

Nichtlinearer Ansatz

Durch Substitution der Parametrisierung der Rotationsmatrix $\delta R(t)$ in Nick-, Roll- und Kurswinkel nach (1.21)

$$\delta R(t) = R_3(\delta\gamma(t)) R_1(\delta\alpha(t)) R_2(\delta\beta(t)) \quad (D.43)$$

in die SO(3)-Differentialgleichung (D.42) folgt unter Verwendung der Größen

$$\begin{aligned} \omega_{ib}^{b_0}(t) &= \tilde{R}_{ab}^T(t) \omega_{ib}(t) = \text{veck}(\tilde{R}_{ab}(t) \Omega_{ib}(t) \tilde{R}_{ab}^T(t)) & \omega_{ia}(t) &= \text{veck}(\Omega_{ia}(t)), \\ \omega_{ib}^{b_0} &= \tilde{R}_{ab}^T(t) \omega_{ib} = \text{veck}(\tilde{R}_{ab}(t) \Omega_{ib} \tilde{R}_{ab}^T(t)) & \omega_{ia} &= \text{veck}(\Omega_{ia}), \\ \delta \omega_{ib}^{b_0}(t) &= \omega_{ib}^{b_0}(t) - \omega_{ib}^{b_0} & \delta \omega_{ia}(t) &= \omega_{ia}(t) - \omega_{ia} \end{aligned} \quad (D.44)$$

das nichtlineare Kardan-Orientierungsdifferentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{\delta\alpha} &= (\delta\omega_{ib_1}^{b_0}(t) + \omega_{ia_1}) \cos \delta\beta + (\delta\omega_{ib_3}^{b_0}(t) + \omega_{ia_3}) \sin \delta\beta - \omega_{ia_1}(t) \cos \delta\gamma - \omega_{ia_2}(t) \sin \delta\gamma \\ \dot{\delta\beta} &= (\delta\omega_{ib_2}^{b_0}(t) + \omega_{ia_2}) + (\delta\omega_{ib_1}^{b_0}(t) + \omega_{ia_1}) \sin \delta\beta \tan \delta\alpha - (\delta\omega_{ib_3}^{b_0}(t) + \omega_{ia_3}) \cos \delta\beta \tan \delta\alpha \\ &\quad - \omega_{ia_2}(t) \frac{\cos \delta\gamma}{\cos \delta\alpha} + \omega_{ia_1}(t) \frac{\sin \delta\gamma}{\cos \delta\alpha} \\ \dot{\delta\gamma} &= (\delta\omega_{ib_3}^{b_0}(t) + \omega_{ia_3}) \frac{\cos \delta\beta}{\cos \delta\alpha} - (\delta\omega_{ib_1}^{b_0}(t) + \omega_{ia_1}) \frac{\sin \delta\beta}{\cos \delta\alpha} \\ &\quad - \omega_{ia_3}(t) + \omega_{ia_2}(t) \cos \delta\gamma \tan \delta\alpha - \omega_{ia_1}(t) \sin \delta\gamma \tan \delta\alpha \end{aligned} \quad (D.45)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \dot{\delta\alpha} &= (\delta\omega_{ib_1}^{b_0}(t) + \omega_{ia_1}) + (\delta\omega_{ib_3}^{b_0}(t) + \omega_{ia_3}) \delta\beta - \omega_{ia_1}(t) - \omega_{ia_2}(t) \delta\gamma + \mathcal{O}^2 \\ &= (\delta\omega_{ib_1}^{b_0}(t) - \delta\omega_{ia_1}(t)) + (\omega_{ia_3} \delta\beta - \omega_{ia_2} \delta\gamma) + (\delta\omega_{ib_3}^{b_0}(t) \delta\beta - \delta\omega_{ia_2}(t) \delta\gamma) + \mathcal{O}^2 \\ \dot{\delta\beta} &= (\delta\omega_{ib_2}^{b_0}(t) + \omega_{ia_2}) - (\delta\omega_{ib_3}^{b_0}(t) + \omega_{ia_3}) \delta\alpha - \omega_{ia_2}(t) + \omega_{ia_1}(t) \delta\gamma + \mathcal{O}^2 \\ &= (\delta\omega_{ib_2}^{b_0}(t) - \delta\omega_{ia_2}(t)) + (\omega_{ia_1} \delta\gamma - \omega_{ia_3} \delta\alpha) + (\delta\omega_{ia_1}(t) \delta\gamma - \delta\omega_{ib_3}^{b_0}(t) \delta\alpha) + \mathcal{O}^2 \\ \dot{\delta\gamma} &= (\delta\omega_{ib_3}^{b_0}(t) + \omega_{ia_3}) - (\delta\omega_{ib_1}^{b_0}(t) + \omega_{ia_1}) \delta\beta - \omega_{ia_3}(t) + \omega_{ia_2}(t) \delta\alpha + \mathcal{O}^2 \\ &= (\delta\omega_{ib_3}^{b_0}(t) - \delta\omega_{ia_3}(t)) + (\omega_{ia_2} \delta\alpha - \omega_{ia_1} \delta\beta) + (\delta\omega_{ia_2}(t) \delta\alpha - \delta\omega_{ib_1}^{b_0}(t) \delta\beta) + \mathcal{O}^2. \end{aligned} \quad (D.46)$$

Es ist zu beachten, daß die linearen Terme von der Reihenfolge der Einzeldrehungen bei der Kardan-Parametrisierung abhängen.

Linearisierter Ansatz

Unabhängig von der Reihenfolge der Einzelrotationen gilt für alle Kardan-Parametrisierungen in 1. Näherung

$$\delta R(t) \approx I_3 + \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t)), \quad (D.47)$$

wodurch man jedoch die Struktur der Rotationsmatrix verliert. Mittels Substitution in die SO(3)-Differentialgleichung (D.42) folgt

$$\begin{aligned} \text{veck}^{-1}(\delta\dot{\alpha}(t)) &\approx \left[\tilde{R}_{ab}(t) \delta\Omega_{ib}(t) \tilde{R}_{ab}^T(t) - \delta\Omega_{ia}(t) \right] \\ &\quad + \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t)) \left[\tilde{R}_{ab}(t) \delta\Omega_{ib}(t) \tilde{R}_{ab}^T(t) + \Omega_{ia} \right] - \Omega_{ia}(t) \text{veck}^{-1}(\delta\alpha(t)) \end{aligned} \quad (D.48)$$

Aufgrund der Näherung sind die beiden letzten Summanden auf der rechten Seite keine schiefsymmetrischen Matrizen. Damit lassen sich lediglich die schiefsymmetrischen Anteile dieser Terme berücksichtigen, während die symmetrischen Anteile, welche Terme 1. Ordnung in $\delta\boldsymbol{\alpha}(t)$ enthalten (!), nicht berücksichtigt werden können. Es folgt

$$\begin{aligned} \text{veck}^{-1}(\delta\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)) &\approx \left[\tilde{R}_{ab}(t)\delta\Omega_{ib}(t)\tilde{R}_{ab}^T(t) - \delta\Omega_{ia}(t) \right] + \left\{ \text{veck}^{-1}(\delta\boldsymbol{\alpha}(t))\Omega_{ia} - \Omega_{ia}\text{veck}^{-1}(\delta\boldsymbol{\alpha}(t)) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \text{veck}^{-1}(\delta\boldsymbol{\alpha}(t)) \tilde{R}_{ab}(t)\delta\Omega_{ib}(t)\tilde{R}_{ab}^T(t) - \tilde{R}_{ab}(t)\delta\Omega_{ib}(t)\tilde{R}_{ab}^T(t) \text{veck}^{-1}(\delta\boldsymbol{\alpha}(t)) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \delta\Omega_{ia}(t) \text{veck}^{-1}(\delta\boldsymbol{\alpha}(t)) - \text{veck}^{-1}(\delta\boldsymbol{\alpha}(t)) \delta\Omega_{ia}(t) \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.49})$$

bzw. nach Anwendung des veck-Operators aus Kapitel B (s.a. [K.P. Schwarz; M. Wei(1995)] und [D.H. Titterton; J.L. Weston(1997)])

$$\delta\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) \approx \tilde{R}_{ab}(t)\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}(t) - \delta\boldsymbol{\omega}_{ia}(t) + \delta\boldsymbol{\alpha}(t) \times \boldsymbol{\omega}_{ia} + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\alpha}(t) \times \left(\tilde{R}_{ab}(t)\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{ia}(t) \right). \quad (\text{D.50})$$

Der direkte Vergleich mit dem nichtlinearen Ergebnis des vorhergehenden Abschnitts zeigt, daß durch die Einführung der Approximation $\delta R(t) \approx I_3 + \text{veck}^{-1}(\delta\boldsymbol{\alpha}(t))$ Fehler in den Termen 1. Ordnung in $\delta\boldsymbol{\alpha}(t)$ generiert werden.

Anmerkung D.3: In [K.P. Schwarz; M. Wei(1995)] und [D.H. Titterton; J.L. Weston(1997)] wird vor Anwendung des veck-Operators der Term $\text{veck}^{-1}(\delta\boldsymbol{\alpha}(t)) \left[\tilde{R}_{ab}(t)\delta\Omega_{ib}(t)\tilde{R}_{ab}^T(t) - \delta\Omega_{ia} \right]$ als Term „zweiter Ordnung“ vernachlässigt, wodurch alle verbleibenden Terme schiefsymmetrische Struktur aufweisen und in der resultierenden Vektordifferentialgleichung (D.50) der letzte Summand auf der rechten Seite $\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\alpha}(t) \times \left(\tilde{R}_{ab}(t)\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}_{ia}(t) \right)$ entfällt. ■

ANHANG E:

Winkelgeschwindigkeitsvektoren

Wie in Kapitel 2 gezeigt wurde, sind $SO(3)$ -Differentialgleichungen von der Form

$$\begin{aligned}\dot{R}_{ab} &= R_{ab} \Omega_{ab} & (2 \text{ kartesische Bezugssysteme}) \\ \dot{R}_{ab} &= R_{ab} \Omega_{cb} - \Omega_{ca} R_{ab} & (3 \text{ kartesische Bezugssysteme}).\end{aligned}$$

Als Lösung dieser matrixwertigen Differentialgleichung folgt – bei gegebenen Zusammenhangsmatrizen und bekanntem Anfangswert – die Orientierung in Gestalt einer Rotationsmatrix als Funktion der Zeit. Gelegentlich tritt jedoch auch die inverse Aufgabenstellung auf, bei der bei gegebener Rotationsmatrix bzw. bei gegebenen Orientierungsparametern die Zusammenhangsmatrizen bzw. in vektorieller Form die Winkelgeschwindigkeitsvektoren nach

$$\begin{aligned}\Omega_{ab} &= R_{ab}^T \dot{R}_{ab} & \Leftrightarrow & \quad \omega_{ab} = \text{veck}(R_{ab}^T \dot{R}_{ab}) \\ \Omega_{cb} &= R_{ab}^T \dot{R}_{ab} + R_{ab}^T \Omega_{ca} R_{ab} & \Leftrightarrow & \quad \omega_{cb} = \omega_{ab} + R_{ba} \omega_{ca}\end{aligned}$$

zu berechnen sind. Der folgende Satz dient der Bereitstellung der dafür benötigten Winkelgeschwindigkeitsvektoren $\omega_{ab} = \text{veck}(R_{ab}^T \dot{R}_{ab})$ als Funktion der im 2. Kapitel vorgestellten Orientierungsparameter.

Satz E.1:

Seien $R_K(\alpha, \beta, \gamma), R_E(\psi, \vartheta, \eta), R_{LBS}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), R_C(s_1, s_2, s_3), R_H(q_0, q_1, q_2, q_3), R_D(\alpha, n_1, n_2, n_3) \in SO(3)$. Dann lautet der über die $SO(3)$ -Differentialgleichung

$$\dot{R} = R \Omega, \quad \Omega^T = -\Omega$$

zugeordnete Winkelgeschwindigkeitsvektor $\omega = \text{veck}(R^T \dot{R})$ für die

- Kardan-Parametrisierung:

$$\omega = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma \dot{\alpha} + \sin \gamma \dot{\beta} \\ -\cos \beta \sin \gamma \dot{\alpha} + \cos \gamma \dot{\beta} \\ \sin \beta \dot{\alpha} + \dot{\gamma} \end{pmatrix}$$

- Euler-Parametrisierung:

$$\omega = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \eta \dot{\psi} + \cos \eta \dot{\vartheta} \\ \sin \vartheta \cos \eta \dot{\psi} - \sin \eta \dot{\vartheta} \\ \cos \vartheta \dot{\psi} + \dot{\eta} \end{pmatrix}$$

- Laning-Bortz-Stuelpnagel-Parametrisierung:

$$\omega = \frac{\langle \sigma | \dot{\sigma} \rangle}{\sigma^2} \left(1 - \frac{\sin \sigma}{\sigma} \right) \sigma + \frac{\sin \sigma}{\sigma} \dot{\sigma} - \frac{1 - \cos \sigma}{\sigma^2} \sigma \times \dot{\sigma} \quad \text{mit } \sigma = \|\sigma\|_2 \quad \text{und } \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$$

- Cayley-Parametrisierung:

$$\omega = \frac{2}{1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} \begin{pmatrix} s_3 \dot{s}_2 - s_2 \dot{s}_3 + \dot{s}_1 \\ s_1 \dot{s}_3 - s_3 \dot{s}_1 + \dot{s}_2 \\ s_2 \dot{s}_1 - s_1 \dot{s}_2 + \dot{s}_3 \end{pmatrix}$$

- Hamilton-Parametrisierung:

$$\omega = 2(q_0 \dot{\mathbf{q}} - \dot{q}_0 \mathbf{q} - \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}) \quad \text{mit } \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$$

- Drehachse/-winkel-Parametrisierung:

$$\omega = \dot{\alpha} \mathbf{n} + \sin \alpha \dot{\mathbf{n}} - (1 - \cos \alpha) \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}$$

Literaturverzeichnis

- M. Abramowitz; I.A. Stegun : Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, 1972
- N. Ahlbehrendt; V. Kempe : Analyse stochastischer Systeme, Oldenbourg Verlag, 1984
- B.D.O. Anderson; J.B. Moore : Optimal Filtering, Prentice-Hall, 1979
- O. Anderson; W. Popp; M. Schaffranek; D. Steinmetz; H. Stenger : Schätzen und Testen, Springer, 1997
- T.W. Anderson : The Statistical Analysis of Time Series, Wiley, 1994
- C.F. Ansley; R. Kohn : Estimation, Filtering and Smoothing in State Space Models with Incompletely Specified Initial Conditions, Ann. Statist. 13, 1985, pp. 1286-1316
- L.I. Aramanovitch : On the Application of Quaternions for Determination of Spacecraft Initial Attitude and Velocity in Strap-down Navigation, manuscripta geodaeica, No. 17, 1992, pp. 342-350
- V.I. Arnol'd : Gewöhnliche Differentialgleichungen, DVW, 1991
- M. Artin : Algebra, Birkhäuser, 1993
- M. Bäumker : GPS/Inertial – eine „harmonische Mixtur“, in: Festschrift für W. Torge, Wiss. Arb. der Fachrichtung Vermessungswesen der Univ. Hannover, Nr. 172, 1991, S. 47-62
- I.Y. Bar-Itzhack : Navigation Computation in Terrestrial Strapdown Inertial Navigation Systems, IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 13, No. 6, 1977, pp. 679-689
- I.Y. Bar-Itzhack; B. Porat : Azimuth Observability Enhancement During Inertial Navigation In-Flight Alignment, J. Guidance and Control, Vol. 3, No. 4, 1980, pp. 337-344
- W. Bell; S. Hillmer : Initializing the Kalman Filter for Nonstationary Time Series Models, J. Time Ser. Anal. 12, 1991, pp. 283-300
- R. Bellman : Stability Theory of Differential Equations, Dover Publications Inc., 1969
- J. Beyer : Nichtlineare Schätzung inertialer Navigationsgrößen durch die fehlertolerante Verarbeitung zusätzlicher Stützinformation, Dissertation, TH Darmstadt, 1993
- J. Birk : Rechnergestützte Analyse und Lösung nichtlinearer Beobachtungsaufgaben, Reihe 8, Nr. 294, VDI Verlag, 1992
- J. Birk; M. Zeitz : Computer-Aided Analysis of Nonlinear Observation Problems, IFAC-Symposium Nonlinear Control System Design, Bordeaux/France, 1992
- B.G. Bomford : Geodesy, Clarendon Press, 1962
- J.E. Bortz : A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 7, No. 1, 1971, pp. 61-66
- G.E.P. Box; G.M. Jenkins; G.C. Reinsel : Time Series Analysis, Forecasting and Control, Prentice Hall, 1994
- K.R. Britting : Inertial Navigation Systems Analysis, Wiley, 1971
- A. van Bronkhorst : Strapdown System Algorithms, AGARD Lecture Series No. 95, 1978
- S.D. Brown; S.C. Rutan : Adaptive Kalman Filtering, J. of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 90, N. 6, 1985, pp. 403-407
- C. Broxmeyer : Inertial Navigation Systems, McGraw-Hill, 1964
- R.S. Bucy : Optimal Filtering for Correlated Noise, J. of Mathematical Analysis and Applications 20, 1967, pp. 1-8
- R.S. Bucy; P.D. Joseph : Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance, Chelsea Publishing Company, 1987
- J.V. Candy : Signal Processing, McGraw-Hill, 1988
- J. Carr : Applications of Centre Manifold Theory, Springer-Verlag, 1981
- C. Chatfield : The Analysis of Time Series, Chapman & Hall, 1994
- H.-F. Chen; P.R. Kumar; J.H. van Schuppen : On Kalman Filtering for Conditionally Gaussian Systems with Random Matrices, Systems & Control Letters 13, 1989, pp. 397-404
- W. Chen; P.A. Cross : Integration of GPS and an Inertial System for Precise Surveying Applications, Survey Review, 30, 1990, pp. 375-395
- B.H. Chovitz : Parameters of Common Relevance of Astronomy, Geodesy and Geodynamics, Bulletin Geodesique: The Geodesists Handbook 1988, Volume 62, No.3, 1988
- C.K. Chui; G. Chen : Linear Systems and Optimal Control, Springer, 1989
- C.K. Chui; G. Chen : Kalman Filtering with Real-Time Applications, Springer, 1991
- J. Czompo : Use of Spectral Methods in Strapdown ISS Data Processing, Bulletin Geodesique 65, 1991, pp. 122-129
- J.H. Dambeck : Observability and Controllability Analysis for a Strapdown Inertial Survey System, in: K. Linkwitz; U. Hangleiter (eds.): Proceedings of the 3rd Int. Workshop on High Precision Navigation, University of Stuttgart, Dümmler, 1995, pp. 149-158

- W. Dejun; R. Tianmin; D. Bin** : Research on Closed-Loop Kalman-Filter Technology of SINS/GPS for Surveying, IAG Symp. 107, 1990, pp. 261-272
- H. Denker** : Hochauflösende regionale Schwerefeldbestimmung mit gravimetrischen und topographischen Daten, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 156, Hannover 1988
- E.J. Dudewicz; S.N. Mishra** : Modern Mathematical Statistics, Wiley, 1988
- S. Engell** : Entwurf nichtlinearer Regelungen, Oldenbourg-Verlag, 1995
- N. Euler; W.-H. Steeb** : Continuous Symmetries, Lie Algebras and Differential Equations, BI, 1992
- W. von Fabeck** : Kreiselgeräte, Vogel-Verlag, 1980
- J.L. Farrell** : Integrated Aircraft Navigation, Academic Press, 1976
- E. Fehlberg** : Klassische Runge-Kutta-Formeln fünfter und siebenter Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle, Computing 4, 1969, S. 93-106
- R. Forsberg** : Gravity-Induced Position Errors in Inertial Surveying, Proceedings of the Third Int. Symposium on Inertial Technology for Surveying and Geodesy, K.P. Schwarz (ed.), Banff, Sept. 16-20, 1985, pp. 173-186
- R. Forsberg; M.G. Sideris** : On Topographic Effects in Gravity Field Approximation, Festschrift to Torben Krarup, Geodætisk Institut Meddelelse No. 58, 1989
- D. Fritsch; M. Cramer; M. Englich; N. Haala; F. Ackermann** : GPS/INS in der Photogrammetrie, Skript zum Tutorium im Rahmen der 46. Photogrammetrischen Woche, 1997
- P. Frost; T. Kailath** : An Innovations Approach to Least-Squares Estimation, Part III: Nonlinear Estimation in White Gaussian Noise, IEEE Trans. on Automatic Control 16, No. 3, 1971, pp. 217-226
- W.A. Fuller** : Introduction to Statistical Time Series, Wiley, 1976
- F.R. Gantmacher** : Matrizentheorie, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1986
- Y. Gao; E.J. Krakiwsky; M.A. Abousalem; J.F. McLellan** : Comparison and Analysis of Centralized, Decentralized and Federated Filters, Navigation 40, No. 1, 1993, pp. 69-86
- Y. Gao; E.J. Krakiwsky; Z.W. Liu** : A New Algorithm for Filtering a Correlated Measurement Sequence, manuscripta geodætica, 17, 1992, pp. 96-103
- A. Gelb** : Applied Optimal Estimation, The M.I.T. Press, 1992
- P. Glendinning** : Stability, Instability and Chaos: An Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations, Cambridge University Press, 1994
- G.H. Golub; C.F. van Loan** : Matrix Computations, The Johns Hopkins University Press, 1993
- G.C. Goodwin; K.S. Sin** : Adaptive Filtering, Prediction and Control, Prentice-Hall, 1984
- D. Goshen-Meskin; I.Y. Bar-Itzhack** : Observability Analysis of Piece-Wise Constant Systems, IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 28, No. 4, 1992, pp. 1056-1075
- E.W. Grafarend** : Space-Time Geodesy, Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, Vol. 38, 1979, pp. 551-589
- E.W. Grafarend; I.I. Mueller; H.B. Papo; B. Richter** : Investigations on the Hierarchy of Reference Frames in Geodesy and Geophysics, Department of Geodetic Science, Report No. 289, Ohio State University, 1979
- E.W. Grafarend** : Reference Frame Rotation - Regularized Theory by Quaternions and Spinors, in: K.P. Schwarz; G. Lachapelle: "Geodesy in Transition", A volume dedicated to Helmut Moritz on the occasion of his 50th birthday, The University of Calgary, Report 60002, Calgary, 1983, pp. 185-225
- E.W. Grafarend** : Geodetic Positioning by Inertial and Satellite Systems: An Overview, in: K. Linkwitz; U. Hangleiter (eds.): Proceedings of the 1st Int. Workshop on High Precision Navigation, Springer, 1989, pp. 34-74
- E.W. Grafarend; B. Schaffrin** : Vectors, Quaternions and Spinors - a Discussion of Algebras underlying Threedimensional Geodesy, Feestbunderter Gelegenheid van de 65ste Verjaardag van Professor Baarda, Deel 1, ed. Geodetic Computer Centre (LGR), Delft, 1982
- E.W. Grafarend; B. Schaffrin** : Ausgleichungsrechnung in linearen Modellen, BI Wissenschaftsverlag, 1993
- M.S. Grewal; A.P. Andrews** : Kalman Filtering, Prentice Hall, 1993
- E. Groten; W. Hausch; D. Keller** : Study of the Influence of Specific Gravity Anomaly and Deflection Fields in Inertial Surveying, Proceedings of the Third Int. Symposium on Inertial Technology for Surveying and Geodesy, K.P. Schwarz (ed.), Banff, Sept. 16-20, 1985
- F.D. Groutage; R.G. Jacquot; R.L. Kirlin** : Techniques for Adaptive State Estimation through Utilization of Robust Smoothing, Control and Dynamic Systems, 25, 1987, pp. 273-308
- F.D. Groutage; R.G. Jacquot; D.E. Smith** : Adaptive State Variable Estimation using Robust Smoothing, J. Dyn. Syst. Meas. Control 106, 1984, pp. 335-341
- L. Grüne** : Asymptotic Controllability and Exponential Stabilization of Nonlinear Control Systems at Singular Points, SIAM J. Control Optim., Vol. 36, No. 5, 1998, pp. 1585-1603

- M. Guha; J. Winkler** : Simulation eines Trägheitsnavigationssystems zur Evaluation der durch direkte zeitliche Integration der Kreiseldaten generierten Zustandsfehler, Studienarbeit, Geodätisches Institut, Universität Stuttgart, 1998
- M.J. Hadfield** : INS Hardware Trends, in: K. Linkwitz; U. Hangleiter(eds.): Proc. 2nd Int. Workshop on High Precision Navigation, Stuttgart, 1991, pp. 491-506
- J.D. Hamilton** : Time Series Analysis, Princeton University Press, 1994
- S. Haykin** : Adaptive Filter Theory, Prentice-Hall, 1991
- W. Heger** : Untersuchungen zum Einsatz inertialer Vermessungssysteme in 'strapdown'-Technik bei der Schachtvermessung, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 179, 1992
- G.W. Hein** : Präzise kinematische Positionierung durch GPS und inertielle Navigationssysteme in Sekunden, ZfV 7/8 1989, pp. 334-342
- O. Heinze** : Aufbau eines operablen inertialen Vermessungssystems zur Online-Verarbeitung in der Geodäsie auf Basis eines kommerziellen Strapdown Inertialsystems, Dissertation, TH Darmstadt, DGK, Reihe C, Nr. 459, 1996
- W. Heitzinger; I. Troch; G. Valentin** : Praxis nichtlinearer Gleichungen, Carl Hanser Verlag, 1985
- H.V. Henderson; S.R. Searle** : vec and vech Operators for Matrices with some uses in Jacobians and Multivariate Statistics, The Canadian J. of Statistics 7, No. 1, 1979, pp. 65-81
- R. Hermann; A.J. Krener** : Nonlinear Controllability and Observability, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 22, No. 5, 1977, pp. 728-740
- H. Heuser** : Lehrbuch der Analysis, Teil 2, Teubner, 1991
- B. Hofmann-Wellenhof; H. Lichtenegger; J. Collins** : GPS, Theory and Practice, Springer, 1994
- J. Honerkamp** : Stochastische dynamische Systeme, VCH, 1990
- H. Hopf** : Systeme symmetrischer Bilinearformen und euklidische Modelle der projektiven Räume, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft, Zürich, 85. Jahrgang, 1940, S. 165-177
- J.C. Hung; H.V. White** : Self-Alignment Techniques for Inertial Measurement Units, IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 11, No. 6, 1975, pp. 1232-1247
- R. Isermann** : Identifikation dynamischer Systeme, Band I+II, Springer, 1988
- A. Isidori** : Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag, 1989
- A.H. Jazwinski** : Adaptive Filtering, Automatica, Vol. 5, Pergamon Press, 1969, pp. 475-485
- A.H. Jazwinski** : Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, 1970
- H.-G. Kahle** : Einführung in die Höhere Geodäsie, Verlag der Fachvereine, Zürich 1988
- T. Kailath** : An Innovations Approach to Least-Squares Estimation, Part I: Linear Filtering in Additive White Noise, IEEE Trans. on Automatic Control 13, No. 6, 1968, pp. 646-655
- T. Kailath** : A View of Three Decades of Linear Filtering Theory, IEEE Trans. on Information Theory 20, No. 2, 1974, pp. 146-181
- T. Kailath; P. Frost** : An Innovations Approach to Least-Squares Estimation, Part I: Linear Smoothing in Additive White Noise, IEEE Trans. on Automatic Control 13, No. 6, 1968, pp. 655-660
- R.E. Kalman** : A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trans. ASME, J. Basic Eng. 82, 1960, pp. 35-45
- R.E. Kalman** : New Method in Wiener Filtering Theory, Proc. Symp. Eng. Appl. Random Function Theory and Probability, Wiley, 1963, chapter 9
- R.E. Kalman; R.S. Bucy** : New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, Trans. ASME J. Basic Eng. 83, 1961, pp. 95-108
- K. Kanatani** : Group-Theoretical Methods in Image Understanding, Springer, 1990
- I.L. Kantor; A.S. Solodovnikov** : Hypercomplex Numbers, Springer, 1989
- D. Keller** : Aufbau eines geodätischen Strapdown Inertialsystems zur Punktbestimmung, DGK, Reihe C, Heft Nr. 367, München, 1991
- A. Kielbasinski; H. Schwetlick** : Numerische lineare Algebra, Harri Deutsch, 1988
- A. Kleusberg** : Die direkte Lösung des räumlichen Hyperbelschnitts, ZfV 4/1994, S. 188-192
- E.H. Knickmeyer; M. Nitschke** : Rotationsparameter - Grundlagen für die Praxis, ZfV, Nr. 9, 1994, S. 455-464
- H.-H. Kothe** : Beobachtbarkeitsanalyse zeitvarianter Systeme und deren Anwendung bei der Optimalfilterung gestützter Trägheitsnavigationssysteme, VDI Verlag, Reihe 8, Nr. 152, 1987
- J. Kovalevsky; I.I. Mueller; B. Kolaczek(eds.)** : Reference Frames in Astronomy and Geophysics, Kluwer Academic Publishers, (1989)

- J. Kovalevsky : Stellar Reference Frames, in: [J. Kovalevsky; I.I. Mueller; B. Kolaczek(1989)], pp. 15-41
- V. Krebs : Nichtlineare Filterung, Oldenbourg, 1980
- E. Kreyszig : Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley, 1978
- J.H. Laning, Jr. : The Vector Analysis of Finite Rotations and Angles, MIT/IL Special Rept. 6398-S-3, 1949
- D. Lapucha : Precise GPS/INS Positioning for a Highway Inventory System, UCSE Report Number 20038, Department of Surveying Engineering, University of Calgary, Canada, 1990
- C.T. Leondes (ed.) : Theory and Applications of Kalman Filtering, AGARDograph, 1970
- K. Linkwitz; U. Hangleiter(eds.) : High Precision Navigation, Proc. of the 3rd Int. Workshop on High Precision Navigation, University of Stuttgart, Dümmler Verlag, 1995
- Z. Liu : Comparison of Statistical Methods for the Alignment of Strapdown Inertial Systems, UCGO Report 20047, University of Calgary, 1992
- Z.W. Liu; E.J. Krakiwsky; Y. Gao : An Analysis of Three Methods for Filtering a Correlated Measurement Sequence, manuscripta geodaetica, 17, 1992, pp. 87-95
- A.K. Louis; P. Maaß; A. Rieder : Wavelets, Teubner, 1994
- W.C. Louv : Adaptive Filtering, Technometrics 26, No. 4, 1984, pp. 399-409
- C. Ma : Extragalactic Reference Frames, in: [J. Kovalevsky; I.I. Mueller; B. Kolaczek(1989)], pp. 43-65
- K. Magnus : Kreisel, Theorie und Anwendung, Springer, 1971
- P.S. Maybeck : Stochastic Models, Estimation and Control, Volume 1+2, Navtech Book & Software Store, 1994
- P.W. McBurney : A Robust Approach to Reliable Real-Time Kalman-Filtering, in: P.M. Schultz(ed.): Proc. of the IEEE Symposium PLANS'90, LasVegas/Nevada, 1990, pp. 549-556
- D.D. McCarthy (ed.) : IERS Conventions (1996), Central Bureau of IERS, Observatoire de Paris, 1996
- J.S. Meditch : Stochastic Optimal Linear Estimation and Control, McGraw-Hill Book Company, 1969
- R.K. Mehra; A.E. Bryson : Linear Smoothing using Measurements Containing Correlated Noise with an Application to Inertial Navigation, IEEE Trans. on Automatic Control 13, No. 5, 1968, pp. 496-503
- L. Meister : Quaternions and their Application in Photogrammetry and Navigation, Habilitation, TU Bergakademie Freiberg, 1997
- R.B. Miller : A New Strapdown Attitude Algorithm, J. Guidance, Vol. 6, No. 4, 1983, pp. 287-291
- G. Minkler; J. Minkler : Theory and Application of Kalman Filtering, Magellan Book Company, 1993
- W. Möhlenbrink : Zur Entwicklung eines Meßverfahrens für die Bestimmung von Bauwerksverformungen aus Neigungs- und Beschleunigungsmessungen, DGK, Reihe C, Heft Nr. 307, München 1984
- C. Moler; C. van Loan : Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, SIAM Review, Vol. 20, No. 4, 1978, pp. 801-836
- H. Moritz : Geodetic Reference System 1980, Bulletin Geodesique: The Geodesists Handbook 1988, Volume 62, No.3, 1988, pp. 187-192
- R.E. Mortensen : Strapdown Guidance Error Analysis, IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 10, No. 4, 1974, pp. 451-457
- P.C. Müller : Verfahren zum Stabilitätsnachweis nichtlinearer Systeme, in: [S. Engell(1995)], S. 383-405
- M. Napier : Data Processing for GPS/INS Integration, in: K. Linkwitz; U. Hangleiter (eds.): Proc. of Int. Workshop High Precision Navigation, Integration of Navigational and Geodetic Methods, Stuttgart, Germany, 1988, pp. 571-583
- W. Neutsch : Koordinaten, Spektrum Akademischer Verlag, 1995
- H. Nijmeijer; A. van der Schaft : Nonlinear Dynamical Control Systems, Springer-Verlag, 1990
- A. Papoulis : Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, 1987
- R. Petzoldt : Calibration of a Strapdown INS by Measurements in 24 Faces, in: [K. Linkwitz;U. Hangleiter(1995)], pp. 186-193
- B. Richter : Entwurf eines nichtrelativistischen gedätisch-astronomischen Bezugssystems, DGK, Reihe C, Nr. 322, 1986
- H. Risken : The Fokker-Planck Equation, Springer, 1989
- S. Röhrich : Post-Mission Auswertemodell für die Vermessung mit Strapdown Inertialsystemen, DGK, Reihe C, Heft Nr. 407, München, 1993
- R. Rothfuß; M. Zeitz : Einführung in die Analyse nichtlinearer Systeme, in [S. Engell(1995)], S. 3-22
- J.M. Rüeger : Inertial Sensors, Part I: Gyroscopes, UCSE Report No. 30002, 1982
- J.M. Rüeger : Inertial Sensors, Part II: Accelerometers, UCSE Report No. 30008, 1986
- O.S. Salychev : Wave and Scalar Estimation Approaches for GPS/INS Integration, University of Stuttgart, Geodetic Institute, Technical Report No. 20, 1993

- O.S. Salychev** : Inertial Surveying: ITC Ltd. Experience, Moscow State Technical University n.a. N.E. Bauman Press, Moscow, 1995
- O.S. Salychev; A.B. Bykovsky** : Wave Method in Processing Navigation Information in Survey Systems, in: K.P. Schwarz; G. Lachapelle (eds.): Kinematic Systems in Geodesy, Surveying and Remote Sensing, Springer, 1991, pp. 238-247
- O.S. Salychev; B. Schaffrin** : New Filter Approaches for GPS/INS Integration, Proc. Sixth Int. Geodetic Symp. on Satellite Positioning, Vol. II, 1992, pp.670-680
- M. Salzmann; P. Teunissen; M. Sideris** : Detection and Modelling of Coloured Noise for Kalman Filter Applications, IAG Symposium 107, 1990, pp. 251-260
- A.A. Samarskij** : Theorie der Differenzenverfahren, Akademische Verlagsgesellschaft Geest&Portig K.-G., 1984
- P.G. Savage** : Strapdown Sensors, in: AGARD Lecture Series No. 95, 1978
- P.G. Savage** : Strapdown System Algorithms, in: AGARD Lecture Series No. 133, NATO, 1984
- P.G. Savage** : Advances in Strapdown Sensors, in: AGARD Lecture Series No. 133, NATO, 1984
- P.G. Savage** : Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design, Part 1: Attitude Algorithms, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 21, No. 1, 1998, pp. 19-28
- J. Schaffner** : Zum Beobachterentwurf für nichtlineare Systeme mit mehreren Meßgrößen, Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 620, VDI-Verlag, 1997
- B. Schaffrin** : Generating Robustified Kalman Filters for the Integration of GPS and INS, Technical Report No. 15, 1991, Institute of Geodesy, University of Stuttgart
- K.-W. Schrick** : Anwendungen der Kalman-Filter-Technik, Oldenbourg Verlag, 1977
- D. Schröder** : Genauigkeitsanalyse inertialer Vermessungssysteme mit fahrzeugfesten Sensoren, Dissertation der Universität Stuttgart, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, DGK, Reihe C, Heft-Nr. 391, 1992
- D. Schröder; N.C. Thong; S. Wiegner; E.W. Grafarend; B. Schaffrin** : A comparative study of local level and strapdown inertial systems, manuscripta geodaetica, Vol. 13, No. 4, 1988, pp. 224-248
- G.H. Schut** : Construction of Orthogonal Matrices and their Application in Analytical Photogrammetry, Photogrammetria, Vol. XV, No. 4, 1958-59, pp. 149-162
- L. Schwartz** : Nonlinear Filtering and Comparison with Kalman Filtering, in: [C.T. Leondes(1970)], pp. 143-162
- H.R. Schwarz** : Numerische Mathematik, Teubner, 1986
- K.P. Schwarz** : The Error Model of Inertial Geodesy, a Study in Dynamic System Analysis, in: H. Sünkel(ed.): Lecture Notes in Earth Sciences, Vol. 7, Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy, Springer, 1986, pp. 463-504
- K.P. Schwarz; M.E. Cannon; R.V.C. Wong** : A Comparison of GPS Kinematic Models for the Determination of Position and Velocity Along a Trajectory, manuscripta geodaetica, Vol. 14, 1989, pp. 345-353
- K.P. Schwarz; A.A. Vassiliou** : An Eigenvector Base for the Error Model in Inertial Surveying, in: K.P. Schwarz (ed.): Proceedings of the Third Int. Symposium on Inertial Technology for Surveying and Geodesy, Banff, Canada, 1985, pp. 35-46
- K.P. Schwarz; M. Wei** : Inertial Surveying and INS/GPS Integration, Lecture Notes, Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary, 1994
- K.P. Schwarz; M. Wei** : Modelling INS/GPS for Attitude and Gravity Applications, in: K. Linkwitz; U. Hangleiter (eds.): Proceedings of the 3rd Int. Workshop on High Precision Navigation, University of Stuttgart, Dümmler, 1995, pp. 200-218
- G.E. Shilov** : Linear Algebra, Dover Publ., 1977
- M.D. Shuster; S.D. Oh** : Three-Axes Attitude Determination from Vector Observations, J. Guidance and Control 4, No. 1, 1981, pp. 70-77
- M.D. Shuster** : A Survey of Attitude Representations, The Journal of the Astronautical Sciences 41, No. 4, 1993, pp. 439-517
- G.M. Siouris** : Aerospace Avionics Systems – A Modern Synthesis, Academic Press, 1993
- W.-H. Steeb** : Kronecker Product of Matrices and Applications, BI Wissenschaftsverlag, 1991
- B. Stieler** : The Navigation Equations and the Error Dynamics for Different Inertial Navigation System Mechanisations, Lecture Series on Inertial Navigation Systems, Sian, 1980
- B. Stieler; H. Winter** : Gyroscopic Instruments and their Application to Flight Testing, AGARDograph No. 160, 1982
- J. Stoer; R. Bulirsch** : Einführung in die Numerische Mathematik II, Springer, 1978
- M. Stohrer** : Grundlagen von GPS, in: M. Stohrer(Hrsg.): Einstieg in die GPS-Praxis, Tagungsband 26 zum GPS-Seminar vom Fachbereich Vermessungswesen der FHT Stuttgart, September 1994

- J. Stuelpnagel** : On the Parametrization of the Three-Dimensional Rotation Group, SIAM Review, Vol. 6, No. 4, 1964, pp. 422-430
- The Geodesist's Handbook(1996)** : Journal of Geodesy, Vol. 70, No. 12, October 1996
- N.C. Thong** : Gravity Field Modelling for INS, Symposium No. 107, Kinematic Systems in Geodesy, Surveying, and Remote Sensing, K.-P. Schwarz; G. Lachapelle (eds.), Banff, Alberta, Canada, September 10-13, 1990, pp. 523-532
- N.C. Thong** : Local Gravity Field Modeling with Respect to Application in Inertial Positioning, Proceedings of the 2nd International Workshop on High Precision Navigation, Stuttgart and Freudenstadt, Nov. 1991, K. Linkwitz; U. Hangleiter (eds.), Dümmeler, Bonn, pp. 441-449
- N.C. Thong; E.W. Grafarend** : A Spheroidal Harmonic Model of the Terrestrial Gravitational Field, manuscripta geodaetica (1989), 14, pp. 285-304
- H. Tietze** : Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit, Band 2, dtv, 1985
- D.H. Titterton; J.L. Weston** : Strapdown Inertial Navigation Technology, Peter Peregrinus Ltd., IEE, 1997
- B.L. van der Waerden** : A History of Algebra, Springer, 1985
- P. Vanicek; E. Krakiwsky** : Geodesy, The Concepts, North-Holland, 1986
- A. Vassiliou; K.P. Schwarz** : Eigenvalues of the Dynamics Matrix used in Inertial Geodesy, manuscripta geodaetica 10, 1985, pp. 213-221
- M. Verhaegen; P. van Dooren** : Numerical Aspects of Different Kalman Filter Implementations, IEEE Trans. on Automatic Control 31, 1986, pp. 907-917
- M.H. Verhaegen; P. van Dooren** : New Insights in the Numerical Reliability Properties of Existing Kalman Filter Implementations, in: C.T. Leondes (ed.): Control and Dynamic Systems, Advances in Theory and Applications, Vol. 29, Academic Press, 1988
- F. Verhulst** : Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer, 1990
- K. Vogel; H. Risken; W. Schleich** : Noise in Ring-Laser Gyroscope, in: F. Moss; P.V.E. McClintock: Noise in Nonlinear Dynamical Systems, Vol. 2: Theory of Noise Induced Processes in Special Applications, Cambridge Univ. Press, 1989
- Y.J. Wang; K.K. Kubik** : Robust Kalman Filter and its Geodetic Applications, manuscripta geodaetica 18, 1993, pp. 349-354
- N. Watanabe** : On the Estimation Error of the Kalman Filter with Unknown Parameters, J. Japan Statist. Soc. 17, 1987, pp. 61-73
- M. Wei; K.P. Schwarz** : A Discussion of Models for GPS/INS Integration, in: Y. Bock; N. Leppard: Global Positioning System: An Overview, Symp. No. 102, Edinburgh, Scotland, Springer, 1989, pp. 316-327
- M. Wei; K.P. Schwarz** : A Strapdown Inertial Algorithm using an Earth-Fixed Cartesian Frame, Navigation 37, No. 2, 1990, pp. 153-167
- M. Wei; K.P. Schwarz** : Testing a Decentralized Filter for GPS/INS Integration, Proc. of the IEEE 1990 PLANS - Position, Location and Navigation Symposium, Las Vegas, Nevada, 1990, pp. 429-435
- D. Wells; N. Beck; D. Delikaraoglou; A. Kleusberg; E.J. Krakiwsky; G. Lachapelle; R.B. Langley; M. Nakiboglu; K.P. Schwarz; J.M. Tranquilla; P. Vanicek** : Guide to GPS Positioning, Canadian GPS Associates, 1987
- H. Werner; H. Arndt** : Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer, 1986
- E. Wildermann** : Untersuchungen zur lokalen Schwerefeldbestimmung aus heterogenen Daten dargestellt am Beispiel der Geotraverse venezolanische Anden, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 155, Hannover 1988
- J.L. Willems** : Stabilität dynamischer Systeme, Oldenbourg Verlag, 1973
- J.G. Williams; E.M. Standish** : Dynamical Reference Frames in the Planetary and Earth-Moon Systems in: [J. Kovalevsky; I.I. Mueller; B. Kolaczek(1989)], pp. 67-90
- R.P. Wishner; J.A. Tabaczynski; M. Athans** : A Comparison of Three Non-Linear Filters, Automatica, 5, Pergamon Press, 1969, pp. 487-496
- R.V.C. Wong** : Development of a RLG Strapdown Inertial Survey System, Master Thesis, Department of Surveying Engineering, University of Calgary, UCSE Report 20027, 1988
- R.V.C. Wong; K.P. Schwarz; M.E. Cannon** : High-Accuracy Kinematic Positioning by GPS-INS, Navigation, Vol. 35, No. 2, 1988, pp. 275-287
- World Geodetic System 1984(1988)** : Auszug aus dem "DMA Technical Report 8350.2", Amt für Militärisches Geowesen (Hrsg.), 1988
- M.I. Zakharin; F.M. Zakharin** : Kinematics of Inertial Navigation Systems, National Aeronautics and Space Administration, NASA TT F-614, Washington, 1970
- M. Zeitz** : Observability Canonical (Phase-Variable) Form for Non-Linear Time-Variable Systems, Int. J. Systems Sci., Vol. 15, No. 9, 1984, pp. 949-958

DANKSAGUNG

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. habil, Dr. tech. h.c. mult., Dr.-Ing. E.h. E. Grafarend, Geodätisches Institut der Universität Stuttgart, für die Initiierung dieser Arbeit und seine Unterstützung bei deren Durchführung bedanken. Für die bereitwillige Übernahme der Koreferate und die aus den darauffolgenden Diskussionen resultierenden Anregungen danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Möhlenbrink, Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen der Universität Stuttgart, und Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Zeitz, Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik der Universität Stuttgart.

Herrn Prof. Dr. sc. techn. W. Keller, Geodätisches Institut der Universität Stuttgart, bin ich für seine Erläuterungen und Ratschläge zu besonderem Dank verpflichtet. Herrn Prof. Dr. K.P. Schwarz, Department of Geomatics der University of Calgary, danke ich für die Ermöglichung eines Forschungsaufenthalts an seinem Institut und die Überlassung des institutseigenen Trägheitsnavigationssystems zur Durchführung von Experimenten.

Den Kolleginnen und Kollegen des Geodätischen Instituts der Universität Stuttgart, insbesondere Dr.-Ing. M. Feistritzer und Dipl.-Ing. R. Syffus, möchte ich für den regen wissenschaftlichen Dialog und die angenehme Arbeitsatmosphäre herzlichen Dank sagen.

Diese Arbeit widme ich meinen Eltern, die mir eine umfangreiche schulische und akademische Ausbildung ermöglichten.

CURRICULUM VITAE

Name:	Johann H. Dambeck
Geburtstag u. -ort	21. Mai 1967 in Altenmarkt/Osterhofen (Ndby.)
Familienstand:	ledig

SCHULISCHE AUSBILDUNG:

09/73 - 07/77	Grundschule Altenmarkt
09/77 - 07/79	Gymnasium in Niederalteich
09/79 - 07/83	Realschule Osterhofen
	Abschluß: Mittlere Reife
09/83 - 06/85	Fachoberschule Deggendorf
	Abschluß: Fachhochschulreife

AKADEMISCHE AUSBILDUNG:

10/85 - 07/89	Fachhochschule Regensburg Studium der Mathematik Abschluß: Diplom-Mathematiker (FH)
10/89 - 02/93	Universität Kaiserslautern Studium der Technomathematik Abschluß: Diplom-Technomathematiker (Univ.)
03/93 - 12/95	Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Stuttgart im SFB 228 „Hochgenaue Navigation“ (Teilprojekt E1) am Geodätischen Institut (FB Geodäsie und Geoinformatik)
01/96 - 08/98	Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Stuttgart am Geodätischen Institut (FB Geodäsie und Geoinformatik)

- | | | | |
|-----|----|--------|---|
| Nr. | 1 | (1987) | K. Eren: Geodetic Network Adjustment Using GPS Triple Difference Observations and a Priori Stochastic Information |
| Nr. | 2 | (1987) | F.W.O. Aduol: Detection of Outliers in Geodetic Networks Using Principal Component Analysis and Bias Parameter Estimation |
| Nr. | 3 | (1987) | M. Lindlohr: SIMALS; SIMulation, Analysis and Synthesis of General Vector Fields |
| Nr. | 4 | (1988) | W. Pachelski, D. Lapucha, K. Budde: GPS-Network Analysis: The Influence of Stochastic Prior Information of Orbital Elements on Ground Station Position Measures |
| Nr. | 5 | (1988) | W. Lindlohr: PUMA; Processing of Undifferenced GPS Carrier Beat Phase Measurements and Adjustment Computations |
| Nr. | 6 | (1988) | R.A. Snay, A.R. Drew: Supplementing Geodetic Data with Prior Information for Crustal Deformation in the Imperial Valley, California 1988 |
| Nr. | 7 | (1989) | H.-W. Mikolaiski, P. Braun: Dokumentation der Programme zur Behandlung beliebig langer ganzer Zahlen und Brüche |
| Nr. | 8 | (1989) | H.-W. Mikolaiski: Wigner 3j Symbole, berechnet mittels Ganzzahlarithmetik |
| Nr. | 9 | (1989) | H.-W. Mikolaiski: Dokumentation der Programme zur Multiplikation nach Kugelfunktionen entwickelter Felder |
| Nr. | 10 | (1989) | H.-W. Mikolaiski, P. Braun: Dokumentation der Programme zur Differentiation und zur Lösung des Dirichlet-Problems nach Kugelfunktionen entwickelter Felder |
| Nr. | 11 | (1990) | L. Kubáčeková, L. Kubáček: Elimination Transformation of an Observation Vector preserving Information on the First and Second Order Parameters |
| Nr. | 12 | (1990) | L. Kubáčeková: Locally best Estimators of the Second Order Parameters in Fundamental Replicated Structures with Nuisance Parameters |
| Nr. | 13 | (1991) | G. Joos, K. Jörg: Inversion of Two Bivariate Power Series Using Symbolic Formula Manipulation |
| Nr. | 14 | (1991) | B. Heck, K. Seitz: Nonlinear Effects in the Scalar Free Geodetic Boundary Value Problem |
| Nr. | 15 | (1991) | B. Schaffrin: Generating Robustified Kalman Filters for the Integration of GPS and INS |
| Nr. | 16 | (1992) | Z. Martinec: The Role of the Irregularities of the Earth's Topography on the Tidally Induced Elastic Stress Distribution within the Earth |
| Nr. | 17 | (1992) | B. Middel: Computation of the Gravitational Potential of Topographic-Isostatic Masses |
| Nr. | 18 | (1993) | M.I. Yurkina, M.D. Bondarewa: Einige Probleme der Erdrotationsermittlung |
| Nr. | 19 | (1993) | L. Kubáčeková: Multiepoch Linear Regression Models |
| Nr. | 20 | (1993) | O.S. Salychev: Wave and Scalar Estimation Approaches for GPS/INS Integration |

- | | | | |
|-----|----|--------|--|
| Nr. | 1 | (1976) | Vorträge des Lehrgangs Numerische Photogrammetrie (III),
Esslingen 1975 - vergriffen |
| Nr. | 2 | (1976) | Vorträge der 35. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1975 |
| Nr. | 3 | (1976) | Contributions of the XIIIth ISP-Congress of the Photogrammetric
Institute, Helsinki 1976 - vergriffen |
| Nr. | 4 | (1977) | Vorträge der 36. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1977 |
| Nr. | 5 | (1979) | E. Seeger: Das Orthophotoverfahren in der Architekturphoto-
grammetrie, Dissertation |
| Nr. | 6 | (1980) | Vorträge der 37. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1979 |
| Nr. | 7 | (1981) | Vorträge des Lehrgangs Numerische Photogrammetrie (IV): Gro-
be Datenfehler und die Zuverlässigkeit der photogrammetrischen
Punktbestimmung, Stuttgart 1980 - vergriffen |
| Nr. | 8 | (1982) | Vorträge der 38. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1981 |
| Nr. | 9 | (1984) | Vorträge der 39. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1983 |
| Nr. | 10 | (1984) | Contributions to the XVth ISPRS-Congress of the Photogramme-
tric Institute, Rio de Janeiro 1984 |
| Nr. | 11 | (1986) | Vorträge der 40. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1985 |
| Nr. | 12 | (1987) | Vorträge der 41. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1987 |
| Nr. | 13 | (1989) | Vorträge der 42. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1989 |
| Nr. | 14 | (1989) | Festschrift - Friedrich Ackermann zum 60. Geburtstag, Stuttgart
1989 |
| Nr. | 15 | (1991) | Vorträge der 43. Photogrammetrischen Woche Stuttgart 1991 |
| Nr. | 16 | (1992) | Vorträge zum Workshop "Geoinformationssysteme in der Ausbil-
dung", Stuttgart 1992 |

Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik (ehemals Fachbereich Vermessungswesen); Technical Reports Department of Geodesy and GeoInformatics, Stuttgart University, Geschw.-Scholl-Str. 24/D, D-70174 Stuttgart
Fax: ++49 711 121 3285; Internet: <http://www.uni-stuttgart.de/gi>

- | | |
|-------------------|--|
| Nr. 1994.1 (1994) | H.-J. Euler: Generation of Suitable Coordinate Updates for an Inertial Navigation System |
| Nr. 1994.2 (1994) | W. Pachelski: Possible Uses of Natural (Barycentric) Coordinates for Positioning |
| Nr. 1995.1 (1995) | J. Engels, E.W. Grafarend, P. Sorcik: The Gravitational Field of Topographic-Isostatic Masses and the Hypothesis of Mass Condensation - Part I & II |
| Nr. 1995.2 (1995) | Minutes of the ISPRS Joint Workshop on Integrated Acquisition and Interpretation of Photogrammetric Data |
| Nr. 1996.1 (1996) | Festschrift für Klaus Linkwitz anlässlich der Abschiedsvorlesung im Wintersemester 1995/96; herausgegeben von Eberhard Baumann, Ulrich Hangleiter und Wolfgang Möhlenbrink |
| Nr. 1996.2 (1996) | J. Shan: Edge Detection Algorithms in Photogrammetry and Computer Vision |
| Nr. 1997.1 (1997) | Erste Geodätische Woche Stuttgart, 7. - 12. Oktober 1996; herausgegeben von A. Gilbert und E.W. Grafarend |
| Nr. 1997.2 (1997) | U. Kälberer: Untersuchungen zur flugzeuggetragenen Radaraltimetrie |
| Nr. 1998.1 (1998) | L. Kubáček, L. Kubáčková: Regression Models with a weak Nonlinearity |
| Nr. 1999.1 (1999) | GIS-Forschung im Studiengang Geodäsie und Geoinformatik der Universität Stuttgart; herausgegeben von M. Sester und F. Krumm |
| Nr. 1999.2 (1999) | Z. Martinec: Continuum Mechanics for Geophysicists and Geodesists. Part I: Basic Theory |
| Nr. 1999.3 (1999) | J. H. Dambeck: Diagnose und Therapie geodätischer Trägheitsnavigationssysteme. Modellierung – Systemtheorie – Simulation - Realdatenverarbeitung |