

DEUTSCHE GEODÄTISCHE KOMMISSION
bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Reihe C:

Dissertationen

Heft Nr. 263

**Einfluß der geodätischen Abbildungsverzerrungen
auf die photogrammetrische Punktbestimmung**

Von der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

vorgelegt von
M. Sc. E. Shue-chia Wang
geboren in Anhwei/China

München 1980

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:

DEUTSCHE GEODÄTISCHE KOMMISSION
Marstallplatz 8, D-8000 München 22

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. F. Ackermann
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. K. Ramsayer

Tag der Einreichung: 6. März 1980
Tag der mündlichen Prüfung: 23. Juni 1980

© 1980 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet, die Veröffentlichung oder
Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

Druck: Gebr. Brunner, 8151 Wangau

Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. EINLEITUNG UND AUFGABENSTELLUNG	5
I.1 Das Problem der geodätischen Abbildung in der Photogrammetrie	5
I.1.1 Die photographische Abbildung des Objektes und ihre Geometrie	5
I.1.2 Rekonstruktion und Orientierung der Strahlenbündel	7
I.1.3 Paßpunkte, übergeordnetes Koordinatensystem	8
I.1.4 Geodätische Abbildung der Erdoberfläche und ihre Problematik	9
I.1.5 Besonderheit der Aerotriangulation	11
I.2 Prinziplösungen	12
I.2.1 Spezifizierung der Problemstellung	12
I.2.2 Umgehung des Problems der geodätischen Abbildung	14
I.2.3 Korrektur der Bildkoordinaten	15
I.2.4 Modifizierung der perspektiven Abbildungsbeziehungen	16
I.3 Die Behandlung der geodätischen Abbildung in der bisherigen photogrammetrischen Praxis	19
I.3.1 Einbildmessung	19
I.3.2 Das Bildpaar	21
I.3.3 Bildverband	27
I.4 Aufgabenstellung und Konzept der Untersuchung	29
I.4.1 Allgemeine Fragestellung	29
I.4.2 Methode der Untersuchung	29
I.4.3 Gliederung und Aufbau der Arbeit	31
II. GRUNDLAGEN UND VORBEREITUNG DER UNTERSUCHUNG	34
II.1 Das Landeskoordinatensystem	34
II.1.1 Die Darstellung der Erdoberfläche und ihre Problematik	34
II.1.2 Das geographische Koordinatensystem und seine Abbildung in die Ebene	36
II.1.3 Die in die Untersuchung einbezogenen Abbildungen	40
II.1.3.1 Die Gauß-Krüger Abbildung	41
II.1.3.2 Die Lambertsche konforme Abbildung	43
II.1.3.3 Die stereographische Abbildung	45
II.1.3.4 Die ordinatentreue Abbildung des Ellipsoids	49
II.2 Photogrammetrische Koordinatensysteme, Aerotriangulation und konventionelle Erdkrümmungskorrektur	51
II.2.1 Bildkoordinaten	51
II.2.2 Modellkoordinaten	53
II.2.3 Aerotriangulation und Paßpunkte	55
II.2.4 Erdkrümmungskorrektur	59
II.2.4.1 Erdkrümmungskorrektur am einzelnen photogrammetrischen Bild	60
II.2.4.2 Erdkrümmungskorrektur am photogrammetrischen Modell	70

II.3	Konzeption und Realisierung der Untersuchung	75
II.3.1	Zur Methode der Untersuchung	75
II.3.2	Festlegung und Beschränkung der Simulationsfälle	76
II.3.3	Simulation der photogrammetrischen und der geodätischen Daten	80
II.3.4	Blockausgleichungen mit den simulierten Daten; repräsentative Genauigkeitsmaße	82
II.3.5	Weitere Anmerkungen zur Durchführung der Untersuchung	83
II.3.5.1	Genäherte Parallelität der Flugstreifen	83
II.3.5.2	Überprüfung der Rechenschärfe	84
III.	DIE ERGEBNISSE DER UNTERSUCHUNG	87
III.1	Einfluß der geodätischen Abbildung auf die Einzelbildauswertung	87
III.2	Einfluß der geodätischen Abbildung auf die Einzelmodellauswertung	91
III.3	Einfluß der geodätischen Abbildung auf die Aero-triangulation	97
III.3.1	Parameter des typischen Falls	98
III.3.2	Ergebnisse des typischen Falls	99
III.3.3	Beurteilung der Ergebnisse des typischen Falls	107
III.3.4	Das weitere Untersuchungsprogramm auf der Basis der Ergebnisse des typischen Falls	110
III.4	Untersuchungen über die Einflüsse verschiedener Projektparameter auf die Fehlerwirkung geodätischer Abbildungen bei der Ausgleichung photogrammetrischer Blöcke	111
III.4.1	Allgemeines	111
III.4.2	Einfluß der Flugrichtung	112
III.4.3	Einfluß der Paßpunktanordnung	115
III.4.4	Einfluß der Blocklage	122
III.4.5	Einfluß der Blockgröße	138
III.4.6	Einfluß des Bildmaßstabs	143
III.4.7	Einfluß starker Bildverknüpfungen	147
IV.	ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSSFOLGERUNG	151
IV.1	Einzelbild- und Bildpaarauswertung	152
IV.2	Bildverbände, Aero-triangulation	154
IV.3	Zur Erklärung der Ergebnisse	156
IV.4	Extrapolation der Ergebnisse	159
LITERATURHINWEISE		161
LEBENS LAUF		162

I. EINLEITUNG UND AUFGABENSTELLUNG

I.1 Das Problem der geodätischen Abbildung in der Photogrammetrie

I.1.1 Die photographische Abbildung des Objektes und ihre Geometrie

Die Photogrammetrie beschäftigt sich mit der Gewinnung und Verarbeitung von Information über Objekte und Vorgänge mittels Abbildungen des jeweiligen Objektes. Die aus der Abbildung zu gewinnenden Informationen hängen von der Methode der Abbildung und ihrer Speicherung ab. Die Abbildung erfolgt im allgemeinen durch Empfang und Speicherung der Intensität und Richtung der von dem Objekt aktiv oder passiv abgestrahlten optischen bzw. elektromagnetischen Wellen. Die Abbildung erfolgte bisher in der Regel photographisch, d.h. sie beschränkte sich auf die optische Abbildung und photographische Registrierung und Speicherung des Bildes aus dem Bereich des sichtbaren Lichtes. Neuerdings ist jedoch durch Ausdehnung auf andere Spektralbereiche und Einbeziehung nichtphotographischer Registrier- und Speichertechniken der Arbeitsbereich der Photogrammetrie ganz erheblich erweitert und verallgemeinert worden. Theoretisch kann jede Möglichkeit, bei der das Abbildungsgesetz bekannt ist, zur Gewinnung von Information über die Objekte verwendet werden. In der vorliegenden Arbeit braucht auf die verallgemeinerten Fälle der Bildaufnahme und -registrierung nicht eingegangen zu werden. Die Arbeit betrifft unmittelbar die konventionelle photogrammetrische Aufnahme mit Hilfe von Meßkammern, die nach wie vor den Hauptbestandteil der photogrammetrischen Praxis bildet.

Der Vorgang der photographischen Abbildung ist zunächst ein rein physikalischer Prozeß, aus dessen Ergebnis jedoch mehr als nur physikalische Information abgeleitet wird. In einem photographischen Bild sind nach [1] drei wesentlich verschiedene Arten von Information - Gestaltinformation, geometrische Information und physikalische Information - gespeichert. Die Gestaltinformation ermöglicht uns bei Betrachtung des Bildes die Gestalt von Objekten zu erkennen. Die geometrische Information bezüglich Lage, Orientierung und Ausdehnung von Objekten kann mit Hilfe des bekannten Abbildungsgesetzes abgeleitet werden und ermöglicht die Rekonstruktion der räumlichen Geometrie der Objekte. Die physikalische Information (Strahlungsintensität, Kontrast, Spektralbereiche) erlaubt Rückschlüsse auf die physikalische Natur und damit auf die Identität der Objekte.

In der Theorie und Praxis der konventionellen Photogrammetrie steht der Geometrie-Aspekt bzw. die geometrische Rekonstruktion, Beschreibung oder Kartierung der abgebildeten Objekte im Vordergrund. Dabei spielen erhebliche Abstraktionsvorgänge eine Rolle, wie das Blockschema aus dem Handbuch der Vermessungskunde [2] verdeutlichen soll (Bild 1), das als Grundlage der geometrischen Bildauswertung gelten kann.

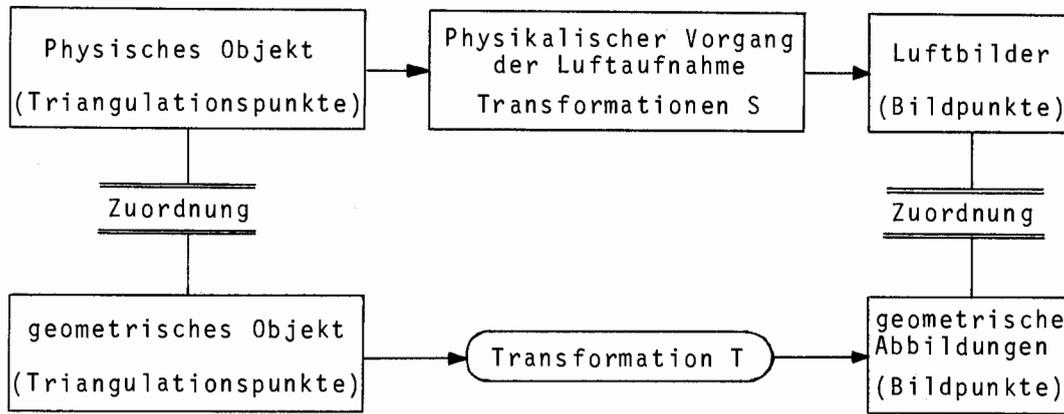


Bild 1 Zuordnung zwischen mathematischem und physikalischem Modell der Luftbildaufnahme

Dem physischen Objekt (Gelände) wird ein isomorphes geometrisches Punktfeld zugeordnet. Entsprechend werden den Luftbildern geometrische Bildebenen und den physikalischen Bildpunkten geometrische Bildpunkte zugeordnet. Eine weitere Zuordnung besteht zwischen den geometrischen Objekt- und Bildpunkten, die durch die Abbildung bestimmt ist und angibt, welche Bildpunkte als Abbildungen welcher Objektpunkte gelten sollen. Bei der hier anstehenden Untersuchung des Einflusses der geodätischen Abbildung in der Aerotriangulation stehen ausschließlich geometrische Aspekte zur Diskussion. Wir haben es daher nur mit dem geometrischen Informationsgehalt der Luftbilder zu tun. Wenn in dieser Arbeit vom Objekt und Bild gesprochen wird, ist immer die Geometrie des Objekts und des Bildes gemeint.

Um die Geometrie des Objekts (Lage und Form) aus der geometrischen Information der Bilder ableiten zu können, müssen die Zuordnungen bekannt und entweder analog oder analytisch wieder herstellbar sein. Dabei muß insbesondere das Abbildungsgesetz bekannt sein. Nach der geometrischen Theorie stellt die photogrammetrische Meßaufnahme eine Zentralprojektion des Objekts dar. Wegen begrenzter Genauigkeit bei Herstellung der Abbildungs-, Speicher- und Auswertungsgeräte, bei den Messungen und im Abbildungsprozeß (z.B. Refraktion der Atmosphäre usw.) ist die Annahme der perspektiven Abbildung nur bis zu einer gewissen Genauigkeitsgrenze richtig. Die Grenze liegt bei heutigem Stand der Technik bei etwa $10 \mu\text{m}$ im Bild, |1|.

Diese Abweichungen von der strengen zentralperspektiven Abbildung ist bei dem heute erreichten Genauigkeitsstand der numerischen Photogrammetrie nicht mehr vernachlässigbar. Aber man hält die perspektive Abbildung als Arbeitsmodell an und pflegt erfaßbare Abweichungen zu korrigieren. Die Ist-Abbildung wird sozusagen auf die Soll-Abbildung reduziert, was als Korrektur systematischer Bildfehler bezeichnet ist. Für alle theoretischen Betrachtungen kann daher als grundlegende mathematische Beziehung zwischen zugeordneten Bild- und Objektpunkten die zentralperspektive Abbildung angenommen werden. Außerdem ist damit schon ausgedrückt, daß die geometrischen Beziehungen zwischen Bild und Objekt in der analytischen Photogrammetrie und insbesondere in der Aerotriangulation als Koordinatenbeziehungen zwischen Bild- und Objektpunkten behandelt und ausgedrückt werden.

I.1.2 Rekonstruktion und Orientierung der Strahlenbündel

Um geometrische Information über das Objekt aus den perspektiven Abbildungen gewinnen zu können, müssen erst die Abbildungsbeziehungen zwischen Objekt und Bildern wiederhergestellt werden, was in der Photogrammetrie als Rekonstruktion und Orientierung der Strahlenbündel bezeichnet wird. Die Rekonstruktion ist in der bisherigen Technik analog, halb analytisch oder rein analytisch verwirklicht worden. Im allgemeinen erfordert die Bestimmung oder Rekonstruktion eines räumlichen Objekts zwei oder mehr verschiedene, hinreichend überdeckende Abbildungen. In Sonderfällen, wenn das Objekt eine Ebene ist oder als Ebene behandelt wird oder wenn die Höhenkoordinaten bekannt sind, genügt auch ein einzelnes Bild (oder mehrere Bilder ohne Überlappung), um die geometrische Information über das Objekt abzuleiten. In den meisten praktischen Fällen handelt es sich für die Rekonstruktion eines größeren Gebiets der Erdoberfläche jedoch um einen Verband von mehreren bis vielen Bildern. Die geometrische Rekonstruktion ausgedehnter Teile der Erdoberfläche bzw. die Koordinatenbestimmung davon ausgewählter Punkte mit Hilfe eines Bildverbandes wird als Aerotriangulation bezeichnet (vgl. Bild 2). Gegenstand der nachfolgenden Untersuchung wird deshalb hauptsächlich der Bildverband sein. Aber die Punktbestimmung wird zunächst am Beispiel des Bildpaares erläutert, das die Grundeinheit der photogrammetrischen Rekonstruktion räumlicher Objekte bildet.

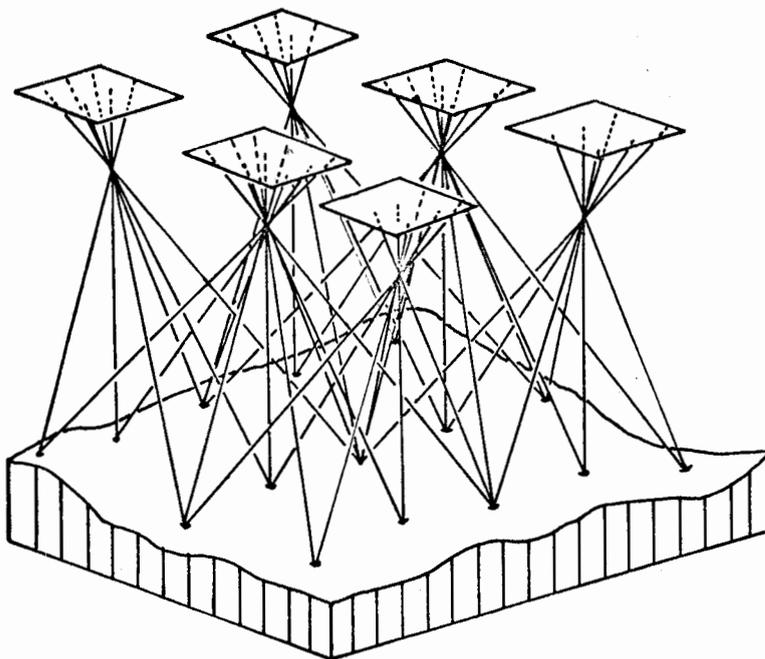


Bild 2 Das geometrische Modell der photogrammetrischen Aufnahme (Bildverband)

Die Rekonstruktion eines räumlichen Objekts bzw. daraus ausgewählter Punkte heißt nichts anderes als die Umkehrung der im Bild 2 dargestellten geometrischen Aufnahmesituation. Zur mathematischen Behandlung müssen die Beziehungen zwischen Bildern, Projektionszentren und Objekt in einem einheitlichen Koordinatensystem dargestellt werden. Die Beziehung zwischen dem Bild und seinem Projektionszentrum, die sogenannte innere Orientierung, ist normalerweise aus der Kammerkalibrierung bekannt, aber es fehlt von beiden zunächst die Beziehung zum Objekt. Ort und Richtung der Luftaufnahme (d.h. Koordinaten des Projektionszentrums und die Richtung der Aufnahmeachse) im Objektraum sind gewöhnlich unbekannt, und es ist gerade die Standardaufgabe der Photogrammetrie, diese sogenannte äußere Orientierung der Luftbilder zu bestimmen, um damit eine Umkehrung der geometrischen Aufnahmesituation bzw. die Auswertung zu ermöglichen.

Bei unbekanntem äußeren Orientierungen der Bilder ist immerhin noch eine relative Rekonstruktion des Objekts möglich. Es wird die relative Beziehung benachbarter Bilder in einem frei gewählten Koordinatensystem wieder hergestellt, das zunächst noch keinen Zusammenhang mit dem übergeordneten System hat, in dem das Objekt dargestellt oder darzustellen ist. Die Schnittpunkte aller homologen Strahlen bilden dann ein räumliches Objekt, das dem ursprünglichen Objekt geometrisch ähnlich ist. Diese relative Rekonstruktion wird in der Photogrammetrie für den wichtigen Spezialfall des Bildpaares als relative Orientierung und das durch Schnittpunkte aller homologen Strahlen dargestellte Objekt als photogrammetrisches Modell bezeichnet.

Um jedoch die geometrische Information bzw. die Rekonstruktion des Objekts in einem bestimmten Objekt-Koordinatensystem darstellen zu können, muß die Rekonstruktion in diesem System vorgenommen bzw. das relativ rekonstruierte Modell in dieses System transformiert werden.

I.1.3 Paßpunkte, übergeordnetes Koordinatensystem

Wenn das Objekt durch wenige Punkte bestimmt ist, besondere geometrische Eigenschaften besitzt (wie z.B. Symmetrieflächen, rechte Winkel, Würfelkanten usw.) oder durch mathematische Funktionen darstellbar ist, kann die Rekonstruktion und die Transformation des Modells in das Objekt-System absolut erfolgen, d.h. das ganze rekonstruierte Punktfeld kann mit dem vollständigen Punktfeld des ursprünglichen Objekts eindeutig in Zusammenhang gebracht werden. Im allgemeinen hat man jedoch für die Rekonstruktion von Ausschnitten der Erdoberfläche keine derartigen Möglichkeiten. Einerseits ist das Objekt, d.h. die Topographie der Erdoberfläche nie vollständig darzustellen, sondern nur durch eine begrenzte Menge zweckmäßig gewählter Punkte und Einzelheiten zu repräsentieren. Zum zweiten dient nur eine geringe Anzahl ausgewählter Einzelpunkte, die sogenannten Paßpunkte, zur Herstellung der Beziehung zwischen den Bildern und dem Objekt. Die Koordinaten der Paßpunkte müssen im Objekt-System bekannt und ihre photographischen Abbildungen in den Luftbildern identifizierbar sein. Bei der räumlichen Rekonstruktion des Objekts wird dafür gesorgt, daß die rekonstruierten Paßpunkte mit den im Objekt-System gegebenen Paßpunkten zur Übereinstimmung gebracht werden. Die Anzahl der notwendigen Paßpunkte hängt von der jeweiligen Bildüberdeckung und den Genauigkeitsanforderungen ab.

Das Objekt-System, in dem die Paßpunkte dargestellt sind, wird als übergeordnetes Koordinaten-System bezeichnet. Das System muß eindeutig, kann aber im übrigen völlig beliebig sein. Z.B. sind rechtwinklige kartesische Koordinatensysteme ebenso zulässig wie nichtlineare Systeme. So lange die Zuordnung vom physischen zum geometrischen Objekt (vgl. Bild 1) eindeutig und fehlerfrei ist, sind damit die Voraussetzungen zur Rekonstruktion des Objekts grundsätzlich vorgegeben. Bei nichtlinearen Systemen ist allerdings die mathematische Behandlung der Rekonstruktion erschwert, so daß bei Analogauswertungen bisher praktisch nur kartesische Systeme Anwendung gefunden haben. Man pflegt also in der Theorie immer ein rechtwinkliges kartesisches System als das übergeordnete Koordinatensystem für die Darstellung des Objekts anzunehmen bzw. vorauszusetzen.

I.1.4 Geodätische Abbildung der Erdoberfläche und ihre Problematik

Der übliche Gegenstand der Aerotriangulation ist die Erdoberfläche. Um sie geometrisch zu beschreiben, verwendet man in der Geodäsie zunächst die geographischen Koordinaten der ellipsoidischen Länge und der ellipsoidischen Breite, sowie außerdem die Höhe. Das (krummlinige) Gitternetz auf dem Erdellipsoid wird somit durch die Meridianellipsen und die Parallelkreise gebildet. Bezüglich der Höhen sei zunächst davon abgesehen, daß es verschiedene Definitionen für Höhen gibt und angenommen, daß die Höhen als sogenannte ellipsoidische Höhen durch den jeweiligen Abstand zum Ellipsoid definiert sind, vgl. Abschn. II.1.1. Da die physische Erdoberfläche in diesem System eindeutig und vollständig dargestellt werden kann, wäre es im Prinzip direkt als übergeordnetes Koordinatensystem zu verwenden, wenn auch Unbequemlichkeiten damit verbunden sein könnten. Vor allem aber können die ellipsoidischen Koordinaten jederzeit in ein beliebiges 3-dimensionales, rechtwinklig-kartesisches System transformiert werden, wobei alle geometrischen Beziehungen im Objekt wie z.B. Längen oder Winkel, unverzerrt erhalten bleiben.

In der Praxis werden aber weder die krummlinigen ellipsoidischen Koordinaten noch ihre Transformation in lineare rechtwinklig-kartesische Koordinaten als geodätische Landeskoordinaten verwendet. Man bildet vielmehr die Ellipsoidoberfläche mathematisch auf eine Ebene ab, was grundsätzlich mit einer Verzerrung der Geometrie dieser Fläche verbunden ist. Die ellipsoidischen Höhen werden mit ihren unveränderten Werten senkrecht auf dieser Abbildungsebene als dritte Koordinaten übernommen. Die so gebildeten Koordinaten sind zwar in ihrem eigenen System rechtwinklig, aber sie stellen eine nichtlineare Abbildung des Objekts, nämlich der Erdoberfläche dar. Die ursprünglichen geometrischen Beziehungen zwischen Punkten der Erdoberfläche, wie Längen, Richtungen, usw., sind in diesem abgebildeten System in der Regel nicht unverzerrt erhalten. Deshalb ist eine unverzerrte Rekonstruktion des Objekts in diesem System nicht möglich.

Bild 3 zeigt im Blockschema die besprochenen Beziehungen zwischen dem Objekt (Gelände) und seinen photogrammetrischen und geodätischen Abbildungen. Dabei vertritt die Transformation T, wie bereits erklärt, die zentralperspektiven Abbildungen der photogrammetrischen Aufnahme. Die Transformation G verkörpert die Abbildung ellipsoidischer Landeskoordinaten, die aus einer 2-dimensionalen

geodätischen Abbildung und der direkten Übertragung der Höhen besteht. Da die Transformationen T und G nicht identisch sind, können die resultierenden Systeme, nämlich die photogrammetrischen und die geodätischen Abbildungen der Erdoberfläche, nicht identisch sein. Für ihre Beziehungen wird daher in Bild 3 zunächst allgemein ein System von Transformationen U postuliert. Sie entsprechen dem normalen Ziel einer photogrammetrischen Auswertung, die Erdoberfläche in einer bestimmten geodätischen Abbildung darzustellen.

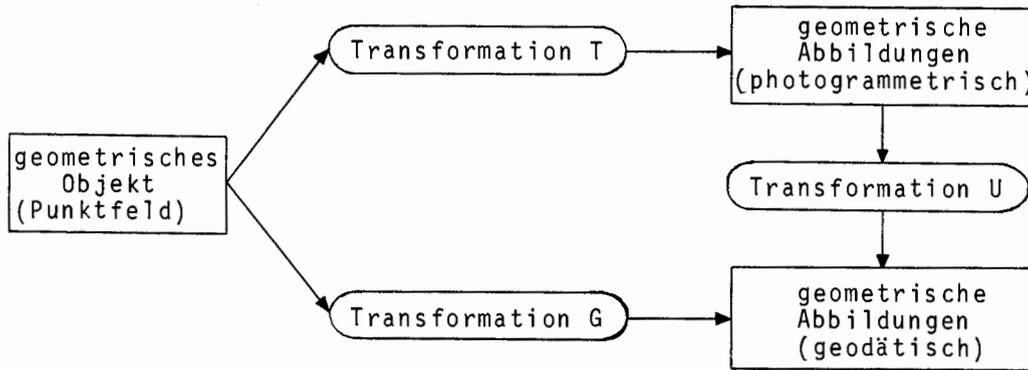


Bild 3 Beziehung zwischen den Abbildungen des Objekts

Die Transformation G ist in erster Linie die Verebnung der Ellipsoidoberfläche. Sie ist mit unvermeidbaren Verzerrungen verbunden, die in der Geodäsie als Längeverzerrungen, Richtungsverzerrungen usw. bekannt und untersucht sind. Besonders wesentlich ist hier jedoch die Feststellung, daß wir im Zusammenhang mit der Darstellung der Erdoberfläche durch Auswertung von Luftbildern die geodätische Abbildung grundsätzlich als eine 3-dimensionale Abbildung des 3-dimensionalen Objekts aufzufassen haben. In der geodätischen Betrachtungsweise werden dagegen üblicherweise Grundriß und Höhen getrennt behandelt. Im Hinblick auf die photogrammetrische Rekonstruktion der Erdoberfläche bildet jedoch die Verebnung der Ellipsoidoberfläche als Höhenbezugsfläche einen wesentlichen Bestandteil der geodätischen Abbildung. Insofern gehört alles, was die geodätisch abgebildete Erdoberfläche von dem ursprünglichen räumlichen Objekt unterscheidet, zu der Verzerrung der Abbildung. Wir definieren deshalb für diese Untersuchung als geodätische Verzerrung jede Art der Abweichung, insbesondere einschließlich der Höhen, die die geodätisch abgebildete Darstellung im Landeskoordinatensystem von der räumlichen (euklidischen) Geometrie der tatsächlichen Erdoberfläche unterscheidet.

Wie man aus Bild 3 sieht, ist es mit den Transformationen U im Prinzip möglich, Beziehungen zwischen den photogrammetrischen Abbildungen und der geodätischen Abbildung (d.h. dem Landeskoordinatensystem) aufzustellen. Tatsächlich sind diese Beziehungen aber nicht abgeleitet und verwendet worden, wohl weil die Transformationen U nichtlinear und reichlich unbequem sind (vgl. I.2.4). In der photogrammetrischen Praxis hat man daher entweder den Unterschied zwischen den Transformationen U und T vernachlässigt und anstelle von U einfach die Inversen der Transformationen T verwendet. Oder man begnügte sich als ausreichend genau mit einer Näherungstransformation U , die sich aus den Inversen von T und der

Verebnung der von dem Bild bzw. dem Bildpaar erfaßten Erdoberfläche bzw. Höhenbezugsfläche zusammensetzt. Die Verebnung wird als Erdkrümmungskorrektur bezeichnet, eine sprachlich nicht sehr glückliche Bezeichnung, da ja nicht die Erdkrümmung korrigiert wird. Sowohl bei der Verwendung von T^{-1} anstelle von U als auch bei der konventionellen Näherungslösung mit Erdkrümmungskorrektur verbleiben selbst bei völlig fehlerfreier photogrammetrischer Aufnahme und Auswertung Widersprüche zwischen der photogrammetrischen Auswertung und der im Landeskoordinatensystem dargestellten Abbildung der Erdoberfläche.

I.1.5 Besonderheit der Aerotriangulation

Wir haben bisher immer von der Erdoberfläche als dem geometrischen Objekt gesprochen, also von einer stetigen Objektfläche, die theoretisch-abstrakt aus unendlich vielen geometrischen Punkten gebildet gedacht ist. In Wirklichkeit werden bei der Rekonstruktion nur wenige Punkte gemessen, und diese ausgewählten Punkte sollen dann das ganze Objekt "repräsentieren"¹⁾. Demnach sind die oben erwähnten verbleibenden Widersprüche nicht nur von dem Abbildungssystem der Landeskoordinaten und der Anordnung der Paßpunkte sondern auch von der Wahl solcher "repräsentativer" Punkte abhängig.

Im Falle des Bildverbandes der Aerotriangulation haben wir es mit mehreren bis vielen Abbildungen T und damit auch Transformationen U zu tun. Deshalb wird die räumliche Rekonstruktion des Objekts noch stärker von der Wahl solcher repräsentativer Punkte beeinflusst. In der Regel sind beim Bildverband die Überdeckungsverhältnisse nicht in beiden Hauptrichtungen gleich, so daß eine relative Rekonstruktion des Gesamtobjekts nicht mehr wie beim einzelnen Bildpaar oder Bildstreifen ganz ohne Paßpunkte möglich ist. Je nach der Anzahl und Anordnung der Paßpunkte wird daher die Genauigkeit der Auswertung bzw. werden auch die Widersprüche zwischen dem im Landessystem abgebildeten Objekt und seiner im selben System dargestellten photogrammetrischen Rekonstruktion sehr verschieden sein.

¹⁾ Für die bei Kartierungen übliche Liniendarstellung gilt im Prinzip dasselbe. Für den Gegenstand der folgenden Untersuchungen genügt es, das Objekt und die Abbildungen als zugeordnete Punktmengen aufzufassen.

I.2 Prinziplösungen

I.2.1 Spezifizierung der Problemstellung

Die photogrammetrische Theorie hat die Aufgabe gelöst, aus perspektiven Abbildungen ein 3-dimensionales Objekt durch Orientierung der Strahlenbündel und Herstellung der Schnitte homologer Strahlen räumlich zu rekonstruieren. Konkret werden dabei für Punkte eines physischen Objektes im realen, 3-dimensionalen euklidischen Raum über die zugeordneten Bildpunkte photographischer perspektiver Abbildungen Koordinaten in einem entsprechenden, d.h. einem 3-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem abgebildet. Im Sinne von Bild 3 handelt es sich um die Umkehrung der Transformationen T . Für diese Operation sind Paßpunkte notwendig, d.h. es müssen für eine Anzahl von Objektpunkten die Koordinaten im übergeordneten kartesischen Koordinatensystem bekannt sein. Andere als kartesische lineare Koordinatensysteme sind bisher in der photogrammetrischen Theorie nicht in Betracht gezogen worden.

Das Problem der geodätischen Abbildung bei der photogrammetrischen Auswertung stellt sich nun ausschließlich dadurch, daß

- als Endergebnis der photogrammetrischen Auswertung die geodätische Abbildung des räumlich rekonstruierten Objekts oder direkt die Rekonstruktion des geodätisch abgebildeten Objekts gesucht ist (Transformation U nach Bild 3)
- und die Paßpunktkoordinaten sich in der Regel nicht auf die ursprünglichen Objektpunkte sondern auf deren geodätische Abbildung beziehen.

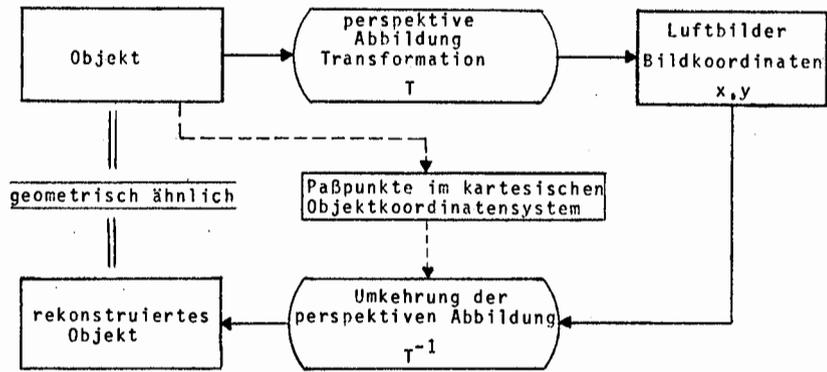
Die nach der Standard-Theorie der photogrammetrischen Auswertung durch Umkehrung der perspektiven Abbildungen aber unter Benützung von Paßpunkten in der geodätischen Abbildung gewonnene Objekt-Darstellung ist in sich widersprüchlich und erreicht bestenfalls eine näherungsweise geodätische Abbildung des rekonstruierten Objekts.

Die Lösung des Problems besteht eigentlich nach Bild 3 in der korrekten Durchführung der Rekonstruktion bzw. der Transformationen U . Diese Rekonstruktion des geodätisch abgebildeten Objekts ist unter den gegebenen praktischen Randbedingungen nicht ohne weiteres direkt möglich. Als praktikable Lösungen bieten sich 2 Gruppen von Verfahren an, die nach Bild 4

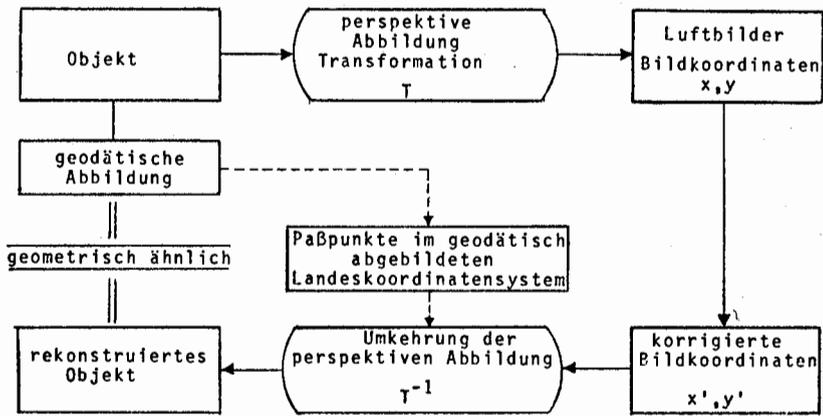
- als Umgehung des Problems und
- als Modifizierung der perspektiven Abbildungen oder ihrer Ergebnisse

klassifiziert werden können.

Prinziplösung 1: Umgehung des Problems der geodätischen Abbildung.



Prinziplösung 2: Korrektur der Bildkoordinaten.



Prinziplösung 3: Modifizierung der perspektiven Abbildungsbeziehung

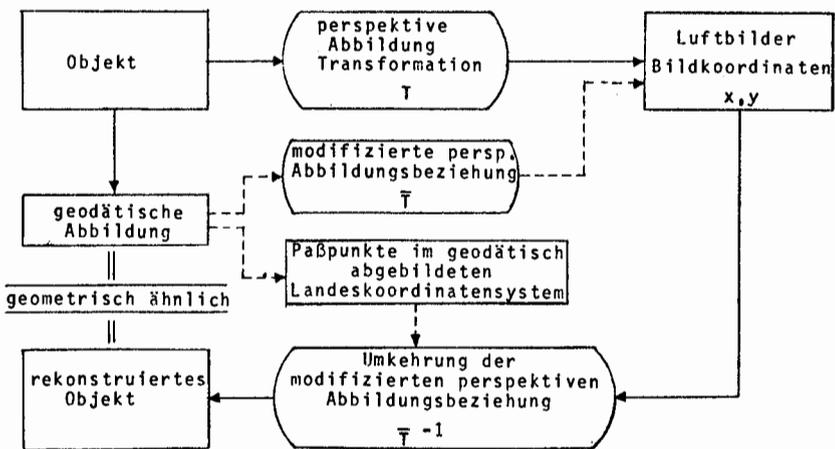


Bild 4 Prinziplösungen

I.2.2 Umgehung des Problems der geodätischen Abbildung

Die wohl einfachste Lösung des Problems besteht darin, den Fall auf die Voraussetzungen der photogrammetrischen Auswertungen zurückzuführen, d.h. das räumliche Objekt in einem 3-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem zu rekonstruieren. Wesentlich ist dabei, daß die Paßpunkte in diesem kartesischen Koordinatensystem gegeben sind und benützt werden. Eine geodätische Abbildung tritt erst nach der Auswertung in Erscheinung, wenn das ganze rekonstruierte Objekt als getrennte Operation geodätisch ins gewünschte Landessystem abgebildet wird.

Bei dieser Lösung wird zunächst die geodätische Abbildung, in der die Paßpunkte in der Regel vorgegeben sind, rückgängig gemacht, d.h. die Koordinaten der Paßpunkte werden vom Landessystem zurück ins geographische System transformiert (nach Bild 3 Umkehrung der Transformation G). Die geographisch-ellipsoidischen Koordinaten stellen zwar die Erdoberfläche unverzerrt dar, sind jedoch für die photogrammetrische Rekonstruktion nicht direkt geeignet. Man pflegt sie deshalb zweckmäßigerweise in kartesische Koordinaten umzuwandeln. Damit kann die Rekonstruktion der Erdoberfläche in Form der Aerotriangulation ohne Widerspruch in diesem System ausgeführt werden. Um die Ergebnisse wieder in das Landessystem abbilden zu können, werden entsprechend die Ergebniskoordinaten der Aerotriangulation zunächst wieder in geographische Koordinaten transformiert, mit denen die geodätische Abbildung nach den üblichen Abbildungsformeln erfolgen kann. Da alle Transformationen und Abbildungen theoretisch streng sind und mit beliebiger Rechenschärfe durchführbar sind, handelt es sich im Prinzip um ein in sich widerspruchsfreies Verfahren.

Nachdem im Prinzip jedes kartesische Koordinatensystem geeignet ist, gibt es jeweils viele Möglichkeiten, ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem für die Darstellung von Ausschnitten der Erdoberfläche auszuwählen. Als ausgezeichnete Systeme bieten sich geozentrische kartesische Koordinatensysteme an, deren z-Achse mit der Rotationsachse und die xy-Ebene mit der Äquatorebene des Erdellipsoids zusammenfällt. Für die Aerotriangulation begrenzter Ausschnitte der Erdoberfläche sind jedoch kartesische Koordinatensysteme, deren xy-Ebene jeweils eine Tangentialebene des Erdellipsoids ungefähr in der Mitte des Gebiets bildet, besonders geeignet. In einem derartigen Tangentialsystem sind die Zahlenwerte der Koordinaten im Vergleich zu anderen Systemen am kleinsten. Weiterhin weisen die photogrammetrischen Senkrechtaufnahmen gegenüber diesen Systemen die kleinsten Drehungen auf. Dieser Gesichtspunkt kann in der Praxis für die rasche Konvergenz der Iterationen bei Aerotriangulationsverfahren von Bedeutung sein, die von der Bildneigung Null als erster Näherung ausgehen. Schließlich haben die Koordinaten örtlicher kartesischer Tangentialsysteme den Vorteil, bei kleinen Gebieten und in der Nähe des jeweiligen Bezugsmeridians nur geringe Verzerrungen gegenüber der geodätischen Abbildung aufzuweisen.

I.2.3 Korrektur der Bildkoordinaten

In I.1.1 wurde schon erwähnt, daß man bisher in der Photogrammetrie jede erfaßbare Abweichung von der Zentralprojektion mit sogenannten "Korrekturen" an den Bildkoordinaten zu beseitigen versucht. Dabei wird die Ist-Abbildung auf die theoretische Soll-Abbildung korrigiert. Dieses Prinzip kann man auch bei der Behandlung der Widersprüche zwischen dem photogrammetrisch räumlich rekonstruierten Objekt und seiner geodätischen Abbildung anwenden. Man betrachtet die Widersprüche als Abbildungsfehler und "korrigiert" die Bildkoordinaten, bis die systematischen Widersprüche verschwinden.

Man kann sich die geometrisch (d.h. nicht photographisch) korrigierten Bilder so vorstellen, als ob sie geometrisch die perspektiven Abbildungen des geodätisch abgebildeten Objekts seien, das als Abbildung nicht physisch existiert und entsprechend auch nicht photographierbar ist. Diese Vorstellung scheint verlockend einfach zu sein, vor allem wenn man annehmen könnte, daß die Korrekturen der Bilder leicht aus dem Unterschied zwischen dem wahren und dem geodätisch abgebildeten Objekt zu errechnen wären. Zunächst einmal ist dieses Problem jedoch unbestimmt, weil sich die photographischen Abbildungen auf das Objekt selbst, die für die Orientierung notwendigen Paßpunkte aber auf seine geodätische Abbildung beziehen. Es gibt unendlich viele Kombinationen der Orientierung und der Korrektur der Bilder. Das bedeutet, daß man beliebige äußere Orientierungen für die Bilder definieren und die Bilder entsprechend korrigieren kann. Trotzdem müßten aufgrund der geometrischen Vorstellungen die Lösungen eindeutig existieren.

Unter ihnen kann am einfachsten eine Minimallösung ausgewählt werden, wonach die äußere Orientierung so bestimmt wird, daß die Summe der Quadrate der Korrekturen ein Minimum ist. Da alle Aerotriangulationen nach der Methode der kleinsten Quadrate arbeiten, könnte man die Korrekturen mit einem der üblichen Rechenprogramme für Aerotriangulation ermitteln. Die Ermittlung der Korrektur müßte iterativ erfolgen, da sowohl das räumliche Objekt als auch seine geodätische Abbildung bekannt sein müssen, was am Beginn der Aerotriangulation nicht der Fall ist. Der Rechenaufwand ist deshalb groß, und das Verfahren zeigt keinen Vorteil gegenüber anderen Lösungen. Außerdem besteht das Problem, die auf der geodätischen Abbildung beruhenden Korrekturen von allen anderen systematischen Bildfehlern abzutrennen. Durch Einbeziehen der speziellen Funktionen der geodätischen Abbildung bzw. der entsprechenden Bedingungen für die Korrekturen könnte auch hierfür eine Lösung entwickelt werden. Tatsächlich sind aber in der Photogrammetrie keine derartigen Ansätze versucht worden, so daß auch hier die Methode als nicht aussichtsreich nicht weiter verfolgt wird.

Die in der photogrammetrischen Praxis sehr verbreitete sogenannte Erdkrümmungskorrektur der Bildkoordinaten kann als eine Näherungslösung dieser Methode betrachtet werden. Bei der Erdkrümmungskorrektur wird im Prinzip die als Kugel- fläche approximierte Ellipsoidoberfläche innerhalb des von einem Bild bedeckten Gebiets auf eine Tangential- oder Sekantenebene reduziert und die Bildkoordinaten entsprechend korrigiert, siehe [3]. Dies kann genähert auch als eine Art örtlicher geodätischer Abbildung betrachtet werden. Abgesehen von den Rest-

fehlern dieser Erdkrümmungskorrektur wegen Höhenunterschieden im Gelände hat sie mit der geodätischen Abbildung im Landeskoordinatensystem gemeinsam, daß in beiden Fällen die Ellipsoidoberfläche verebnet ist. Es bleiben jedoch unterschiedliche Verzerrungen in der Lage, so daß auch nach der Erdkrümmungskorrektur weiterhin Widersprüche auftreten und diese Korrektur nur als eine Näherung, nicht aber als eine Prinziplösung betrachtet werden kann. Diese Erdkrümmungskorrektur ist jedoch verhältnismäßig wirksam, praktisch nur von der Flughöhe abhängig und somit einfach durchzuführen. Entsprechend wird sie in der Praxis vielfach angewendet.

I.2.4 Modifizierung der perspektiven Abbildungsbeziehungen

Als Alternative zur Prinziplösung der "Korrektur" der Bildkoordinaten kann das perspektive Abbildungsgesetz so geändert werden, daß es eine unmittelbare, theoretisch richtige Beziehung zwischen dem Bild und dem geodätisch abgebildeten Objekt darstellt. Dieses modifizierte Abbildungsgesetz kann noch stets eine Zentralprojektion sein. Es entspricht der (Umkehrung der) Transformation U in Bild 3 bzw. der Transformation \bar{T} in Bild 4.

Dieses modifizierte Abbildungsgesetz kann aus den Beziehungen zwischen dem ursprünglichen Objekt und den photogrammetrischen Bildern einerseits und dem geodätisch abgebildeten Objekt andererseits abgeleitet werden. Es ist zunächst immer möglich, die Erdoberfläche in einem 3-dimensionalen, z.B. lokaltangentialen kartesischen Koordinatensystem zu beschreiben. Der Zusammenhang zwischen den Bildkoordinaten und den Koordinaten eines derartigen kartesischen Objektkoordinatensystems kann durch die bekannten perspektiven Abbildungsbeziehungen (vgl. Kap. II.2.1) dargestellt werden. Wenn nun auch die Beziehungen zwischen dem Objekt und seiner geodätischen Abbildung bekannt sind, können die kartesischen Objektkoordinaten als Funktionen der zugeordneten, geodätisch abgebildeten (Landes-)Koordinaten ausgedrückt in die Formeln der perspektiven photogrammetrischen Abbildung eingesetzt werden. Damit erhält man ein neues Funktionsmodell, das die Bildkoordinaten unmittelbar in Zusammenhang mit den geodätisch abgebildeten Koordinaten der entsprechenden Objektpunkte bringt. Ausgehend von diesem neuen Funktionsmodell kann die Aerotriangulation unter Verwendung von geodätisch abgebildeten Paßpunkten mit demselben geodätisch abgebildeten System als übergeordnetem Koordinatensystem im Prinzip ohne Widerspruch ausgeführt werden.

Wegen der Nichtlinearität der geodätischen Abbildung ist das beschriebene Funktionsmodell im allgemeinen nicht geschlossen explizit darstellbar. Man muß zu Reihenentwicklungen greifen. K. RINNER [4] hat in seiner Untersuchung der Abweichungen eines geodätisch abgebildeten Geländes von seiner ursprünglichen Form folgende Beziehungen zwischen den Landeskoordinaten der Abbildung und den Objektkoordinaten eines kartesischen Tangentialkoordinatensystems, bezogen auf eine Kugel mit Radius R, angegeben:

$$\begin{aligned} X &= (1+h/R)\Delta y + b_{03}(1+h/R)\Delta y^3 + b_{21}(1+h/R)\Delta x^3\Delta y + \dots \\ Y &= (1+h/R)\Delta x + b_{30}(1+h/R)\Delta x^3 + b_{12}(1+h/R)\Delta x\Delta y^2 + \dots \\ Z &= h - h_b - \frac{1}{2R}(1+h/R)(\Delta x^2 + \Delta y^2) + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

wobei

- $\Delta x, \Delta y$: Koordinatendifferenzen im Landeskoordinatensystem der geodätischen Abbildung zwischen einem beliebigen Objektpunkt und dem Bezugspunkt P_b (Berührungspunkt) des Tangentialsystems.
- h : Höhenkoordinaten des Objektpunkts (Ellipsoidhöhen).
- R : Radius der Kugel.
- X, Y, Z : Kartesische Tangentialkoordinaten des Objektpunkts. Der Ursprung (Bezugspunkt) ist P_b .
- ϕ_b, λ_b, h_b : Geographische Koordinaten des Bezugspunkts P_b .

Für die Koeffizienten $b_{30}, b_{21}, b_{12}, b_{03}$ hat RINNER für 4 verschiedene geodätische Abbildungen folgende, für kleine Gebiete gültigen Näherungswerte angegeben:

geod. Abbildung	b_{30}	b_{21}	b_{12}	b_{03}
Soldner	$-\frac{1}{6R^2}$	0	$-\frac{1}{2R^2}$	$-\frac{1}{6R^2}$
Gauß-Krüger	$-\frac{1}{6R^2}$	0	$-\frac{1}{2R^2}$	$-\frac{1}{3R^2}$
Lambert	$-\frac{1}{3R^2}$	$-\frac{1}{2R^2}$	0	$-\frac{1}{6R^2}$
stereographisch	$-\frac{1}{4R^2}$	$-\frac{1}{4R^2}$	$-\frac{1}{4R^2}$	$-\frac{1}{4R^2}$

Tab. 1 Koeffizienten der Gl. (1) für verschiedene geodätische Abbildungen nach RINNER [4]

Auf der linken Seite der Gl. (1) stehen die kartesischen Koordinaten des Objektpunkts (im Tangentialsystem). Sie können mit Hilfe der bekannten Abbildungsgleichungen der perspektiven Abbildung mit den photogrammetrischen Bildkoordinaten in Beziehung gesetzt werden. Substituiert man entsprechend Gl. (1) in die Gl. (18) (siehe Kap. II.2.1), erhält man folgende Abbildungsbeziehungen zwischen den Bildkoordinaten eines photogrammetrischen Bildpunktes und den geodätisch abgebildeten (Landes-)Koordinaten seines zugeordneten Objektpunktes:

$$\frac{(\bar{x} - \bar{x}_0)}{(\bar{z} - \bar{z}_0)} = \frac{a_{11}T_1 + a_{21}T_2 + a_{31}T_3}{a_{13}T_1 + a_{23}T_2 + a_{33}T_3}$$

$$\frac{(\bar{y} - \bar{y}_0)}{(\bar{z} - \bar{z}_0)} = \frac{a_{12}T_1 + a_{22}T_2 + a_{32}T_3}{a_{13}T_1 + a_{23}T_2 + a_{33}T_3} \quad (2)$$

wobei

- $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$: Bildkoordinaten
- $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$: Koordinaten des Projektionszentrums im Bildkoordinatensystem

T_1, T_2, T_3 : Funktionen der Landeskoordinaten, d.h. der geodätischen Abbildung der Objektpunkte

$$T_1 = \Delta y - \Delta y_0 + \frac{1}{R} \Delta y h - \frac{1}{R} \Delta y_0 h_0 + b_{03} \Delta y^3 - b_{03} \Delta y_0^3 \\ + b_{03} \frac{1}{R} h \Delta y^3 - b_{03} \frac{1}{R} h_0 \Delta y_0^3$$

$$T_2 = \Delta x - \Delta x_0 + \frac{1}{R} \Delta x h - \frac{1}{R} h_0 \Delta x_0 + b_{30} \Delta x^3 - b_{30} \Delta x_0^3 \\ + b_{30} \frac{1}{R} h \Delta x^3 - b_{30} \frac{1}{R} h_0 \Delta x_0^3 + b_{12} \Delta x \Delta y^3 - b_{12} \Delta x_0 \Delta y_0^3 \\ + b_{12} \frac{1}{R} h \Delta x \Delta y^2 - b_{12} \frac{1}{R} h_0 \Delta x_0 \Delta y_0^2$$

$$T_3 = h - h_0 - \frac{1}{2R} \Delta x^2 + \frac{1}{2R} \Delta x_0^2 - \frac{1}{2R} \Delta y^2 + \frac{1}{2R} \Delta y_0^2 \\ - \frac{1}{2R} h \Delta x^2 + \frac{1}{2R} h_0 \Delta x_0^2 - \frac{1}{2R} h \Delta y^2 + \frac{1}{2R} h_0 \Delta y_0^2$$

Wenn die Gl. (2) der Auswertung von Luftbildern zugrundegelegt werden, sind wie bisher im konventionellen Fall folgende Unbekannte zu lösen:

Pro Bild 6 unabhängige Orientierungsparameter; 3 davon sind in den Koeffizienten $a_{11}, a_{21} \dots a_{33}$ enthalten, die übrigen 3 sind $\Delta x_0, \Delta y_0, h_0$, die Landeskoordinaten des Projektionszentrums (hier die Differenzen zu dem Bezugspunkt P_b) und die Landeskoordinaten der Neupunkte $\Delta x, \Delta y, h$.

Der Bezugspunkt P_b des Tangentialsystems wird frei gewählt. Seine Landeskoordinaten sind damit bekannt. Die Wahl des Bezugspunktes des Tangentialsystems ist zwar in weitem Bereich beliebig, er wird aber am günstigsten in die Mitte des Gebiets gelegt, weil die Gl. (1) und Gl. (2) Reihenentwicklungen darstellen. Große Koordinatenwerte $\Delta x, \Delta y, h$ würden die Mitführung von Gliedern höherer Ordnung erfordern.

Die Gl. (2) stellen die für die geodätische Abbildung modifizierte Projektion dar. Obwohl sie durch Einsetzen der Landeskoordinaten etwas komplizierter ausfallen als die ursprünglichen Gleichungen der perspektiven Abbildung, verursachen sie jedoch nicht wesentlich mehr Rechenaufwand, da sie keine zusätzlichen Unbekannten enthalten. Lediglich bei dem Aufstellen von Fehlergleichungen und Normalgleichungen fällt ein höherer Rechenaufwand an.

Eine gewisse Erschwerung liegt jedoch darin, daß die Koeffizienten b_{30}, b_{21}, b_{12} und b_{03} von der Art der geodätischen Abbildung abhängig sind und somit für jede Abbildung gesondert angesetzt werden müssen. Weitere Schwierigkeiten treten auf, wenn man diese Methode auf einen größeren Ausschnitt der Erdoberfläche anwendet und sie auf das Ellipsoid anstatt auf die Kugel bezieht. Es werden dann mehr Koeffizienten benötigt, die nicht nur von der Art der Abbildung sondern zusätzlich von den geographischen Koordinaten des ausgewählten Bezugspunktes P_b abhängig sind. In der Praxis hat deshalb diese Lösung bisher keine Anwendung gefunden.

I.3 Die Behandlung der geodätischen Abbildung in der bisherigen photogrammetrischen Praxis

I.3.1 Einbildmessung

Die Auswertung eines photogrammetrischen Einzelbildes ist nicht ohne weiteres in der Lage, ein räumliches Objekt zu rekonstruieren. Es müssen vielmehr zusätzliche Informationen über das Objekt vorliegen, z.B. gegebene Höhen oder im Sonderfall des horizontalen ebenen Geländes die Annahme konstanter Z-Werte aller Objektpunkte.

Bei der Einzelbildauswertung unterscheidet man zwei Verfahren, den (rechnerischen) räumlichen Rückwärtsschnitt und die (meist optische) Entzerrung. Das erste Verfahren erfordert mindestens 3 bekannte Paßpunkte, um bei vorgegebener innerer Orientierung die Orientierungsparameter des Strahlenbündels zu berechnen. Wenn die Koordinaten weiterer Objektpunkte bestimmt werden sollen, muß in der Regel jeweils eine der drei Koordinaten (X,Y,Z) dieser Punkte bekannt sein. Meistens sind wie erwähnt die Geländehöhen der Punkte vorgegeben.

Da die Paßpunkte in der Regel in Landeskoordinaten gegeben sind, steht auch der räumliche Rückwärtsschnitt im Prinzip vor dem Problem der geodätischen Abbildung. In der Praxis wird das Problem jedoch entweder überhaupt vernachlässigt oder bestenfalls mit einer Erdkrümmungsbildkorrektur gemäß I.2.3 näherungsweise berücksichtigt. Widersprüche aufgrund der geodätischen Abbildung (einschließlich der Verebnung der Erdkrümmung) treten beim räumlichen Rückwärtsschnitt ohnehin nur an den Paßpunkten direkt in Erscheinung, sofern ihre Anzahl 4 oder mehr beträgt. Wie die simulierten Beispiele in Abschnitt III.2 zeigen werden, sind die sichtbaren Restfehler in Abhängigkeit von der Lage und Anzahl der Paßpunkte sehr klein, besonders im üblichen Fall von 4 symmetrisch angeordneten Paßpunkten.

Bei der optischen Entzerrung, die bei einigermaßen strengen Genauigkeitsanforderungen ohnehin nur auf ebenes Gelände anwendbar ist, wird bei den üblichen Bildmaßstäben auf eine Korrektur verzichtet. Das Problem der geodätischen Abbildung besteht dabei im Prinzip in gleicher Weise wie beim räumlichen Rückwärtsschnitt, und Widersprüche treten ebenfalls direkt nur an den Paßpunkten im Falle der Überbestimmung, d.h. ab mindestens 5 Paßpunkten in Erscheinung. Sie gehen aber in den in der Regel wesentlich größeren Reliefversetzungen unter und werden in der Praxis nicht weiter beachtet oder behandelt.

Zur Einzelbildauswertung kann in diesem Zusammenhang auch das Verfahren der differentiellen Entzerrung gezählt werden. Da dieses Verfahren auf das Prinzip des räumlichen Rückwärtsschnitts zurückgeführt werden kann, entspricht der Einfluß der geodätischen Abbildung auf die Ergebnisse der differentiellen Entzerrung theoretisch den beim räumlichen Rückwärtsschnitt besprochenen Verhältnissen. Außerdem gelten für das Orthophoto wie bei der Entzerrung mit der graphischen Genauigkeit gemilderte Anforderungen.

Im konventionellen Bereich der Photogrammetrie mit Bildern handelsüblicher Aufnahmekammern wird ein von einem Bild überdecktes Gebiet die Größe von $20 \times 20 \text{ km}^2$ selten überschreiten. Diese Begrenzung ist einerseits durch das Bildformat, die Brennweite der Kammer und die Gipfelhöhe der Bildflugzeuge gegeben, andererseits begrenzt das Auflösungsvermögen im Anwendungsbereich der topographischen Aufnahmen die weitere Verkleinerung des Bildmaßstabs und damit die Verminderung der auf dem Bild noch erkennbaren Einzelheiten. Wie wir später im Kapitel III sehen werden, kann man bis zu der genannten Gebietsgröße bei der Herstellung von Bild- oder Orthophotoplänen die Verzerrungen der geodätischen Projektion vernachlässigen, sofern die Paßpunkte so angeordnet sind, daß sie den Bereich im wesentlichen einrahmen. Die Fehler der Reliefversetzungen sind bei diesen Plänen in der Regel größer als der Fehlereinfluß der geodätischen Verzerrung.

Völlig andere Verhältnisse liegen dagegen bei Aufnahmen aus Erdsatelliten oder bemannten Raumfahrzeugen vor. Die Flughöhe beträgt hunderte von Kilometern oder mehr, und die von einem einzelnen Bild erfaßte Fläche kommt in die Größenordnung von $100 \times 100 \text{ km}^2$ bis zu einem Vielfachen davon. Bei der Auswertung von solchen Bildern wird der Einfluß der geodätischen Abbildung dominierend und muß berücksichtigt werden.

Viele von diesen Aufnahmen unterscheiden sich von den Bildern der konventionellen Photogrammetrie nicht nur in der größeren Flughöhe und Gebietsüberdeckung sondern auch in ihren grundlegenden Abbildungseigenschaften. Es handelt sich zum Teil um Abtaster-, Panorama- oder Videoaufnahmen aus Satelliten oder Raumfahrzeugen die ursprünglich für die Zwecke der Fernerkundung mit geringen geometrischen Genauigkeitsanforderungen gedacht waren.

Zwei Aufnahmesysteme sollen hier als typische Vertreter genannt sein: Die S-190B Earth Terrain Camera (ETC) im Raumfahrzeug SKYLAB und der Multispectral Scanner (MSS) des ERTS Satelliten (inzwischen in LANDSAT I umbenannt) |5|.

Bei der S-190B Kamera handelt es sich um eine echte photographische Kamera. Das Bild wird direkt auf Film registriert und gespeichert. Allerdings sind die Rahmenmarken nicht wie bei einer photogrammetrischen Meßkammer mit der Kammer fest verbunden sondern Teil des Filmmagazins, so daß die innere Orientierung nicht konstant und nicht bekannt ist. Außerdem hat die Kamera einen Bildebenen-Verschluß, so daß verschiedene Bildteile nacheinander belichtet werden. Die Kamera ist also im photogrammetrischen Sinne nicht metrisch, und das Bild zeigt wegen des Verschlusses deutliche Abweichung von der Zentralprojektion.

Bei dem Multispektralscanner des LANDSAT I handelt es sich noch viel weniger um eine photographische Momentaufnahme eines jeweils ganzen Bildes im Sinne der Photogrammetrie. Mittels eines oszillierenden Spiegels wird die Erde in schmalen Streifen quer zur Flugrichtung "abgetastet". Dabei wird die Stärke der Signale in bestimmten Wellenbereichen vom Empfangsgerät kontinuierlich ins Video-Signal umgewandelt, anschließend digitalisiert und über Funksignale zur Empfangsstation auf der Erde gesendet. Es ist nicht die Digitalisierung, die solche Aufnahmen im Prinzip von den konventionellen photogrammetrischen Bildern unterscheidet sondern die Methode, nach der ein Bild zusammengesetzt wird. Bei dem MSS erfolgt

das Abtasten der Erdoberfläche während des Flugs des Satelliten kontinuierlich, so daß jedes Bildelement in einer abgetasteten Zeile einem anderen Zeitpunkt entspricht und ebenso die Zeilen zeitlich versetzt aufgenommen werden (in Wirklichkeit werden allerdings jeweils 6 Zeilen gleichzeitig für einen Kanal abgetastet). Ein aus einer Anzahl solcher Zeilen zusammengesetztes Bild hat somit keine gemeinsame Zentralprojektion, da es keine gemeinsame äußere Orientierung besitzt.

Es gibt natürlich auch Satellitenaufnahmen mit der Eigenschaft der Zentralperspektive. Solche Aufnahmen können wie normale photogrammetrische Bilder behandelt werden. Ein Beispiel bilden die S-190A Aufnahmen aus SKYLAB [6], die zur Aerotriangulation verwendet worden sind.

Nicht-metrische oder nicht-perspektive Aufnahmen können dennoch in gewissem Umfang geometrisch ausgewertet werden. Dabei werden entweder die geometrischen Abweichungen vernachlässigt und die verminderte Genauigkeit in Kauf genommen (wie z.B. bei der Aerotriangulation mit den S-190B Aufnahmen von SKYLAB [7]) oder man versucht die Abweichungen durch Parameter zu erfassen und zu korrigieren (z.B. Korrektur der Bildkoordinaten durch Polynome, [8]).

Im Sinne unserer Aufgabenstellung sind Aufnahmen aus Satelliten- bzw. Raumfahrzeugen dadurch besonders gekennzeichnet, daß sie meistens ein sehr großes Gebiet überdecken und für geometrisch genaue Auswertungen die Verzerrungen der geodätischen Abbildung einschließlich der Verebnung des Ellipsoids berücksichtigt werden müssen. Außer bei der Kartierung der Mondoberfläche oder der Planeten werden solche Aufnahmen wegen zu großer Flughöhe und zu kleinem Basisverhältnis (meist kleiner als 0.10) sehr selten stereoskopisch ausgewertet. Vielmehr werden häufig Bildpläne aus ihnen hergestellt. In wenigen Fällen hat man sie auch für die Fortführung topographischer Karten verwendet, allerdings nur bezüglich der Planimetrie. So sind in den USA z.B. mit den die S-190A Aufnahmen von Bildplänen bis zum Maßstab 1:100 000 hergestellt und die S-190B wurde für die Kartenfortführung bis zum Maßstab 1:50 000 verwendet worden, [5]. Wie wir später im Kapitel III sehen werden, ist der Einfluß der geodätischen Abbildung bei diesen Maßstäben und Flächenbereichen nicht mehr vernachlässigbar.

I.3.2 Das Bildpaar

Die räumliche Rekonstruktion eines Objekts aus perspektiven Abbildungen ist im allgemeinen erst mit einem Bildpaar möglich. Deshalb bildet es in der photogrammetrischen Theorie die Grundeinheit zur Erläuterung der räumlichen Auswertung. Auch in der Praxis bildet das Bildpaar heute noch stets das Grundelement für die Kartierung wie auch in vielen Fällen noch für die Aerotriangulation. Der Bildverband kann als eine Erweiterung des Bildpaars betrachtet werden, und die meisten Probleme der Verzerrung durch die geodätische Abbildung in der Aerotriangulation treten im Prinzip schon beim Bildpaar auf.

Eine räumliche Rekonstruktion ist vollständig, wenn erstens alle homologen Strahlen zum Schnitt gebracht worden sind, d.h. ein zum Objekt geometrisch ähnliches Modell gebildet ist, und wenn zweitens das durch die Schnittpunkte aller homologen Strahlen dargestellte Objekt (Modell) mit dem ursprünglichen Objekt nach Maßstab und Orientierung in Obereinstimmung gebracht worden ist. Diese beiden Bedingungen können in der Praxis entweder gleichzeitig in einem Arbeitsgang erfüllt werden oder nacheinander in zwei Stufen realisiert werden. Bei analogen Auswerteverfahren ist im allgemeinen nur die zweistufige Rekonstruktion möglich. Dagegen stehen bei rein rechnerischen Verfahren beide Rekonstruktionsmöglichkeiten offen.

Unabhängig von dem Verfahren, ob ein- oder zweistufig, analog oder analytisch, gibt es in der Theorie der Stereoauswertung keinen Widerspruch zwischen dem geometrisch rekonstruierten und dem ursprünglichen Objekt. Wenn sich die Rekonstruktion dagegen auf ein Ersatzobjekt, nämlich die geodätische Abbildung des ursprünglichen Objekts beziehen soll, entstehen im Prinzip Widersprüche, da sich die photogrammetrischen Aufnahmen auf das ursprüngliche reale Objekt beziehen. Dies trifft insbesondere zu, wenn die photogrammetrisch rekonstruierte Erdoberfläche in einer geodätischen Abbildung (Landeskoordinatensystem) dargestellt werden soll, auf die sich auch die vorgegebenen Paßpunkte beziehen, wenn aber trotzdem die Rekonstruktion sich des Funktionalmodells der perspektiven photogrammetrischen Abbildung des ursprünglichen räumlichen Objekts (d.h. der physischen Erdoberfläche) bedient.

Die Widersprüche sind im einzelnen von sehr vielen Faktoren abhängig, wie der Art der geodätischen Abbildung, der Methode der Rekonstruktion (ob ein- oder zweistufig), der Paßpunktanordnung, dem Ort des Bildpaars in der geodätischen Abbildungszone, usw. (siehe Kap. III.2. Bildpaar). Es sind, abgesehen von Ausnahmen, alle Längen, Winkel und Flächen in dem abgebildeten System verzerrt.

Am auffälligsten zeigen sich die Widersprüche in der Höhe. Da die ursprüngliche Ellipsoidfläche, die als gekrümmte Höhenbezugsfläche für die Erdoberfläche dient, in dem Landessystem verebnet ist, zeigt das an sich räumlich fehlerfrei rekonstruierte Objekt gegenüber dem im Landessystem und durch die Paßpunkte dargestellten eine "Aufwölbung". Diese Aufwölbung bildet den größten Teil des Widerspruchs und ist in der Photogrammetrie schon lange erkannt. Obwohl die Widersprüche nicht ohne weiteres in Höhe und Lage aufteilbar sind, versucht man jedoch in der Praxis mit einer Näherungslösung diese Aufwölbung zu beseitigen und damit das rekonstruierte Objekt besser an das Landessystem anzupassen. Die Beseitigung der Aufwölbung wird in der Photogrammetrie als "Erdrümmungskorrektur" bezeichnet und fälschlicherweise häufig den (auf ähnliche Weise zu korrigierenden) Bildfehlern zugerechnet.

Die Erdrümmungskorrektur kann gemäß Abschnitt I.2.3 als eine Näherung der 2. Prinziplösung betrachtet werden. Dabei wird die Erdrümmung ganz ohne Berücksichtigung der ursprünglichen geodätischen Abbildung des Landessystems individuell für das einzelne Bildpaar verebnet. Abgesehen davon, daß jede Art der Verebnung der Bezugsfläche der Erde zusätzliche Verzerrungen in der Lage bringt, ergibt diese Höhenkorrektur der Erdrümmung noch keine völlig fehlerfreie Re-

konstruktion des Bildpaars im Landessystem, selbst wenn zusätzliche Lagekorrekturen für Punkte verschiedener Höhen berücksichtigt werden. Es verbleiben weiterhin grundsätzlich Widersprüche zwischen dem räumlich modifiziert rekonstruierten und dem im Landessystem abgebildet darzustellenden Objekt.

Wie wir später im Abschnitt II.2.4 sehen werden, gibt es sehr viele Möglichkeiten, einen kleinen Teil der Erdoberfläche zu entkrümmen. Im Prinzip handelt es sich jedoch stets darum, den betreffenden Teil der Erdoberfläche nach irgendwelcher Definition auf eine Tangentialebene oder eine Sekantenebene zu projizieren (abzubilden).

Für das Bildpaar kann diese Erdkrümmungskorrektur entweder an jedem Einzelbild getrennt ohne Berücksichtigung des anderen Bildes oder an dem von den beiden Bildern räumlich rekonstruierten Objekt angebracht werden.

Bei der Korrektur am Einzelbild handelt es sich um eine Art Verzeichnungskorrektur, wobei der Bildstrahl bei der Rekonstruktion des Strahlenbündels in der Lotebene durch das Projektionszentrum, d.h. radial vom Bildnadir aus so korrigiert wird, als ob das Objekt mit der Bezugsfläche auf die Tangentialebene durch den Nadirpunkt verebnet worden und dann perspektiv abgebildet worden wäre (siehe II.2.4.1 Erdkrümmungskorrektur und Bild 5).

Jedes Bild wird dabei für sich allein unabhängig von dem anderen korrigiert und hat seine eigene Tangentialebene als neue Bezugsfläche, siehe Bild 6. Wegen der Konvergenz der Erdellipsoidnormalen werden jedoch die zwei Tangentialebenen der Bilder eines Bildpaars nie zusammenfallen, so daß es theoretisch im allgemeinen nicht mehr möglich ist, die homologen Strahlen nach der Erdkrümmungskorrektur ohne Widerspruch wieder zum Schnitt zu bringen. Homologe Bildpunkte sind nicht mehr Abbildungen desselben Objektpunkts. Da aber der Winkel zwischen den zwei Tangentialebenen gewöhnlich klein ist (z.B. ungefähr 6° bei 10 000 m Flughöhe, Weitwinkelaufnahmen mit 60 % Längsüberdeckung; allgemein etwa 1° pro km Basislänge), ist der Widerspruch klein genug, daß er in den praktischen Fällen vernachlässigt werden kann. FINSTERWALDER hat in einer Untersuchung [3] $0.4 \mu\text{m}$ als maximalen Fehler wegen der Konvergenz der Normalen für die oben erwähnte Flughöhe angegeben. Dieser Wert ist zwar ohne Berücksichtigung der Höhe der Objektpunkte und damit der Reliefversetzung im Bild abgeleitet, aber wie sich später im Kapitel III zeigen wird, ist der Fehler der Erdkrümmungskorrektur wegen des Winkels zwischen den beiden Tangentialebenen in den üblichen Fällen vernachlässigbar, zumal die Lösung mit der Erdkrümmungskorrektur ohnehin nur eine Näherungslösung darstellt.

Bei der Erdkrümmungskorrektur am räumlich rekonstruierten Objekt wird nicht das einzelne Strahlenbündel korrigiert, sondern das zunächst ohne Deformation rekonstruierte Objekt selbst bzw. seine Höhenbezugsfläche. Da das rekonstruierte Objekt der wahren Erdoberfläche geometrisch ähnlich ist, kann es im Prinzip wie die Erdoberfläche selbst nach irgendwelcher Definition geodätisch auf eine Ebene abgebildet werden. Wenn es nur um die Verebnung der Höhenbezugsfläche geht, gibt es mehrere Möglichkeiten, das räumlich rekonstruierte Objekt abzubilden. Am einfachsten benutzt man eine perspektive oder eine orthogonale Abbildung (siehe Abschnitt II.2.4.2 Erdkrümmungskorrektur und Bild 7), auf eine Tangentialebene

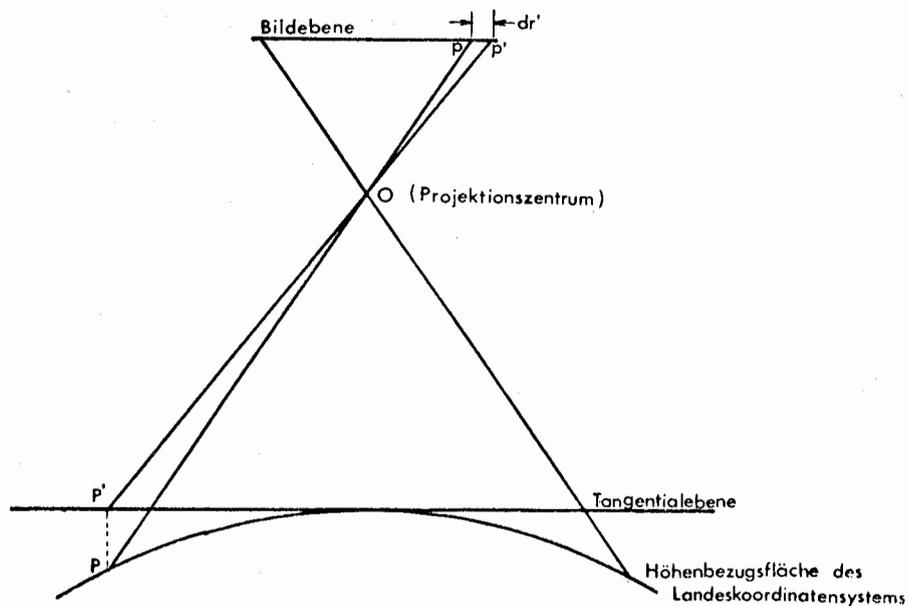


Bild 5 Zur orthogonalen Erdkrümmungskorrektur des Einzelbildes

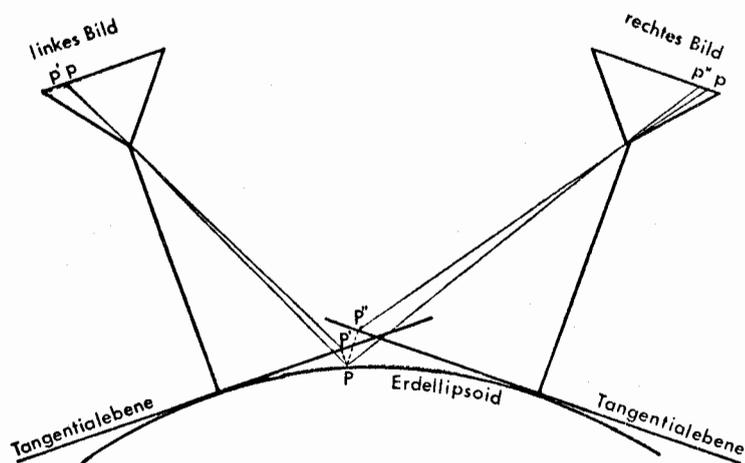


Bild 6 Unabhängige Erdkrümmungskorrektur zweier benachbarter Bilder

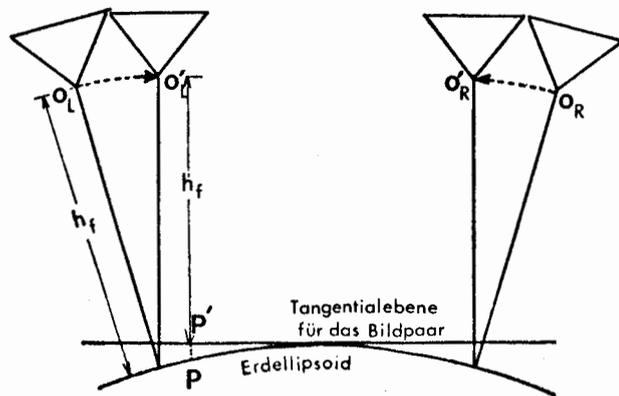


Bild 7 Orthogonale Erdkrümmungskorrektur des relativ orientierten Bildpaars einschließlich der Projektionszentren

durch die Mitte des vom Bildpaar bedeckten Gebiets. Die Tangentialebene ist dann eindeutig definiert und die Korrektur im geodätischen Sinne strenger als die Erdkrümmungskorrektur im einzelnen Bild.

Weil die Erdkrümmungskorrektur eine Art geodätischer Abbildung ist, setzt sie unabhängig davon, ob sie am Bild oder am räumlich rekonstruierten Objekt angebracht wird, die Kenntnis der äußeren Orientierung der Bilder und die Lage aller Objektpunkte im Objektraum voraus. Diese Voraussetzung ist zunächst nicht erfüllt, da es gerade die Aufgabe der Auswertung des Bildpaars ist, diese Information zu gewinnen.

Weil die Erdkrümmungskorrektur selbst nur eine Näherungslösung ist und in der Praxis andere Bildfehler auftreten, deren Wirkungen die Fehler wegen ungenauer Erdkrümmungskorrektur weit übersteigen, läßt man bei der räumlichen Rekonstruktion des Bildpaars oft weitere Vernachlässigungen bezüglich der Erdkrümmung zu, welche keine genaue Kenntnis der äußeren Orientierung oder der Lage der Punkte im Objektraum erfordern. So wird z.B. bei der Einzelbildkorrektur die Bildneigung vernachlässigt und der Bildhauptpunkt als Bildnadir benutzt. Außerdem wird eine zusätzliche Reliefversetzung als Funktion der Höhe der Objektpunkte nicht berücksichtigt, so daß die Erdkrümmungskorrektur im Bild radialsymmetrisch zum Bildhauptpunkt angebracht wird.

Sowohl die Einzelbildkorrektur der Erdkrümmung als auch die Entkrümmung des räumlich rekonstruierten Modells wird bei konventionellen Analog-Auswertegeräten mit optischen oder mechanischen Einrichtungen realisiert:

Die Einzelbildkorrektur an Analog-Geräten kann bei Senkrechtaufnahmen ähnlich wie die Korrektur der optischen Verzeichnung durch eine Ausgleichsplatte vor dem Bild oder durch eine mechanische Korrekturvorrichtung, die z.B. die Bildweite kontinuierlich ändert, erfolgen [3]. Dabei werden die oben genannten zusätzlichen Vernachlässigungen akzeptiert. Dennoch müßte streng genommen die Erdkrümmungskorrektur in Abhängigkeit von der Flughöhe variabel sein. In der Praxis begnügt man sich aber häufig mit einer mittleren Korrektur für die üblichen Flughöhen. Die Kompensationsbildträger z.B. des Aviograph B8 der Firma Wild gehören z.B. zu dieser Art der optischen Erdkrümmungskorrektur.

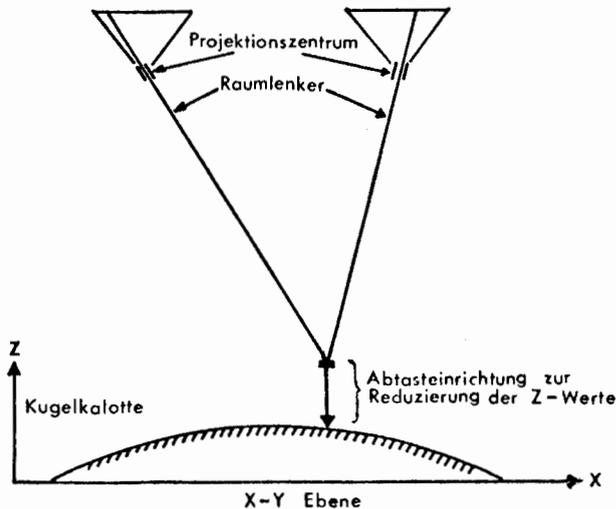


Bild 8 Funktionsdarstellung der Erdkrümmungskorrektur beim WILD Autograph A 10

Die analoge Erdkrümmungskorrektur direkt am räumlich rekonstruierten Objekt ist an Analoggeräten bisher weniger häufig verwendet worden. Eine typische Korrekturvorrichtung dieser Art zeigt der Autograph A 10 der Firma Wild. Eine mechanische Kugelkalotte dient dabei als Höhenbezugsfläche an Stelle der xy-Ebene, siehe Bild 8.

Mittels einer mechanischen Abtastvorrichtung sind die Höhenkoordinaten nicht mehr auf die Grundrißebene des Geräts sondern auf eine Kugelfläche bezogen, deren abgetastete Krümmung der Aufwölbung der Erdoberfläche im jeweiligen Modellmaßstab entspricht¹⁾. So wird die Abweichung in der Höhe zwischen der gekrümmten Bezugsfläche der Erdkugel (es ist zulässig, kleinere Teile des Erdellipsoid jeweils als Kugel zu betrachten) und der im Landessystem verebnet dargestellten Bezugsfläche der Höhen beseitigt. Auch diese Art der Korrektur enthält Vernachlässigungen. So müßten bei den nicht unmittelbar auf der Bezugsfläche liegenden Punkten wegen der Lotkonvergenz auch die Lagekoordinaten zusätzliche Korrekturen erhalten. Allerdings macht sich die Lotkonvergenz nur bei Gelände mit sehr großen Höhenunterschieden bemerkbar, denn bei flachem Gelände mit konstanter Höhe können die entsprechenden Lagekorrekturen in erster Näherung durch Änderung des Modellmaßstabs aufgefangen werden. FINSTERWALDER [3] hat gezeigt, daß die Vernachlässigung der Geländehöhen bei der Erdkrümmungs-Modellkorrektur für die praktischen Fälle unbedeutend ist. Dagegen sind die Fehlerwirkungen an den Lagekoordinaten der beiden Projektionszentren nicht mehr vernachlässigbar. Bei der Auswertung eines einzigen Bildpaars tritt dieser Fehler effekt noch nicht in Erscheinung. Erst wenn für die Aerotriangulation mehrere Bildpaare zu einem Streifen nach der Methode der unabhängigen Modelle zusammengeschlossen werden, wird es aus diesem Grunde trotz der Entkrümmung der Einzelmodelle nach wie vor eine Durchbiegung des ganzen Streifens wegen der Erdkrümmung geben, siehe Bild 9.

¹⁾ Die Einstellung der Krümmung erfolgt nicht an der Kugelfläche sondern über die Abtastvorrichtung.

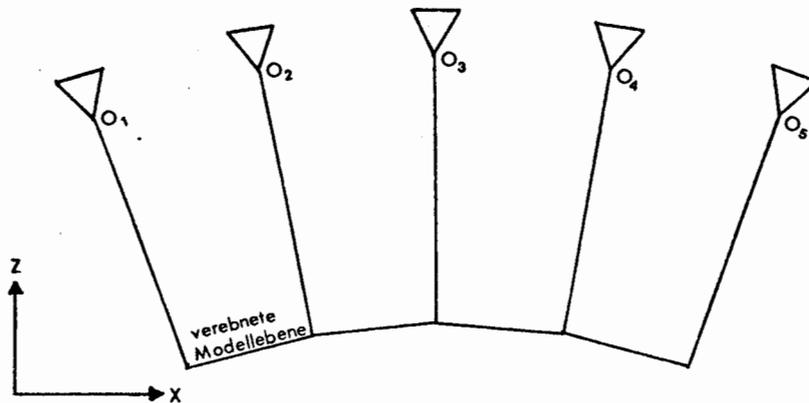


Bild 9 Durchbiegung des Streifens trotz Erdkrümmungskorrektur der Modellebenen (ohne Korrektur der Projektionszentren)

Bei der analytischen Korrektur der Erdkrümmung (entweder bei rein rechnerischen Auswertungen oder bei analytischen Auswertegeräten) ist es leichter, die Korrekturen genauer und strenger zu berücksichtigen als es mit Analoglösungen möglich ist. Insbesondere kann auch die erwähnte Vernachlässigung der Abhängigkeit der Korrektur von der äußeren Orientierung der Bilder und der Lage der Punkte im Objektraum durch iterative Annäherung des räumlich rekonstruierten Objekts an seine absolute Lage im Landessystem eliminiert werden. Allerdings findet diese strengere Korrektur bisher erst in Einzelfällen Anwendung, da die erzielte Verbesserung im Vergleich zu den bei der Auswertung verbleibenden Bildfehlern gering bleibt.

I.3.3 Bildverband

Von einem Bildverband spricht man, wenn ein Gebiet von mehreren (> 2) bis vielen Bildern überdeckt wird. Der Bildverband unterscheidet sich von dem Bildpaar oder dem Einzelbild nicht nur durch die Anzahl der Bilder sondern auch durch die Bedingungen der räumlichen Rekonstruktion des Objekts. Es gibt in der Regel nicht genügend Paßpunkte, daß jedes Bild oder jedes Bildpaar für sich allein in das übergeordnete System transformiert werden könnte. Die räumliche Rekonstruktion muß deshalb mit dem Bildverband unter Berücksichtigung der Bildüberdeckungen erfolgen, was als Aerotriangulation bzw. Streifen- und Blocktriangulation bekannt ist.

Sehr oft benötigt ein Bildverband aufgrund der Überdeckungsverhältnisse (z.B. bei 20 % Querüberdeckung) bestimmte Mindestanordnungen der Paßpunkte, um eine räumliche Objektrekonstruktion überhaupt zu ermöglichen. Abgesehen davon kann das im Bildverband räumlich rekonstruierte Objekt bezüglich der Erdkrümmung und der geodätischen Abbildung mit dem Fall des Bildpaars verglichen werden. Es treten im Prinzip die schon beim Bildpaar besprochenen Probleme auf. Allerdings verschärft sich beim Bildverband wegen der Gebietsgröße die Problematik erheblich, und es muß die Frage der Korrekturen und der zulässigen Vernachlässigungen erneut gestellt werden.

Beim selben Bildmaßstab überdeckt ein Bildverband ein wesentlich größeres Gebiet als ein Bildpaar, so daß die Widersprüche bei der räumlichen Rekonstruktion in einem geodätisch abgebildeten Landessystem entsprechend deutlicher und größer in Erscheinung treten. Vor allem nimmt die Aufwölbung der Erdoberfläche quadratisch mit der Gebietsausdehnung zu. Dasselbe gilt in den Anfangsbereichen in erster Näherung für die Verzerrungen der geodätischen Abbildungen. Da bis jetzt keine genauen Vorstellungen über die Fehler der räumlichen Rekonstruktion bestehen, die durch die Verzerrungen der geodätischen Abbildung entstehen, greift man in der Aerotriangulation sicherheitshalber zu der in Abschnitt I.2.2 beschriebenen 1. Prinziplösung der Umgehung des Problems durch Bezug auf kartesische Koordinatensysteme und nachträglicher Rücktransformation in die geodätische Abbildung. Auf diese Lösung wird trotz des größeren Rechenaufwandes besonders dann zurückgegriffen, wenn man nicht sicher ist, ob die Verzerrung der geodätischen Abbildung nicht doch einen zu großen Einfluß auf die Genauigkeit der Rekonstruktion haben könnte. Normalerweise wird aber in der Praxis der Aerotriangulation wie beim Bildpaar die Rekonstruktion direkt in einem geodätisch abgebildeten Landessystem unter Benützung der darin gegebenen Paßpunkte durchgeführt. Dabei wird wie beschrieben lediglich versucht, die Erdkrümmung, d.h. die Aufwölbung der Erdoberfläche hinsichtlich der Höhen zu korrigieren. Die übrigen Verzerrungen der geodätischen Abbildung werden bei dem Bildpaar nicht näher berücksichtigt. Man glaubt aus der Erfahrung zu wissen oder schätzt aus der geodätischen Verzerrung, daß die nach einer Erdkrümmungskorrektur verbleibenden Widersprüche im Vergleich zu den anderen nicht korrigierten zufälligen und systematischen Fehlern hinreichend klein sein werden. Dieser Vorstellung kommen die reduzierten Genauigkeitsanforderungen bei kleinmaßstäbigen Kartierungen entgegen.

Die Erdkrümmungskorrektur beim Bildverband wird in der bisherigen Praxis genauso gehandhabt wie beim Bildpaar. D.h. sie wird entweder an jedem einzelnen Bild als Korrektur der Bildkoordinaten oder bei einem Bildpaar als Höhenkorrektur an den Modell- oder Objektkoordinaten angebracht. Die Korrektur erfolgt wiederum je nach der Meßmethode entweder analytisch oder analog. Zusätzlich ist lediglich beim Bildpaar die Konvergenz der Lotlinien durch eine Lagekorrektur der Projektionszentren zu berücksichtigen, um eine Aufwölbung der aus ansonsten verebneten Modellen bestehenden Bildstreifen zu verhindern, siehe Bild 9. Bei Einzelbildkorrektur der Erdkrümmung ist dieser Korrektoreffekt dagegen bereits implizit enthalten.

Wie oben am Beispiel des Bildpaars schon erläutert wurde, enthält die räumliche Rekonstruktion des ganzen Bildverbands im Landessystem auch dann noch Widersprüche, wenn die Erdkrümmungskorrektur im Rahmen ihres Konzepts "streng" erfolgt. Da es sich nur um einen Teilaspekt des Problems der 3-dimensionalen geodätischen Abbildung handelt bleibt es eine Näherungslösung.

I.4 Aufgabenstellung und Konzept der Untersuchung

I.4.1 Allgemeine Fragestellung

Abgesehen von wenigen Ausnahmen werden in der Praxis die meisten räumlichen Auswertungen von Luftbildern direkt in einem durch geodätische Abbildung entstandenen Landeskoordinatensystem durchgeführt. Die grundsätzlich auftretende Inkompabilität wird dabei nach keinem der in I.2.3 und I.2.4 beschriebenen Prinzipien gelöst, sondern man begnügt sich mit der Näherungslösung der sogenannten Erdkrümmungskorrektur. Entsprechend verbleiben grundsätzlich gewisse Widersprüche zwischen dem Ergebnis der Auswertung und dem korrekt im Landessystem abgebildeten Objekt.

Diese Widersprüche beruhen auf der Nicht- oder nicht vollständigen Berücksichtigung der Verzerrung der geodätischen Abbildung, worunter hier die 3-dimensionale Abbildung der ellipsoidischen Koordinaten in das betreffende Landessystem einschließlich der Höhen verstanden wird.

Da die Verzerrung der geodätischen Abbildung ortsabhängig ist, hängt die Größe der Widersprüche primär von der Lage und Ausdehnung des Gebiets ab. Für kleine Gebiete ist die örtliche relative Verzerrung, auf die es lediglich ankommt, in der Regel klein genug, daß sie bei der Rekonstruktion des Objekts in der geodätischen Abbildung vernachlässigt werden kann.

Wie unten gezeigt wird, wachsen die geodätischen Verzerrungen innerhalb einer Abbildungszone nicht linear sondern annähernd quadratisch oder kubisch mit der Gebietsgröße. Es erhebt sich somit die Frage, bis zu welcher Gebietsgröße der Einfluß der geodätischen Verzerrungen bei vorgegebenen Genauigkeitskriterien noch vernachlässigt werden kann. Allgemeiner formuliert ist der Einfluß der geodätischen Verzerrungen auf die Genauigkeit der photogrammetrischen Auswertung bei den üblichen, nicht-strengen Verfahren in Abhängigkeit von den Projektparametern zu bestimmen, insbesondere in Abhängigkeit von Gebietsgröße, Flughöhe, Paßpunktdichte und Art der geodätischen Abbildung. Die Fragestellung erstreckt sich zwar auch auf das Einzelbild und das Bildpaar, wird jedoch für Bildverbände, die hunderte oder tausende von Bildern umfassen können und entsprechend große Ausschnitte der Erdoberfläche überdecken, besonders dringlich. Falls die Untersuchungen nicht tolerierbare Fehlerwirkungen der geodätischen Abbildungsverzerrungen ergeben sollten, stellt sich die Anschlußfrage nach einfachen Methoden zur Verringerung oder Beseitigung der Fehler.

I.4.2 Methode der Untersuchung

Als das zentrale Problem ist zunächst der Einfluß der geodätischen Verzerrungen auf die Genauigkeit der photogrammetrischen Auswertung, insbesondere auf die Genauigkeit der genähert geodätisch abgebildeten Rekonstruktion des Bildverbandes zu untersuchen. Es wäre höchst unzweckmäßig, diese Untersuchung mit praktischem Bildmaterial empirisch durchführen zu wollen. Nicht nur wäre es schwierig bzw. praktisch unmöglich, die gesuchten Fehlereinflüsse unter der großen Zahl anderer Fehler zu erkennen und abzuspalten. Vielmehr ist außerdem abzusehen, daß die

Auswirkungen der geodätischen Abbildungsverzerrungen von vielen Faktoren beeinflusst sind, wie z.B. vom Bildmaßstab, der Zahl und Anordnung der Paßpunkte oder der Verknüpfungspunkte, der Bildüberdeckung, der Art der geodätischen Abbildung, der Lage und Orientierung des Gebiets auf der Erde, um nur die offensichtlichen Faktoren zu nennen, so daß eine auch nur einigermaßen erschöpfende Behandlung des Problems mit empirischem Bildmaterial völlig ausgeschlossen wäre.

Durch direkten Vergleich eines Ausschnitts der Erdoberfläche mit seiner geodätischen Abbildung ist zwar leicht die (relative) geodätische Verzerrung für das Gebiet festzustellen. Damit ist aber normalerweise noch nichts über die Genauigkeit der photogrammetrischen Rekonstruktion im Landessystem (mit Hilfe darauf bezogener Paßpunkte) ausgesagt. Infolge des Zwangs der Paßpunkte wird die Rekonstruktion verzerrt, ist also zum ursprünglichen Objekt nicht mehr ähnlich, ohne aber die betreffende geodätische Abbildung darzustellen. Lediglich für Sonderfälle mit einfacher Transformation des zunächst fehlerfrei rekonstruierten räumlichen Objekts in das Landessystem unter Verwendung einer minimalen Anzahl von Paßpunkten kann aus den geodätischen Abbildungsverzerrungen direkt die Genauigkeit der transformierten Rekonstruktion abgeleitet werden.

Ein derartiges Beispiel hat K. RINNER [4] ausgearbeitet. Er hat einen Bildstreifen mit Ost-West-Flugrichtung von etwa 200 km Länge und 11 km Breite rekonstruiert und mit der Minimalanzahl von Paßpunkten nach einem von BRUCKLACHER [9] angegebenen Polynom in das Gauß-Krüger System transformiert. Dabei ergab sich als Widerspruch zwischen dem räumlich rekonstruierten Streifen und der korrekten geodätischen Abbildung ein maximaler Fehlerbetrag von 7 m. Leider ist nicht genauer angegeben, auf welches der von BRUCKLACHER vorgeschlagenen Polynome sich die Streifenausgleichung bezieht und welche Punkte als Paßpunkte verwendet wurden. Die Übertragung der Ergebnisse auf eine andere Paßpunktanordnung ist daher nicht ohne weiteres möglich.

In den praktisch interessierenden Fällen arbeitet man mit überschüssigen Paßpunkten, die trotz der Tendenz zur Verminderung ihrer Anzahl noch beträchtliche Redundanz verkörpern. Mit ihrer Hilfe paßt sich zwar das rekonstruierte Objekt der geodätischen Abbildung global gut an, im einzelnen entstehen jedoch beträchtliche Widersprüche und Zwänge, die von den geometrischen Parametern des Bildverbandes abhängig sind und über rein theoretische Ableitungen nicht dargestellt werden können.

Bei der Beurteilung der Fehlerwirkungen der geodätischen Abbildungsverzerrungen auf die photogrammetrische Auswertung bzw. auf die Blockausgleichung des Bildverbandes sind zwei verschiedene Manifestationen zu unterscheiden:

- die internen Spannungen des Bildverbandes in sich und bezüglich der Paßpunkte, d.h. die Verbesserungen (Restfehler) der Ausgleichung (im folgenden als interne Fehler oder Widersprüche bezeichnet), und
- die absoluten Fehler der Rekonstruktion, d.h. der Koordinaten der ausgeglichenen Objektpunkte im Landessystem, im Vergleich zu ihrer korrekten geodätischen Abbildung.

Die direkte theoretische Ableitung sowohl der inneren wie auch der absoluten Fehlerwirkungen der geodätischen Abbildungsverzerrung auf die Auswertung eines Bildverbandes ist nicht möglich (da die Lösung der Normalgleichungen der Blockausgleichung nicht explizit dargestellt werden kann). Eine rein theoretische Untersuchung des Problems der geodätischen Abbildung in der Photogrammetrie scheidet daher aus, zumindest für die verschiedenen Fallunterscheidungen, die notwendig wären.

Als Untersuchungsmethode, die der Aufgabenstellung und den Fallunterscheidungen gerecht werden kann, bietet sich somit nur noch die numerische Simulation an. Durch Computer-Simulation der Objektpunkte und ihrer photogrammetrischen Abbildungen können die praktischen Fälle der Blockausgleichungen mit den verschiedensten geometrischen Fallunterscheidungen unter Verwendung üblicher Rechenprogramme durchgerechnet und die Ergebnisse analysiert und mit der geodätischen Abbildung der Objektpunkte verglichen werden. Da es sich um ein rein deterministisches, also nicht stochastisches Problem handelt, genügt es, die Simulation auf die zu untersuchenden Fehlerwirkungen zu beschränken, d.h. alle sonst wirksamen Bildfehler können außer Betracht bleiben. Dadurch vereinfacht sich die Simulation beträchtlich und liefert andererseits direkt die gesuchten Aussagen, nämlich für die Einzelfälle der Auswertung von Einzelbildern, Bildpaaren oder Bildverbänden die inneren und äußeren Fehlerwirkungen, die ausschließlich durch die geodätische Abbildung im Zusammenwirken mit den geometrischen Projektbedingungen verursacht sind.

Die unabhängige Superponierbarkeit der Ergebnisse über die sonstigen Fehlerwirkungen praktischer photogrammetrischer Auswertungen ist angesichts der geringen Beträge ohne weiteres gegeben, so daß diesbezüglich keine weiteren Untersuchungen erforderlich sind.

Die Methode der Simulation ist also unter den gegebenen technischen Bedingungen eine einfache, wirksame Methode, um den Einfluß der geodätischen Verzerrung auf die Ergebnisse der räumlichen photogrammetrischen Auswertung in Abhängigkeit von verschiedenen Projektparametern zu bestimmen. Sie wird deshalb für diese Untersuchung verwendet.

Die Methode der Simulation hat den Nachteil, daß sich die Ergebnisse zwar in beliebiger Vollständigkeit gewinnen lassen, daß sie sich aber jeweils nur auf den betreffenden Einzelfall beziehen. Um von Einzelfällen wieder auf allgemeine Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten zu kommen, müssen die wirksamen Parameter systematisch variiert und die Simulationsfälle sorgfältig ausgewählt werden.

I.4.3 Gliederung und Aufbau der Arbeit

Im Hinblick auf die allgemeine Fragestellung und die Anwendung der Simulationsmethode werden in Kapitel II zunächst als theoretische Grundlagen die Landeskoordinatensysteme, die photogrammetrischen Koordinatensysteme, die zentralperspektiven photogrammetrischen Abbildungsbeziehungen sowie die in der Praxis verwendeten Erdkrümmungskorrekturen konkret zusammengestellt und erläutert. Darauf aufbauend werden die Simulationen entwickelt, die Fallunterscheidungen begründet

und gegliedert und einige Angaben zur Durchführung der Simulationen und zur Darstellung der Ergebnisse gemacht.

Wie erwähnt und allgemein bekannt, hängt die Genauigkeit der photogrammetrischen Auswertung nicht nur von der geodätischen Verzerrung sondern außerdem von einer Reihe anderer Faktoren ab. In dieser Untersuchung interessieren nur die geometrischen Faktoren, die direkt mit der geodätischen Verzerrung in deterministischer Weise zusammenwirken. Unter Beschränkung auf die als wesentlich vermuteten bzw. erkannten Einflüsse können zwei Gruppen unterschieden werden, die durch geodätisch-geographische bzw. durch photogrammetrische Parameter gekennzeichnet sind.

Zur geodätisch-geographischen Gruppe der Einflußfaktoren, die noch völlig unabhängig von der photogrammetrischen Aufnahme sind, gehören:

- Die geodätische Abbildung für das Landessystem.

Es gibt in der Geodäsie viele Möglichkeiten, die Ellipsoidoberfläche in eine Ebene abzubilden. Die verschiedenen Abbildungen haben unterschiedliche Verzerrungseigenschaften und entsprechend unterschiedliche Fehlerwirkungen auf die photogrammetrischen Auswertungen. In dieser Arbeit werden 4 verschiedene geodätische Abbildungen untersucht.

- Die Lage des Gebiets auf der Erde.

Weil geodätische Verzerrungen ortsabhängige Funktionen sind, wirkt sich die Lage des Gebiets in der Abbildungszone auf die Genauigkeit der Auswertung aus.

- Die Größe des Gebiets.

Da die relativen geodätischen Verzerrungen eines Gebiets von seiner Größe abhängig sind, hängt auch die Genauigkeit der Objekt-Rekonstruktion von der Gebietsgröße ab.

Zur Gruppe der photogrammetrischen Projektparameter gehören hauptsächlich:

- Die Anzahl und Anordnung der Paßpunkte.

Die Verteilung bzw. Unterdrückung der geodätischen Verzerrungen hängt in erster Linie von der Anzahl und der Anordnung der Paßpunkte ab. Bei zunehmender Anzahl von Paßpunkten nehmen tendenziell die absoluten Verzerrungsfehler der Auswertung zu Lasten größerer innerer Spannungen im ausgeglichenen Bildverband ab.

- Bildmaßstab

Der Bildmaßstab bestimmt bei einer gegebenen Gebietsgröße die Anzahl der zur Überdeckung notwendigen Bilder. Entsprechend hängt die Verteilung der Verzerrungswidersprüche und die Größe der verbleibenden internen Spannungen von der Anzahl der beteiligten Bilder ab.

- Überdeckung und Verknüpfung der Bilder.

Je stärker die Verknüpfung zwischen den Bildern ist, umso mehr Widerstand wird die räumliche Rekonstruktion des Objekts der Einzwängung in die geodätische Abbildung entgegen setzen. Mit zunehmender Überdeckung dürften interne Spannungen und absolute Verzerrungsfehler der umgekehrten Tendenz gegenüber einer Erhöhung der Paßpunktanzahl folgen.

Alle genannten Faktoren beeinflussen die Ergebnisse gleichzeitig. Ihre Anzahl ist zu groß als daß es möglich wäre, in der Simulation alle möglichen Kombinationen durchzuspielen. Es wird daher in dieser Untersuchung nur jeweils ein Einflußfaktor variiert, während die übrigen Faktoren festgehalten bleiben. Damit erhält man die Übersicht, wie die Ergebnisse von den einzelnen Faktoren abhängen. Die Werte der festgehaltenen Faktoren werden dabei nach zwei Prinzipien festgelegt: Sie sollen einerseits den verbleibenden absoluten Verzerrungsfehlern der räumlichen Auswertung möglichst große Werte geben und andererseits den praktischen Fällen möglichst entsprechen. So wird z.B. bei der Untersuchung des Einflusses der Gebietsgröße die Anordnung der Lagepaßpunkte auf die vier Blockecken und die Bildverknüpfung auf die üblichen neun Punkte pro Bild festgesetzt. Diese Festlegungen werden dadurch erleichtert, daß sich die Verzerrungsfehler in vielen Fällen als außerordentlich klein und vernachlässigbar herausstellen werden, so daß die vollständige Erfassung aller Zusammenhänge weitgehend uninteressant wird.

In Abschnitt II.3.1 sind noch weitere Einflußfaktoren angeführt, die entweder bezüglich der geodätischen Verzerrung von untergeordneter Bedeutung sind oder sich auf die behandelten Faktoren zurückführen lassen.

Im Kapitel III werden die Ergebnisse der Simulation dargestellt, wobei jeweils die inneren und die äußeren Fehlerwirkungen der geodätischen Verzerrungen unterschieden werden. In Form von graphischen Darstellungen und von Tabellen wird versucht die Abhängigkeit von den Faktoren darzustellen, um so von den Einzelergebnissen die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten zu erkennen. In Kapitel IV werden die Ergebnisse beurteilt und die Folgerungen für die Praxis gezogen. Ursprünglich sollte der Untersuchung von Näherungskorrekturen für Erdkrümmung und geodätischer Abbildung bei der photogrammetrischen Auswertung des Bildverbandes ein breites Feld eingeräumt werden. Die unerwartet günstigen Ergebnisse, wonach die Verzerrungsfehler in der Regel vernachlässigbar klein bleiben, macht jedoch diesen Punkt weitgehend gegenstandslos, wie die abschließende Diskussion möglicher Extremfälle zeigen wird.

II. GRUNDLAGEN UND VORBEREITUNG DER UNTERSUCHUNG

II.1 Das Landeskoordinatensystem

II.1.1 Die Darstellung der Erdoberfläche und ihre Problematik

Ein Landeskoordinatensystem stellt die geodätische Abbildung eines größeren Teils der Erdoberfläche dar. Die Abbildung erstreckt sich auf Länder oder Zonen, die jedenfalls groß genug sind, um deutlich nichtlineare Verzerrungen zu verursachen. Weil sich die physische Erdoberfläche (im Gegensatz zur Bezugsfläche) nicht durch eine analytische Funktion darstellen läßt, wird sie in der Regel nur punktweise geodätisch abgebildet. Rein geometrisch gesehen (also abgesehen von Meßtechnik und Genauigkeit) bereitet diese Erfassung der Punkte der Erdoberfläche keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Man kann von einem beliebigen Nullpunkt aus immer irgendein kartesisches Koordinatensystem im Raum festlegen und davon ausgehend durch räumliche Richtungs- und Streckenmessungen, also durch Vektorgrößen, die Lage neuer Punkte im Raum feststellen, von denen aus wiederum weitere Punkte zu bestimmen sind. Diese Methode ist in den Grundzügen sehr einfach und streng. Sie bildet die geometrische Basis der sogenannten 3-dimensionalen Geodäsie.

Im Prinzip kann jedes kartesische Koordinatensystem für eine derartige Darstellung der Erdoberfläche verwendet werden. Man kann z.B. ein örtliches System so definieren, daß die Z-Achse mit der Lotrichtung am Ursprung zusammenfällt und die X-Achse nach geographisch Nord zeigt. Den Höhen-Nullpunkt kann man dann entlang der Z-Achse an beliebiger Stelle festlegen. Diese Art der 3-dimensionalen Darstellung von Punkten der Erdoberfläche ist zwar geometrisch sehr einfach, aber sie entspricht nur in einem örtlich eng begrenzten Gebiet der natürlichen Vorstellung des Menschen von "Lage" und "Höhe". Andererseits ist ein geozentrisches kartesisches Koordinatensystem nur von Interesse, wo es um die Darstellung der ganzen Erde oder sehr großer Teile davon geht.

In der klassischen Geodäsie wird die Lage eines Punktes der Erdoberfläche nicht in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben sondern auf eine gekrümmte, der Erdfigur oder dem Gebiet mehr oder weniger gut angepaßte Referenzfläche bezogen, wobei es sich in der Regel um eine Schmiegunngskugel oder ein Ellipsoid handelt. Die Krümmung solcher Bezugsflächen, d.h. die Erdkrümmung macht sich gegenüber einer ebenen Bezugsfläche schon bei Ausdehnungen von einigen Hundertmetern deutlich bemerkbar.

Die geometrische Festlegung eines Raumpunktes in Bezug auf eine gekrümmte Referenzfläche ist ebenso eindeutig und einfach wie bei einem kartesischen Koordinatensystem. Es muß nur vorausgesetzt werden, daß diese Bezugsfläche im Raum eindeutig definierbar und bestimmbar ist und eine eindeutige Vorschrift gegeben ist, wie ein außerhalb der Bezugsfläche liegender Punkt auf die Bezugsfläche projiziert werden soll, d.h. wie seine (krummlinigen) "Grundriß"- und "Höhen"-Koordinaten definiert sind. Bild 10 zeigt diese Art von Darstellung der räumlichen Lage eines Punktes in Bezug auf eine beliebige Referenzfläche F. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Referenzfläche F durch eine analytische Funktion

$$F = F(u,v) \tag{3}$$

dargestellt werden kann, die stetig differenzierbar ist. Die Parameter u und v sind ihrerseits Funktionen z.B. räumlicher kartesischer Koordinaten X , Y und Z oder anderer Parameter

$$\begin{aligned} u &= u(X,Y,Z) \\ v &= v(X,Y,Z) \end{aligned} \tag{3a}$$

Damit ist jeder Punkt auf F durch die Parameter

$$\begin{aligned} u &= \text{const.} \\ v &= \text{const.} \end{aligned}$$

festgelegt. Wenn nun mittels einer geeigneten Definition (z.B. kürzeste Lotlinie auf F) die Linie h von einem beliebigen Raumpunkt P zu dem Fußpunkt P_f auf der Bezugsfläche F gezogen wird, dann ist der Punkt P durch die Lage des Fußpunktes P_f und die Linie h eindeutig bestimmt.

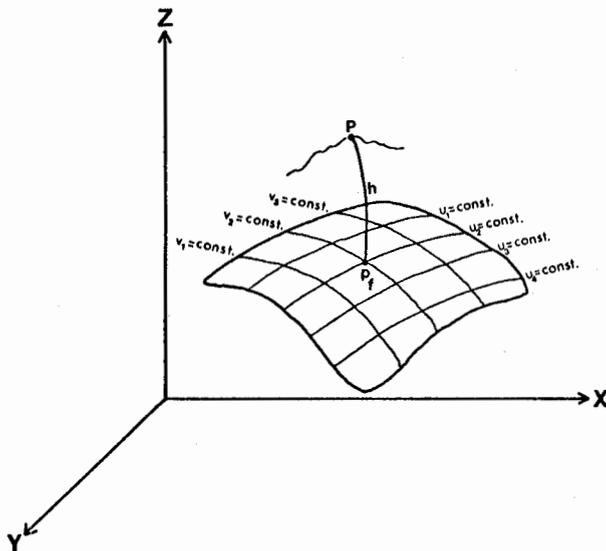


Bild 10 Festlegung der räumlichen Lage eines Punktes P durch Parameterdarstellung einer Bezugsfläche

In der Geodäsie spielt das Geoid als Bezugsfläche eine besondere Rolle. Es ist als Äquipotentialfläche physikalisch definiert, [10]. Seine Geometrie ist daher nicht ohne weiteres durch analytische Funktionen darstellbar, so daß es sich nicht als geometrische Bezugsfläche wie oben beschrieben eignet. Außerdem ist das Geoid bisher nur mit begrenzter Genauigkeit bekannt und bestehen Probleme bei der Definition der "Koordinate" h .

Man benützt deshalb an Stelle des Geoids eines der im Laufe der Zeit berechneten, dem Geoid möglichst gut angepaßten Rotations-Ellipsoide als geometrische Bezugsfläche. Die räumliche Lage eines Punktes der Erdoberfläche kann dann stets durch die Verwendung der jeweiligen Ellipsoidnormalen als ellipsoidische Höhe h und die Lage des Fußpunktes auf dem Ellipsoid eindeutig bestimmt werden. Diese Art der Darstellung mit rein geometrischen Größen ist zwar eindeutig und auch einfach. Da aber die Messung von Höhen an dynamische Größen gebunden ist (örtliche Schwererichtungen), ist die Zurückführung auf geometrische Größen in der

Praxis problematisch. Die Landesvermessungssysteme der klassischen Geodäsie verkörpern deshalb gewöhnlich keine ellipsoidischen Höhen. Entsprechend ist die Berechnung eines zweidimensionalen Lagenetzes auf einem Referenz-Ellipsoid auch nur mit gewissen Hypothesen möglich. Als Folge hat man in der Landesvermessung meistens für Lage und Höhe zwei voneinander unabhängige Bezugssysteme, deren Zusammenhang nur genähert hergestellt ist und die kein konsistentes System der räumlichen geometrischen Beschreibung der Erdoberfläche bilden.

Erst neuerdings sind mit der sogenannten 3-dimensionalen Geodäsie die Probleme der widerspruchsfreien räumlichen Darstellung der Erdoberfläche im Prinzip gelöst worden. Die räumliche Lage eines Punkts kann in strengen ellipsoidischen Koordinaten ausgedrückt und beliebig in andere, z.B. kartesische Koordinatensysteme umgerechnet werden.

Die Unvollkommenheiten der bestehenden Landesvermessungssysteme bilden als intern geodätische Probleme nicht den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung, die sich auf die Wirkung der geodätischen Abbildung auf die photogrammetrische Auswertung in der geodätischen Abbildung konzentriert, wobei von einer geometrisch korrekten und widerspruchsfreien Objektbeschreibung durch ellipsoidische Koordinaten ausgegangen wird. Diese Voraussetzung bietet klar definierte Verhältnisse für die Untersuchung.

Die geringe Größenordnung der Fehlerwirkungen und die begrenzte Ausdehnung photogrammetrischer Auswertung werden jedoch erlauben, die Ergebnisse ohne weiteres auf das Arbeiten mit den in der Praxis vorhandenen nicht streng 3-dimensional konsistenten Landesvermessungssystemen zu übertragen.

II.1.2 Das geographische Koordinatensystem und seine Abbildung in die Ebene

Nachdem ein Rotationsellipsoid von bestimmter Dimension als Bezug ausgewählt ist, können die Parameter u und v für die Darstellung der Ellipsoidoberfläche festgelegt werden. Die schon sehr lange und am häufigsten verwendeten Parameter sind die geographische Länge und die geographische Breite. Beide werden als Winkel definiert:

Die geographische Breite eines Punkts auf der Ellipsoidoberfläche ist der Winkel B , den die in diesem Punkt errichtete Flächennormale mit der Äquatorebene bildet. Die geographische Länge ist der Winkel L , den die Meridianebene dieses Punkts mit der Ebene eines festgelegten Anfangsmeridians (z.B. GREENWICH) bildet. Verbindet man alle Punkte auf der Ellipsoidoberfläche, denen eine gleiche Breite B zukommt, durch eine geschlossene Kurve, so erhält man eine Parameterkurve $B=\text{constans}$, d.h. einen Parallel- oder Breitenkreis. In gleicher Weise liegen alle Punkte gleicher Länge auf einer Parameterkurve $L=\text{constans}$, die als Meridian bekannt ist. Meridiane und Parallelkreise bilden das geographische Netz auf dem Ellipsoid.

Obwohl das zweidimensionale geographische Netz allein in der Geodäsie häufig als das geographische Koordinatensystem bezeichnet wird, muß zur vollständigen

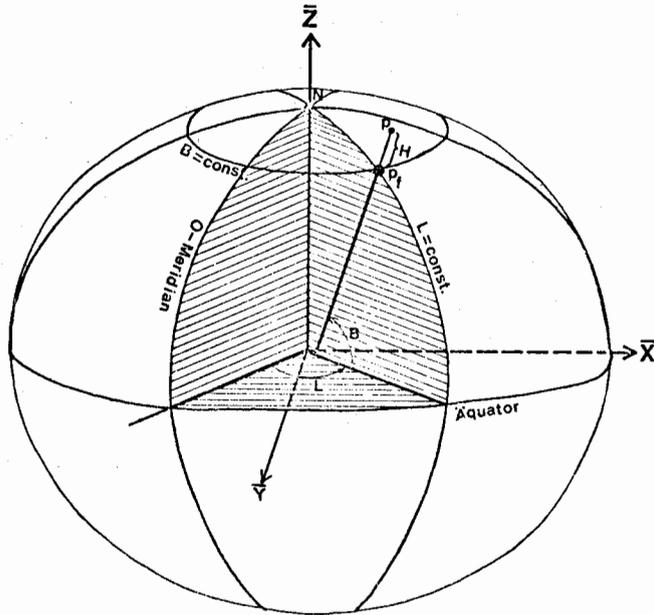


Bild 11 Das geographische Koordinatensystem (B,L,H)

Beschreibung der räumlichen Lage eines beliebigen Punkts auf der Erdoberfläche noch die ellipsoidische Höhe H hinzugefügt werden. Die drei Parameter B , L und H bilden das vollständige geographische Koordinatensystem (vgl. Bild 11).

Dieses System ist als Bezugssystem für örtliche Vermessungsarbeiten und zur kartographischen Darstellung der Erdoberfläche nicht unmittelbar geeignet, so daß man in der Landesvermessung dieses System der geographischen Koordinaten in andere Systeme abbildet, in denen die gekrümmte Ellipsoidoberfläche als Ebene dargestellt wird. Die ellipsoidischen Höhen H sollen dabei unverändert übernommen werden und weiterhin senkrecht zu der nun als Ebene abgebildeten Ellipsoidoberfläche stehen. Bezeichnen wir die Koordinaten in dem abgebildeten System mit X , Y und Z , kann die Abbildung wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} X &= f_1(B,L) \\ Y &= f_2(B,L) \\ Z &= H \end{aligned} \tag{4}$$

wobei f_1 und f_2 noch zu bestimmende Funktionen sind, welche die betreffende geodätische Abbildung definieren.

Nach (4) zerfällt die räumliche Abbildung in völlig unabhängige Komponenten für Lage und Höhe, so daß sich das Abbildungsproblem praktisch auf den Zusammenhang zwischen den Parametern B und L und den ebenen Koordinaten X , Y reduziert. Die Aufgabe der geodätischen Abbildung - und darauf beschränkt sie sich - besteht dann darin, geeignete Funktionen für f_1 und f_2 zu definieren. Im Grund genommen ist eine weite Klasse von Definitionen für f_1 und f_2 zulässig. So stellt z.B. die Abbildung

$$\begin{aligned} X &= c_1 L \\ Y &= c_2 B \end{aligned} \tag{5}$$

wobei c_1 und c_2 zwei geeignete Konstante mit der Dimension Länge sind, wohl die einfachste Abbildung des Ellipsoids dar. Eine derartige, rein analytische Definition ist selbstverständlich genau so zulässig wie die sich an der Vorstellung geometrischer Projektionen besonders von der Kugel aus auf Ebenen oder abwickelbare Flächen (z.B. Kegel- oder Zylindermantel) orientierenden Abbildungen. Bezeichnungen wie Azimutal-, Kegel- und Zylinderprojektionen leiten sich von diesen geometrischen Projektionen ab. Derartig geometrisch definierte Projektionen der Kugel sind nicht in jedem Fall streng auf das Ellipsoid zu übertragen, so daß selbst in diesen Fällen zur analytischen Darstellung gegriffen werden muß. Da aber die geometrischen Hilfsvorstellungen beibehalten werden, spricht man weiterhin von Azimutal-, Kegel-, oder Zylinderabbildung des Ellipsoids. In der Landesvermessung verwendet man jedoch nur solche Abbildungen, die für eine begrenzte Gebietsgröße (z.B. Streifen von einigen hundert km Breite) geringe Verzerrungen aufweisen. Derartige Abbildungen sind in der Regel für die Abbildung großer Teile des Ellipsoids (wie z.B. bei thematischen Karten für ganze Kontinente) nicht geeignet.

Außer der Klassifizierung nach der geometrischen Projektionsfläche kann man die Abbildungen von Kugel oder Ellipsoid in die Ebene auch nach ihren Eigenschaften z.B. als konforme, flächentreue oder längentreue Abbildungen einteilen. Es ist hier nicht der Ort, alle möglichen zulässigen Abbildungen zu klassifizieren. Die genannten Stichworte bezeichnen jedenfalls schon die wichtigsten der für die Landesvermessungs-Bezugssysteme verwendeten geodätischen Abbildungen.

In der Geodäsie haben die konformen Abbildungen, die nach C. F. GAUSS durch "Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen" gekennzeichnet sind, besondere Bedeutung. Die Eigenschaft der Winkeltreue wird an jedem Punkt der Abbildungszone eingehalten und geht auch bei mehrmaligen Abbildungen, wie z.B. bei der sogenannten Doppelprojektion des Ellipsoids, nicht verloren. Diese Eigenschaft kann durch die Funktionentheorie streng dargestellt werden und ermöglicht die analytische Bestimmung der Funktionen f_1 und f_2 in (4) für konforme Abbildungen des Erdellipsoids. Außerdem sind bei konformen Abbildungen die Richtungs- und Entfernungsreduktionen örtlich richtungsunabhängig, was für die praktischen geodätischen Rechnungen vorteilhaft ist. Deshalb werden heute fast nur noch konforme Abbildungen als Landeskoordinatensysteme verwendet. Nach dem Handbuch der Vermessungskunde [11] benützt man zur Parameterdarstellung des Erdellipsoids statt der geographischen Koordinaten B und L die aus ihnen abgeleiteten isometrischen Koordinaten¹⁾ q und l und formuliert damit die geodätische (Grundriß-)Abbildung des Erdellipsoids:

$$\begin{aligned} X &= X(q,l) \\ Y &= Y(q,l) \end{aligned} \tag{6}$$

¹⁾ Definition der isometrischen Koordinaten S. 40

Die Abbildung wird konform, wenn die Bedingungen

$$\frac{\partial X}{\partial l} = + \frac{\partial Y}{\partial q} \quad \text{und} \quad \frac{\partial X}{\partial q} = - \frac{\partial Y}{\partial l} \quad (7a)$$

oder

$$\frac{\partial X}{\partial l} = - \frac{\partial Y}{\partial q} \quad \text{und} \quad \frac{\partial X}{\partial q} = + \frac{\partial Y}{\partial l} \quad (7b)$$

erfüllt sind. Für uns hat nur das Gleichungspaar (7b) Bedeutung, weil nur ein positives Maßstabsverhältnis zwischen Ausgangssystem und Abbildung sinnvoll ist.

Man bezeichnet die Gleichungen (7b) als Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen. Faßt man die Koordinatenpaare X und Y bzw. q und l jeweils als komplexe Veränderliche zusammen, dann ist jede analytische Funktion der Form

$$X + iY = F(q+il) \quad (8)$$

eine konforme Abbildung, welche die Cauchy-Riemannschen Bedingungen erfüllt. Somit vermittelt jede Funktion der Form (8) eine konforme Abbildung des Erdellipsoids in die Ebene.

Gleichung (8) gilt nicht nur für die Abbildung des Erdellipsoids in die Ebene, sie stellt vielmehr eine allgemeine Abbildung zwischen Flächen mit isometrischen Parametern dar. So wird sie auch zur konformen Abbildung des Ellipsoids auf eine Kugel verwendet, wobei lediglich an Stelle der ebenen Koordinaten X und Y die isometrischen Kugelkoordinaten¹⁾ ω und λ angesetzt werden müssen. Mit

$$\omega + i\lambda = F(q+il) \quad (9)$$

(wobei F eine analytische Funktion ist)

ist somit die konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel allgemein formuliert.

In Gleichung (8) definiert die Wahl der Funktion F das betreffende konforme Landesvermessungssystem. Die bestehende Freiheit bei der Wahl der Funktion F wird dazu benützt, um der geodätischen Abbildung bestimmte Eigenschaften aufzuerlegen. Für die Landesvermessung ist z.B. die Zusatzforderung nach minimalen durchschnittlichen Verzerrungen innerhalb einer Abbildungszone wichtig. Die konforme Abbildungsbeziehung (8) ist rein analytisch, die sich nicht an irgendwelchen Vorstellungen über eine geometrische Zuordnung zwischen dem Ellipsoid und der Abbildungsebene zu orientieren braucht. Aber bei den meisten in der Landesvermessung verwendeten Abbildungen werden doch geometrische Zuordnungen von bestimmten Kurven als Bedingungen für die Bestimmung der Funktion F in (8) vorgegeben. Durch diese geometrischen Zuordnungen können die Abbildungen gewisse Verwandtschaft mit bestimmten einfachen Abbildungen der Kugel in die Ebene bekommen und nach ihren sphärischen Äquivalenten benannt werden.

¹⁾ Die isometrischen Kugelkoordinaten haben wie die isometrischen Ellipsoidkoordinaten die Eigenschaft, daß der örtliche Maßstab in beiden Richtungen (ω, λ) gleich ist.

II.1.3 Die in die Untersuchung einbezogenen Abbildungen

In diese Untersuchung werden drei in der Praxis sehr häufig für die Landesvermessung verwendete konforme Abbildungen einbezogen: Die Gauß-Krüger-Abbildung, die Lambertsche konforme Projektion und die stereographische Abbildung. Sie bilden fast ausschließlich die heutigen Landeskoordinatensysteme aller Länder der Erde¹⁾. Obwohl wie erwähnt die Zuordnung der Abbildungen zu geometrischen Projektionen bei der Abbildung des Ellipsoids nicht mehr zutrifft, haben diese drei Abbildungen jeweils Ähnlichkeit mit einer (querachsigen) Zylinderprojektion, einer Kegelprojektion bzw. einer schiefachsigen Azimutalprojektion. Aus prinzipiellem Interesse wird zusätzlich eine nicht konforme Abbildung in die Untersuchung einbezogen, obwohl sie für die Landesvermessung nur noch eine geringe Bedeutung hat. Es ist die ellipsoidische ordinatentreue Abbildung, deren Spezialfall für die Kugel als Soldnersche Abbildung bekannt ist. Die Württembergische Katastervermessung z.B. verwendet die sphärische Form der ordinatentreuen Abbildung, die sphäroidische (ellipsoidische) Fassung dieser Abbildung wurde für die preußische Katastervermessung im Jahre 1879 vorgeschrieben [12]. Wir verwenden hier die ellipsoidische ordinatentreue Abbildung nach der Darstellung von GROSSMANN [12].

Da die vier Abbildungen allgemein bekannt sind, werden im folgenden nur kurz Definitionen und Eigenschaften erläutert und die Abbildungsformeln ohne Ableitungen zusammengestellt.

Die Grundgleichung (8) der konformen Abbildung benützt an Stelle der geographischen die isometrische Breite q und Länge l . Während geographische und isometrische Länge gleichgesetzt werden ($l=L$), ist die Umwandlung der geographischen Breite B in die isometrische Breite q wie folgt definiert:

$$q = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^{\frac{e}{2}} \quad (10)$$

wobei B die ellipsoidische Breite und
 e die 1. Exzentrizität ist.

Die unabhängigen isometrischen Parameter l und q haben die Eigenschaft, daß differentiellen Änderungen beider Größen örtlich jeweils gleiche Streckenverhältnisse der Inkremente auf dem Ellipsoid entsprechen.

¹⁾ Nach einer Zusammenstellung der Vereinten Nationen (World Cartography X) hatten einige Länder wie USA, Indien, Indonesien noch bis 1970 nicht-konforme Abbildungen für ihre Landeskoordinatensysteme (MALING [24], S. 201). Darin wurde bereits angekündigt, daß diese Länder im Begriff sind, auf konforme Abbildungen umzustellen, was inzwischen weitgehend erfolgt ist, wie eigene Rückfragen bestätigt haben.

II.1.3.1 Die Gauß-Krüger Abbildung

Die Gauß-Krüger Abbildung ist heute die in der Landesvermessung wohl am meisten gebrauchte geodätische Abbildung. Eine Variante davon ist das in vielen Ländern gebrauchte UTM-System (Universal-Transversal-Mercator Projektion). Die Abbildungsfunktion F in der Gleichung (8) wird durch die Bedingung bestimmt, daß der in der Mitte der Abbildungszone liegende Meridian, gewöhnlich Haupt- oder Bezugsmeridian genannt, längentreu oder mit einem Maßstabsfaktor versehen als Abszissenachse X des ebenen Koordinatensystems abgebildet werden soll. K. LUDWIG [13] hat aus dieser Bedingung eine Abbildungsfunktion in geschlossener Form abgeleitet, allerdings nicht direkt. Die beiden komplexen Veränderlichen $X+iY$ und $q+il$ in Gleichung (8) werden dabei gleichzeitig als Funktionen einer dritten Veränderlichen $u+iv$ dargestellt. Die Funktionen sind elliptische Integrale, die früher für die numerische Behandlung ungeeignet waren. Heute finden sie mit Hilfe der elektronischen Berechnung wieder Anwendung. Ein Rechenprogramm zur Berechnung von Gauß-Krüger Koordinaten ist in [21] vorgestellt worden. Mit der geschlossenen Form kann das halbe Ellipsoid abgebildet werden.

In der Praxis verwendet man Reihenentwicklungen zur Berechnung von Gauß-Krüger Koordinaten aus geographischen Koordinaten. Die geschlossene Gauß-Krüger Abbildung erstreckt sich aus Gründen der maximal zulässigen Verzerrungen stets nur auf eine schmale Abbildungszone, die sich nur auf einige Längengrade erstreckt. Üblich sind sogenannte Streifenbreiten von 3 bzw. 6 Längengraden, was maximal einen Längenunterschied gegenüber dem Hauptmeridian von ± 3.5 Längengraden (mit $1/2$ Grad Überlappung zwischen benachbarten Streifen) bedeutet. Dafür ist die Rechengenauigkeit begrenzter Reihenentwicklungen völlig ausreichend. Die Gauß-Krüger Koordinaten eines Punktes P mit den geographischen Koordinaten B und L (vom Hauptmeridian aus gezählt) werden in den praktischen Rechenformeln als Funktionen der isometrischen Koordinatenunterschiede Δq und $\Delta l = L$ zwischen P und einem auf dem Hauptmeridian geeignet gewählten Hilfspunkt P_0 berechnet, vgl. Bild 12. Die Anzahl der in der Reihenentwicklung mitzuführenden Glieder

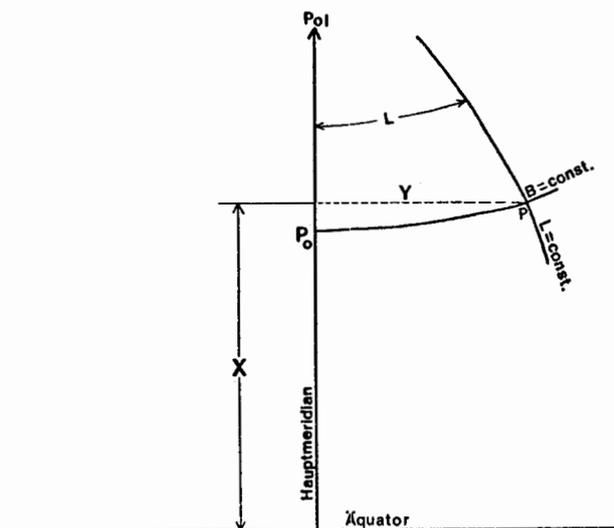


Bild 12 Zur Gauß-Krüger Abbildung

hängt von der gewünschten Genauigkeit ab. Wenn der Hilfspunkt so gelegt wird, daß er die gleiche geographische Breite wie der Punkt P hat, dann vereinfacht sich mit ΔB bzw. Δq gleich Null die Berechnung besonders.

Praktische Rechenformeln in Form von Potenzreihen lauten z.B. nach HRISTOW (|11|, § 145):

$$\begin{aligned} X &= G - a_2 L^2 + a_4 L^4 - a_6 L^6 + a_8 L^8 \\ Y &= a_1 L - a_3 L^3 + a_5 L^5 - a_7 L^7 \end{aligned} \quad (11)$$

wobei

G = Meridianbogenlänge vom Äquator bis P_0

$$\begin{aligned} a_1 &= N \cos B \\ a_2 &= \frac{1}{2} N \cos^2 B (-1)t \\ a_3 &= \frac{1}{6} N \cos^3 B (-1+t^2-\eta^2) \\ a_4 &= \frac{1}{24} N \cos^4 B t (5-t^2+9\eta^2+4\eta^4) \\ a_5 &= \frac{1}{120} N \cos^5 B (5-18t^2+t^4+14\eta^2-58t^2\eta^2) \\ a_6 &= \frac{1}{720} N \cos^6 B t (-61+58t^2-t^4-270\eta^2+330t^2\eta^2) \\ a_7 &= \frac{1}{5040} N \cos^7 B (-61+479t^2-179t^4+t^6) \\ a_8 &= \frac{1}{40320} N \cos^8 B t (1385-3111t^2+543t^4-t^6) \end{aligned} \quad (11a)$$

und

$$t = \tan B, \quad \eta = e' \cos^2 B \quad (e' = 2. \text{ Exzentrizität}).$$

B = die geographische Breite des abzubildenden Punktes;

N = Querkrümmungshalbmesser am abzubildenden Punkt.

Die Gleichungen (11) sind für die üblichen Streifenbreiten genauer als normalerweise benötigt. Z.B. erreicht mit $B=20^\circ$ das letzte Glied für X am äußersten Streifenrand (3.5 Grad vom Hauptmeridian) nur einen Betrag von 0.007 mm, entsprechend das letzte Glied für Y 0.6 mm. Für höhere Breiten werden die Beträge noch wesentlich kleiner.

Für die ebene Meridiankonvergenz c gilt ebenfalls nach HRISTOW |11| die folgende Potenzreihe:

$$\begin{aligned} c &= \sin B L + \frac{1}{3} \sin B \cos^2 B (1+3\eta^2+2\eta^4) L^3 + \frac{1}{15} \sin B \cos^4 B (2-t^2+15\eta^2-15t^2\eta^2) L^5 \\ &+ \frac{1}{315} \sin B \cos^6 B (17-26t^2+2t^4) L^7 \end{aligned} \quad (11b)$$

Das örtliche Vergrößerungsverhältnis m des Abbildes zum Urbild ist

$$\begin{aligned} m &= 1 + \frac{1}{2} \cos^2 B (1+\eta^2) L^2 + \frac{1}{24} \cos^4 B (5-4t^2+14\eta^2-28t^2\eta^2) L^4 \\ &+ \frac{1}{720} \cos^6 B (61-148t^2+16t^4) L^6 \end{aligned} \quad (11c)$$

Für die üblichen Streifenbreiten haben die beiden letzten Glieder in (11c) keine Bedeutung, und der Maßstabsunterschied $m-m_0$ gegenüber dem Hauptmeridian wächst annähernd quadratisch mit der Entfernung vom Hauptmeridian.

Anstatt den Hauptmeridian als X-Achse längentreu abzubilden kann er auch mit einem Maßstabsfaktor versehen werden. Die UTM-Systeme verwenden z.B. für den Hauptmeridian den Maßstabsfaktor 0.9996. Da es sich bei diesem Faktor um eine konstante Maßstabsänderung des jeweils ganzen Streifens handelt hat er keinen weiteren Einfluß auf die Abbildungseigenschaften. Es ist deshalb für diese Untersuchung zulässig, den Hauptmeridian längentreu mit dem Maßstabsfaktor 1 abzubilden.

Die Abbildungsverzerrungen der Gauß-Krüger Abbildung sind wegen der Winkeltreue praktisch auf Maßstabsverzerrungen beschränkt. Bild 15a zeigt die Maßstabsverzerrungen in einem abgebildeten Gauß-Krüger Streifen in Form von Isolinien. Zwischen zwei benachbarten Linien beträgt die Maßstabsänderung 1:10 000. Abgesehen vom Hauptmeridian wird überall im Streifen mit zunehmendem Abstand vom Hauptmeridian zunehmend vergrößert. Die Maßstabsfaktoren nehmen Beträge an, daß sie in der Feldmessung schon berücksichtigt werden müssen.

Da der Hauptmeridian längentreu abgebildet ist, eignet sich die Gauß-Krüger Abbildung besonders für Länder mit schmaler Ost-West- und großer Nord-Süd Ausdehnung. Für ein Land mit größerer Ost-West Ausdehnung müssen mehrere Abbildungszonen (Streifen) nebeneinander angeordnet werden. Von der Abbildung her gesehen entstehen dadurch keine besonderen Schwierigkeiten, denn alle Streifen sind völlig gleichartig (kongruent). Die Veränderlichen L in den Gleichungen (11) sind von der absoluten Lage des Streifens auf dem Ellipsoid, d.h. von der Länge L_0 des Nullmeridians unabhängig. Außerdem erstreckt sich jeder Streifen über den ganzen Bereich der geographischen Breite, d.h. vom Südpol zum Nordpol. Auf diesen beiden Eigenschaften beruht die Eignung der Gauß-Krüger- bzw. der UTM-Abbildung für ein Weltsystem.

Bei größeren photogrammetrischen Blöcken kann es wegen der schmalen Streifenbreiten bzw. in den Randzonen vorkommen, daß sich ein Block auf zwei Streifen erstreckt. In diesem Fall dürfen nicht gleichzeitig Paßpunkte aus beiden Abbildungszonen verwendet werden. Sie müssen vielmehr einheitlich auf eines der beiden Systeme bezogen sein, d.h. gegebenenfalls umgerechnet werden.

II.1.3.2 Die Lambertsche konforme Abbildung

Obwohl die Abbildungsfunktion rein analytisch abgeleitet ist und kein unmittelbar geometrisch anschaulicher Zusammenhang zwischen dem Ellipsoid und der abgebildeten Ebene besteht, wird die Abbildung oft als Kegelprojektion bezeichnet, weil den Meridianen des Ellipsoids in der Abbildung ein Geradenbüschel und den Parallelkreisen das dazu konzentrische Kreisbüschel zugeordnet ist, was an die geometrische Projektion der Kugel auf einen Kegelmantel erinnert.

Die Abbildung erfolgt zunächst durch analytische Zuordnung zwischen ebenen isometrischen Polarkoordinaten (\bar{r}, ρ) und den isometrischen Koordinaten des Ellipsoids (q, l) ,

$$-\bar{r} + i\rho = k(q+il) \quad (12)$$

Aus den ebenen Polarkoordinaten \bar{r} und ρ können dann die rechtwinkligen Koordinaten X und Y gerechnet werden. Das Minuszeichen vor \bar{r} bedeutet einen Zuwachs in \bar{r} wenn q abnimmt. k ist eine Konstante und kein Funktionszeichen. Man erhält

$$X + iY = \alpha e^{-k(q+il)} \quad (12a)$$

wobei e die Basis des natürlichen Logarithmus ist (hier nicht zu verwechseln mit der ellipsoidischen Exzentrizität).

Die Konstanten α und k werden durch die Forderungen bestimmt, daß ein Parallelkreis B_0 bzw. q_0 längentreu abgebildet werden und in seiner Umgebung die geringste Streckenverzerrung herrschen soll. Dieser Parallelkreis wird als Normal- oder Bezugskreis bezeichnet, siehe Bild 13. Die entsprechenden Abbildungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} X &= \bar{r}_0 - \bar{r}_0 e^{-\sin B_0 \Delta q} \cos(\sin B_0 l) \\ Y &= \bar{r}_0 e^{-\sin B_0 \Delta q} \sin(\sin B_0 l) \end{aligned} \quad (12b)$$

wobei $\bar{r}_0 = N_0 \cot B_0$, $N_0 =$ Querkrümmungshalbmesser am Normalkreis

$\Delta q =$ isometrischer Breitenunterschied des abzubildenden Punktes zum Normalkreis ($\Delta q = q - q_0$)

$l =$ Längenunterschied zum Anfangsmeridian ($l = \Delta L$)

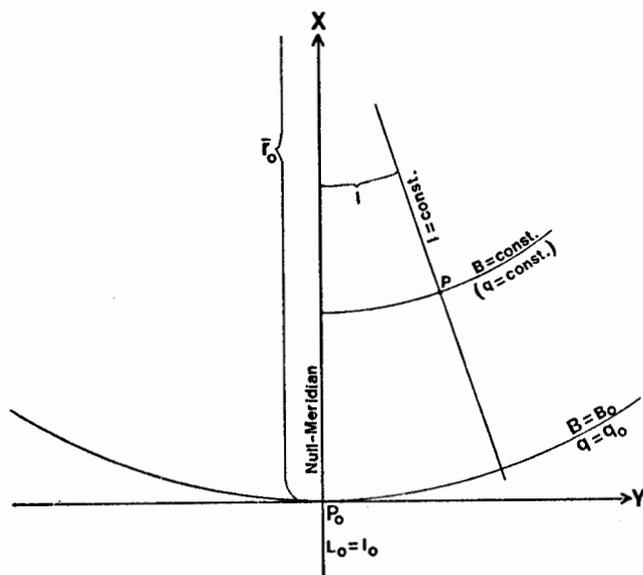


Bild 13 Zur Lambert'schen konformen Abbildung

Die Meridiankonvergenz c ist mit dem Winkel ρ der ebenen Polarkoordinaten identisch,

$$c = \rho = k l = \sin B_0 l \quad (12c)$$

Das Vergrößerungsverhältnis m der Abbildung ist

$$m = \frac{N_0 \cos B_0}{N \cos B} e^{-\sin B_0 \Delta q} \quad (12d)$$

wobei N = Querkrümmungshalbmesser am abzubildenden Punkt P

Das abgebildete ebene rechtwinklige Koordinatensystem hat seinen Ursprung im Punkt P_0 auf dem Normalparallelkreis, von P_0 aus wird der Längenunterschied gezählt. Da der ganze Normalparallelkreis $B=B_0$ längentreu abgebildet wird, hat die Abbildung keine Beschränkung in der Ost-West-Richtung und ist damit für Länder mit großer Ost-West-Ausdehnung geeignet.

In einer Variante dieser Abbildung können statt eines Parallelkreises zwei Parallelkreise $B_1=\text{const.}$ und $B_2=\text{const.}$ längentreu abgebildet werden. Dieser Fall unterscheidet sich aber von der ursprünglichen Lambertschen Abbildung nur um einen konstanten Maßstabsfehler, so daß er im Rahmen dieser Arbeit nicht gesondert beachtet zu werden braucht.

Als konforme Abbildung zeigt die Lambertsche Abbildung örtlich nur Maßstabsverzerrungen. Bild 15b stellt die Linien gleicher Maßstabsverzerrung dieser Abbildung in mittlerer nördlicher Breite dar, bezogen auf $B_0=45^\circ$. Da das Vergrößerungsverhältnis (12d) nur von der geographischen Breite abhängig ist, sind diese Isolinien ebenso wie die Abbilder der Parallelkreise konzentrische Kreise. Die Maßstabsverzerrung wächst mit $e^{\Delta q}$ sehr schnell an.

II.1.3.3 Die stereographische Abbildung

Bei der stereographischen Abbildung wird die Methode der sogenannten ellipsoidischen Doppelprojektion verwendet, bei der zunächst das Ellipsoid konform auf die Kugel und diese dann stereographisch in die Ebene abgebildet wird. Der Abbildungsvorgang ist somit in zwei unabhängige Schritte unterteilt.

Die konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel

Bezeichnen wir die geographische Breite und Länge auf dem Ellipsoid mit B und $L=1$, auf der Kugel mit ϕ und λ , und entsprechend die isometrische Breite für das Ellipsoid mit q und für die Kugel mit ω , dann beschreibt Gleichung (9) unmittelbar die konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel.

Dabei soll die Funktion F durch folgende Forderungen präzisiert sein:

- Die Kugelmeridiane sollen die Abbildungen von ellipsoidischen Meridianen sein
- Die Kugelparallelkreise sollen die Abbildungen von ellipsoidischen Parallelkreisen sein
- Die sphärischen Längenunterschiede sollen von den ellipsoidischen Längenunterschieden durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor α entstehen.

Zusätzlich zu den 3 Forderungen soll bei der Gaußschen 1. Abbildung eine geschlossene, um das ganze Ellipsoid herumführende Breitenzone in der Abbildung auf der Kugel ebenfalls ohne Überdeckung oder Klaffung in sich schließen. Bei der Gaußschen 2. Abbildung verzichtet man auf diese Forderung und wählt statt dessen in der Mitte des abzubildenden Gebiets einen Bezugspunkt P_0 mit der Breite B_0 und fordert, daß sich das Vergrößerungsverhältnis in seiner Umgebung möglichst wenig von 1 unterscheidet.

Da in der Landesvermessung nicht das ganze Ellipsoid sondern nur ein relativ kleiner Teil davon abgebildet wird, entscheidet man sich in der Praxis nur für die 2. Art der Gaußschen Abbildung. Für die stereographische Abbildung hat die 2. Gaußsche Abbildung noch den wichtigen Vorteil, daß der Bezugspunkt P_0 auch für die nachfolgende stereographische Abbildung der Kugel in die Ebene den in der Mitte des abzubildenden Gebiets anzusetzenden Punkt P_0 bilden kann, in dem die Abbildungsebene die Kugel berührt. Wenn beide Bezugspunkte P_0 zusammengelegt werden, ergeben sich für das ganze Gebiet die kleinsten Maßstabsverzerrungen.

Die Abbildungsgleichungen der Gaußschen 2. Abbildung lauten nach [11] (§ 161):

$$\begin{aligned}\omega &= \alpha q + c \\ \lambda &= \alpha L\end{aligned}\tag{13}$$

wobei

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{1+e'^2 \cos^4 B_0} \\ c &= \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \alpha q_0 \\ \phi_0 &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{tg} B_0}{\sqrt{1+e'^2 \cos^2 B_0}}\end{aligned}$$

und B_0 = ellips. geogr. Breite des Bezugspunkts P_0
 q_0 = ellips. isometrische Breite des Bezugspunkts P_0
 ϕ_0 = die sphärische geogr. Breite von P_0
 ω_0 = die sphärische isometrische Breite von P_0

Die Kugelbreite kann man aus der isometrischen Breite ω der Kugel bestimmen:

$$\phi = 2 \operatorname{tg}^{-1} e^{\omega} - \frac{\pi}{2}\tag{14a}$$

Die Kugel hat den Halbmesser $R = \sqrt{M_0 N_0}$; wobei M_0 und N_0 die beiden Hauptkrümmungsradien des Ellipsoids im Bezugspunkt P_0 sind.

Das Vergrößerungsverhältnis ist

$$m = \frac{R \cdot \cos \phi}{N \cdot \cos B} \alpha\tag{14b}$$

Die Abbildung hat wie die Lambertsche Abbildung die Linien gleicher Maßstabsverzerrung parallel zu Parallelkreisen.

Die stereographische Abbildung der Kugel in die Ebene

Dieser zweite Teil der Abbildung ist geometrisch definiert. Legen wir im Bezugspunkt P_0 eine Tangentialebene an die Kugel, dann wird ein beliebiger Punkt P von dem Projektionszentrum A aus zentralperspektiv auf diese Ebene projiziert. Das Projektionszentrum A ist der P_0 gegenüberliegende Endpunkt des Kugeldurchmessers $\overline{P_0A}$, (vgl. Bild 14).

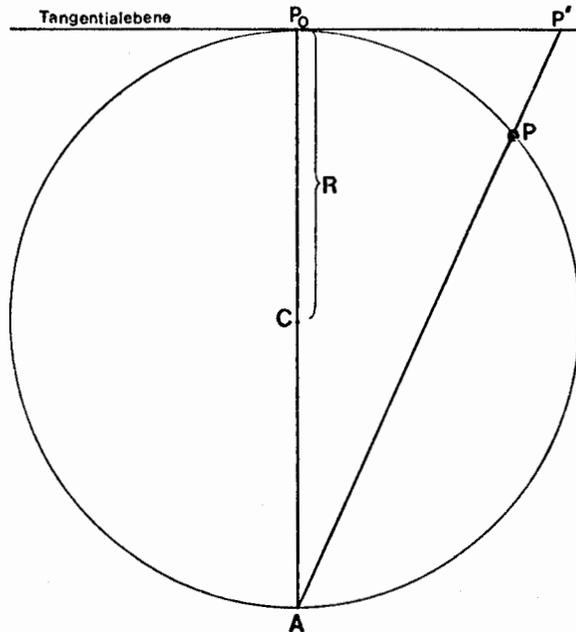


Bild 14 Zur stereographischen Projektion der Kugel auf die Tangentialebene im Bezugspunkt P_0

Auf der Abbildungsebene wird das ebene kartesische Koordinatensystem wie folgt festgelegt: Die X-Achse soll die Abbildung des durch den Bezugspunkt P_0 gehenden Nullmeridians sein. Ihre positive Richtung zeigt nach Norden. Der Ursprung des Systems liegt in P_0 . Die Y-Achse zeigt nach Osten positiv. Wenn der abzubildende Punkt P die sphärische Breite ϕ und den Längenunterschied λ zum Nullmeridian hat, dann gilt für die abgebildeten ebenen Koordinaten nach [11]:

$$\begin{aligned}
 X &= 2R \frac{\sin\phi \cos\phi_0 - \cos\phi \sin\phi_0 \cos\lambda}{1 + \sin\phi \sin\phi_0 + \cos\phi \cos\phi_0 \cos\lambda} \\
 Y &= 2R \frac{\cos\phi \sin\lambda}{1 + \sin\phi \sin\phi_0 + \cos\phi \cos\phi_0 \cos\lambda}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

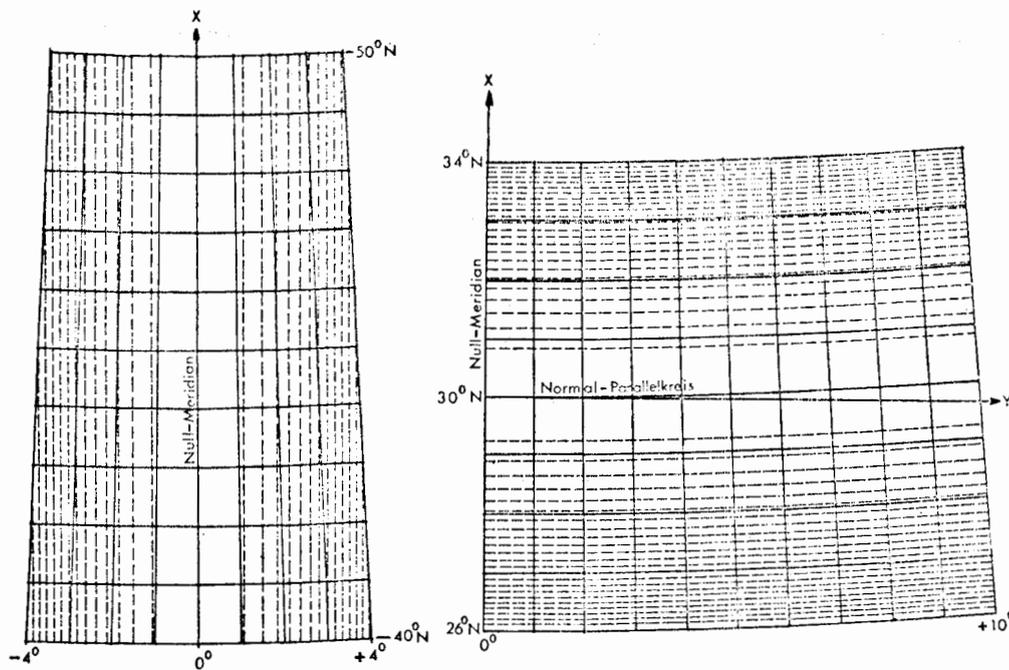
wobei

- ϕ_0 = sphärische Breite des Bezugspunkts P_0
- R = Halbmesser der Kugel

Das Vergrößerungsverhältnis der stereographischen Abbildung ist mit

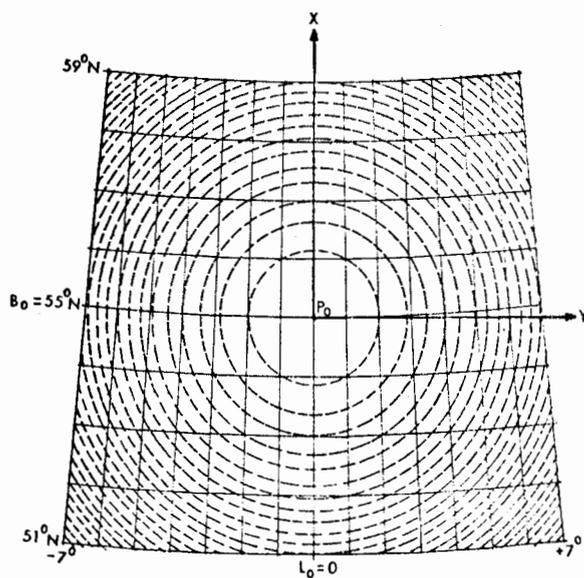
$$m = 1 + \frac{X^2 + Y^2}{4R^2}
 \tag{15a}$$

eine Funktion der Entfernung des abzubildenden Punkts P vom Bezugspunkt P_0 . Die Linien konstanter Vergrößerungsverhältnisse sind damit Kreise.



a) Gauß-Krüger Abbildung

b) Lambert Abbildung



c) Stereographische Abbildung

Bild 15 Linien gleicher Maßstabsverzerrung für drei konforme Abbildungen

Zusammengefaßt stellt sich der ganze Abbildungsvorgang des Ellipsoids in die Ebene so dar, daß man etwa in der Mitte des abzubildenden Gebiets einen Bezugspunkt P_0 wählt, zunächst das Ellipsoid nach der Gaußschen 2. Abbildung konform auf eine Kugel mit dem Halbmesser $R = \sqrt{M_0 N_0}$ abbildet und anschließend diese Kugel stereographisch in ihre durch den Bezugspunkt P_0 definierte Tangentialebene abbildet. Das Endergebnis ist eine konforme Abbildung des Erdellipsoids. Die Verzerrungseigenschaften sind daher durch örtliche Maßstabsverzerrungen gekennzeichnet. Beim ersten Schritt der Abbildung vom Ellipsoid auf die Kugel entsteht die Maßstabsverzerrung m_1 nach (14b), die im anschließenden zweiten Schritt der Abbildung von der Kugel in die Tangentialebene noch einmal der Maßstabsverzerrung m_2 nach (15a) unterworfen wird. Die gesamte Maßstabsverzerrung ergibt sich als Multiplikation von m_1 und m_2 . Bild 15c zeigt die Linien konstanter Vergrößerungsverhältnisse der Gesamtabbildung vom Ellipsoid in die Ebene für einen Teil der Ellipsoidoberfläche in der Gegend von $B = 45^\circ N$.

II.1.3.4 Die ordinatentreue Abbildung des Ellipsoids

Die nicht-konforme, ordinatentreue ebene Abbildung des Erdellipsoids ist die direkte Übertragung der sogenannten rechtwinkligen Soldnerschen Koordinaten auf dem Ellipsoid (x,y) in die XY-Ebene:

$$\begin{aligned} X &= x \\ Y &= y \end{aligned} \tag{16}$$

Dabei sind rechtwinklige Soldnersche Koordinaten auf dem Ellipsoid wie folgt definiert: Man bestimmt einen das betreffende Gebiet möglichst in der Mitte durchziehenden Hauptmeridian $L_0 = \text{const.}$ als Abszissenachse und darauf einen passenden Punkt $P_0(B_0, L_0)$ als Koordinatenanfangspunkt. Ein beliebiger Punkt $P(B, L)$ wird auf der Fläche dadurch festgelegt, daß man durch P eine geodätische Linie zieht, die den Hauptmeridian im Abszissenfußpunkt $P_f(B_f, L_0)$ rechtwinklig schneidet. Dann ist das Meridianbogenstück $\overline{P_0 P_f}$ die Abszisse x , und das Stück $\overline{P_f P}$ der geodätischen Linie die Ordinate y des Punktes P (vgl. Bild 16).

Wir verwenden hier die von GROSSMANN [12] angegebene Potenzreihe zur Berechnung der rechtwinkligen Soldnerschen Koordinaten xy des Erdellipsoids unter Verwendung des Hilfspunkts P_B , in dem der durch P gehende Parallelkreis $B = \text{const.}$ den Hauptmeridian schneidet.

$$\begin{aligned} x &= x_B - \frac{N}{2} \sin B \cos B l^2 + \frac{N}{24} \sin B \cos^2 B (5-t^2+5n^2) l^4 \\ y &= N \cos B l - \frac{N}{6} \sin^2 B \cos B l^3 - \frac{N}{120} \sin^2 B \cos^3 B (8-t^2) l^5 \end{aligned} \tag{16a}$$

wobei

$$\begin{aligned} x_B &= \text{Meridianbogenlänge von } P_0 \text{ bis } P_B \\ l &= L - L_0 \end{aligned}$$

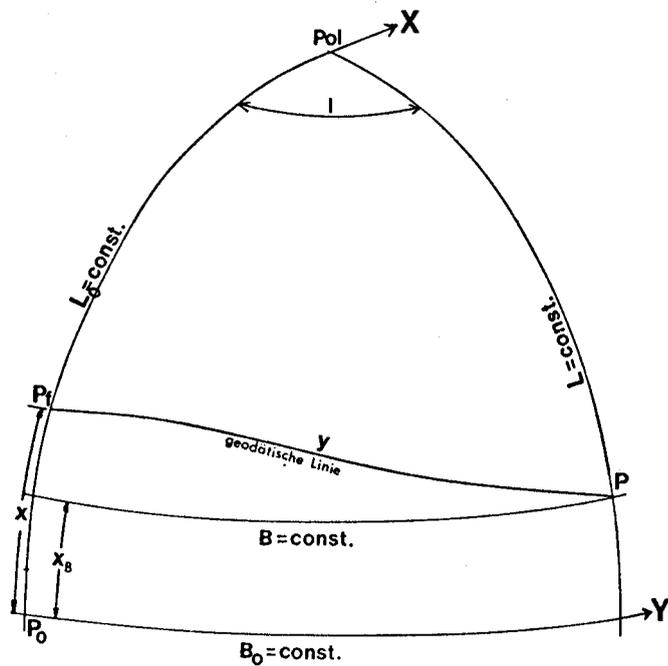


Bild 16 Zur Definition rechtwinkliger Soldner Koordinaten auf dem Ellipsoid

Die ebenen Koordinaten XY der Abbildung erhält man, indem man sie nach (16) einfach den ellipsoidischen Soldner Koordinaten (16a) gleichsetzt. Die Eigenschaft, daß alle Ordinaten als geodätische Linien, die den Hauptmeridian senkrecht schneiden, längentreu in die Ebene abgebildet sind, hat der Abbildung den Namen *ordinatentreu* gegeben.

Diese Abbildung ist nicht konform. Somit ist die Maßstabsverzerrung an einem Punkt nicht nur vom Ort sondern auch von der Richtung abhängig. Außerdem impliziert diese Eigenschaft, daß zusätzlich örtliche Winkelverzerrungen auftreten.

II.2 Photogrammetrische Koordinatensysteme, Aerotriangulation und konventionelle Erdkrümmungskorrektur

II.2.1 Bildkoordinaten

In der analytischen Photogrammetrie werden Bildpunkte üblicherweise in einem 3-dimensionalen rechtsdrehenden kartesischen Koordinatensystem beschrieben. Gewöhnlich legt man, wenn die innere Orientierung bekannt ist, den Ursprung des Koordinatensystems in das Projektionszentrum des Bildes und orientiert die z-Achse senkrecht zur Bildebene nach oben positiv und die x-Achse nach den Bildrahmenmarken in Flugrichtung positiv. Da das Bild selbst eine Ebene ist bzw. sein soll, erhalten alle Bildpunkte in diesem Koordinatensystem gleiche z-Koordinaten vom Betrag der Kammerkonstanten c. Wir nehmen hier die sogenannte Positiv-Stellung des Bildes an, so daß die z-Koordinaten der Bildpunkte negativ sind. Wenn das Objekt (Gelände) ebenfalls in einem rechtsdrehenden kartesischen Koordinatensystem (dem Objekt-System) beschrieben ist (vgl. Bild 17), kann die Beziehung zwischen den Bildkoordinaten xyz und den Objektkoordinaten XYZ wie folgt durch die bekannten Gleichungen der perspektiven Abbildung dargestellt werden:

$$\frac{(X-X_0)}{(Z-Z_0)} = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}(-c)}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}(-c)} \quad (17a)$$

$$\frac{(Y-Y_0)}{(Z-Z_0)} = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}(-c)}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}(-c)} \quad (17b)$$

wobei $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ die 9 Elemente einer orthogonalen räumlichen Drehmatrix, in denen nur 3 unabhängige Variablen enthalten sind, und X_0, Y_0 und Z_0 die Objektkoordinaten des Projektionszentrums bedeuten.

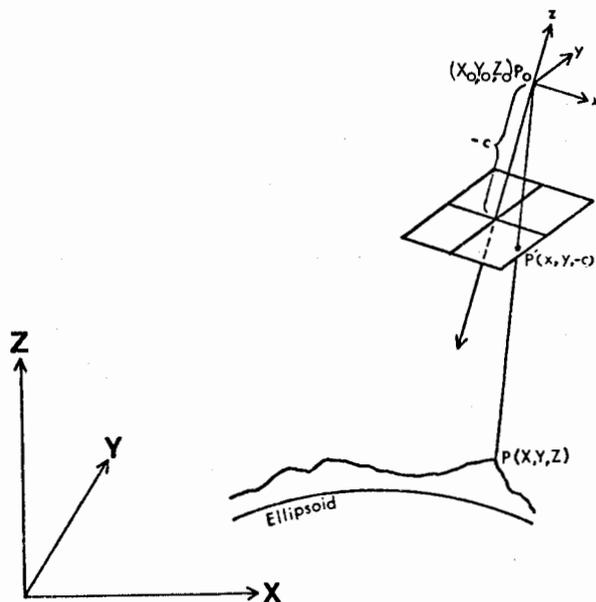


Bild 17 Kartesische Bild- und Objektkoordinatensysteme der analytischen Photogrammetrie

Im Grunde genommen ist jede orthogonale Drehmatrix in den Gleichungen (17) zulässig, aber für die geometrische Interpretation der Abbildungsbeziehungen werden nur anschauliche Winkeldrehungen als unabhängige Variablen in der Drehmatrix verwendet. In [1] sind z.B. die einzelnen Elemente a_{11} bis a_{33} als Funktionen der Winkeldrehungen für verschiedene Definitionen der Drehung aufgelistet.

Die Umkehrung der Beziehungen (14) lautet:

$$\frac{x}{-c} = \frac{a_{11}(X-X_0) + a_{21}(Y-Y_0) + a_{31}(Z-Z_0)}{a_{13}(X-X_0) + a_{23}(Y-Y_0) + a_{33}(Z-Z_0)} \quad (18a)$$

$$\frac{y}{-c} = \frac{a_{12}(X-X_0) + a_{22}(Y-Y_0) + a_{32}(Z-Z_0)}{a_{13}(X-X_0) + a_{23}(Y-Y_0) + a_{33}(Z-Z_0)} \quad (18b)$$

In der analytischen Aerotriangulation werden die Bildkoordinaten x und y in (17) bzw. (18) gewöhnlich als Beobachtungen, die Kammerkonstante c als kalibrierte Konstante behandelt. Die Objektkoordinaten X , Y und Z bzw. X_0 , Y_0 und Z_0 sind außer bei Paßpunkten unbekannt. Ebenfalls unbekannt sind die 3 unabhängigen Variablen der jeweiligen Drehmatrix. Aus Gl. (17) ist leicht zu ersehen, daß die Objektkoordinaten eines Geländepunkts nicht aus den Bildkoordinaten eines einzelnen Bildes errechnet werden können. Selbst wenn die äußere Orientierung (a_{11} bis a_{33} und X_0 , Y_0 und Z_0) bekannt ist, können für jeden Bildpunkt nur zwei Gleichungen (17) aufgestellt werden, was nicht für die Lösung der jeweils 3 unbekanntenen Objektkoordinaten (X , Y und Z) ausreicht. Nur wenn mindestens eine der 3 Objektkoordinaten (z.B. Z) des Objektpunkts vorgegeben ist, können die beiden anderen nach (17) bestimmt werden.

Die Gleichungen (17) entsprechen den strengen geometrischen Beziehungen der perspektiven Abbildung. Mit ihnen wird in der Praxis der analytischen Photogrammetrie gearbeitet. Da aber eine strenge perspektive Abbildung als ideales Funktionalmodell durch die physikalische Realisierung nur angenähert werden kann, wird in der Praxis bei höheren Genauigkeitsansprüchen versucht, die gemessenen Bildkoordinaten x und y um die a priori bekannten oder bestimmbar systematischen Abweichungen zu korrigieren, um damit dem Funktionalmodell der perspektiven Abbildung möglichst gut zu entsprechen.

Da in dieser Studie ein ausschließlich deterministischer Effekt untersucht werden soll, brauchen die in der Praxis notwendigen Bildkorrekturen sowie die stochastischen Eigenschaften der Bildkoordinaten nicht berücksichtigt zu werden. Wir können für die Simulation direkt von den strengen Beziehungen (17) bzw. (18) für die ideale perspektive Abbildung ausgehen.

II.2.2 Modellkoordinaten

Neben der analytischen Aerotriangulation nach der sogenannten Bündelmethode, bei der unmittelbar die perspektiven Abbildungsbeziehungen (18) zwischen Bild- und Geländekoordinaten benützt werden, ist die Methode der unabhängigen Modelle vielfach verbreitet, besonders auch bei mittel- und kleinmaßstäbigen Anwendungen, bei denen die Probleme der Erdkrümmung und der geodätischen Abbildung eine erhebliche Rolle spielen. Auf die ursprüngliche Begründung der Methode durch die Verwendbarkeit von Messungen mit den konventionellen, verbreiteten Analog-Geräten braucht hier nicht mehr eingegangen zu werden. Sie wird heute auch als rein rechnerische Methode, wie die Bündelausgleichung von Bildkoordinaten ausgehend, verwendet und entspricht mit gewissen Vernachlässigungen einer 2-stufigen Bündelmethode. Die Aerotriangulation mit unabhängigen Modellen behauptet sich bisher in der Praxis neben der streng analytischen Methode wegen der Bequemlichkeit und Wirtschaftlichkeit ihrer Anwendung und ihrer vergleichbaren Genauigkeitsleistungen.

Die Methode der unabhängigen Modelle geht davon aus, daß jeweils ein Bildpaar relativ orientiert ist, daß also durch Realisierung der Strahlenschnitte die Aufnahmesituation der Bilder relativ rekonstruiert und rechnerisch oder in Analog-Geräten ein dem Objekt ähnliches Modell gebildet ist. Die räumlichen Koordinaten der Modellpunkte werden auf ein 3-dimensionales kartesisches Koordinatensystem bezogen, siehe Bild 18. Die Überführung von Modellkoordinaten in ein übergeordnetes kartesisches Objekt-Koordinatensystem, die sogenannte absolute Orientierung des Bildpaars, erfolgt aufgrund der Eigenschaften der relativen Orientierung durch eine räumliche Ähnlichkeitstransformation. Bezeichnen wir die Modellkoordinaten eines beliebigen Punktes mit X , Y und Z und die kartesischen Objekt-Koordinaten mit U , V und W , wird die räumliche Ähnlichkeitstransformation durch folgende Beziehung ausgedrückt:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = m \cdot R \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

wobei

- $(U, V, W)^T$: Koordinaten eines Objektpunktes im kartesischen Objekt-Koordinatensystem,
- $(X, Y, Z)^T$: Koordinaten des dem Objektpunkt zugeordneten Modellpunktes im Modell-Koordinatensystem,
- m : ein Maßstabsfaktor,
- R : eine orthogonale 3-dimensionale Drehmatrix,
- $(U_0, V_0, W_0)^T$: Koordinaten des Koordinatenursprungs des Modell-Koordinatensystems im Objekt-Koordinatensystem.

Gleichung (19) setzt voraus, daß beide Koordinatensysteme gleichdrehende kartesische Systeme sind.

In der Aerotriangulation sind alle Objekt-Koordinaten U , V , W außer derjenigen der Paßpunkte unbekannt. Ebenfalls unbekannt sind, die jeweils 7 unabhängigen Orientierungsunbekannten, der Maßstabsfaktor m , die orthogonale Drehmatrix R

und die Objekt-Koordinaten U_0, V_0, W_0 des Koordinatenursprungs des Modell-Koordinatensystems. Die Modell-Koordinaten X, Y und Z werden in (19) im Prinzip als Beobachtungen behandelt. Sie werden in der Praxis entweder direkt an einem Analoggerät gemessen oder aus Bildkoordinaten über die analytische relative Orientierung berechnet. Dennoch behandelt man sie in beiden Fällen gewöhnlich als unkorrelierte Beobachtungen und leitet daraus durch Fehlerfortpflanzung die Fehlereigenschaften der transformierten Modellkoordinaten als abgeleitete Beobachtungen ab.

Um die 7 Orientierungsunbekannten der absoluten Orientierung eines Bildpaars zu lösen, braucht man mindestens 7 Gleichungen von (19) mit bekannten Objektkoordinaten U, V und W . Da jeder bekannte Punkt 3 Gleichungen liefert, genügen zur Lösung z.B. 2 Vollpaßpunkte und ein Höhenpaßpunkt. Wenn die 7 Orientierungsunbekannten einmal gelöst sind, können die Objektkoordinaten jedes beliebigen Punktes im Modell durch die Transformation (19) aus den Modellkoordinaten berechnet werden.

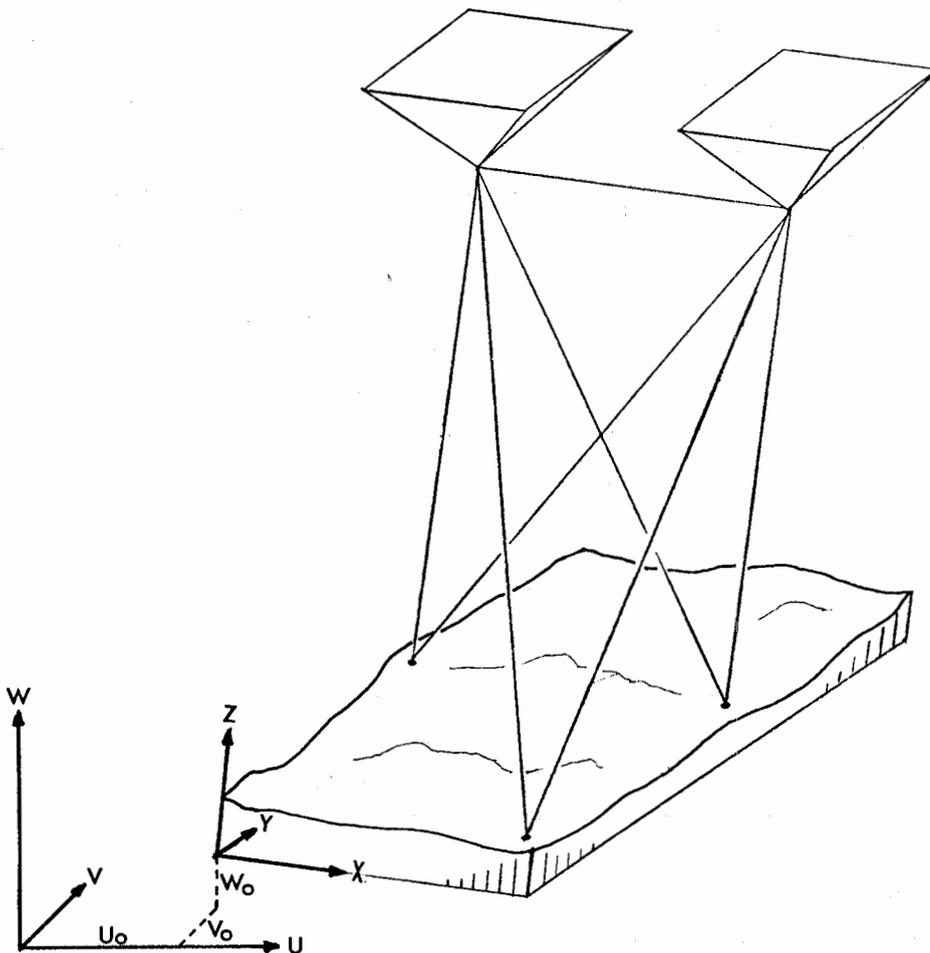


Bild 18 Kartesische Modell- und Objektkoordinatensysteme

II.2.3 Aerotriangulation und Paßpunkte

Die ursprüngliche Aufgabe der Aerotriangulation ist es, über die simultane äußere Orientierung aller Bilder eines Bildverbands aus den geometrischen Zusammenhängen eine Anzahl interessierender Objektpunkte in einem kartesischen Objekt-Koordinatensystem zu rekonstruieren bzw. zu beschreiben, was auch als photogrammetrische Punktbestimmung bezeichnet wird. Aus den vielen Möglichkeiten Aerotriangulation durchzuführen betrachten wir hier mit der Bündelmethode und der Methode der unabhängigen Modelle die wichtigsten und genauesten Verfahren.

Bei der Bündelmethode benützt man direkt die in II.2.1 beschriebenen perspektiven Abbildungsbeziehungen und geht von den Bildkoordinaten als Beobachtungen aus. Die Methode ist die direkte und vollständige analytische Realisierung des durch perspektive Abbildungen und zugeordnete Strahlenbündel gekennzeichneten geometrischen Funktionalmodells der photogrammetrischen Aufnahmen eines Bildverbandes. Ihr unmittelbarer Bezug zur allgemeinen Theorie qualifiziert sie in der Konzeption als direkte und strenge Methode der photogrammetrischen Punktbestimmung.

Da die in (18) beschriebenen Beziehungen nicht-linear sind, erfordert die Aerotriangulation nach der Bündelmethode Näherungswerte aller Unbekannten, Linearisierung und iterative Annäherung an die Lösung. Zur Linearisierung der Fehlergleichungen (18) bezeichnen wir die ungeformten Gl. (18) mit f_x, f_y die Objekt-Koordinaten statt mit X, Y, Z mit U, V, W und die drei unabhängigen Drehungen mit ω, ϕ, κ und erhalten damit nach [1] folgende linearisierte Fehlergleichungen für die Bildkoordinaten x, y eines Bildpunktes i im Bild j :

$$\begin{aligned}
 v_{xij} + x_{ij} = & f_x^0 + \left(\frac{\partial f_x}{\partial \omega_j} \right)^0 d\omega_j + \left(\frac{\partial f_x}{\partial \phi_j} \right)^0 d\phi_j + \left(\frac{\partial f_x}{\partial \kappa_j} \right)^0 d\kappa_j + \\
 & + \left(\frac{\partial f_x}{\partial U_{0j}} \right)^0 dU_{0j} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial V_{0j}} \right)^0 dV_{0j} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial W_{0j}} \right)^0 dW_{0j} + \\
 & + \left(\frac{\partial f_x}{\partial U_i} \right)^0 dU_i + \left(\frac{\partial f_x}{\partial V_i} \right)^0 dV_i + \left(\frac{\partial f_x}{\partial W_i} \right)^0 dW_i
 \end{aligned} \tag{20a}$$

$$\begin{aligned}
 v_{yij} + y_{ij} = & f_y^0 + \left(\frac{\partial f_y}{\partial \omega_j} \right)^0 d\omega_j + \left(\frac{\partial f_y}{\partial \phi_j} \right)^0 d\phi_j + \left(\frac{\partial f_y}{\partial \kappa_j} \right)^0 d\kappa_j + \\
 & + \left(\frac{\partial f_y}{\partial U_{0j}} \right)^0 dU_{0j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial V_{0j}} \right)^0 dV_{0j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial W_{0j}} \right)^0 dW_{0j} + \\
 & + \left(\frac{\partial f_y}{\partial U_i} \right)^0 dU_i + \left(\frac{\partial f_y}{\partial V_i} \right)^0 dV_i + \left(\frac{\partial f_y}{\partial W_i} \right)^0 dW_i
 \end{aligned} \tag{20b}$$

Das jeweils rechts oben gesetzte Zeichen 0 steht für Näherungswerte der Differentialquotienten, für die gilt:

$$\left(\frac{\partial f_x}{\partial \omega_j}\right)^0 = \frac{-c_j}{N_{ij}^0} \left[\{-(a_{31})_j^0 (V_i^0 - V_{0j}^0) + (a_{21})_j^0 (W_i^0 - W_{0j}^0)\} - \left(\frac{Z_x}{N}\right)_{ij}^0 \{-(a_{33})_j^0 (V_i^0 - V_{0j}^0) + (a_{23})_j^0 (W_i^0 - W_{0j}^0)\} \right]$$

$$\left(\frac{\partial f_x}{\partial \phi_j}\right)^0 = \frac{-c_j}{N_{ij}^0} \left[-N_{ij}^0 \cos \kappa_j^0 - \left(\frac{Z_x}{N}\right)_{ij}^0 \{ \cos \phi_j^0 (U_i^0 - U_{0j}^0) - (a_{23})_j^0 \tan \phi_j^0 (V_i^0 - V_{0j}^0) - (a_{33})_j^0 \tan \phi_j^0 (W_i^0 - W_{0j}^0) \} \right]$$

$$\left(\frac{\partial f_x}{\partial \kappa_j}\right)^0 = -c_j \left(\frac{Z_y}{N}\right)_{ij}^0 \quad \left(\frac{\partial f_y}{\partial \kappa_j}\right)^0 = c_j \left(\frac{Z_x}{N}\right)_{ij}^0$$

$$\left(\frac{\partial f_y}{\partial \omega_j}\right)^0 = \frac{-c_j}{N_{ij}^0} \left[\{-(a_{32})_j^0 (V_i^0 - V_{0j}^0) + (a_{22})_j^0 (W_i^0 - W_{0j}^0)\} - \left(\frac{Z_y}{N}\right)_{ij}^0 \{-(a_{33})_j^0 (V_i^0 - V_{0j}^0) + (a_{23})_j^0 (W_i^0 - W_{0j}^0)\} \right]$$

$$\left(\frac{\partial f_y}{\partial \phi_j}\right)^0 = \frac{-c_j}{N_{ij}^0} \left[N_{ij}^0 \sin \kappa_j^0 - \left(\frac{Z_y}{N}\right)_{ij}^0 \{ \cos \phi_j^0 (U_i^0 - U_{0j}^0) - (a_{23})_j^0 \tan \phi_j^0 (V_i^0 - V_{0j}^0) - (a_{33})_j^0 \tan \phi_j^0 (W_i^0 - W_{0j}^0) \} \right]$$

$$\left(\frac{\partial f_x}{\partial U_i}\right)^0 = - \left(\frac{\partial f_x}{\partial U_{0j}}\right)^0 = \frac{-c_j}{N_{ij}^0} \left[(a_{11})_j^0 - \left(\frac{Z_x}{N}\right)_{ij}^0 (a_{13})_j^0 \right]$$

$$\left(\frac{\partial f_x}{\partial V_i}\right)^0 = - \left(\frac{\partial f_x}{\partial V_{0j}}\right)^0 = \frac{-c_j}{N_{ij}^0} \left[(a_{21})_j^0 - \left(\frac{Z_x}{N}\right)_{ij}^0 (a_{23})_j^0 \right]$$

$$\left(\frac{\partial f_x}{\partial W_i}\right)^0 = - \left(\frac{\partial f_x}{\partial W_{0j}}\right)^0 = \frac{-c_j}{N_{ij}^0} \left[(a_{31})_j^0 - \left(\frac{Z_x}{N}\right)_{ij}^0 (a_{33})_j^0 \right]$$

$$\left(\frac{\partial f_y}{\partial U_i}\right)^0 = - \left(\frac{\partial f_y}{\partial U_{0j}}\right)^0 = \frac{-c_j}{N_{ij}^0} \left[(a_{12})_j^0 - \left(\frac{Z_y}{N}\right)_{ij}^0 (a_{13})_j^0 \right]$$

$$\left(\frac{\partial f_y}{\partial V_i}\right)^0 = - \left(\frac{\partial f_y}{\partial V_{0j}}\right)^0 = \frac{-c_j}{N_{ij}^0} \left[(a_{22})_j^0 - \left(\frac{Z_y}{N}\right)_{ij}^0 (a_{23})_j^0 \right]$$

$$\left(\frac{\partial f_y}{\partial W_i} \right)^0 = - \left(\frac{\partial f_y}{\partial W_{0j}} \right)^0 = \frac{-c_j}{N_{ij}^0} \left[(a_{32})_{ij}^0 - \left(\frac{Z_y}{N} \right)_{ij}^0 (a_{33})_{ij}^0 \right] \quad (21)$$

mit

$$(Z_x)_{ij}^0 = (a_{11})_{ij}^0 (U_i^0 - U_{0j}^0) + (a_{21})_{ij}^0 (V_i^0 - V_{0j}^0) + (a_{31})_{ij}^0 (W_i^0 - W_{0j}^0)$$

$$(Z_y)_{ij}^0 = (a_{12})_{ij}^0 (U_i^0 - U_{0j}^0) + (a_{22})_{ij}^0 (V_i^0 - V_{0j}^0) + (a_{32})_{ij}^0 (W_i^0 - W_{0j}^0)$$

$$N_{ij}^0 = (a_{13})_{ij}^0 (U_i^0 - U_{0j}^0) + (a_{23})_{ij}^0 (V_i^0 - V_{0j}^0) + (a_{33})_{ij}^0 (W_i^0 - W_{0j}^0)$$

Bei der Methode der unabhängigen Modelle geht man von den in II.2.2 beschriebenen Modellkoordinaten als Beobachtungen aus. Der Funktionalansatz der Methode entspricht der Punktbestimmung durch simultane absolute Orientierung aller unabhängigen Bildpaare eines Verbandes nach (19). Die Nichtlinearität der Transformation erfordert ebenfalls wie bei der Bündelmethode Näherungswerte allerdings nur für einige der Orientierungsunbekannten, Linearisierung und iterative Annäherung an die Lösung. Da es immer möglich und mit unabhängigen Modellen besonders anschaulich und bequem ist, die Modellkoordinaten mit Näherungswerten der Orientierungsunbekannten vorzutransformieren, kann die Linearisierung als Variante des sonst üblichen Ansatzes von Näherungswerten 0 für die Neigungsgrößen in der Drehmatrix R und vom Näherungswert 1 für den Maßstabsfaktor m in (19) ausgehen.

Nach [1] lauten die entsprechenden linearisierten Fehlergleichungen für einen Punkt i im Modell j:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{ij} = \begin{bmatrix} -X & 0 & -Z & Y \\ -Y & Z & 0 & -X \\ -Z & -Y & X & 0 \end{bmatrix}_{ij} \cdot \begin{bmatrix} m \\ d\Omega \\ d\phi \\ dA \end{bmatrix}_j - \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}_j \quad (22)$$

Hierbei bedeuten:

$(X, Y, Z)_{ij}^T$ Koordinaten des Punktes i im Modell j, bezogen auf das Modellkoordinatensystem j,

$(m, d\Omega, d\phi, dA, U_0, V_0, W_0)_{ij}^T$ unbekannte Orientierungsparameter des Modellkoordinatensystems j bzw. ihre differentiellen Änderungen,

$(U, V, W)_i^T$ unbekannte Objektkoordinaten des Punktes i,

$(v_x, v_y, v_z)_{ij}^T$ Verbesserung der transformierten Modellkoordinaten des Punktes ij im Sinne der Ausgleichsrechnung = Restfehler zwischen dem ausgeglichenen Punkt i und dem transformierten Modellpunkt ij.

Für die praktische Durchführung der Aerotriangulation nach den beiden beschriebenen Methoden gibt es viele Varianten. Sie sind z.B. in [1] ausführlich erörtert. Für diese Untersuchung hier ist es jedoch nicht interessant, wie im Einzelfall der tatsächliche Rechenprozeß läuft. Für die Simulation in dieser

Untersuchung wurde für die Bündelmethode nach dem Ansatz (20) das Rechenprogramm PAT-B |14|, für die Methode der unabhängigen Modelle das Programm PAT-M43 |15| verwendet. Letzteres weicht allerdings von dem Ansatz (19) insofern ab, als zusätzlich zwischen Lage- und Höhenausgleichung iteriert wird. Der Rechenaufwand wird dadurch ohne Verlust an Genauigkeit um den Faktor 3 gesenkt |16|.

Die für die praktische Durchführung der Aerotriangulation sehr wichtigen Gesichtspunkte, wie z.B. Beschränkungen durch Rechenprogramme, Lösbarkeit einer Aerotriangulation, Möglichkeiten zur Einbeziehung modifizierter Funktionalmodelle der perspektiven Abbildung mit zusätzlichen Parametern oder von komplizierteren stochastischen Modellen usw. können für die Untersuchung außer Betracht bleiben, da hier nur das theoretische Funktionalmodell in den Formulierungen (18) und (19) bzw. (20) und (22) zur Diskussion steht.

Wie oben bereits betont, tritt die geodätische Abbildung und die Erdkrümmung zunächst überhaupt nicht als Problem in Erscheinung, solange die Paßpunktkoordinaten und damit die Objektrekonstruktion sich auf ein räumliches kartesisches Koordinatensystem beziehen. Solange dies der Fall ist, treten im ansonsten fehlerfreien System keinerlei Widersprüche auf, d.h. die Beobachtungen erhalten durch die Ausgleichung keinerlei Verbesserungen, weder bei der Bündelmethode nach (18) noch bei der Methode der unabhängigen Modelle nach (19). Wenn aber - wie es in der Praxis regelmäßig geschieht - an Stelle der kartesischen Objektkoordinaten nun fälschlicherweise die ebenen Koordinaten der geodätischen Abbildung in (18) und (19) oder (20) und (22) als Objektkoordinaten verwendet werden, dann ist das System nicht mehr widerspruchsfrei und tritt eine Störung der Ergebnisse ein. Sie äußert sich in einer Verzerrung der auf die geodätische Abbildung bezogenen Objektkoordinaten (äußere Fehlerwirkung) und in inneren Diskrepanzen (zusätzliche Verbesserungen an den Beobachtungen). Die Ergebnisse der Aerotriangulation werden also durch die direkte Benützung der geodätischen Abbildung "verfälscht". Die Darstellung dieser Verfälschungen und ihrer Abhängigkeiten wird Inhalt des Kapitels III dieser Arbeit sein. Eine besondere Rolle spielen dabei die Paßpunkte, die den einzigen Bezug zu der geodätischen Abbildung bilden.

Zwei extreme Beispiele können den Einfluß von geodätischer Abbildung in Zusammenhang mit den Paßpunkten anschaulich darstellen. Sind bei einer sonst fehlerfreien Aerotriangulation die Objektkoordinaten aller photogrammetrisch erfaßten Punkte in der geodätischen Abbildung bekannt und in die Aerotriangulation als Paßpunktkoordinaten eingeführt (es handelt sich somit nicht mehr um eine Punktbestimmung sondern um eine Kalibrierung des photogrammetrischen Systems), dann zeigt sich die Fehlerwirkung ausschließlich an den Verbesserungen der photogrammetrischen Bild- oder Modellkoordinaten, d.h. an den Beobachtungsgrößen der Ausgleichung. Eine Verzerrung des Feldes der Objektpunkte in der geodätischen Abbildung tritt nicht auf, da sie alle als vorgegebene Paßpunkte angehalten werden. Bei dem zweiten Beispiel stellen wir uns umgekehrt eine Aerotriangulation vor, bei der nur die zur Bestimmung minimal notwendige Anzahl von Paßpunktkoordinaten in der geodätischen Abbildung vorgegeben ist. In diesem Fall treten bei sonst fehlerfreier Aerotriangulation keine inneren Widersprüche auf, alle Verbesserungen an den photogrammetrischen Koordinaten verschwinden.

Statt dessen zeigen im Prinzip alle auf das geodätische Abbildungssystem bezogenen Neupunktkoordinaten systematische Abweichungen gegenüber der strengen geodätischen Abbildung der entsprechenden Objektpunkte.

Die praktischen Aerotriangulationen liegen immer zwischen diesen Extremfällen, so daß sich die Fehlerwirkungen sowohl als innere Widersprüche an den Verbesserungen und den äußeren Verzerrungen des durch die Aerotriangulation bestimmten Neupunktfeldes äußern.

II.2.4 Erdkrümmungskorrektur

Es war seit langem bei der photogrammetrischen Auswertung von Bildpaaren oder Streifen mit Analoggeräten aufgefallen, daß der größte Widerspruch bei Benutzung der geodätisch abgebildeten Landeskoordinaten hauptsächlich in der Höhe auftritt, denn die photogrammetrisch räumlich rekonstruierte Erdoberfläche zeigt gegenüber der geodätisch abgebildeten, verebneten Erdoberfläche eine Aufwölbung. Da man die Zentralprojektion als Arbeitsmodell anhält, ist eine fehlerfreie Transformation zwischen den photogrammetrisch rekonstruierten und den geodätisch abgebildeten Objektkoordinaten nur nach der zweiten der in I.2.3 genannten Prinziplösung möglich, die aber für praktische Anwendungen kompliziert und für Analoggeräte praktisch nicht möglich ist. Man versucht deshalb bisher in der Praxis, mit einer Näherungslösung die großen Widersprüche in der Höhe zu beseitigen. Die photogrammetrischen Bild- oder Modellkoordinaten werden dabei nach einem möglichst einfachen Verfahren, der sogenannten Erdkrümmungskorrektur, so korrigiert, daß im Effekt die ursprünglich gekrümmte Höhenbezugsfläche praktisch verebnet ist.

Zur Beseitigung des Höheneinflusses der Erdkrümmung wird mit möglichst einfachen Mitteln die jeweilige photogrammetrische Recheneinheit (Bild, Modell, Streifen) unabhängig und vor allem auch unabhängig von der geodätischen Abbildung des Landeskoordinatensystems für sich korrigiert. Damit wird das Verfahren als Näherung gegenüber der strengen Vorschrift der zweiten Prinziplösung sehr einfach. Aber da jede Art der Verebnung der Erdellipsoidoberfläche zusätzliche Verzerrungen mit sich bringt, bleiben nach der Erdkrümmungskorrektur immer noch Restwidersprüche im jeweiligen Projektionssystem. Diese Erdkrümmungskorrektur kann deshalb nur den ersten wenngleich wichtigen Schritt des Widerspruchs zur vollständigen Beseitigung des zwischen den photogrammetrisch rekonstruierten und den geodätisch abgebildeten Landeskoordinaten bilden und ist als eine Näherungslösung anzusehen.

In der Praxis kann diese Korrektur entweder direkt an den photogrammetrischen Bildern, d.h. an den Bildkoordinaten oder an bereits (relativ und genähert absolut) räumlich rekonstruierten Objekten (Bildpaaren oder Streifen) angebracht werden. Im folgenden wird die Erdkrümmungskorrektur an Bildern und an photogrammetrischen Modellen näher erläutert.

II.2.4.1 Erdkrümmungskorrektur am einzelnen photogrammetrischen Bild

Um die Erdkrümmungskorrektur für Bildkoordinaten abzuleiten, müssen wir auf die Beschreibung der grundlegenden Beziehungen zwischen den Bild- und den Objektkoordinaten in Bild 19 und den Gleichungen (18) zurückgehen.

Wenn man sich den in Bild 19 dargestellten Teil der gekrümmten Erdoberfläche nach irgendeiner Definition verebnet denkt, kann man den Objektpunkten der Erdoberfläche nach der Verebnung neue Koordinaten in demselben Objektkoordinatensystem zuordnen. Bezeichnen wir die ursprünglichen Objektkoordinaten vor der Verebnung mit X, Y, Z und die des fiktiv verebneten Objekts mit X', Y', Z' , kann unter Beibehaltung der äußeren Orientierung des Bildes eine perspektive Abbildung des verebneten Objekts postuliert und definiert werden. Die zugeordneten Bildkoordinaten unterscheiden sich von denen der perspektiven Abbildung des ursprünglichen, reellen Objekts durch Änderungen $\Delta x, \Delta y$. Die perspektive Abbildung des verebneten Objekts läßt sich daher durch die folgenden Beziehungen beschreiben, wobei Δx und Δy die sogenannten Erdkrümmungskorrekturen der Bildkoordinaten darstellen:

$$\frac{x+\Delta x}{-c} = \frac{a_{11}(X'-X_0) + a_{21}(Y'-Y_0) + a_{31}(Z'-Z_0)}{a_{13}(X'-X_0) + a_{23}(Y'-Y_0) + a_{33}(Z'-Z_0)} \quad (23a)$$

$$\frac{y+\Delta y}{-c} = \frac{a_{12}(X'-X_0) + a_{22}(Y'-Y_0) + a_{32}(Z'-Z_0)}{a_{13}(X'-X_0) + a_{23}(Y'-Y_0) + a_{33}(Z'-Z_0)} \quad (23b)$$

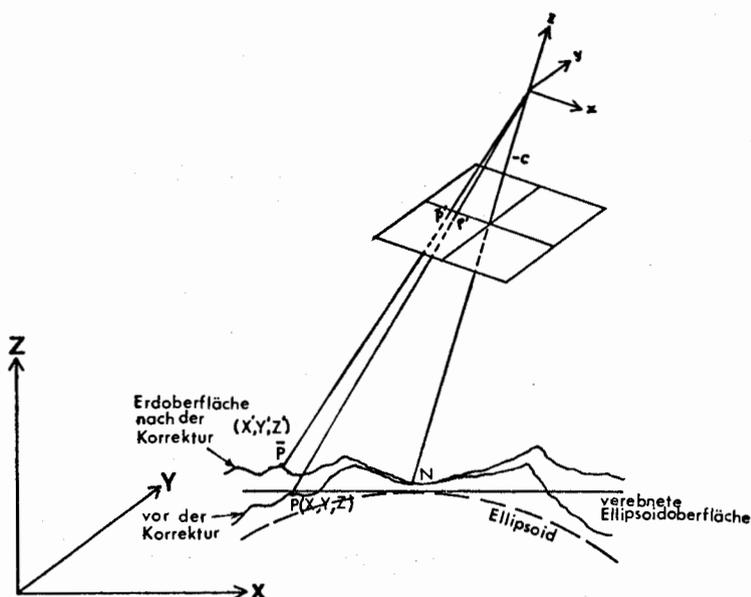


Bild 19 Verebnung der Ellipsoidoberfläche und die entsprechende Änderung der perspektiven Abbildung

Aus den (kartesischen) Objektkoordinaten X' , Y' und Z' des verebneten Objekts können die Korrekturen der Bildkoordinaten bei bekannter äußerer Orientierung nach (23) errechnet werden, wobei die Koordinaten X' , Y' und Z' von der Definition der Verebnung der Ellipsoidoberfläche abhängen und sich entsprechend aus den ursprünglichen Objektkoordinaten X , Y und Z ableiten lassen. Bezüglich der Auswahl unter den vielen theoretischen Möglichkeiten der Verebnung ist für die bisherige Praxis der Gesichtspunkt der Einfachheit dominierend. Die Erdoberfläche wird daher in der Regel durch eine einfache orthogonale Parallelprojektion auf eine geeignete Ebene verebnet. Als Projektionsebene bietet sich eine Tangentialebene an, welche das Ellipsoid etwa in der Mitte des vom Bild erfaßten Ausschnitts berührt.

Für die nicht unmittelbar auf dem Ellipsoid liegenden Punkte wird die ellipsoidische Höhe (oder eine Näherung davon) unverändert übertragen, d.h. über der Tangentialebene abgesetzt (vgl. Gl. (4)).

Da ein photogrammetrisches Bild stets nur einen relativ kleinen Ausschnitt der Erde erfaßt, können wir zur weiteren Ableitung das Ellipsoid örtlich durch eine Kugel ersetzen. Ferner werden wir annehmen, daß die Bilder sogenannte Senkrechtaufnahmen sind, so daß die Aufnahmeachsen höchstens um einige Grade von der Lotrichtung abweichen. In diesem Fall können wir die Tangentialebene so definieren, daß sie die Erdkugel am Nadir berührt. Damit liegt die Tangentialebene stets zentral und bleiben die Erdkrümmungskorrekturen klein. Zur Ableitung der entsprechenden Erdkrümmungskorrekturen der Bildkoordinaten stellt Bild 20 die Zusammenhänge dar, wobei allerdings die Z-Achse des Objektkoordinatensystems ohne Einbuße an Allgemeinheit parallel zur Nadirrichtung des Bildes angenommen ist.

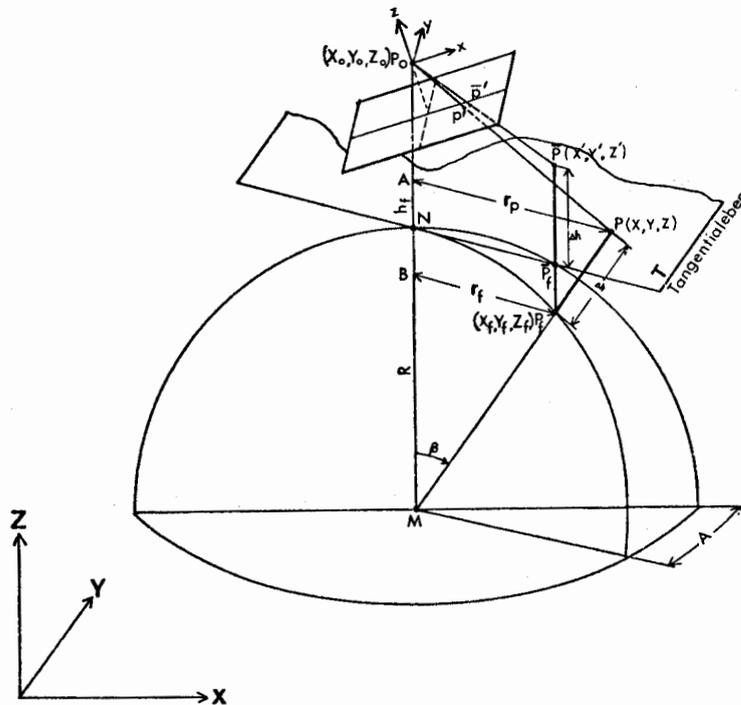


Bild 20 Zur Erdkrümmungskorrektur des photogrammetrischen Einzelbildes durch Orthogonalprojektion auf die Tangentialebene am Nadirpunkt

Der Objektpunkt $P(X, Y, Z)$ wird über die orthogonale Projektion des Fußpunktes P_f nach \bar{P}_f und der Übertragung der Höhe Δh nach $\bar{P}(X', Y', Z')$ abgebildet. Der entsprechende Bildpunkt wandert dabei von p' in die "korrigierte" Position \bar{p}' .

Die direkte Anwendung der Gl. (23) für die Berechnung der Korrekturen Δx , Δy der Bildkoordinaten ist jedoch für die Praxis nicht geeignet. In den Gl. (23) treten die abgebildeten Objektkoordinaten X' , Y' und Z' auf, die nur durch eine vorausgegangene zusätzliche Berechnung erhältlich sind. Wir werden deshalb im folgenden versuchen, anhand der im Bild 20 dargestellten Beziehungen die abgebildeten Objektkoordinaten X' , Y' und Z' in den Gl. (23) durch die ursprünglichen Objektkoordinaten X , Y und Z zu ersetzen.

Dazu fällen wir im Bild 20 von dem Objektpunkt P und von seinem Fußpunkt P_f Lote auf die Verbindungslinie $\overline{P_0M}$ (Nadirrichtung des photogrammetrischen Bildes). Das Lot von P trifft $\overline{P_0M}$ in A , und das Lot von P_f trifft $\overline{P_0M}$ in B . Bezeichnet man die Länge von \overline{PA} mit r_p und die Länge von $\overline{P_fB}$ mit r_f , so gilt

$$r_p = (X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2$$

$$r_f = (X_f - X_0)^2 + (Y_f - Y_0)^2$$

bzw.

$$\begin{aligned} (X - X_0) &= r_p \cos A \\ (Y - Y_0) &= r_p \sin A \end{aligned} \tag{24a}$$

und

$$\begin{aligned} (X_f - X_0) &= r_f \cos A \\ (Y_f - Y_0) &= r_f \sin A \end{aligned} \tag{24b}$$

wobei A das Azimut der Richtung vom Nadir N des Bildes zum Objektpunkt P darstellt.

Faßt man (24a) und (24b) zusammen, so erhält man

$$X_f - X_0 = \frac{r_f}{r_p} (X - X_0) \tag{25a}$$

$$Y_f - Y_0 = \frac{r_f}{r_p} (Y - Y_0) \tag{25b}$$

Im Bild 20 ist aus dem Dreieck ΔMP_fB und dem Dreieck ΔMPA abzulesen

$$\frac{\overline{P_fB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{P_fM}}{\overline{PM}}$$

bzw.

$$\frac{r_f}{r_p} = \frac{R}{R + \Delta h}$$

Setzt man in (25) eine neue Variable g für das Größenverhältnis

$$g = \frac{r_f}{r_p} = \frac{R}{R + \Delta h} \quad (g \leq 1)$$

ein, so erhält man

$$X_f - X_0 = (X - X_0)g \quad (26a)$$

$$Y_f - Y_0 = (Y - Y_0)g \quad (26b)$$

Wie beschrieben erfolgt die Abbildung des Punkts P nach \bar{P} zunächst durch die orthogonale Projektion seines Fußpunkts P_f auf die Tangentialebene nach \bar{P}_f und durch die Übertragung der Höhe Δh von P_f aus. Sonst sind die X' und Y' Koordinaten des abgebildeten Punkts \bar{P} identisch mit den Koordinaten X_f und Y_f des Fußpunkts P_f . Es gilt also

$$\begin{aligned} X' &= X_f \\ Y' &= Y_f \end{aligned}$$

und die Gl. (26) können wie folgt ausgedrückt werden:

$$X' - X_0 = (X - X_0)g \quad (27a)$$

$$Y' - Y_0 = (Y - Y_0)g \quad (27b)$$

Da \bar{P} die Höhe Δh über der Tangentialebene hat, lautet seine Z-Koordinate

$$Z' = Z_0 - h_F + \Delta h$$

oder

$$Z' - Z_0 = - (h_F - \Delta h) \quad (27c)$$

Setzt man (27) in (23) ein, erhält man schließlich

$$\frac{x + \Delta x}{-c} = \frac{a_{11}(X - X_0)g + a_{21}(Y - Y_0)g + a_{31}(-h_F^i)}{a_{13}(X - X_0)g + a_{23}(Y - Y_0)g + a_{33}(-h_F^i)} \quad (28a)$$

$$\frac{y + \Delta y}{-c} = \frac{a_{12}(X - X_0)g + a_{22}(Y - Y_0)g + a_{32}(-h_F^i)}{a_{13}(X - X_0)g + a_{23}(Y - Y_0)g + a_{33}(-h_F^i)} \quad (28b)$$

wobei

$$g = \left(\frac{R}{R + \Delta h} \right)$$

und $h_F^i = h_F - \Delta h$

Wenn die kartesischen Objektkoordinaten des Geländepunkts P , seine ellipsoidische Höhe, die äußere Orientierung des Bildes und die Flughöhe über der Tangentialebene bekannt sind, können die Erdkrümmungskorrektur der zugeordneten Bildkoordinaten mit Hilfe der Gl. (28) errechnet werden. Gewöhnlich sind diese Größen vor der Aerotriangulation nicht bekannt, so daß die Erdkrümmungskorrektur iterativ bestimmt werden müßte. Eine Ausnahme bildet der Fall der absolut senkrechten (Nadir-)Aufnahme. In diesem Fall ist die Bildebene parallel zur Tangentialebene an die Kugel, und wir können außerdem durch eine Drehung um

die Z-Achse auch stets die Kantung zu Null machen. Damit sind alle Elemente der Drehmatrix Null, mit Ausnahme der Elemente a_{11} , a_{22} und a_{33} , die den Wert 1 annehmen. Damit vereinfacht sich (28) zu

$$\frac{x+\Delta x}{-c} = \frac{(X-X_0)g}{-h'_F} \quad (29a)$$

$$\frac{y+\Delta y}{-c} = \frac{(Y-Y_0)g}{-h'_F} \quad (29b)$$

Die Zusammenhänge sind in Bild 21 dargestellt, das den Vertikalschnitt durch P_0 und P zeigt.

Führen wir als neue Hilfsgröße den Ausdruck

$$m = \frac{Z_0 - Z}{c} \quad (30)$$

ein, der als Maßstabszahl des dem Objektpunkt P entsprechenden Bildpunktes p' interpretiert werden kann und noch zu bestimmen ist, erhalten wir wegen

$$(X-X_0) = m \cdot x$$

$$(Y-Y_0) = m \cdot y$$

für (29)

$$\frac{x+\Delta x}{-c} = \frac{m \cdot x \cdot g}{-h'_F} \quad (31a)$$

$$\frac{y+\Delta y}{-c} = \frac{m \cdot y \cdot g}{-h'_F} \quad (31b)$$

oder

$$\Delta x = \left[\frac{c \cdot m \cdot g}{h'_F} - 1 \right] \cdot x \quad (32a)$$

$$\Delta y = \left[\frac{c \cdot m \cdot g}{h'_F} - 1 \right] \cdot y \quad (32b)$$

Die Erdkrümmungskorrektur der Bildkoordinaten ist damit in Gl. (32) im wesentlichen als Funktion der Bildkoordinaten, nicht mehr der Objektkoordinaten dargestellt. Allerdings muß die Maßstabszahl m noch bestimmt werden.

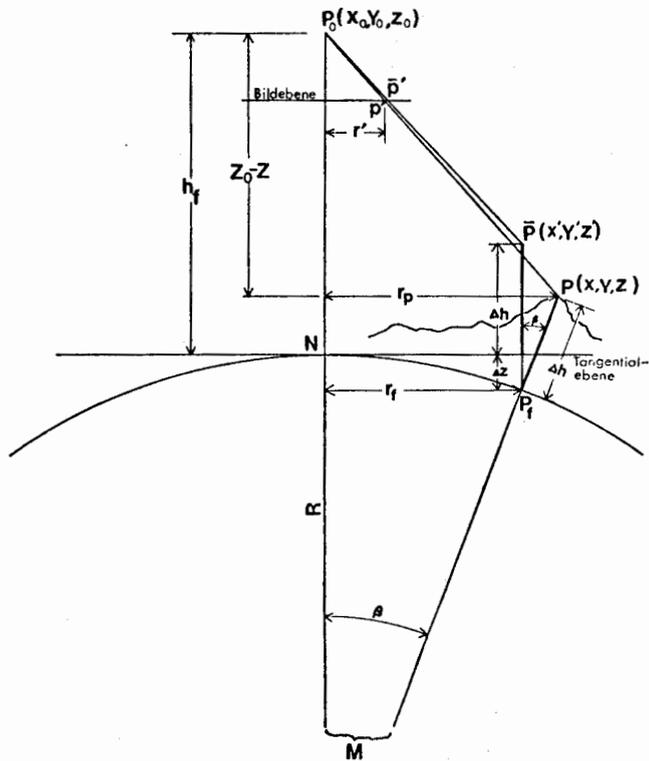


Bild 21 Erdkrümmungskorrektur; Vertikalschnitt durch Aufnahmezentrum P_0 und Objektpunkt P

Nach Bild 21 ist

$$Z_0 - Z = h_F + \Delta Z - \Delta h \cos \beta \quad (33)$$

Wegen des kleinen Öffnungswinkels β kann gesetzt werden

$$\Delta Z \approx \frac{r_f^2}{2R} \quad \text{und} \quad \beta \approx \frac{r_f}{R}$$

bzw.

$$\cos \beta \approx \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r_f}{R}\right)^2\right)$$

Ersetzen wir weiter, wie oben r_f durch

$$r_f = \frac{R}{R + \Delta h} r_p = \frac{R}{R + \Delta h} \cdot m \cdot r'$$

wobei

$$r' = \sqrt{x^2 + y^2}$$

der Bildradius zum Bildpunkt p ist, erhalten wir aus (33)

$$Z_0 - Z = h_F - \Delta h + \frac{1}{2(R + \Delta h)} m^2 \cdot r'^2$$

und damit aus (30)

$$m \cdot c = h_F - \Delta h + \frac{1}{2(R + \Delta h)} m^2 \cdot r'^2 \quad (34)$$

Die quadratische Gleichung (34) ergibt für m die Lösung:

$$m = \frac{(R+\Delta h) \cdot c \pm \sqrt{(R+\Delta h)^2 c^2 - 2r'^2 (R+\Delta h)(h_F - \Delta h)}}{r'^2} \quad (r' \neq 0) \quad (35a)$$

Für den im Bild 21 dargestellten Fall kommt nur das Minus Vorzeichen vor der Wurzel in Frage. Für die praktische Berechnung hat folgende Umformung bessere Rechenschärfe:

$$m = \frac{1}{r'} (\bar{R} \cdot t - \sqrt{\bar{R} \cdot (\bar{R} \cdot t - 2 \cdot h_F^i)}) \quad (35b)$$

mit

$$\bar{R} = R + \Delta h$$

$$h_F^i = h_F - \Delta h$$

$$r' = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$t = \frac{c}{r'}$$

Mit (35) können aus (32) die Erdkrümmungskorrekturen direkt aus den Bildkoordinaten gerechnet werden, allerdings muß die Höhe des Objektpunktes bekannt sein. Für praktische Anwendung genügt jedoch eine grobe Schätzung der Höhe. Ein Schätzungsfehler von 10 % in der Höhe verursacht in der Bildecke ($r' = 141 \text{ mm}$) einen maximalen Korrekturfehler von $1 \mu\text{m}$ im Bild (bei allen Flughöhen und für Geländehöhenunterschiede bis $1/3$ der Flughöhe oder 3000 m).

Wenn die Aufnahme absolut senkrecht und zudem das Gelände flach ist, also $\Delta h \approx 0$, vereinfacht sich die Erdkrümmungskorrektur zu

$$\Delta x = \left(\frac{c \cdot m}{h_F} - 1 \right) \cdot x \quad (36a)$$

$$\Delta y = \left(\frac{c \cdot m}{h_F} - 1 \right) \cdot y \quad (36b)$$

oder als Radialkorrektur

$$dr' = \left(\frac{c \cdot m}{h_F} - 1 \right) \cdot r' \quad (36c)$$

mit
$$m = \frac{R}{r'} \cdot \left(t - \sqrt{t^2 - 2 \cdot \frac{h_F^i}{R}} \right) \quad (36d)$$

FINSTERWALDER [3] hat für (36c) als Näherungsformel angegeben:

$$dr' = \frac{h_F}{2R \cdot c^2} \cdot r'^3 \quad (37)$$

Diese Formel unterscheidet sich von (36c) in den Beträgen nur sehr wenig, bei einer Weitwinkelaufnahme aus 10 km Flughöhe beläuft sich der maximale Unterschied in der Bildecke auf nur $0.3 \mu\text{m}$. Einen Überblick über die Größenordnung der radialen Bildkorrektur bei ebenem Gelände gibt Tabelle 2 für 3 verschiedene Flughöhen an jeweils 4 verschiedenen Stellen (von $\frac{1}{4}r'_{\text{max}}$ bis r'_{max}) in Weitwinkelnbildern ($c = 15 \text{ cm}$, Bildformat $23 \text{ cm} \times 23 \text{ cm}$). Obwohl die Gl. (36) bzw. Gl. (37)

Flughöhe in km	Radialabstand $r' =$	Größe d. Korrektur in μm im Bild
1	$1/4 r'_{\text{max}}$	0.2
	$1/2 r'_{\text{max}}$	1.9
	$3/4 r'_{\text{max}}$	6.3
	$1 r'_{\text{max}}$	15.0
5	$1/4 r'_{\text{max}}$	1.2
	$1/2 r'_{\text{max}}$	9.4
	$3/4 r'_{\text{max}}$	31.6
	$1 r'_{\text{max}}$	74.9
10	$1/4 r'_{\text{max}}$	2.3
	$1/2 r'_{\text{max}}$	18.7
	$3/4 r'_{\text{max}}$	63.2
	$1 r'_{\text{max}}$	149.9

Tab. 2 Größe der Erdkrümmungskorrektur strenger Senkrecht-Weitwinkel-
 aufnahmen bei ebenem Gelände ($\Delta h=0$) an 4 verschiedenen Stellen
 im Bild, $r'_{\text{max}} = 162.6 \text{ mm}$

nur für strenge Senkrechtaufnahmen und ebenes Gelände gelten, werden sie regel-
 mäßig in der Praxis auch für geringe Bildneigungen und gebirgiges Gelände ver-
 wendet. Dadurch entstehen bei Geländehöhenunterschieden Korrekturfehler, die bei
 hohen Genauigkeitsansprüchen nicht mehr vernachlässigbar sind.

Tabelle 3 zeigt für einige nach (36) berechnete Beispiele die maximalen Fehler
 der Erdkrümmungskorrektur im Bild bei Vernachlässigung von Geländehöhenunter-
 schieden für Weitwinkelaufnahmen (mit 15 cm Brennweite und $23 \times 23 \text{ cm}^2$ Bildfor-
 mat) und für verschiedene Flughöhen. Die Aufnahmerichtung sei streng lotrecht.
 Der betrachtete Bildpunkt liegt in der Bildecke, also $r' = 141 \text{ mm}$ in Gl. (36c).

Die Korrekturfehler sind also unabhängig von der Flughöhe und wachsen ungefähr
 linear mit dem Höhenunterschied. Man hat die Korrekturfehler bisher unterschätzt.
 Die in Tabelle 3 angegebenen Fehlerbeträge sind wesentlich größer als die von
 FINSTERWALDER [3] als Näherung angegebenen Fehler.

Flughöhe in km	Geländehöhe Δh in Meter	Fehler d. Korrektur in μm im Bild
1	0	0
	100	3.1
	200	6.5
	300	9.5
	$333(1/3 h_F)$	10.6
5	0	0
	100	3.2
	200	6.4
	300	9.6
	400	12.8
	800	25.6
	$1667(1/3 h_F)$	53.4
10	0	0
	100	3.2
	200	6.4
	300	9.6
	1000	32.1
	$3333(1/3 h_F)$	106.9

Tab. 3 Fehler der Erdkrümmungskorrektur strenger Senkrechtaufnahmen bei Vernachlässigung der Geländehöhen

Tabelle 4 zeigt andererseits die Fehler der Erdkrümmungskorrektur bei Vernachlässigung der Bildneigung, ebenfalls für Weitwinkelaufnahmen. Im Gegensatz zu Tabelle 3 wird hier nur flaches Gelände mit Höhe Null angenommen. Der betrachtete Bildpunkt liegt wiederum in der Bildecke, $r' = 141 \text{ mm}$.

Flughöhe in km	Bildmaßstab 1:	Korrekturfehler in μm bei Bildneigung			
		1^g	2^g	3^g	4^g
1	6667	0.5	0.9	1.4	2.0
5	33333	2.3	4.8	7.2	10.1
10	66667	4.6	9.7	14.4	20.3

Tab. 4 Fehler der Erdkrümmungskorrektur für flaches Gelände bei Vernachlässigung der Bildneigung

Bei Bildneigung $\neq 0$ haben einander radialsymmetrisch im Bild gegenüberliegende Punkte im einzelnen ungleiche Korrekturfehler. In Tabelle 3 sind jeweils nur die Maximalfehler angegeben.

Bei Bildneigungen ungleich null sind die Korrekturfehler stark von der Flughöhe und dem Betrag der Bildneigung abhängig. Bei sehr niedrigen Flughöhen < 1000 Meter, kann die Bildneigungskorrektur ohne weiteres vernachlässigt werden. Aber schon bei mittleren Flughöhen können größere vernachlässigte Bildneigungen Korrekturfehler verursachen, die für höhere Genauigkeitsansprüche nicht mehr zu vernachlässigen sind. (Z.B. $7 \mu\text{m}$ bei 3^g Bildneigung und 5 km Flughöhe.) Für noch größere Flughöhen verursacht die Vernachlässigung der Bildneigung in der Erdkrümmungskorrektur selbst bei kleinen Bildneigungen nicht vernachlässigbare Fehler. Bei gleicher Bildneigung wächst der Korrekturfehler etwa linear mit der Flughöhe.

FINSTERWALDER hat nach einer anderen Überlegung ebenfalls Korrekturfehler der Erdkrümmungskorrektur errechnet [3]. Dabei geht er nicht von einer strengen Grundformel wie (28) aus sondern nimmt an, daß die Korrekturfehler nur durch die fälschliche Verwendung des Hauptpunkts anstelle des Bildnadirs als Zentralpunkt verursacht sind. Dabei wird vernachlässigt, daß die Berechnung der Erdkrümmungskorrektur bei geneigten Bildern einer anderen Beziehung folgt als bei Nadiraufnahmen.

Für die Berechnungen zu Tabelle 4 wurden hier die Korrekturfehler streng so definiert, wie die Fragestellung tatsächlich lautet, nämlich als Differenz zwischen einem geneigt aufgenommenen aber streng nach (28) korrigierten Bild und demselben, jedoch nach Gl. (36) bzw. (37) vereinfacht korrigierten Bild. Die Unterschiede zwischen den von FINSTERWALDER angegebenen und den streng berechneten Korrekturfehlern sind sehr gering. Bei 10 km Flughöhe und 4^g Bildneigung erreicht die Differenz erst $3 \mu\text{m}$. Für kleinere Flughöhen und Bildneigungen werden die Unterschiede zwischen den beiden Berechnungen unbedeutend. Die in Tabelle 4 angegebenen Beträge unterscheiden sich hauptsächlich deshalb von den Angaben FINSTERWALDERS in [3], weil der dort betrachtete Bildpunkt in der äußersten Bildecke liegt, $r' = 163 \text{ mm}$.

Es muß nochmals darauf hingewiesen werden, daß die "strenge" Erdkrümmungskorrektur der photogrammetrischen Bildkoordinaten der Bilder eines Bildverbandes iterativ angenähert werden müßte, weil sie die Kenntnis der äußeren Orientierung und der Objektkoordinaten verlangt, die vor der Aerotriangulation nicht vorhanden ist.

Selbst nach der vorläufigen Aerotriangulation verfügt man wegen des Bezugs auf ein geodätisch abgebildetes (Landes-)Koordinatensystem auch nicht unmittelbar über die in Gl. (28) benötigten linearen kartesischen Objektkoordinaten, so daß auch theoretisch eine streng richtige Erdkrümmungskorrektur nicht vorliegt. Da aber die Erdkrümmungskorrektur selber wie schon erwähnt nur eine Näherungslösung des allgemeineren Problems der geodätischen Abbildung darstellt und die zusätzliche Vernachlässigung unwesentlich ist, werden in der Praxis die Objektkoordinaten $(X-X_0)$ und $(Y-Y_0)$ durch ihre aus der Ausgleichung erhaltenen geodätischen

Landeskoordinaten und die (Kugel-)Höhen Δh durch die entsprechenden Z-Koordinaten ersetzt. Der dadurch eingeführte zusätzliche Korrekturfehler bleibt bis zu einer Flughöhe von 10 km für Weitwinkelaufnahme kleiner als 1/2 Mikron im Bild.

II.2.4.2 Erdkrümmungskorrektur am photogrammetrischen Modell

Da ein photogrammetrisches Modell dem ursprünglichen Objekt geometrisch ähnlich

ist, ist die Erdkrümmungskorrektur bei ihm im Prinzip nichts anderes als eine

gewöhnliche geodätische Abbildung von rechtwinkligen kartesischen Koordinaten in das System der Landesvermessung. Theoretisch ist jede geodätische Abbildung für die Erdkrümmungskorrektur des Modells geeignet. Aber in der Praxis verwendet man des Rechenaufwandes wegen nur die einfachsten Korrekturen. Somit bieten sich wiederum rein geometrische Projektionen auf eine Tangentialebene als Lösung an. Es kann z.B. die im vorigen Abschnitt beschriebene orthogonale Parallelprojektion oder eine Zentralprojektion Verwendung finden. Für konventionelle Anwendungen wird das von einem Modell bedeckte Gebiet kaum die Größe von 1000 km^2 überschreiten. Wie sich zeigen wird, unterscheidet sich innerhalb eines derartigen Ausschnitts das Ergebnis beider Projektionen praktisch nicht.

Im folgenden werden die Korrekturformeln für die Parallel- als auch die Zentralprojektion der Erdoberfläche bzw. des Modells auf eine Tangentialebene abgeleitet.

Um die Korrekturbeträge möglichst klein zu halten, lassen wir die als Projektionsebene dienende Tangentialebene etwa in der Mitte des vom Modell bedeckten Gebiets mit der Erdkugel berühren. Im Modell existiert dann ebenfalls eine entsprechend zugeordnete Tangentialebene. Auf dieser Ebene kann ein neues kartesisches Modellkoordinatensystem dadurch definiert werden, daß der Koordinatenursprung im Berührungspunkt der Tangentialebene liegen und die Z-Achse nach oben positiv senkrecht auf dieser Tangentialebene stehen soll. Die X-Achse kann in dieser Ebene eine beliebige Richtung haben. Dieses kartesische Koordinatensystem wird im folgenden als Tangentialsystem bezeichnet. Es ist immer möglich die ursprünglichen kartesischen Modellkoordinaten mittels einer Ähnlichkeitstransformation ins Tangentialsystem zu transformieren und dabei in den Maßstab des ursprünglichen Objekts zu gehen.

Bezeichnen wir nun die Koordinaten eines Modellpunkts im Tangentialsystem mit X, Y, Z bzw. nach der Erdkrümmungskorrektur mit X', Y', Z' , so stellen die Differenzen

$$dX = X - X'$$

$$dY = Y - Y'$$

$$dZ = Z - Z'$$

die Erdkrümmungskorrekturen dar (im jeweiligen Modell- oder Geländemaßstab).

Sowohl bei der zentralen als auch der Parallelprojektion auf die Tangentialebene sind die Verhältnisse radialsymmetrisch zum Berührungspunkt. Es genügt also zur Darstellung der Erdkrümmungskorrektur, eine radiale Vertikalebene zu betrachten.

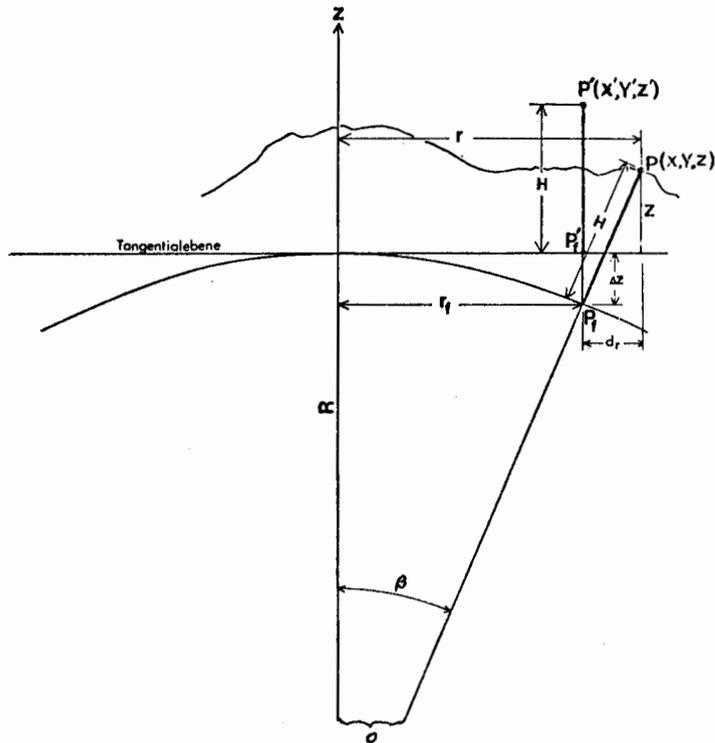


Bild 22 Erdkrümmungskorrektur eines Modells durch orthogonale Parallelprojektion auf die zentrale Tangentialebene

Bild 22 stellt für eine radiale Vertikalebene die Entkrümmung des Modells, d.h. die Transformation des Modellpunktes $P(X, Y, Z)$ nach $P'(X', Y', Z')$ durch orthogonale Parallelprojektion der Kugel auf die Tangentialebene dar. Die der Erdkugel im Modell entsprechende Kugel hat den Radius R . Wenn das Modell auf den Maßstab 1:1 transformiert würde, ist R gleich dem mittleren Erdradius am Berührungspunkt der Tangentialebene. Der Punkt P hat die Höhe H über seinen Lotfußpunkt P_f auf der Kugel. Der Abstand des Modellpunktes P von der Z -Achse des Tangentialsystems P ist r , der entsprechende Abstand des Fußpunktes P_f ist r_f .

P' hat die gleichen X - und Y -Koordinaten wie der Fußpunkt P_f von P , so daß für P' auch der Abstand r_f zur Z -Achse des Tangentialsystems gilt. Es ist also

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad r_f = \sqrt{X'^2 + Y'^2}$$

Wir bezeichnen die Lagekorrektur in der Radialrichtung mit dr und die X - und Y -Komponenten mit dX und dY , so daß

$$dr = \sqrt{dX^2 + dY^2} = r - r_f$$

Aus Bild 22 ist abzulesen

$$dr = (Z + \Delta Z) \tan \beta$$

Das von einem Modell bedeckte Gebiet ist stets klein genug, um $\tan\beta$ durch die Näherung

$$\tan\beta \approx \frac{r}{R}$$

und ΔZ durch die Näherung

$$\Delta Z \approx \frac{r^2}{2R} \approx \frac{r^2}{2R}$$

ersetzen können. Damit wird

$$dr = \left(Z + \frac{r^2}{2R} \right) \frac{r}{R} \quad (38a)$$

Diese Formel gibt den Betrag der Erdkrümmungskorrektur in der Radialrichtung an. Für die Korrekturkomponenten in X- und Y-Richtung erhält man mit

$$\cos A = \frac{X}{r} \quad \text{und} \quad \sin A = \frac{Y}{r}$$

$$dX = dr \cdot \cos A = \frac{Z \cdot X}{R} + \frac{(X^2 + Y^2) \cdot X}{2R^2} \quad (38b)$$

$$dY = dr \cdot \sin A = \frac{Z \cdot Y}{R} + \frac{(X^2 + Y^2) \cdot Y}{2R^2} \quad (38c)$$

Der Punkt P' erhält definitionsgemäß die Höhe H über der Tangentialebene, d.h. $Z' = H$. Nach Bild 22 ist

$$H = \overline{P P'_f} = (Z + \Delta Z) \sec\beta$$

oder mit $\sec\beta \approx 1$

$$H = Z + \frac{r^2}{2R}$$

Somit vereinfacht sich die Korrektur der Z-Koordinaten mit

$$dZ = Z' - Z = \frac{r^2}{2R}$$

oder

$$dZ = \frac{(X^2 + Y^2)}{2R} \quad (38d)$$

auf die Erdkrümmung selbst, d.h. den Unterschied zwischen Tangentialebene und Kugel.

Die Gl. (38b), (38c), (38d) stellen zusammengenommen die Erdkrümmungskorrektur für die Modellkoordinaten X, Y, Z für den Fall der orthogonalen Parallelprojektion der Kugel auf die Tangentialebene dar.

Für die Erdkrümmungskorrektur durch zentrale Projektion der Bezugskugel auf die Tangentialebene zeigt Bild 23 in gleicher Weise die Verhältnisse in einen radialen Vertikalschnitt durch den Berührungspunkt der Tangentialebene. Der Fußpunkt P_f von P wird nicht wie vorher orthogonal sondern zentral von der Kugelmittle 0 aus nach P'_f in die Tangentialebene projiziert. Die Höhe H wird darauf senkrecht über P'_f aufgetragen und ergibt den korrigierten Punkt P' .

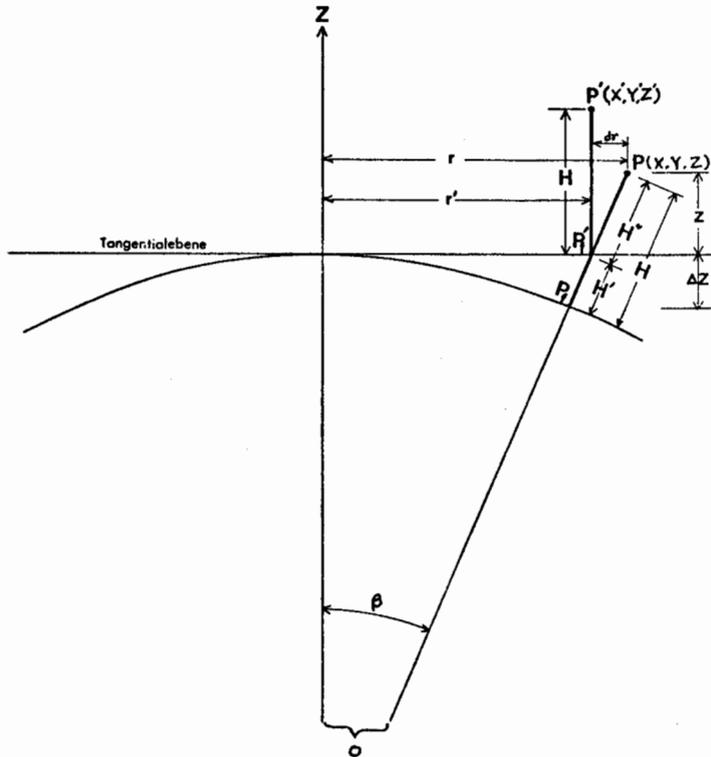


Bild 23 Erdkrümmungskorrektur eines Modells durch Zentralprojektion auf die Tangentialebene

Bezeichnet r' den Abstand von P' zur Z -Achse des Tangentialsystems, so ist

$$r' = r - dr$$

mit

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad r' = \sqrt{X'^2 + Y'^2} \quad dr = \sqrt{dX^2 + dY^2}$$

Nach Bild 23 ist

$$\frac{dr}{Z} = \frac{r - dr}{R}$$

und somit

$$dr = \frac{Z \cdot r}{R + Z}$$

Nach der Einführung des Richtungswinkels des radialen Vertikalschnitts erhält man (ähnlich wie oben für die orthogonale Parallelprojektion) als Erdkrümmungskorrektur der Lagekoordinaten

$$dX = \frac{Z}{R + Z} \cdot X \quad (39a)$$

$$dY = \frac{Z}{R + Z} \cdot Y \quad (39b)$$

Nach Bild 23 ist weiterhin

$$H = H' + H'' = (Z + \Delta Z) \sec \beta$$

was sich wegen des kleinen Öffnungswinkels β

$$\text{mit } \beta \approx \frac{r}{R} \quad \text{bzw.} \quad \sec \beta \approx 1$$

$$\text{auf } H = Z + \frac{r^2}{2 \cdot R}$$

$$\text{und } dZ = Z' - Z = H - Z = \frac{x^2 + y^2}{2R} \quad (39c)$$

vereinfacht.

Vergleicht man (38) mit (39), stellt sich heraus, daß die Korrektur der Z-Koordinaten bei beiden Projektionen identisch ist. Die Korrekturformeln für die Lagekoordinaten sind zwar bei den beiden Projektionen unterschiedlich, aber die Korrekturbeträge sind für alle praktischen Fälle fast gleich. Bei einem Modell z.B. aus Oberweitwinkel-Aufnahmen ($c = 85 \text{ mm}$) aus 10 000 Metern Flughöhe beträgt der Unterschied zwischen beiden Korrekturverfahren für einen Punkt in der Modellecke bei einer extremen Geländehöhe von $1/3$ der Flughöhe nur 4 cm im Gelände oder $0.4 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab. Beide Projektionsverfahren sind also für die praktische Anwendung identisch.

In dem bei der Untersuchung verwendeten Rechenprogramm PAT-M43 für die Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen ist eine Korrekturmöglichkeit der Erdkrümmung nach den folgenden Beziehungen vorgesehen:

$$dX = \frac{Z \cdot X}{R}$$

$$dY = \frac{Z \cdot Y}{R}$$

$$dZ = \frac{(X^2 + Y^2)}{2R}$$

Diese Korrektur ist für dZ identisch mit (39c) und stellt für dX und dY eine Näherung der Korrekturen (39a) und (39b), wobei die Höhenkoordinate Z jeweils in dem im Nenner stehenden Ausdruck $(R+Z)$ vernachlässigt ist. Selbst für das oben angeführte extreme Beispiel macht die zusätzliche Vernachlässigung nur 1 cm im Gelände aus, ist also völlig unwesentlich.

Der Kugelradius R braucht in den Korrekturformeln nicht sehr genau angesetzt zu werden. Ein Fehler im Krümmungsradius R verursacht nur eine gleichmäßige Maßstabsänderung des gnazen Modells, die durch den Maßstabsfreiheitsgrad der Ähnlichkeitstransformation aufgefangen wird und somit keinen Einfluß auf die Genauigkeit der späteren Aerotriangulation hat.

II.3 Konzeption und Realisierung der Untersuchung

II.3.1 Zur Methode der Untersuchung

Das geodätisch abgebildete Landeskoordinatensystem als übergeordnetes Koordinatensystem in der Aerotriangulation ist nicht mit der photogrammetrischen Objektrekonstruktion und den dabei verwendeten kartesischen Koordinatensystemen kompatibel. Die resultierenden Widersprüche werden von den in der Praxis verwendeten vereinfachten mathematischen Rechen- und Ausgleichungsmodellen der Aerotriangulation fälschlich als Beobachtungsfehler behandelt und verursachen zusätzliche Verbesserungen in der Ausgleichung und eine Verzerrung ihrer Ergebnisse.

Die Verzerrungen der geodätischen Abbildung selbst sind leicht theoretisch aus den Abbildungsgleichungen zu errechnen. Aber die Tatsache, daß sie in der Aerotriangulation als zufällige Fehler behandelt werden, erschwert die direkte Feststellung der durch sie verursachten zusätzlichen Fehler in der Aerotriangulation. Denn diese zusätzlichen Fehlerwirkungen sind nicht nur von der Größe der geodätischen Verzerrungen abhängig, vielmehr geben sie mit der Geometrie des Ausgleichungssystems und den dazu gehörenden Annahmen über das stochastische Modell eine Wechselwirkung und treten im Endergebnis in reduzierter, im einzelnen nicht ohne weiteres vorhersehbarer oder abschätzbarer Weise in Erscheinung.

Es sind also zwei verschiedenartige Gruppen von Faktoren, die die Genauigkeit der Aerotriangulation unter dem Einfluß der geodätischen Abbildung bestimmen. Die erste Gruppe bilden geodätische Faktoren, die völlig unabhängig von der photogrammetrischen Struktur des Bildverbands nur die Ursache, die Art und die Größe der geodätischen Verzerrungen des Gebiets bestimmen. Die zweite Gruppe umfaßt dann alle anderen Faktoren, die den Aufbau des Ausgleichungssystems bestimmen. Wir können sie kurz als photogrammetrische Faktoren kennzeichnen.

Zur Gruppe der geodätischen Einflußfaktoren gehören im wesentlichen: 1. die Definition der vom Landessystem verwendeten geodätischen Abbildung, 2. die Lage des Gebiets in der Abbildungszone und 3. die Besonderheiten (Form, Größe, Höhenunterschiede usw.) des Gebiets.

Die wichtigsten photogrammetrischen Einflußfaktoren sind: 1. das Funktionsmodell der Aerotriangulation, 2. die Größe des photogrammetrischen Blocks im Sinne der Anzahl der beteiligten Bilder, 3. die Anordnung der Paßpunkte, 4. der Bildmaßstab, 5. die Verknüpfungen zwischen Bildern oder Modellen, 6. die Überdeckungsverhältnisse, 7. die Bildneigungen und 8. das Gewichts- und Korrelationsmodell der Beobachtungen.

Es gibt so viele Kombinationsmöglichkeiten der verschiedenen Faktoren, daß es praktisch nicht möglich ist, die von der geodätischen Abbildung verursachten zusätzlichen Fehler in der Aerotriangulation in allen Kombinationen durch theoretische Untersuchungen festzustellen. Dagegen bildet die numerische Simulation ein geeignetes Mittel, um durch eine Serie konkreter Fallberechnungen die Wirkungen der verschiedenen Einflußfaktoren exemplarisch zu ermitteln, um daraus

in der Zusammenschau die dominierenden Gesetzmäßigkeiten abzuleiten. Die Simulation wird sich jeweils auf einen Ausschnitt der Erdoberfläche im Objektraum erstrecken, von dem wiederum photogrammetrische Aufnahmen nach den Bedingungen der vorher gewählten photogrammetrischen Faktoren simuliert werden. Andererseits kann man dieses Stück Erdoberfläche nach den bekannten Beziehungen für das jeweilige Landesvermessungssystem geodätisch abbilden. Wir haben dann für das Stück Erdoberfläche einmal die nicht verzerrten ursprünglichen Objektkoordinaten und einmal die geodätisch abgebildeten Landeskoordinaten. Wenn wir nun mit den simulierten Bildern und jeweiligen Paßpunkten die Aerotriangulation einmal in dem nicht verzerrten ursprünglichen Objektkoordinatensystem und einmal in dem geodätisch abgebildeten Landeskoordinatensystem durchführen, bekommen wir zwei verschiedene Ergebnisse. Da sonstige Fehlereinflüsse nicht eingeführt sind, zeigt der Unterschied dann für den berechneten Fall unmittelbar und genau die Fehlerwirkung der geodätischen Abbildung. Diese durch die geodätischen Verzerrungen verursachten Fehler der Aerotriangulation überlagern in praktischen Fällen die Wirkungen der anderen Fehlerquellen.

Mit der Simulation kann man also den auf der geodätischen Abbildung beruhenden Fehleranteil für den jeweiligen Einzelfall einer Aerotriangulation feststellen. Wenn ausreichend viele Fälle möglicher Kombinationen der verschiedenen Faktoren simuliert sind, ist zu erwarten, daß daraus allgemeine Aussagen über den Einfluß der geodätischen Abbildung bei verschiedenen Situationen abgeleitet werden können. Diese Aussage für die wichtigsten Einflußfaktoren zu gewinnen ist das Hauptziel dieser Untersuchung.

II.3.2 Festlegung und Beschränkung der Simulationsfälle

Aus Aufwandsgründen ist es geboten, die Simulation möglichst auf repräsentative Fälle zu beschränken. Die dominierenden Faktoren müssen also isoliert und dann in einer repräsentativen Reihe behandelt werden. Bei den weniger einflußreichen Faktoren genügt die Berechnung einiger in der Praxis wichtiger Fälle. Dementsprechend werden die photogrammetrischen und die geodätischen Faktoren wie folgt ausgewählt bzw. eingeschränkt:

Für die geodätischen Faktoren:

1. Geodätische Abbildung für das Landeskoordinatensystem

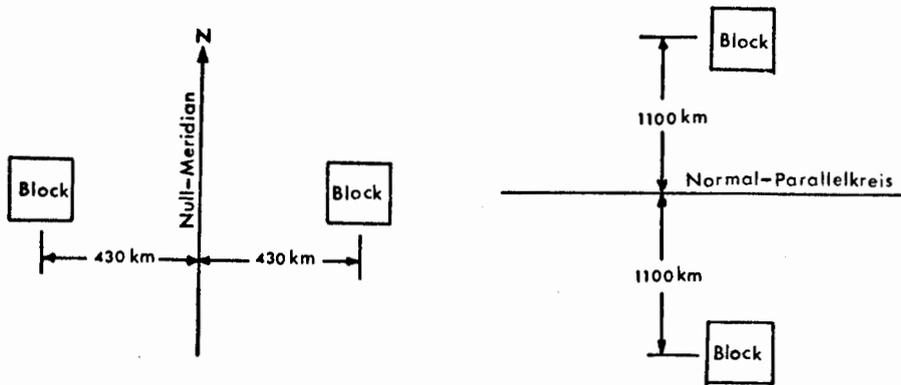
Die meisten Länder verwenden heute nur noch konforme Abbildungen für ihre Landeskoordinatensysteme und zwar entweder die Gauß-Krüger Abbildung (UTM ist eine Variation der Gauß-Krüger Abbildung), die Lambert Abbildung oder stereographische Abbildung. Die Untersuchung bezieht sich im wesentlichen auf diese drei Abbildungen. Um jedoch auch eine nicht konforme Abbildung zu betrachten, wird die ordinatentreue Abbildung des Ellipsoids zum Vergleich einbezogen.

2. Lage des Blocks

Als mittlere Blocklage auf dem Ellipsoid wird 50° N Breite gewählt. Da die geodätischen Verzerrungen und damit die Genauigkeit der Aerotriangulation hauptsächlich von der relativen Lage zu dem jeweiligen Bezugsmeridian, Bezugsparallel-

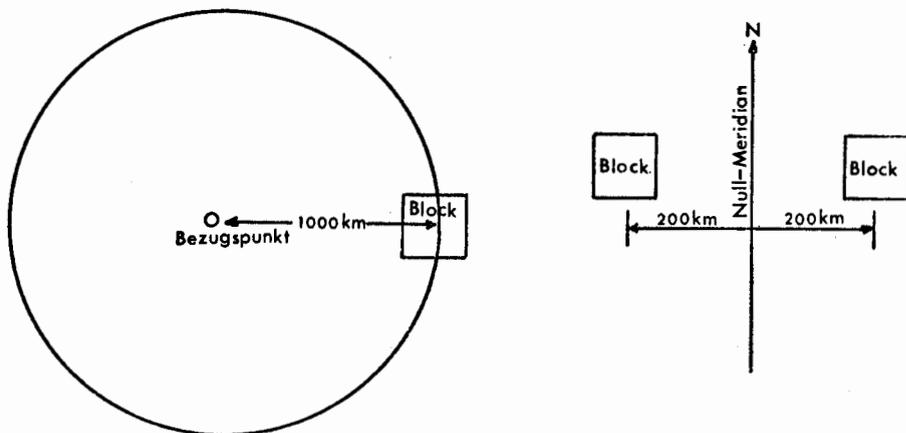
kreis oder Bezugspunkt der Abbildung aber wenig von der absoluten Lage auf dem Ellipsoid bestimmt sind, kann die Wahl der absoluten Blocklage ziemlich willkürlich sein, außer vielleicht am Pol und am Äquator, wo für einige Abbildungen extreme Verhältnisse herrschen.

Für die relative Blocklage in der Abbildungszone wurden folgende Bereiche gewählt (siehe Bild 24):



(a) Gauß-Krüger Abbildung

(b) Lambertsche Abbildung



(c) Stereographische Abbildung

(d) Ordinatentreue Abbildung

Bild 24 Bereiche der relativen Blocklage zu dem jeweiligen Bezugselement der geodätischen Abbildung

Für die Gauß-Krüger Abbildung liegt die Blockmitte innerhalb einer Zone von max. ± 430 km Ausdehnung zu beiden Seiten des Hauptmeridians. Dies entspricht etwa ± 6 Längengraden bei 50°N . Da sich die Gauß-Krüger oder verwandte Abbildungen in der Praxis höchstens auf ± 3 Grade erstrecken, ist der erfaßte Bereich mehr als ausreichend und schließt damit alle in der Praxis vorkommenden Fälle ein. Selbst das sogenannte Überzonenproblem, bei dem sich ein Block in die Nachbarzone hinein erstreckt, wird kaum diesen Bereich überschreiten.

Für die Lambertsche Abbildung wird ein Bereich von max. 10 Breitengraden nördlich und südlich vom Hauptparallelkreis gewählt, was einer Ausdehnung von ± 1100 km entspricht.

Für die stereographische Abbildung liegt die Blockmitte immer innerhalb eines Kreises mit 1000 km Halbmesser und dem Bezugspunkt als Mittelpunkt.

Für die nicht konforme ordinatentreue Abbildung liegt die Blockmitte jeweils max. 200 km östlich und westlich vom Hauptmeridian. Es wird sich zeigen, daß die ordinatentreue Abbildung sehr ungünstige Verzerrungseigenschaften hat. Bei noch größerem Abstand vom Hauptmeridian werden die Verzerrungen so groß, daß mit dieser Abbildung nicht mehr gearbeitet werden kann und sich eine Untersuchung erübrigt. Deshalb wird in der Landesvermessung die Systembreite der Abbildung ohnehin sehr klein gehalten. Sie ist z.B. im preußischen Katastersystem von 1879 auf einen Bereich von 60 km östlich und westlich vom Hauptmeridian begrenzt (vgl. z.B. [12]).

Da die genannten Bereichsbeschränkungen nur für die Blockmitte gelten, liegen die tatsächlichen Bereichsgrenzen jeweils noch um eine halbe Blockgröße weiter außen.

3. Blockform, Blockgröße und Geländebeschaffenheit

Je nach dem Bildmaßstab reicht die max. Blockgröße bei quadratischen Blöcken etwa bis 300 x 300 km, bei nicht quadratischen Blöcken bis 450 km Länge. Damit sind die meisten der in der Praxis vorkommenden Blockgrößen erfaßt. Da von den Ergebnissen dieser Blockgrößen auf noch größere Blöcke extrapoliert werden kann, werden die behandelten Fälle als ausreichend betrachtet.

Obwohl die Höhenkoordinaten im abgebildeten Landeskoordinatensystem nach unserer Definition der geodätischen Abbildung (Gl. (4), II.1.2) nicht verzerrt sind, haben sie jedoch wegen der Umbildung divergierender Ellipsoidnormalen in senkrechte Parallelen im Landeskoordinatensystem doch einen sekundären Einfluß auf die gesamte Verzerrung eines Gebiets. Je nach ihrer Höhe wird z.B. eine horizontale Strecke im Landeskoordinatensystem unterschiedliche Länge bekommen. Für die Aerotriangulation hat die absolute Höhe des Geländes allerdings keine Bedeutung, sondern nur der relative Höhenunterschied innerhalb eines von einem Bild bedeckten Gebiets. Die sicher kleinen Fehlereffekte der Höhenunterschiede brauchen nicht im einzelnen untersucht zu werden. Die Maximaleffekte zeigen sich jedenfalls an den Projektionszentren in vollem Umfang. Es wird deshalb "ebenes" Gelände mit der Höhe Null angenommen. Bei den Projektionszentren, die ja den maximal möglichen Höhenunterschied verkörpern, werden Effekt und Korrektur jedoch streng berücksichtigt.

Für die photogrammetrischen Faktoren wurden folgende Festlegungen getroffen:

4. Paßpunktanordnung

In den Simulationen wird bezüglich der Anordnung der Lagepaßpunkte ausschließlich die in der Praxis bewährte Randbesetzung benützt. Ebenso werden Höhenpaßpunkte grundsätzlich in der üblichen Weise in Form von Ketten quer zur Flugrichtung angeordnet, wobei die Paßpunkte jeweils im gemeinsamen Überdeckungsgebiet zum benachbarten Streifen liegen.

Um zunächst den absoluten Einfluß der geodätischen Verzerrung möglichst groß in Erscheinung treten zu lassen, werden als Minimalanordnung die vier Blockecken mit Lagepaßpunkten besetzt. Entsprechend bilden Paßpunktketten an beiden Stirnseiten des Blocks die Minimalanordnung für Höhenpaßpunkte¹⁾. Diese Grundanordnungen werden als Paßpunktversion I bezeichnet. Die Paßpunktversion II sieht zusätzlich 4 weitere Lagepaßpunkte jeweils in der Seitenmitte am Blockrand und eine weitere Höhenpaßpunktkette quer über die Blockmitte vor.

Einige andere Paßpunktanordnungen werden jeweils bei der Simulation beschrieben und nach der Anzahl der überbrückten Basislängen zwischen benachbarten Lagepaßpunkten bzw. nach der Überbrückungsdistanz zwischen benachbarten Höhenketten benannt.

5. Bildmaßstab und Kammerkonstante

Innerhalb eines Blocks wird keine Variation des Bildmaßstabs berücksichtigt. Im übrigen erstrecken sich die Simulationen auf einen Bildmaßstabsbereich von 1:80 000 bis zu 1:10 000 und erfassen somit die praktisch interessanten Fälle. Extrapolationen darüber hinaus sind zulässig.

Die Kammerkonstante hat bei den idealen Fehlerannahmen der Simulation keinen oder nur einen proportionalen Einfluß auf die Genauigkeit der Aerotriangulation, so daß es genügt, für die Bildsimulation 15 cm Brennweite und 23 x 23 cm² Bildformat zu wählen.

6. Verknüpfungspunkte

Bezüglich der Bildverknüpfung im Blockverband wird zunächst von dem Standardfall der einfachen Verknüpfung ausgegangen, bei dem jeweils 9 Verknüpfungspunkte im Bild an den üblichen Standardpositionen des 9-Punkt-Gitters mit 9 cm Maschenweite verwendet werden. Die einfache Verknüpfung wird dann zur 2-fachen Verknüpfung erweitert, wobei an den 9 Standardpositionen jeweils Doppelpunkte eingeführt werden, die in der Simulation jeweils dieselben Bildkoordinaten erhalten. Um den Fall der sogenannten starken Verknüpfung zu simulieren, wie er in der Katasterphotogrammetrie vorkommt, werden 2 weitere Fälle mit jeweils 5-fachen und 10-fachen Verknüpfungspunkten einbezogen. Der Einfachheit halber erhalten die Mehrfach-Verknüpfungspunkte jeweils die Position der 9 Standardpunkte. Da es hier nur um die systematischen Auswirkungen der geodätischen Abbildungsverzerrungen geht, ist diese Anordnung der Verknüpfungspunkte auch für den Fall der starken Verknüpfung hinreichend repräsentativ.

7. Oberdeckung

Für die Simulation der Bildüberdeckung wird der übliche Standardfall angenommen, mit $q = 60\%$ Längsüberdeckung und $q = 20\%$ Querüberdeckung. Auf die getrennte Behandlung des Falles mit 60 % Querüberdeckung wurde verzichtet, da seine Hauptwirkung der verstärkten Lageverknüpfung zwischen den Bildern durch oben eingeführte Vielfachverknüpfungspunkte im wesentlichen erfaßt ist. Der weitere Effekt der Höhenversteifung des Blocks durch 60 % Querüberdeckung ist in dieser Unter-

¹⁾ Da hier keine weiteren systematischen Fehler im Spiel sind ist diese Anordnung für die Untersuchung zulässig.

suchung unbedeutend, weil die Bilder und Modelle in der Simulation eine strenge Erdkrümmungskorrektur erfahren und somit bei dem angenommenen flachen Gelände keine Höhenwidersprüche zwischen den Triangulationsstreifen auftreten, die sich auf die Ausgleichung auswirken könnten.

8. Bildneigung

Für den hier ausschließlich interessierenden Fall der sogenannten Senkrechtaufnahmen bleibt bei den kleinen Bildneigungen ($\pm 3^\circ$) die Struktur des Ausgleichungssystems und damit die Genauigkeit der Aerotriangulation dieselbe wie bei strengen Senkrechtaufnahmen. Demnach werden in der Untersuchung die Bildneigungen ohne Einschränkung der Allgemeinheit stets gleich null angesetzt.

Wie bereits im Abschnitt II.2.4.1 erläutert wurde, können jedoch die Bildneigungen zusätzliche Fehler in der Aerotriangulation nach der Bündelmethode verursachen, wenn sie bei der Erdkrümmungskorrektur der Bilder nicht berücksichtigt werden. Da der Einfluß durch eine strengere Korrektur stets erfaßbar ist, braucht er hier nicht berücksichtigt zu werden. Bei der Aerotriangulation nach der Methode der unabhängigen Modelle dagegen bringt die Bildneigung keinen zusätzlichen Fehlereinfluß, da die Erdkrümmungskorrektur im Modell erfolgt.

9. Das stochastische Modell der Blockausgleichungen

In der Untersuchung werden für die Ausgleichung stets gleichgewichtige, unkorrelierte Bild- bzw. Modellkoordinaten als Beobachtungen verwendet. Damit entspricht das stochastische Modell der Blockausgleichungen gemäß der Zielsetzung der Untersuchung den in der Praxis üblichen Annahmen. Für das Gewichtsverhältnis zwischen den Lage- und Höhenkoordinaten der Projektionszentren wird bei der Methode der unabhängigen Modelle entsprechend das in der Praxis übliche Verhältnis von 4 zu 1 übernommen.

Zu den oben aufgelisteten Faktoren kann man feststellen, daß mit Blocklage und Blockgröße nur zwei geodätische Parameter und mit Paßpunktanordnung, Bildmaßstab und Verknüpfung nur drei photogrammetrische Faktoren die Wirkung der geodätischen Verzerrungen auf die Aerotriangulation wesentlich beeinflussen können und hier eingehend zu untersuchen sind. Die übrigen Faktoren werden einmal festgesetzt und bleiben in der ganzen Untersuchung unverändert.

II.3.3 Simulation der photogrammetrischen und der geodätischen Daten

Nach der Festlegung der geodätischen und photogrammetrischen Faktoren, können nun das Gelände und die entsprechenden photogrammetrischen Bilder bzw. Bildpunkte simuliert werden. Das Gelände soll durch ein regelmäßiges Feld von Objektpunkten dargestellt werden, deren Abbildungen jeweils die 9 Standard-Bildpunkte der photogrammetrischen Aufnahmen ergeben. Diese Objektpunkte werden zunächst durch die ellipsoidisch-geographischen Koordinaten Breite B, Länge L und Höhe H im Objektraum eindeutig festgelegt. Danach werden diese ellipsoidischen Koordinaten aller Objektpunkte des Geländes unter den im Einzelfall festgelegten Bedingungen geodätisch in ein Landeskoordinatensystem abgebildet, das dann später bei der Aerotriangulation das übergeordnete System bildet. Unter den angenommenen Bedingungen existieren so für jeden Objektpunkt seine wahren Landeskoordinaten.

Gemäß den festgelegten photogrammetrischen Bedingungen sind die äußeren Orientierungen aller Aufnahmen eines Bildverbands bestimmt. Mit Hilfe der perspektiven Beziehung der Gl. (18) in II.2.1 können somit die Geländepunkte in die photogrammetrischen Bilder rechnerisch abgebildet werden.

Damit hat man für alle Punkte des betreffenden Geländeausschnitts sowohl die wahren geodätisch abgebildeten Landeskoordinaten als auch die entsprechenden fehlerfreien photogrammetrischen Bildkoordinaten. Die Blockausgleichung kann damit für die jeweils vorgegebene Paßpunktanordnung durchgeführt werden.

Die Verwendung der Gl. (18) für die Simulation der photogrammetrischen Abbildung verlangt allerdings, daß die Geländepunkte in einem kartesischen System beschrieben sind. Man muß also das Gelände zunächst in irgend ein kartesisches System transformieren, dessen Wahl weitgehend beliebig ist. Weil es sich hier ausschließlich um strenge Senkrechtaufnahmen handelt, wird die Berechnung der photogrammetrischen Koordinaten nach (18) besonders einfach, wenn man für jedes Bild den entsprechenden Geländeausschnitt in einem eigenen Tangentialkoordinatensystem beschreibt, dessen Z-Achse mit der z-Achse des Bildkoordinatensystems zusammenfällt und dessen X- und Y-Achsen zu den entsprechenden Achsen des jeweiligen Bildkoordinatensystems parallel sind. Da es hier nur um die möglichst einfache Berechnung der Bildkoordinaten geht, ist die Verwendung eines jeweils dem einzelnen Bild angepaßten Objektkoordinatensystem zulässig. Somit vereinfacht sich Gl. (18) zu

$$\frac{x}{-c} = \frac{X}{-(h_F - Z)} \quad (40a)$$

$$\frac{y}{-c} = \frac{Y}{-(h_F - Z)} \quad (40b)$$

wobei h_F = Flughöhe über der Tangentialebene,
 X, Y, Z = Objektkoordinaten im Tangentialsystem,
 $x, y, -c$ = Bildkoordinaten der zugeordneten photogrammetrischen Aufnahme.

Die Transformation der ellipsoidischen Koordinaten in ein kartesisches Tangentialsystem mit dem Ursprung im Berührungspunkt $P_0(B_0, L_0, H_0)$ und mit den nach Bild 25 festgelegten Achsrichtungen lautet nach RINNER [4]:

$$\begin{aligned} X &= (N+H) \cos B \cdot \sin \Delta L \\ Y &= (N+H)(\sin B \cdot \cos B_0 - \sin B_0 \cdot \cos B \cdot \cos \Delta L) + D \cdot \cos B_0 \\ Z &= (N+H)(\sin B \cdot \sin B_0 + \cos B_0 \cdot \cos B \cdot \cos \Delta L) + D \cdot \sin B_0 - (N_0 + H_0) \end{aligned} \quad (41)$$

wobei

$\Delta L = L - L_0$, der Längenunterschied des Objektpunktes zum Ursprung,
 $D = e^2(N_0 \sin B_0 - N \cdot \sin B)$, mit e = Exzentrizität der Meridianellipse,
 B, L, H : die geographischen Koordinaten des zu transformierenden Punktes,
 N : der Querkrümmungshalbmesser an dem zu transformierenden Punkt,
 N_0 : der Querkrümmungshalbmesser an dem Ursprung P_0 des Tangentialsystems.

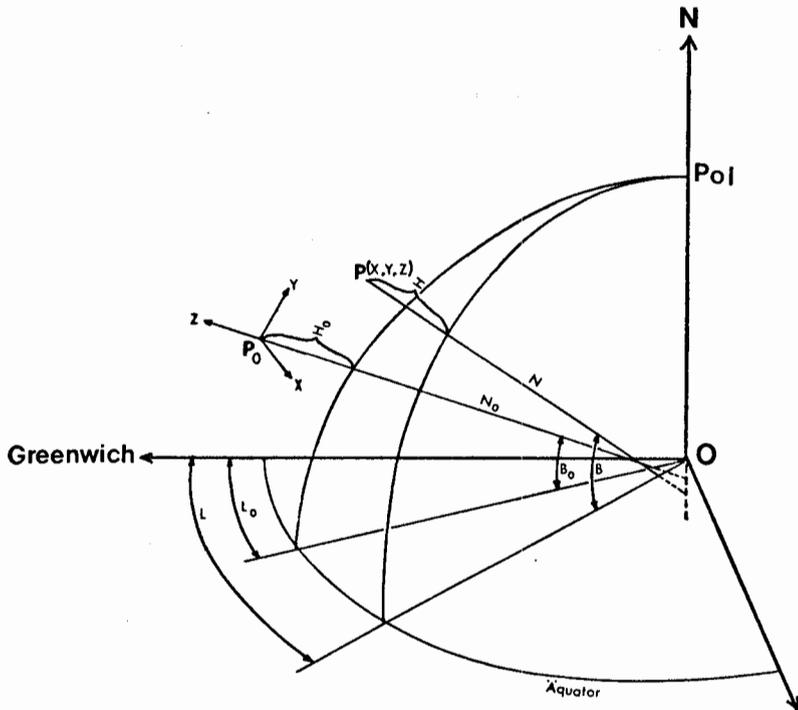


Bild 25 Zur Transformation ellipsoidischer geographischer Koordinaten (B,L,H) in ein kartesisches Tangentialsystem (X,Y,Z)

Für die Aerotriangulation mit unabhängigen Modellen können die Modelle, wenn sie nicht aus den Bildern mit Vorwegkorrektur der Erdkrümmung sondern analytisch aus den ursprünglichen Bildern bestimmt werden, direkt aus dem Gelände simuliert werden. Bei der Annahme völlig fehlerfreier Abbildungen entsprechen sich Modell und Gelände vollständig, so daß die Simulation der photogrammetrischen Modelle direkt die Geländekoordinaten des jeweiligen Tangentialsystems benutzen kann, ohne über die photogrammetrischen Abbildungen als Zwischenschritt gehen zu müssen, wie es bei tatsächlichen Aufnahmen der Fall wäre. Die Erdkrümmungskorrektur erfolgt erst bei Aerotriangulation. Bei der Simulation, Abbildung und Transformation der Geländekoordinaten werden jeweils mm-Einheiten im Gelände als letzte Stelle mitgeführt.

II.3.4 Blockausgleichungen mit den simulierten Daten; repräsentative Genauigkeitsmaße

Da von vornherein klar ist, daß Blockausgleichungen ohne Erdkrümmungskorrektur sehr große Fehlerbeträge ergeben und somit indiskutabel sind, werden für die Untersuchung die Bilder und Modelle wie im Abschnitt II.2.4 beschrieben bei bekannter äußerer Orientierung einer strengen Erdkrümmungskorrektur unterzogen, ehe die simulierten Daten in die Blockausgleichung eingehen. Diese Korrektur, die auch in der Praxis durch Iteration streng berücksichtigt werden kann, läßt hier die Wirkungen der geodätischen Abbildung, denen die eigentliche Untersuchung gilt, isoliert in Erscheinung treten.

Die Blockausgleichungen mit den simulierten Bild- bzw. Modellkoordinaten nach der Bündelmethode bzw. der Methode der unabhängigen Modelle liefern ausgeglichene Koordinaten der Objektpunkte, Orientierungsparameter der Bilder bzw. Modelle und Verbesserungen der als Beobachtungen geltenden Bild- bzw. Modellkoordinaten. Wie bereits ausführlich dargelegt, sind im Prinzip alle Größen verfälscht, da die Paßpunkte in nicht-systemkompatiblen Landeskoordinaten eingeführt werden. Unter den hier herrschenden idealen Annahmen der Simulation sind die Verfälschungen ausschließlich durch die Verzerrungen der geodätischen Abbildung verursacht. Sie äußern sich, wie ebenfalls bereits beschrieben, einmal in den Verbesserungen der Beobachtungen, d.h. in internen Spannungen der ausgeglichenen Blöcke. Diese internen Fehlerwirkungen werden repräsentativ beschrieben durch die jeweilige maximale Verbesserung und den quadratischen Mittelwert aller Verbesserungen bzw. der Größe σ_0 (mittl. Gewichtseinheitsfehler) der jeweiligen Ausgleichung. Zum zweiten zeigen sich die Fehlerwirkungen der geodätischen Verzerrung in den äußeren Verzerrungen der ausgeglichenen Geländepunkte, d.h. ihren Differenzen zu den wahren Landeskoordinaten. Auch diese äußeren Fehlerwirkungen werden durch den jeweiligen Maximalwert und den quadratischen Mittelwert der Koordinatenabweichungen repräsentativ beschrieben. Zusätzlich geben die Abweichungen der ausgeglichenen Orientierungsparameter der Bilder bzw. der Modelle von den bekannten wahren Werten Indikationen über die Verzerrung des Bild- oder Modellverbandes unter der Wirkung der geodätischen Abbildungsverzerrungen.

Um die Gegenüberstellung der inneren und der äußeren Fehlerwirkungen zu erleichtern, wird die x-Achse des photogrammetrischen Koordinatensystems nicht stets wie gewöhnlich in der Flugrichtung liegen, sie zeigt vielmehr immer positiv nach Norden, wie die X-Achse des Landeskoordinatensystems. Für Ost-West-Flugrichtung steht damit die x-Achse senkrecht zur Flugrichtung.

II.3.5 Weitere Anmerkungen zur Durchführung der Untersuchung

II.3.5.1 Genäherte Parallelität der Flugstreifen

Im photogrammetrischen Sprachgebrauch ist es üblich, die Streifen eines photogrammetrischen Blockes als parallel angeordnet zu betrachten. Sie werden meistens vor der Befliegung auf der Karte als parallele Linien aufgezeichnet. Wegen der geodätischen Verzerrung der Karte entsprechen ihnen jedoch keine parallele Linien auf dem Ellipsoid. Da es im allgemeinen Fall schwierig und in der Praxis nicht wesentlich ist, streng parallele Linien auf dem Ellipsoid anzuordnen, werden auch in dieser Untersuchung die Streifen gegebenenfalls nur genähert parallel sein. Der Einfachheit halber werden die Streifenachsen bei ost-westlichen Flugrichtungen auf Parallelkreise und bei nord-südlichen Flugrichtungen auf Meridiane gelegt. Das von einem Block bedeckte Gebiet ist dann immer an seinen nördlichen und südlichen Seiten von Parallelkreisen, an seinen östlichen und westlichen Seiten von Meridianen begrenzt. Da die Meridiane zum Pol konvergieren, hat das Gebiet, außer am Äquator, die Form eines gekrümmten Trapezes auf dem Ellipsoid (vgl. Bild 26). Für Gebiete in Polnähe gilt diese Fluganordnung nicht.

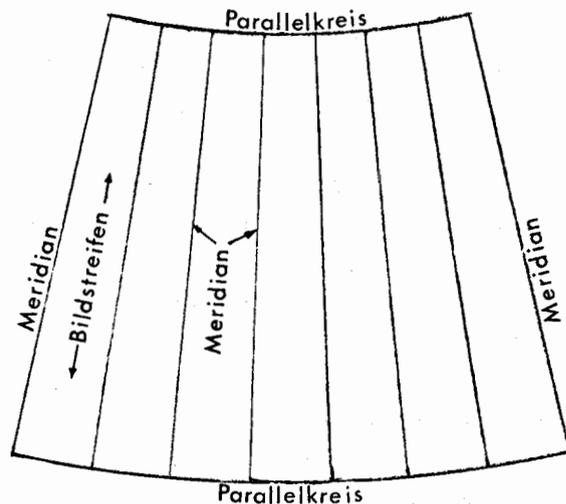


Bild 26 Trapezförmiges Gebiet eines aus "parallelen" Streifen bestehenden photogrammetrischen Blockes auf dem Ellipsoid; Beispiel Nord-Süd-Befliegung

Der nördliche Rand eines Blockes ist für die hier stets angenommene nördliche Hemisphäre immer etwas kürzer als der südliche Rand. In der schematischen Betrachtungsweise kann der Unterschied jedoch vernachlässigt werden. Er hat lediglich die Wirkung, daß die Bildpunkte in den photogrammetrischen Bildern kein Quadrat sondern genähert ein Trapez bilden. Bei 50° Breite und Bildmaßstab 1:80 000 ist die Maschenweite des 9-Punkt Gitters am nördlichen Bildrand um etwa $1/3000$ kürzer als am südlichen Bildrand.

II.3.5.2 Überprüfung der Rechenschärfe

Da der Fehlereinfluß der geodätischen Abbildung auf die Aerotriangulation voraussichtlich sehr gering sein wird, muß dafür Sorge getragen werden, daß die Ergebnisse nicht in der Ausgleichung durch die von der Rechenanlage und der Programmierungstechnik bedingte begrenzte Rechenschärfe oder durch die Abrundungsfehler der simulierten Daten verzerrt werden. Um die Größenordnung derartiger Verzerrungen zu bestimmen, werden die simulierten Daten zunächst durch eine geeignete Methode überprüft, ehe sie für die Untersuchung verwendet werden.

Für diese Untersuchung wurden die Rechenanlagen Control Data, CDC 6600 und CYBER 174 des Rechenzentrums der Universität Stuttgart verwendet. Beide haben 60 Bits normale Wortlänge. Die Simulation der Landeskoordinaten verschiedener Abbildungen wurde durch Rücktransformation in die geographischen Koordinaten überprüft, wobei die maximale Differenz kleiner als 0.1 mm im Gelände blieb. Da die Rundungs- oder Formelfehler der geodätisch abgebildeten Landeskoordinaten absolute Beträge sind und sich nicht im Block akkumulieren, bildet diese 0.1 mm Grenze eine völlig sichere Schranke für die Untersuchung, bei der die Einzelergebnisse nur bis Millimeter im Gelände ausgedruckt werden.

Die Rechenschärfe der simulierten photogrammetrischen Daten und der Blockausgleichungen wurde durch verzerrungsfreie Aerotriangulationen überprüft. Dabei wurden mit den auf dem Ellipsoid simulierten Bildern und Modellen Blockausglei-

chungen bezogen auf ein übergeordnetes kartesisches Koordinatensystem durchgerechnet. Da in diesem Fall keinerlei Widersprüche auftreten ist das Sollergebnis bekannt. Abweichungen gehen zu Lasten der Rechenschärfe.

Nach einer früheren Untersuchung im Rahmen einer Diplomarbeit [17] ist die Rechenschärfe des hier benützten PAT-M Programms für die Aerotriangulation mit unabhängigen Modellen an der oben genannten Rechenanlage CDC 6600 auch für extreme Fälle ausreichend. In dem extrem ungünstigen Fall einer Blockgröße von $500 \times 500 \text{ km}^2$ ¹⁾ und bei nur 2 Lagepaßpunkten und einer einseitigen Höhenkette und einem zusätzlichen Höhenpaßpunkt beläuft sich der maximale Lagefehler nur auf 7 mm im Gelände. Die durch das Programm und die Rechenanlage bedingte Rechenschärfe ist also mehr als ausreichend. Es brauchen somit nur noch die Abrundungsfehler der simulierten photogrammetrischen Koordinaten geprüft zu werden. Für das hier verwendete Bündelprogramm PAT-B liegt zur Zeit noch keine entsprechend eingehende Untersuchung der Rechenschärfe vor. Aber durch die genannte verzerrungsfreie Aerotriangulation mit bekanntem Sollergebnis wird die gemeinsame Auswirkung der Rechenschärfe des Rechenprogramms und der Rechenanlage und der Abrundungsfehler der simulierten Bildkoordinaten geprüft.

Die Bildkoordinaten werden in dieser Untersuchung bei allen Maßstäben immer auf $0.001 \mu\text{m}$ abgerundet. Dies entspricht bei dem kleinsten simulierten Bildmaßstab von 1:80 000 einem Betrag von 0.08 mm im Gelände. Die auf dem Ellipsoid wie erläutert direkt simulierten Modellkoordinaten werden stets auf 1 mm im Gelände abgerundet. Da die Blöcke schematisch aufgebaut sind, akkumulieren sich jedoch diese Abrundungsfehler in der Aerotriangulation und wirken wie systematische Modellfehler.

Die Prüfung der Rechenschärfe und der Abrundungsfehler wurde anhand des größten simulierten Blocks bei einer den ungünstigsten Fall darstellenden minimalen Paßpunktanordnung durchgeführt. Es wurden nur 2 Lagepaßpunkte, eine Höhenpaßpunktkette mit einem zusätzlichen Höhenpaßpunkt eingeführt. Der Block hat 20 Streifen mit je 41 Bildern bzw. 40 Modellen und überdeckt mit dem Bildmaßstab 1:80 000 eine Fläche von $300 \times 300 \text{ km}^2$.

Die Durchrechnung des widerspruchsfreien Blocks mit dem Programm PAT-M 43 für unabhängige Modelle ergab maximale Fehler im Gelände von 30 mm in der Lage und 23 mm in der Höhe bzw. $0.4 \mu\text{m}$ und $0.3 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab. Diese Fehler enthalten sowohl die durch das Rechenprogramm und die Rechenanlage bedingte Rechenschärfe als auch die Abrundungsfehler der simulierten Daten. Vergleicht man diese Fehlerbeträge mit denen der genannten Untersuchung [17], zeigt sich deutlich, daß die Fehler hauptsächlich durch die Akkumulation der Abrundungsfehler der simulierten Daten entstehen.

Die Fehlerbeträge von 30 mm bzw. 23 mm bilden aber die Maximalwirkung der Rechenschärfe im ungünstigsten Fall. Für die in dieser Untersuchung simulierten Aerotriangulationen, bei denen mehr Paßpunkte oder kleinere Blockgrößen ver-

¹⁾ 50 Streifen zu je 50 Modellen, beim Bildmaßstab 1:108 696.

wendet werden, sind die Fehlereffekte der Rechenschärfe und Abrundung viel kleiner. Sie werden in keinem Fall die $0.5 \mu\text{m}$ Grenze im Bildmaßstab überschreiten, so daß weitere Maßnahmen nicht erforderlich sind.

Die Durchrechnung des entsprechenden widerspruchsfreien Bündelblocks ergab einen maximalen Lagefehler von nur $0.1 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab bzw. 9 mm im Gelände und einen maximalen Höhenfehler von 15 mm im Gelände. Diese Werte sind dank des geringeren Abrundungsfehlers der Bildkoordinaten etwas günstiger als bei der Methode der unabhängigen Modelle. Da es sich wiederum um einen extrem ungünstigen Fall handelt können Abrundung und Rechenschärfe für die Bündelblockausgleichungen im Rahmen dieser Untersuchung als völlig ausreichend gelten. Es ist im übrigen wieder deutlich zu sehen, daß die wenn auch geringen Fehlerbeiträge im wesentlichen durch die Akkumulation der Abrundungsfehler entstehen.

III. DIE ERGEBNISSE DER UNTERSUCHUNG

III.1 Einfluß der geodätischen Abbildung auf die Einzelbilddauswertung

Bei der Einzelbilddauswertung handelt es sich um den räumlichen Rückwärtsschnitt, um die einfache (optische) Entzerrung oder um die differentielle Entzerrung. Da ein einzelnes Bild das räumliche Objekt nicht ohne Zusatzinformationen rekonstruieren kann, müssen in der Praxis die Geländehöhen bekannt sein oder bei der einfachen optischen Entzerrung alle Geländepunkte dieselbe Höhe haben.

Die differentielle Entzerrung ist bezüglich unserer Fragestellung eng mit dem räumlichen Rückwärtsschnitt verwandt. Die optische Entzerrung könnte ebenfalls darauf zurückgeführt werden, bleibt hier aber außer Betracht. Die folgende Untersuchung beschränkt sich daher anhand einiger simulierter Beispiele auf den Einfluß der geodätischen Abbildung beim räumlichen Rückwärtsschnitt.

Das von einem photogrammetrischen Bild bedeckte Gebiet auf dem Ellipsoid bei 50°N wird durch ein Punktraster von 5×5 Punkten dargestellt. Es wird flaches Gelände angenommen, so daß alle Punkte die ellipsoidische Höhe Null haben. Dieses Punktfeld wird einerseits durch perspektive Abbildung in eine photogrammetrische Senkrechtaufnahme mit Neigung Null abgebildet und andererseits durch die gegebene geodätische Abbildung in das Landeskoordinatensystem abgebildet. Somit haben wir für jeden der Geländepunkte sowohl die entsprechenden Bildkoordinaten als auch die fehlerfreien Landeskoordinaten. Die Bildkoordinaten werden zunächst direkt, ohne Erdkrümmungskorrektur, weiterverwendet.

Nachdem einige der 25 Punkte entsprechend der vorgegebenen Paßpunktversion als Paßpunkte ausgewählt sind, wird durch den räumlichen Rückwärtsschnitt die äußere Orientierung des Bildes im Landeskoordinatensystem errechnet. Danach können die Lagekoordinaten der übrigen Punkte durch Einsetzen ihrer Höhen (sie sind im Landeskoordinatensystem alle gleich null) in die Gleichungen (17) der perspektiven Abbildung berechnet werden. Die Abweichungen dieser Lagekoordinaten von ihren Soll-Werten im Landessystem stellen dann den Fehlereinfluß der geodätischen Abbildung auf die Einzelbilddauswertung dieses Punktfeldes dar. Das Punktraster repräsentiert dabei das ganze Gebiet hinreichend. Die Ergebnisse gelten auch für die Projektion eines Orthophotos.

Mit der Simulation der drei Bildmaßstäbe 1:10 000, 1:40 000 und 1:80 000 wird der für die konventionelle Photogrammetrie interessante Bereich erfaßt. Bei Maßstäben $> 1:10\ 000$ verschwindet der quadratisch abnehmende Einfluß der geodätischen Abbildung rasch. Die 25 Rasterpunkte sind nach Bild 27 angeordnet und numeriert. Der Praxis entsprechend haben die äußersten Punkte etwa 2.5 cm Abstand vom Bildrand, so daß das effektive Bildformat etwa $18 \times 18 \text{ cm}^2$ ist.

Da der Fehlereinfluß der geodätischen Abbildung mit der Gebietsgröße zunimmt, werden zum Vergleich mit der konventionellen Photogrammetrie noch zwei Satellitenbilder von SKYLAB simuliert. Der Satellit SKYLAB hatte mit S-190A und S-190B zwei Kameras mit 152 mm Brennweite und $57 \times 57 \text{ mm}^2$ Bildformat bzw. 460 mm Brennweite und $115 \times 115 \text{ mm}^2$ Bildformat an Bord. Bei der nominellen Bahnhöhe von 435 km überdeckt ein Bild von S-190A ein Gebiet von ca. $170 \times 170 \text{ km}^2$

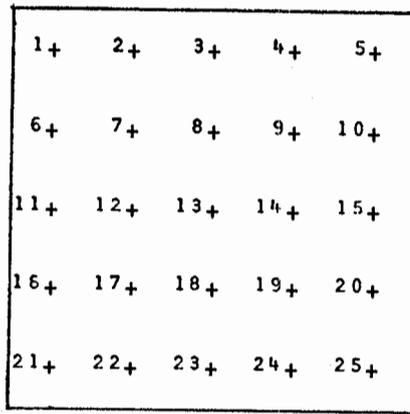
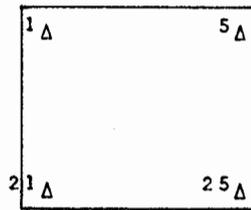
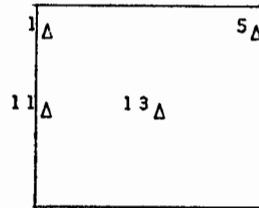


Bild 27 Anordnung und Numerierung des Punktfeldes für die Untersuchung der Einzelbilddauswertung



Version I



Version II

Bild 28 Anordnung der Paßpunkte für den räumlichen Rückwärtsschnitt

im Maßstab 1:2 900 000 bzw. ein Bild von S-190B bedeckt ein Gebiet von 109 x 109 km² im Maßstab 1:950 000. In den USA wurden die S-190A Bilder zur Herstellung von Bildplänen bis zum Maßstab 1:100 000 und die S-190B Bilder zur Kartenfortführung bis zum Kartenmaßstab 1:50 000 verwendet [5]. Auch für diese Bilder wird in der Simulation ein Punktfeld von 25 Rasterpunkten angenommen. Wegen des kleineren Bildformats wird jedoch die jeweils äußerste Punkteihe an den Bildrand gelegt.

Gemäß Bild 28 wurden zwei Paßpunktanordnungen ausgewählt. Die Version I mit vier Paßpunkten in den Bildecken entspricht der in der Praxis angestrebten günstigen Paßpunktverteilung. Die Version II mit ebenfalls vier Paßpunkten soll eine ungünstige Verteilung repräsentieren.

Da die Größe der geodätischen Verzerrungen nicht nur von der Art der Abbildung sondern noch von der Lage des Gebiets in der Abbildungszone abhängig ist, wurden für jede Abbildung das Gebiet einmal in die Mitte der Abbildungszone und in einer zweiten Simulation möglichst weit exzentrisch gelegt.

Die resultierenden Fehlereinflüsse der 4 geodätischen Abbildungen sind in den Tabellen 5 für die konventionellen photogrammetrischen Aufnahmen bzw. in den Tabellen 6 für die Satellitenaufnahmen zusammengestellt. Als charakteristische Fehlergrößen sind jeweils der quadratische Mittelwert (QMW) aller Lageabweichungen und der maximale Lagefehler (Max.) des Gebiets in Metern bezogen auf das Gelände bzw. in Klammern in µm bezogen auf den Bildmaßstab angegeben.

Abstand des Gebietes vom Bezug ¹⁾	Paßpunkt- version	B i l d m a ß s t a b					
		1:10 000		1:40 000		1:80 000	
		QMW	Max	QMW	Max	QMW	Max
Gauß-Krüger Abbildung (Bezug: Nullmeridian)							
0 km	I	0,03 (3)	0,04 (4)	0,49 (12)	0,68 (17)	1,98 (25)	1,74 (34)
	II	0,05 (5)	0,11 (11)	0,72 (18)	1,82 (45)	2,91 (36)	7,29 (91)
200 km	I	0,04 (4)	0,05 (5)	0,56 (14)	0,67 (17)	2,26 (28)	2,80 (35)
	II	0,05 (5)	0,12 (12)	0,73 (18)	1,83 (46)	2,94 (37)	7,35 (92)
Lambert Abbildung (Bezug: Normalparallelkreis)							
0 km	I	0,03 (3)	0,04 (4)	0,49 (13)	0,68 (17)	1,98 (25)	2,75 (34)
	II	0,05 (5)	0,11 (11)	0,72 (18)	1,82 (45)	2,91 (36)	7,30 (91)
1000 km	I	0,04 (4)	0,06 (6)	0,59 (15)	0,93 (23)	2,36 (30)	3,73 (47)
	II	0,04 (4)	0,12 (12)	0,71 (18)	1,85 (46)	2,85 (36)	7,43 (93)
Stereographische Abbildung (Bezug: Null-Punkt)							
0 km	I	0,03 (3)	0,04 (4)	0,49 (13)	0,68 (17)	1,98 (25)	2,74 (34)
	II	0,05 (5)	0,11 (11)	0,72 (18)	1,82 (45)	2,91 (36)	7,29 (91)
1000 km	I	0,03 (3)	0,05 (5)	0,53 (13)	0,72 (18)	2,11 (26)	3,17 (40)
	II	0,05 (5)	0,12 (12)	0,72 (18)	1,83 (46)	2,87 (36)	7,35 (92)
Ordinatentreue Abbildung (Bezug: Hauptmeridian)							
0 km	I	0,03 (3)	0,04 (4)	0,49 (13)	0,68 (17)	1,98 (25)	2,74 (34)
	II	0,05 (5)	0,11 (11)	0,72 (18)	1,82 (45)	2,91 (36)	7,29 (91)
1000 km	I	0,27 (27)	0,53 (53)	1,24 (31)	2,32 (29)	3,14 (39)	4,71 (59)
	II	0,49 (49)	0,92 (92)	2,34 (59)	4,77 (119)	5,88 (74)	12,78 (160)

Tab. 5 Mittlere (QMW) und maximale (Max) Fehlereinflüsse geodätischer Abbildungen beim räumlichen Rückwärtsschnitt, in Abhängigkeit von der Lage des Gebietes in der Abbildungszone, der Paßpunktversion und dem Bildmaßstab, für konventionelle photogrammetrische Weitwinkel-Bilder. Die Angaben sind in m auf das Gelände bzw. in (µm) auf den Bildmaßstab bezogen.

Abstand des Gebiets vom Bezug	Paßpunkt- version	Geodätische Abbildung							
		Gauß-Krüger		Lambert		Stereographisch		Ordinatentreu	
		QMW	Max	QMW	Max	QMW	Max	QMW	Max

SKYLAB S-190A Kamera, Bildmaßstab 1:2 900 000

0	I	90,89 (31)	127,22 (44)	101,31 (35)	118,25 (41)	101,03 (35)	122,00 (42)	90,81 (31)	126,70 (44)
	II	129,54 (45)	315,07 (107)	128,45 (44)	325,52 (112)	127,24 (44)	327,20 (113)	127,49 (44)	321,16 (111)
weit ¹⁾	I	106,24 (37)	143,21 (49)	180,06 (62)	308,97 (107)	119,52 (41)	189,48 (65)	105,06 (36)	158,61 (55)
	II	131,50 (45)	326,43 (113)	109,93 (38)	288,67 (100)	116,29 (40)	307,55 (106)	169,95 (59)	416,30 (144)

SKYLAB S-190B Kamera, Bildmaßstab 1:950 000

0	I	24,07 (25)	33,68 (35)	26,87 (28)	31,24 (33)	26,80 (28)	30,71 (32)	24,04 (25)	33,51 (35)
	II	33,26 (35)	83,11 (87)	34,12 (36)	86,36 (91)	33,76 (36)	85,19 (90)	33,76 (36)	84,91 (89)
weit ¹⁾	I	29,22 (31)	41,57 (44)	64,34 (68)	108,99 (115)	37,19 (39)	62,87 (66)	34,16 (36)	50,42 (53)
	II	35,73 (38)	88,62 (93)	35,37 (37)	89,88 (95)	32,01 (34)	85,92 (90)	60,33 (64)	140,14 (148)

¹⁾ entspricht jeweils dem weiten Abstand der betreffenden Abbildung gemäß Tab. 5

Tab. 6 Mittlere und maximale Fehlereinflüsse geodätischer Abbildungen beim räumlichen Rückwärtsschnitt, in Abhängigkeit von Gebietslage und Paßpunktversion für Aufnahmen mit den SKYLAB Kameras S-190A und S-190B

Bei zentraler Gebietslage sind die Ergebnisse für alle vier geodätischen Abbildungen identisch. Der mittlere Lagefehler beträgt beim Bildmaßstab 1:10 000 0.045 m im Gelände (oder 5 µm im Bild), beim Bildmaßstab 1:40 000 0.724 m (18 µm) und beim Bildmaßstab 1:80 000 2.905 m (36 µm). Im Bild wachsen die Fehlergrößen offenbar proportional, im Gelände quadratisch mit der Bildmaßstabszahl. Die Fehler sind bei günstiger Paßpunktanordnung in Orthophotokarten stets zu vernachlässigen.

Für alle drei konformen Abbildungen hat die Gebietslage fast keinen Einfluß auf die Genauigkeit der Einzelbilddauswertung. Der mittlere Lagefehler bleibt auch bei weit entfernter Gebietslage unverändert. Auch bei der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung verschlechtert sich die Genauigkeit mit zunehmender Entfernung des Gebiets vom Hauptmeridian nicht so schnell, daß die Genauigkeitstoleranzen von Orthophotokarten überschritten würden.

Die Ergebnisse der Satellitenbilder sind in den Tabellen 6 zusammengestellt. Hier zeigen wieder alle konformen Abbildungen gleiche Genauigkeit, die praktisch von der Gebietslage unabhängig ist. Bei günstiger Paßpunktbesetzung beträgt der mittlere Lagefehler bei den S-190A Bildern 31 µm im Bildmaßstab. Dieser Betrag entspricht im Maßstab 1:100 000 des Bildplans 0.9 mm. Bei S-190B Bildern beträgt

der mittlere Lagefehler bei günstiger Paßpunktbesetzung $25 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab, was 0.5 mm auf der Karte im Maßstab $1:50\ 000$ entspricht. Der Einfluß der geodätischen Abbildung ist also in beiden Anwendungsfällen nicht mehr zu vernachlässigen.

Verglichen mit den konventionellen Weitwinkelaufnahmen ist der Fehlereinfluß der geodätischen Abbildung bei den langbrennweitigen SKYLAB Bildern wesentlich geringer als nach der Größe der Geländeausschnitte zu erwarten gewesen wäre. Der schmale Öffnungswinkel der Bilder reduziert die Fehlerwirkungen, so daß in beiden Fällen die Fehler im Bild etwa mit denen der WW-Bilder des Maßstabs $1:80\ 000$ vergleichbar sind.

Die Erklärung für diese Zusammenhänge ist darin zu suchen, daß die Fehlerwirkungen zum größten Teil von der (nicht korrigierten) Erdkrümmung herrühren und nur zum verschwindenden Teil auf der geodätischen Abbildung beruhen. Damit wird auch die Abhängigkeit von dem Öffnungswinkel der Bilder verständlich. Diese Erklärung wird dadurch bestätigt, daß nach der Erdkrümmungskorrektur die verbleibenden Fehlerwirkungen in allen Fällen weniger als $2 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab betragen. Es kann somit abschließend festgestellt werden, daß nach der Erdkrümmungskorrektur die Fehlerwirkungen der geodätischen Abbildungen in allen Fällen praktisch vernachlässigbar klein sind.

III.2 Einfluß der geodätischen Abbildung auf die Einzelmodellauswertung

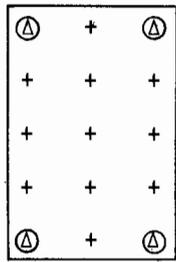
Die Einzelmodellauswertung gibt es in zwei Varianten: Die sogenannte Doppelpunkteinschaltung im Raum als simultane, einstufige Direktlösung und die sogenannte zweistufige Lösung, bei der das durch eine relative Orientierung gebildete Stereomodell anschließend absolut orientiert wird.

Im völlig widerspruchsfreien Fall liefern beide Lösungen die gleichen Ergebnisse. Im anderen Fall, wie er bei der Verwendung geodätisch abgebildeter Paßpunkte vorliegt, sind die Ergebnisse nicht identisch. Im folgenden wird nur der Fehlereinfluß der geodätischen Abbildung bei der zweistufigen Lösung untersucht.

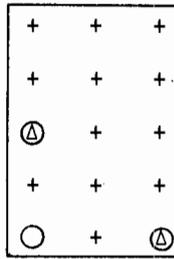
Jedes der beiden Bilder wird zunächst ohne Einbeziehung der Paßpunkte rechnerisch relativ orientiert. Da die Bilder fehlerfrei sind, ist das gebildete Modell frei von y -Parallaxen. Danach wird das Modell durch eine räumliche Ähnlichkeitstransformation absolut orientiert, d.h. an die vorgegebenen Paßpunkte bestmöglich angepaßt. Die Abweichungen der transformierten Modellkoordinaten von den Soll-Werten des geodätisch abgebildeten Landessystems stellen den Fehlereinfluß der geodätischen Abbildung dar. Zunächst ist dabei keine Erdkrümmungskorrektur berücksichtigt.

Wie im vorigen Abschnitt bei der Untersuchung von Einzelbildern wird das jeweils von einem Bild bedeckte Gebiet durch ein Feld von 5×5 Rasterpunkten repräsentiert. Das aus benachbarten Bildern mit 60% Überdeckung gebildete Modell enthält somit ein Feld von 5×3 Rasterpunkten. Je nach der vorgegebenen Paßpunktverteilung werden einige der 15 Punkte als Paßpunkte verwendet, die anderen dienen dann als Kontrollpunkte zur Beurteilung der Abweichungen von den Soll-Werten.

Wir wählen wiederum eine günstige und eine ungünstige Paßpunktanordnung, wie in Bild 29 angegeben.



Version I



Version II

Δ : Lagepaßpunkt
 \circ : Höhenpaßpunkt
+ : Kontrollpunkt

Bild 29 Die Paßpunktanordnungen für die absolute Orientierung des Einzelmodells

Um den Einfluß von der Lage des Modells in der Abbildungszone aufzuzeigen, werden hier wiederum jeweils eine zentrale und eine extreme Gebietslage simuliert.

Die sich ergebenden äußeren Verzerrungen des absolut orientierten Modells bezüglich dem Landessystem sind in den Tabellen 7a und 7b in Form von dem quadratischen Mittelwerte (QMW) und dem max. Werte (Max.) der Lage- und Höhenfehler der ausgewählten Punkte dargestellt. Die Angaben beziehen sich jeweils auf m im Gelände bzw. in Klammern auf μm im Bildmaßstab. Da es sich bestätigt hat, daß Höhe und Lage voneinander unabhängig sind, werden sie auch getrennt dargestellt.

Bei Betrachtung der Tabellen fällt auf, daß bei zentraler Gebietslage selbst bei ungünstiger Paßpunktversion die Lagefehler bei allen vier geodätischen Abbildungen und bei allen Bildmaßstäben mit Beträgen von $0.1 \mu\text{m}$ außerordentlich klein sind. Mit der Entfernung des Gebiets vom Bezug und mit abnehmendem Bildmaßstab d.h. zunehmender Gebietsgröße wachsen die Lagefehler zwar. Aber bei den drei konformen Abbildungen bleiben die Fehler innerhalb einer normalen Abbildungszone noch so gering, daß sie in jedem Falle noch völlig vernachlässigbar sind. Für einen 6 Grad breiten Streifen der Gauß-Krüger Abbildung z.B. beträgt der mittlere Lagefehler eines Modells am äußersten Rand der Abbildungszone beim Bildmaßstab 1:80 000 selbst bei der ungünstigen Paßpunktversion II noch weniger als $3 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab.

In der Tabelle 7a ist zwar für die Lambertsche Abbildung im Falle der ungünstigen Paßpunktbesetzung ein mittlerer Lagefehler von $15 \mu\text{m}$ ausgewiesen, aber das Modell ist hier 1000 km weit vom Normalparallelkreis entfernt. In der Landesvermessung kommen jedoch solche extremen Zonenbreiten nicht vor. Bei einer Zonenbreite von z.B. 6 Grad oder rund 650 km, wird der mittlere Lagefehler eines am äußersten Rand der Zone liegenden Modells des Bildmaßstabs 1:80 000 selbst bei der ungünstigen Paßpunktversion II nur noch $4 \mu\text{m}$ betragen.

Die nicht-konforme ordinatentreue Abbildung fügt sich allerdings nicht in diesen Rahmen ein. Die Lagefehler wachsen mit zunehmender Entfernung vom Hauptmeridian schnell an. Bei einer Entfernung von 200 km vom Hauptmeridian beträgt der mittlere Lagefehler für alle Bildmaßstäbe gleich mit der günstigen Paßpunktbesetzung $16 \mu\text{m}$ und mit der ungünstigen Paßpunktbesetzung über $38 \mu\text{m}$. Wenn die Zonenbreite

Abstand des Gebiets vom Bezug	Paßpunkt- version	B i l d m a ß s t a b					
		1:10 000		1:40 000		1:80 000	
		QMW	Max	QMW	Max	QMW	Max
Gauß-Krüger Abbildung (Bezug: Null-Meridian)							
0 km	I	0,000 (0,0)	0,001 (0,1)	0,002 (0,1)	0,004 (0,1)	0,004 (0,1)	0,005 (0,1)
	II	0,001 (0,1)	0,001 (0,1)	0,002 (0,1)	0,004 (0,1)	0,005 (0,1)	0,008 (0,1)
200 km	I	0,002 (0,2)	0,003 (0,3)	0,028 (0,7)	0,039 (1,0)	0,111 (1,4)	0,146 (1,8)
	II	0,003 (0,3)	0,007 (0,7)	0,051 (1,3)	0,099 (2,5)	0,205 (2,6)	0,406 (5,1)
Lambert Abbildung (Bezug: Normal-Parallelkreis)							
0 km	I	0,000 (0,0)	0,001 (0,1)	0,002 (0,1)	0,003 (0,1)	0,003 (0,0)	0,005 (0,1)
	II	0,001 (0,1)	0,001 (0,1)	0,002 (0,1)	0,004 (0,1)	0,006 (0,1)	0,009 (0,1)
1000 km	I	0,011 (1,1)	0,014 (1,4)	0,160 (4,0)	0,211 (5,3)	0,641 (8,0)	0,841 (11)
	II	0,019 (1,9)	0,038 (3,8)	0,296 (7,4)	0,583 (15)	1,184 (15)	2,338 (29)
Stereographische Abbildung (Bezug: Null-Punkt)							
0 km	I	0,000 (0,0)	0,001 (0,1)	0,002 (0,1)	0,004 (0,1)	0,004 (0,1)	0,005 (0,1)
	II	0,001 (0,1)	0,001 (0,1)	0,002 (0,1)	0,004 (0,1)	0,006 (0,1)	0,009 (0,1)
1000 km	I	0,004 (0,4)	0,006 (0,6)	0,073 (1,8)	0,096 (2,4)	0,290 (3,6)	0,382 (4,8)
	II	0,009 (0,9)	0,016 (1,6)	0,134 (3,3)	0,264 (6,6)	0,536 (6,7)	1,059 (13)
Ordinatentreue Abbildung (Bezug: Null-Meridian)							
0 km	I	0,000 (0,0)	0,001 (0,1)	0,002 (0,1)	0,004 (0,1)	0,004 (0,1)	0,006 (0,1)
	II	0,001 (0,1)	0,001 (0,1)	0,002 (0,1)	0,004 (0,1)	0,007 (0,1)	0,013 (0,2)
200 km	I	0,162 (16)	0,214 (21)	0,649 (16)	0,868 (22)	1,305 (16)	1,796 (23)
	II	0,380 (38)	0,741 (74)	1,537 (38)	3,026 (76)	3,278 (41)	6,257 (78)

Tab. 7a Mittlere (QMW) und maximale (Max) Lagefehlereinflüsse geodätischer Abbildungen im absolut orientierten Einzelmodell, in Abhängigkeit von Gebietslage, Paßpunktversion und Bildmaßstab. Angaben in m auf das Gelände bzw. in (µm) auf den Bildmaßstab bezogen.

jedoch auf maximal 60 km links und rechts vom Hauptmeridian beschränkt bleibt, wie es bei der alten preußischen Kataster-Abbildung der Fall ist, wird der mittlere Lagefehler auch beim Bildmaßstab 1:80 000 und bei ungünstiger Paßpunktbesetzung stets kleiner als 3 μm bleiben.

Eine genauere Darstellung der Einzelergebnisse würde zeigen, daß die Vektoren der Lagefehler nicht willkürlich verteilt sind sondern eine gewisse Systematik aufweisen. Bei der Gauß-Krüger Abbildung sind die Fehlerkomponenten in der Rechtsrichtung, d.h. quer zum Meridian etwa 1.5 bis 2 fach größer als in der Hochrichtung. Bei der Lambert-Abbildung sind die Verhältnisse umgekehrt. Dagegen zeigt die stereographische Abbildung im Durchschnitt isotrope Verhältnisse. Bei der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung ist keine feste Regel zu erkennen, das Größenverhältnis der Fehlerkomponenten ist von der Paßpunktverteilung abhängig.

Die Fehlereinflüsse der geodätischen Abbildung auf die Höhen der ausgewählten Punkte im absolut orientierten Einzelmodell sind in gleicher Weise wie oben für die Lage in den Tabellen 7b für die verschiedenen Fälle zusammengestellt. Die Ergebnisse beziehen sich auf Modelle ohne Erdkrümmungskorrektur.

Die Tabellen 7b zeigen deutlich, daß die Höhenfehler unter dem Einfluß der nicht korrigierten Erdkrümmung mit zunehmender Gebietsgröße beträchtliche Werte annehmen und im übrigen praktisch nur von der Erdkrümmung verursacht und bestimmt sind. Insbesondere sind die Höhenfehler bis auf Beträge von 1 μm von der Art der geodätischen Abbildung und von der Lage des Gebiets in der Abbildungszone unabhängig.

Bei näherer Betrachtung der in den Tabellen 7b angegebenen Werte stellt man fest, daß die Lage des Gebiets in der Projektionszone doch einen kleinen Einfluß auf die Höhengenaugigkeit hat, der sich allerdings nur bis zu Beträgen von etwa 1 μm im Bildmaßstab auswirkt. Diese Erscheinung ist dadurch zu erklären, daß die Maßstabsverzerrung des Modells von der Lage in der Projektionszone abhängig ist.

Im Bildmaßstab 1:10 000 beträgt der durchschnittliche Höhenfehler für alle geodätischen Abbildungen bei der ungünstigen Paßpunktbesetzung rund 7 μm , der max. Höhenfehler 13 μm . Diese Beträge sind auch bei mäßigen Genauigkeitsanforderungen an der Grenze der Vernachlässigbarkeit. Sie sind allgemein nicht akzeptabel.

Beim Bildmaßstab 1:40 000 erreicht der durchschnittliche Höhenfehler schon 22 μm und der max. Höhenfehler 54 μm . Diese Beträge sind nicht mehr zulässig, so daß in jedem Falle eine Erdkrümmungskorrektur zu fordern ist.

Bei dem kleinen Bildmaßstab von 1:80 000 betragen durchschnittlicher und max. Höhenfehler selbst bei günstiger Paßpunktbesetzung schon 45 μm bzw. 66 μm , so daß eine Erdkrümmungskorrektur in jedem Falle unentbehrlich ist.

Abstand des Gebiets vom Bezug	Paßpunkt- version	B i l d m a ß s t a b					
		1:10 000		1:40 000		1:80 000	
		QMW	Max	QMW	Max	QMW	Max

Gauß-Krüger Abbildung (Bezug: Null-Meridian)

0 km	I	0,056 (5,6)	0,083 (8,3)	0,909 (23)	1,332 (33)	3,637 (45)	5,317 (66)
	II	0,070 (7,0)	0,134 (13)	1,124 (28)	2,160 (54)	4,491 (56)	8,633 (108)
200 km	I	0,056 (5,6)	0,083 (8,3)	0,910 (23)	1,333 (33)	3,639 (45)	5,320 (67)
	II	0,070 (7,0)	0,134 (13)	1,124 (28)	2,161 (54)	4,494 (56)	8,638 (108)

Lambert Abbildung (Bezug: Normal Parallelkreis)

0 km	I	0,056 (5,6)	0,083 (8,3)	0,909 (23)	1,332 (33)	3,637 (45)	5,317 (66)
	II	0,070 (7,0)	0,134 (13)	1,124 (28)	2,160 (54)	4,491 (56)	8,633 (108)
1000 km	I	0,057 (5,7)	0,084 (8,4)	0,924 (23)	1,354 (34)	3,696 (46)	5,403 (68)
	II	0,071 (7,1)	0,136 (14)	1,142 (29)	2,195 (55)	4,563 (57)	8,773 (110)

Stereographische Abbildung (Bezug: Null-Punkt)

0 km	I	0,056 (5,6)	0,083 (8,3)	0,909 (23)	1,332 (33)	3,637 (45)	5,317 (66)
	II	0,070 (7,0)	0,134 (13)	1,124 (28)	2,160 (54)	4,491 (56)	8,633 (108)
1000 km	I	0,057 (5,7)	0,083 (8,3)	0,916 (23)	1,342 (34)	3,644 (46)	5,357 (67)
	II	0,070 (7,0)	0,135 (14)	1,132 (28)	2,177 (54)	4,525 (57)	8,699 (109)

Ordinatentreue Abbildung (Bezug: Null-Meridian)

0 km	I	0,056 (5,6)	0,083 (8,3)	0,909 (23)	1,332 (33)	3,637 (45)	5,317 (66)
	II	0,070 (7,0)	0,134 (13)	1,124 (28)	2,160 (54)	4,491 (56)	8,633 (108)
200 km	I	0,056 (5,6)	0,083 (8,3)	0,910 (23)	1,333 (33)	3,638 (45)	5,319 (66)
	II	0,070 (7,0)	0,134 (13)	1,124 (28)	2,161 (54)	4,492 (56)	8,638 (108)

Tab. 7b Fehlereinflüsse der geodätischen Abbildungen im absolut orientierten Einzelmodell auf die Höhen; ohne Erdkrümmungskorrektur

In der Praxis erfahren die Modelle bei mittleren oder kleinen Bildmaßstäben stets eine Erdkrümmungskorrektur, vor allem auch wenn die Modelle für die Aerotriangulation verwendet werden. Auch bei großmaßstäbigen Aerotriangulationen werden wenigstens die Projektionszentren, die bei der Aerotriangulation mit unabhängigen Modellen als Verknüpfungspunkte dienen korrigiert, um die Durchbiegung des Streifens wegen der Divergenz der Lotrichtungen zu eliminieren.

Wie im Abschnitt II.2.4 erläutert wurde, kann die Erdkrümmungskorrektur für die hier simulierten Daten streng durchgeführt werden. Wenn die Erdkrümmungskorrektur direkt am photogrammetrischen Modell angebracht wird, verbleiben nach der Einpassung auf die Paßpunkte keinerlei Höhenwidersprüche, und alle Fehlerbeiträge in den Tabellen 6b würden verschwinden. Wenn aber die Korrektur als unabhängige Bildkorrektur an jedem einzelnen Bild des Stereobildpaars angebracht wird, werden wegen der unterschiedlichen Bezugsebenen beider Bilder für die Erdkrümmungskorrektur geringe Widersprüche verbleiben, siehe Bild 6.

Wir werden im folgenden die zweite Korrekturmethode verwenden, um die restlichen Höhenfehler nach der Bildkorrektur zu erfassen. Die beiden Bilder des Modells erfahren zunächst unabhängig voneinander die strenge Erdkrümmungskorrektur und werden dann relativ orientiert. Einige Ergebnisse der absoluten Orientierung solcher Modelle im geodätischen Landessystem sind in Tabelle 8 dargestellt. Da die Höhenfehler bei mittleren und großen Bildmaßstäben (> 1:40 000) bis zur letzten Stelle (mm im Gelände) völlig verschwinden beschränken sich die Angaben der Tabelle 8 auf den Bildmaßstab 1:80 000 und die ungünstige Paßpunktverteilung. Neben den Höhenfehlern werden auch die Lagefehler aufgezeigt, da die Erdkrümmungskorrektur auch kleine Lageänderungen mit sich bringt. Zum Vergleich sind die entsprechenden Ergebnisse ohne Erdkrümmungskorrektur aus Tabelle 7b übernommen.

Aus Tabelle 8 stellt man zunächst fest, daß die Erdkrümmungskorrektur die Ergebnisse in der Lage außer bei der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung nicht ändert. Der mittlere Lagefehler wird aber bei der ordinatentreuen Abbildung nach der Erdkrümmungskorrektur geringfügig besser, der max. Lagefehler bleibt jedoch wegen der schlechten Paßpunktverteilung unverändert.

Abbildung	Gebietslage	mittlere Fehler QMW			max. Fehler	
		Korrektur	vor	nach	vor	nach
Gauß-Krüger	200	Lage	0.205	0.206	0.406	0.407
		Höhe	4.494	0.008	8.638	0.016
Lambert	1000	Lage	1.184	1.183	2.338	2.329
		Höhe	4.563	0.008	8.773	0.016
Stereogr.	1000	Lage	0.536	0.534	1.059	1.050
		Höhe	4.525	0.008	8.699	0.016
Ordinatentreue	200	Lage	3.278	3.145	6.257	6.257
		Höhe	4.492	0.008	8.636	0.016

Tab. 8 Lage- und Höhenfehler im Einzelmodell, ohne und mit Erdkrümmungskorrektur, Bildmaßstab 1:80 000, ungünstige Paßpunktversion (II), Fehlerangaben in m im Gelände

Nach der strengen Erdkrümmungskorrektur der Einzelbilder beträgt der max. Höhenfehler im Modell für alle Abbildungen nur noch 1.6 cm im Gelände oder 0.2 μm im Bildmaßstab. Da die Modellkoordinaten auf 0.01 μm genau berechnet worden sind, ist dieser Fehlerbetrag reell, d.h. nicht die Folge der Abrundungsfehler. Die mittleren Höhenfehler sind mit Beträgen von 0.8 cm im Gelände oder 0.1 μm im Bildmaßstab ebenfalls völlig zu vernachlässigen.

Wenn die Erdkrümmungskorrektur streng durchgeführt ist, kann die Korrektur an den Einzelbildern als gleich genau wie die Korrektur am Modell betrachtet werden. Bezüglich der Höhenfehler erfüllen beide Korrekturverfahren alle Genauigkeitsanforderungen.

III.3 Einfluß der geodätischen Abbildung auf die Aerotriangulation

Der Hauptgegenstand dieser Untersuchung ist der Einfluß der geodätischen Abbildung auf die Aerotriangulation. Das Problem der Aerotriangulation unterscheidet sich von dem der vorhergegangenen Untersuchungen des Einzelbildes und des Einzelmodells in zwei Punkten: Es gibt erstens bei der Aerotriangulation in der Regel wesentlich weniger Paßpunkte, so daß der Block nicht so gut an das geodätisch abgebildete Landeskoordinatensystem angepaßt werden kann wie beim Einzelbild oder Einzelmodell. Zweitens werden die Projektionszentren bei der Methode der unabhängigen Modelle als Verknüpfungspunkte verwendet. Wegen ihres großen Höhenabstandes zu den übrigen Objektpunkten (Verknüpfungspunkten) sind sie aber sehr empfindlich von der ortsabhängigen Maßstabsverzerrung der geodätischen Abbildung und von kleinen Vernachlässigungen bei der Erdkrümmungskorrektur betroffen und geben leicht Anlaß zu zusätzlichen systematischen Fehlern.

Wie bereits im Abschnitt I.4.3 erläutert, beeinflussen im Rahmen unserer Fragestellung gleichzeitig so viele Faktoren die Ergebnisse der Aerotriangulation, daß es nicht möglich ist, einfache generelle Aussagen über den Einfluß der geodätischen Abbildung auf die Aerotriangulation zu geben, wie es in den vorigen Abschnitten für das Einzelbild und das Einzelmodell noch möglich war. Vielmehr muß die Auswirkung jedes einzelnen Parameters gesondert untersucht werden. Ehe aber den Auswirkungen der einzelnen Parameter im Detail nachgegangen wird, wollen wir zunächst versuchen, im Überblick die ungefähre Größenordnung des Einflusses der geodätischen Abbildung auf die Aerotriangulation durch ein repräsentatives Beispiel kennenzulernen. Dieses Beispiel sollte den Einfluß der geodätischen Abbildung in einem eher ungünstigen Fall zeigen, ohne aber zu weit von der Praxis abzuweichen, so daß es für die praktischen Fälle repräsentativ genug ist. Wir bezeichnen dieses Beispiel als den "typischen Fall".

III.3.1 Parameter des typischen Falls

Bei den vorhergegangenen Untersuchungen am Einzelbild und Einzelmodell wurde festgestellt, daß der Einfluß der geodätischen Verzerrung bei gleich bleibender Paßpunktanordnung, Gebietslage usw. um so größer wird, je kleiner der Bildmaßstab bzw. je größer das vom photogrammetrischen Bild bedeckte Gebiet ist. Ebenso kann man auch beim Bildverband erwarten, daß die geodätische Abbildung die Aero-triangulation um so stärker störend beeinflussen wird, je größer der Block und je kleiner der Bildmaßstab ist.

Um den Einfluß der geodätischen Abbildung auf die Aero-triangulation unter relativ ungünstigen Bedingungen kennenzulernen, sollte daher unser Block für den typischen Fall möglichst groß und der Bildmaßstab möglichst klein sein. Theoretisch gibt es nur sehr weite Grenzen für Blockgröße und Bildmaßstab, aber in der Praxis wird ein Block mit 20 % Querüberdeckung aus organisatorischen Gründen selten wesentlich mehr als 1000 Bilder umfassen, und der Bildmaßstab wird bei Weitwinkelaufnahmen kaum kleiner als 1:80 000 sein. Wir nehmen also für unseren typischen Fall eine Blockgröße von etwas weniger als 1000 Bildern und den Bildmaßstab 1:80 000 an.

Der Block soll aus 20 Streifen mit je 41 Weitwinkelbildern bzw. 40 Modellen des Bildmaßstabs 1:80 000 gebildet sein. Er ist somit annähernd quadratisch und bedeckt ein Gebiet von ca. 300 x 300 km² auf dem Ellipsoid. Die Flughöhe beträgt 12 000 m.

Weil es sich um einen relativ ungünstigen Fall handeln soll, wird für die Paßpunktanordnung die in Abschnitt II.3.2 als Version II bezeichnete Anordnung von nur 8 Lagepaßpunkten am Blockrand und 3 Höhenketten gewählt. Die sogenannte Überbrückungsdistanz, d.h. der Paßpunktastand ist für die Lage- und Höhenpaßpunkte mit $i=20$ Basislängen ≈ 145 km recht beträchtlich. Bei dieser Anordnung kann man in der Praxis - bezogen auf das Gelände - eine mittlere Genauigkeit von etwa 3 bis 5 Meter in der Lage und 8 bis 10 Meter in der Höhe erwarten (siehe unten, Abschnitt III.3.3). Damit kann dieser Block gerade noch zur Herstellung topographischer Karten des Maßstabs 1:100 000 (flaches Gelände) oder 1:50 000 (gebirgisches Gelände) verwendet werden.

Für die Verknüpfung wählen wir die in der Praxis übliche einfache Verknüpfung von 9 Punkten pro Bild bzw. 6 Punkten zuzüglich der Projektionszentren pro Modell. Die Flugrichtung ist Ost-West. Die Streifenachse folgt einem Parallelkreis.

Wie schon die Untersuchung am Einzelmodell ergeben hat, ist die Erdkrümmungskorrektur bei diesem Bildmaßstab unerläßlich. Deshalb erfahren alle Bilder und Modelle vor der Aero-triangulation eine strenge Erdkrümmungskorrektur.

Die Blocklage soll der Praxis entsprechend nicht zu weit von der Bezugslinie (Meridian oder Parallelkreis) bzw. Bezugspunkt der jeweiligen Abbildung entfernt sein. Für die 3 konformen Abbildungen wählen wir einen Abstand von etwa 100 km vom Bezug. Für die nicht konforme, ordinatentreue Abbildung kann der Block zentral liegen, weil seine Ausdehnung bereits größer als die Zonenbreite ist. Der äußerste Teil des Blocks liegt bei den 3 konformen Abbildungen gerade noch innerhalb der in der Praxis vorkommenden größten Zonenausdehnung.

III.3.2 Ergebnisse des typischen Falls

Für jede geodätische Abbildung wurde der Block einmal nach der Methode der unabhängigen Modelle und einmal nach der Bündelmethode ausgeglichen. Die beiden Ergebnisse zeigen ziemlich unterschiedliche Eigenschaften.

Zunächst betrachten wir die innere Genauigkeit in Form der Verbesserungen der gemessenen Bild- oder Modellkoordinaten. Die Verbesserungen der im übrigen fehlerfreien Bild- oder Modellkoordinaten werden für jeden Punkt in ihre Hoch- und Rechtskomponenten (bzw. auch die Z-Komponente bei den unabhängigen Modellen) zerlegt und zu quadratischen Mittelwerten m_H , m_R (m_Z) zusammengefaßt. Tabelle 9 stellt diese Mittelwerte für alle 4 Abbildungen in Einheiten von μm bezogen auf den Bildmaßstab zusammen. Weil die simulierten photogrammetrischen Koordinaten rechnerisch mindestens auf $0.01 \mu\text{m}$ genau sind, werden die quadratischen Mittelwerte auch auf $0.01 \mu\text{m}$ genau angegeben. Bei der hier angenommenen ost-westlichen Flugrichtung zeigen die Streifenachsen annähernd in die Rechtsrichtung.

Wie Tabelle 9 zeigt, sind die auf der Verzerrung durch die geodätische Abbildung beruhenden Verbesserungen der sonst fehlerfreien photogrammetrischen Bild- oder Modellkoordinaten im allgemeinen sehr klein. Der quadratische Mittelwert ist für keine Komponente größer als $1 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab und somit für die Praxis absolut vernachlässigbar (hier $1 \mu\text{m} \hat{=} 8 \text{ cm}$ im Gelände).

Eine sehr auffallende Richtungsabhängigkeit der Verbesserungen ist bei der Methode der unabhängigen Modelle im Fall der Gauß-Krüger- und bei der Lambertschen Abbildung zu beobachten. Der quadratische Mittelwert der Verbesserungskomponenten der Hochrichtung ist bei der Gauß-Krüger Abbildung 11-fach so groß wie der der Rechtsrichtung. Bei der Lambertschen Abbildung sind die Verhältnisse genau umgekehrt. Die beiden anderen geodätischen Abbildungen zeigen keine ähnlich ausgeprägten Richtungseigenschaften.

geodätische Abbildung	Aerotriangulation mit Modellen			Aerotriangulation mit Bündeln	
	m_H	m_R	m_Z	m_H	m_R
Gauß-Krüger	0.89	0.08	0.44	0.23	0.34
Lambert	0.05	0.56	0.03	0.31	0.03
Stereographische	0.45	0.29	0.23	0.29	0.16
Ordinatentreue	0.84	0.56	0.39	0.38	0.33

Tab. 9 Einfluß der geodätischen Abbildung auf die interne Verzerrung des "typischen Blocks" (20 x 41) Bilder, WW, 1:80 000, 8 Lage-PP, 3 Höhen-PP-Ketten), ausgedrückt in quadratischen Mittelwerten m_H , m_R ; m_Z der Verbesserungen in μm im Bildmaßstab ($1 \mu\text{m} \hat{=} 8 \text{ cm}$ im Gelände)

Analysiert man im einzelnen die Verbesserungen der Modellkoordinaten über den ganzen Block und vergleicht sie mit den im Bild 15 gezeigten Linien gleicher Maßstabsverzerrung, dann findet man einen engen Zusammenhang zwischen den Verbesserungen und diesen Linien: Erstens sind die Beträge der Verbesserungen in der konform abgebildeten Zone etwa proportional zu der Entfernung des Punktes von der Bezugslinie der Abbildung. Zweitens zeigen die Verbesserungen hauptsächlich in die Richtung der Linien gleicher Maßstabsverzerrung. Z.B. verlaufen bei der Gauß-Krüger-Abbildung die Linien gleicher Maßstabsverzerrung in nord-südlicher Richtung, und die Verbesserungen folgen ebenfalls überwiegend der Nord-Süd-Richtung. Dieser Zusammenhang erklärt auch die Richtungsabhängigkeit der Verbesserungskomponenten bei den beiden konformen Abbildungen. Bei der stereographischen Abbildung dagegen verlaufen die Linien gleicher Maßstabsverzerrung im Block kreisförmig, so daß die Verbesserungen keine Bevorzugung der Hoch- oder der Rechtsrichtung enthalten können.

Bei der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung gibt es keine Linien gleicher Maßstabsverzerrung. Entsprechend verhalten sich die Verbesserungen im Block auch sehr unregelmäßig. Es gibt kein Zeichen für eine Richtungsabhängigkeit der Verbesserungen. Vielmehr scheinen die Richtungen der Verbesserungen hauptsächlich durch die Anordnung der Lagepaßpunkte bestimmt zu sein.

Das Funktionsmodell und die gemessenen Größen sind bei der Aerotriangulation mit Bündeln anders als mit Modellen. Entsprechend sind die Verbesserungen der Bildkoordinaten nach der Blockausgleichung auch ganz anders als die Verbesserungen der Modellkoordinaten. So ist bei Bündelausgleichung in der Gauß-Krüger Abbildung keine starke Richtungsabhängigkeit der Verbesserungen mehr zu beobachten. Nur bei der Lambertschen Abbildung ist der Unterschied zwischen m_H und m_R groß, aber das Verhältnis ist umgekehrt wie bei den Modellen.

Die Größe der Verbesserungen der Bildkoordinaten ist zwar wie bei den Modellkoordinaten auch von der absoluten Lage des jeweiligen Punktes in der Projektionszone abhängig, aber eine einfache Richtungsbevorzugung ist nicht festzustellen.

Wegen der unterschiedlichen Eigenschaften der Bild- und Modellkoordinaten und ihrer Verbesserungen ist ein direkter Vergleich der inneren Genauigkeiten der Aerotriangulation mit unabhängigen Modellen und mit Bündeln bedeutungslos. Da aber wir hier mit fehlerfreien photogrammetrischen Koordinaten operieren, die in beiden Ausgleichungsverfahren als unkorrelierte und gleichgewichtige Beobachtungen behandelt werden, können wir aus den Ergebnissen der Tabelle 9 doch pauschal feststellen, daß die geodätischen Abbildungsverzerrungen bei Bündeln im Durchschnitt kleinere Verbesserungen verursachen als bei Modellen. Oder anders ausgedrückt sind die Widersprüche bei den Schnitten homologer Bildstrahlen geringer als bei den Verknüpfungen der Modelle.

Neben dem Einfluß der geodätischen Abbildungsverzerrungen auf die inneren Spannungen eines ausgeglichenen Blocks ist der Einfluß auf die absolute Genauigkeit des Blocks von besonderem Interesse. Darunter verstehen wir die Abweichungen der Landeskoordinaten der Neupunkte von ihren fehlerfreien Soll-Werten, die ja hier in der Simulation bekannt sind. Als repräsentative Indikatoren betrachten

wir die quadratischen Mittelwerte (QMW) und die Maximalwerte (Max) dieser Abweichungen. Da sich Höhe und Lage nach der Erdkrümmungskorrektur gegenseitig kaum noch beeinflussen, werden nachfolgend Lage- und Höhengenaugigkeit getrennt betrachtet.

In Tabelle 10 sind die quadratischen Mittelwerte (QMW) der Abweichungen, d.h. der wahren Lagefehler der ausgeglichenen Punkte im Landeskoordinatensystem zusammen mit den maximalen Fehlern für alle vier geodätischen Abbildungen zusammengestellt. Neben den in Einheiten von Meter ausgewiesenen Werten sind zusätzlich in Klammern die entsprechenden Größen in μm im Bildmaßstab angegeben.

Außer bei der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung liefert die Aerotriangulation mit unabhängigen Modellen bei allen 3 konformen Abbildungen praktisch die gleiche Lagegenauigkeit. Dies bestätigen deutlich auch die 3 Vektordiagramme der absoluten Lagefehler der ausgeglichenen Punkte in den Bildern 30.1, 30.2 und 30.3. Alle 3 konformen Abbildungen haben praktisch die gleichen Vektorfelder. Der mittlere Lagefehler von etwa 30 cm im Gelände entspricht nur $4 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab. Der maximale Lagefehler im Block beträgt 70 cm im Gelände, was $9 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab entspricht.

Die Höhenfehler sind bei den 3 konformen Abbildungen nach der strengen Erdkrümmungskorrektur der Modelle äußerst klein. Der mittlere Höhenfehler schwankt zwar von Abbildung zu Abbildung, beträgt aber maximal nur 4 cm im Gelände bzw. $0.5 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab.

Während die Bündelmethode bei den 3 konformen Abbildungen zwar nicht dasselbe einheitliche Bild zeigt aber doch ungefähr die gleiche absolute Lagegenauigkeit wie die Methode der unabhängigen Modelle liefert, ist ihre Höhengenaugigkeit deutlich schlechter. Der mittlere Höhenfehler der Bündelausgleichung liegt für die 3 konformen Abbildungen etwa bei 10 cm im Gelände bzw. $1 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab. Diese Beträge sind zwar für die Praxis völlig unbedeutend, sind aber 3- bis 10-fach größer als die vergleichbaren mittleren Höhenfehler der Aerotriangulation mit unabhängigen Modellen.

Geodätische Abbildung	Aerotriangulation mit Modellen				Aerotriangulation mit Bündeln			
	Lage		Höhe		Lage		Höhe	
	QMW	Max	QMW	Max	QMW	Max	QMW	Max
Gauß-Krüger	0.322 (4.0)	0.706 (8.8)	0.039 (0.5)	0.079 (1.0)	0.265 (3.3)	0.572 (7.2)	0.111 (1.4)	0.220 (2.8)
Lambert	0.316 (4.0)	0.635 (7.9)	0.025 (0.3)	0.041 (0.5)	0.383 (4.8)	0.756 (9.5)	0.083 (1.0)	0.317 (4.0)
Stereo- graphisch	0.317 (4.0)	0.629 (7.9)	0.011 (0.1)	0.025 (0.3)	0.329 (4.1)	0.657 (8.2)	0.091 (1.1)	0.309 (3.9)
Ordinaten- treu	4.203 (52.5)	10.793 (134.9)	0.301 (3.8)	0.509 (6.4)	4.551 (56.9)	10.761 (134.5)	0.903 (11.3)	2.693 (33.7)

Tab. 10 Absoluter Fehlereinfluß der geodätischen Abbildungsverzerrungen auf die Koordinaten der Neupunkte für den "typischen Fall" (20 x 41 Bilder, WW, 1:80 000, 8 Lage-PP, 3 Höhen-PP-Ketten; vorab strenge Erdkrümmungskorrektur der Bilder bzw. der Modelle; quadratische Mittelwerte QMW und Maximalwerte der Fehler in m im Gelände bzw. in μm im Bildmaßstab.

Die nicht-konforme ordinatentreue Abbildung verhält sich völlig anders als die konformen Abbildungen und zwar sowohl bezüglich der Lage- als auch der Höhenfehler. Der Einfluß der geodätischen Verzerrung ist allgemein viel größer als bei den konformen Abbildungen. Der mittlere Lagefehler übersteigt bei beiden Verfahren der Aerotriangulation 4 m im Gelände bzw. 50 μm im Bildmaßstab und ist damit mehr als 10-fach so groß wie bei den konformen Abbildungen. Dasselbe Verhältnis gilt für die maximalen Lagefehler mit Beträgen von über 10 m. Der mittlere Höhenfehler ist trotz der vorabgegangenen strengen Erdkrümmungskorrektur der Modelle bzw. der Bilder ebenfalls jeweils um etwa eine Zehnerpotenz größer. Insbesondere die Bündelmethode ist von der Verzerrung der nicht-konformen Abbildung in der Höhengenaugigkeit mit mittleren bzw. maximalen Höhenfehlern von 0.9 m (11 μm) bzw. 2.7 m (34 μm) besonders betroffen.

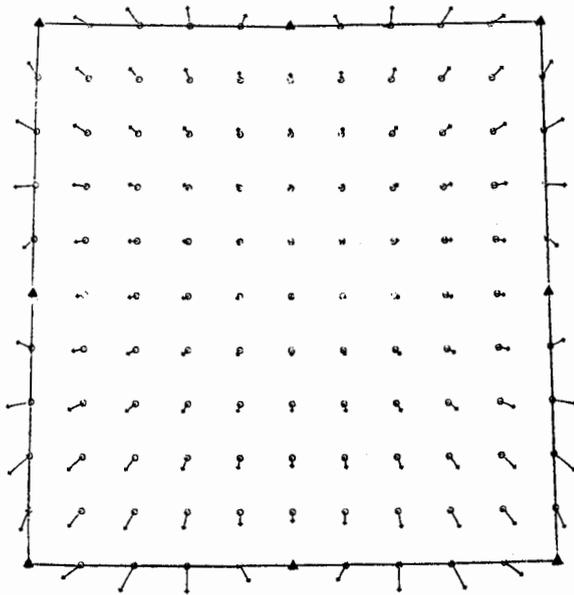
Tabelle 10 gibt zwar Auskunft über den durchschnittlichen bzw. maximalen Einfluß der jeweiligen geodätischen Abbildung auf die absolute Genauigkeit der Blockausgleichung. Es ist aber zusätzlich von Interesse, in welcher Weise die Abbildung das ganze Punktfeld tatsächlich verzerrt und wie sich die Einflüsse der verschiedenen Abbildungen voneinander unterscheiden. Diese Information entnehmen wir am besten den Vektordarstellungen der Fehler der ausgeglichenen Punkte.

Wir betrachten Lage und Höhe in den Bildern 30 und 31 getrennt und stellen in den Bildern 30.1 bis 30.4 die Lagefehler bzw. in den Bildern 31.1. bis 31.4 die Höhenfehler von 121 repräsentativ ausgewählten Kontrollpunkten dar. Die Fehlervektoren haben das Vorzeichen "Ist-Soll", zeigen somit jeweils die "Deformation" des ausgeglichenen Blocks gegenüber seiner Soll-Abbildung im Landeskoordinatensystem an. Die nach oben zeigenden Höhenvektoren entsprechen einer Deformation des Punktfeldes nach oben.

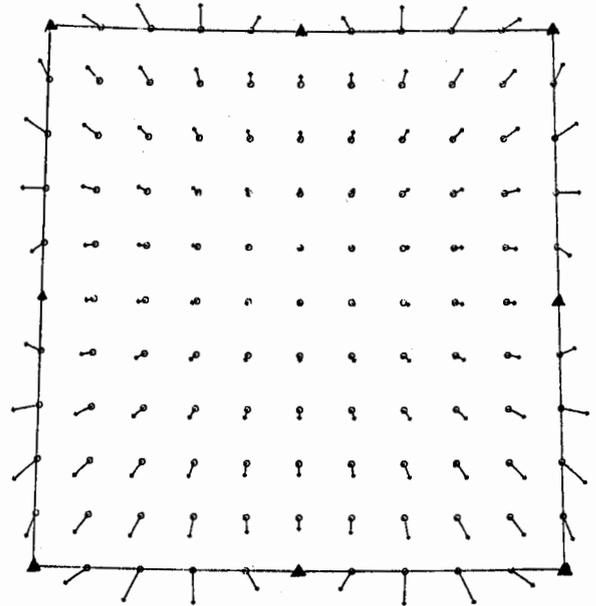
Die Vektordiagramme der Lagefehler zeigen zunächst einmal, daß die Einflüsse der Abbildungsverzerrungen auf die Aerotriangulation mit unabhängigen Modellen und auf die Aerotriangulation mit Bündeln sehr weitgehend übereinstimmen. Die äußere Form der Blockdeformation ist dieselbe und selbst die einzelnen Fehlervektoren sind nach Betrag und Richtung vergleichbar. Darüber hinaus stellt man fest, daß sich die Vektorfelder der Lagefehler bei allen 3 konformen Abbildungen praktisch nicht voneinander unterscheiden. Vor allem im Blockinneren sind die Vektoren jeweils für alle 3 konformen Abbildungen identisch. Nur am Blockrand, wo auch die größten Lagefehler auftreten, treten kleine Unterschiede auf. Die Vektorfelder zeigen bei allen 3 konformen Abbildungen Symmetrien zu den waagrechten und senkrechten Achsen und zu den Diagonalen des Blockes auf.

Im Vergleich dazu zeigt das Vektorfeld der Lagefehler bei der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung ein völlig anderes Bild. Es sind nicht nur die Beträge der Fehlervektoren viel größer, auch die Form der Blockdeformation ist deutlich anders. Es existiert zwar ebenfalls eine Symmetrie zur waagrechten und zur senkrechten Achse, aber die Symmetrie zu den Diagonalen fehlt. Während der Ost- und Westrand des Blocks eine Deformation nach außen zeigt, verläuft die Deformation am Nord- und am Südrand nach innen.

Ausgleichung mit Bündeln



Ausgleichung mit Modellen



▲ : Paßpunkt

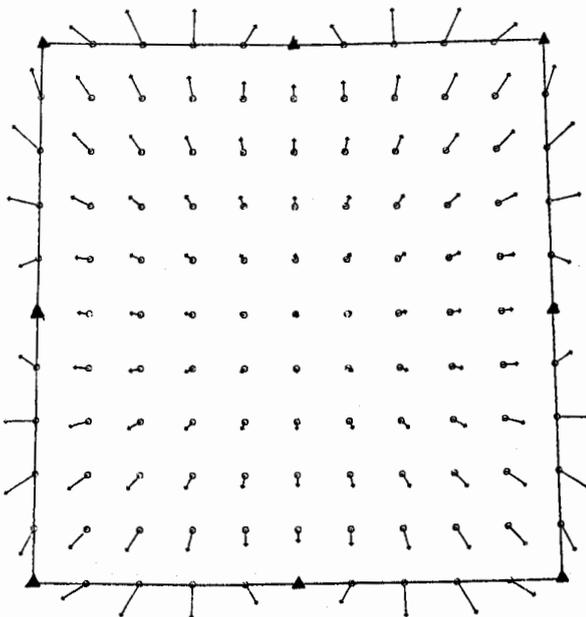
KARTENMASSSTAB 1 / 2800000

VEKTORMASSSTAB 1 / 100

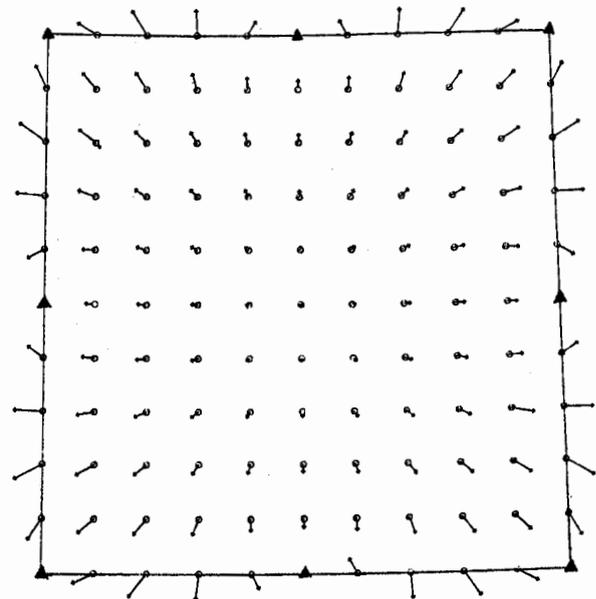
— = 0.5M

Bild 30.1 Lageverzerrung der Blockausgleichung in der Gauß-Krüger Abbildung

Ausgleichung mit Bündeln



Ausgleichung mit Modellen



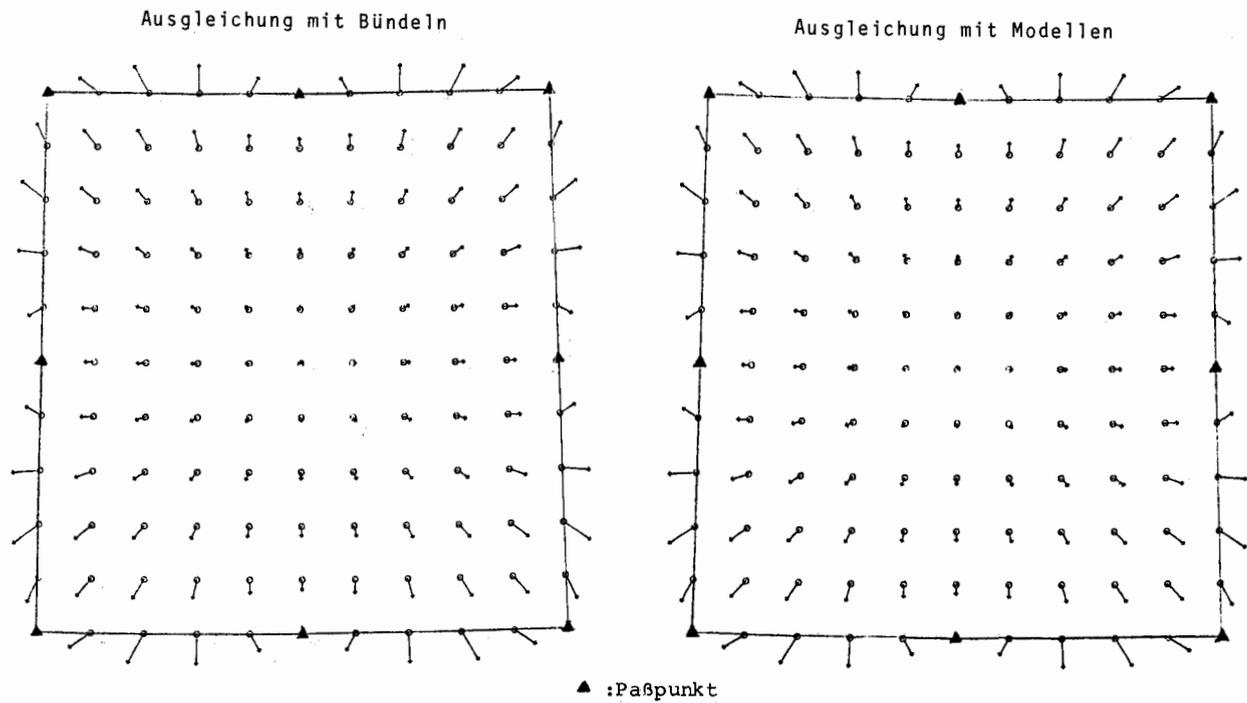
▲ : Paßpunkt

KARTENMASSSTAB 1 / 2800000

VEKTORMASSSTAB 1 / 100

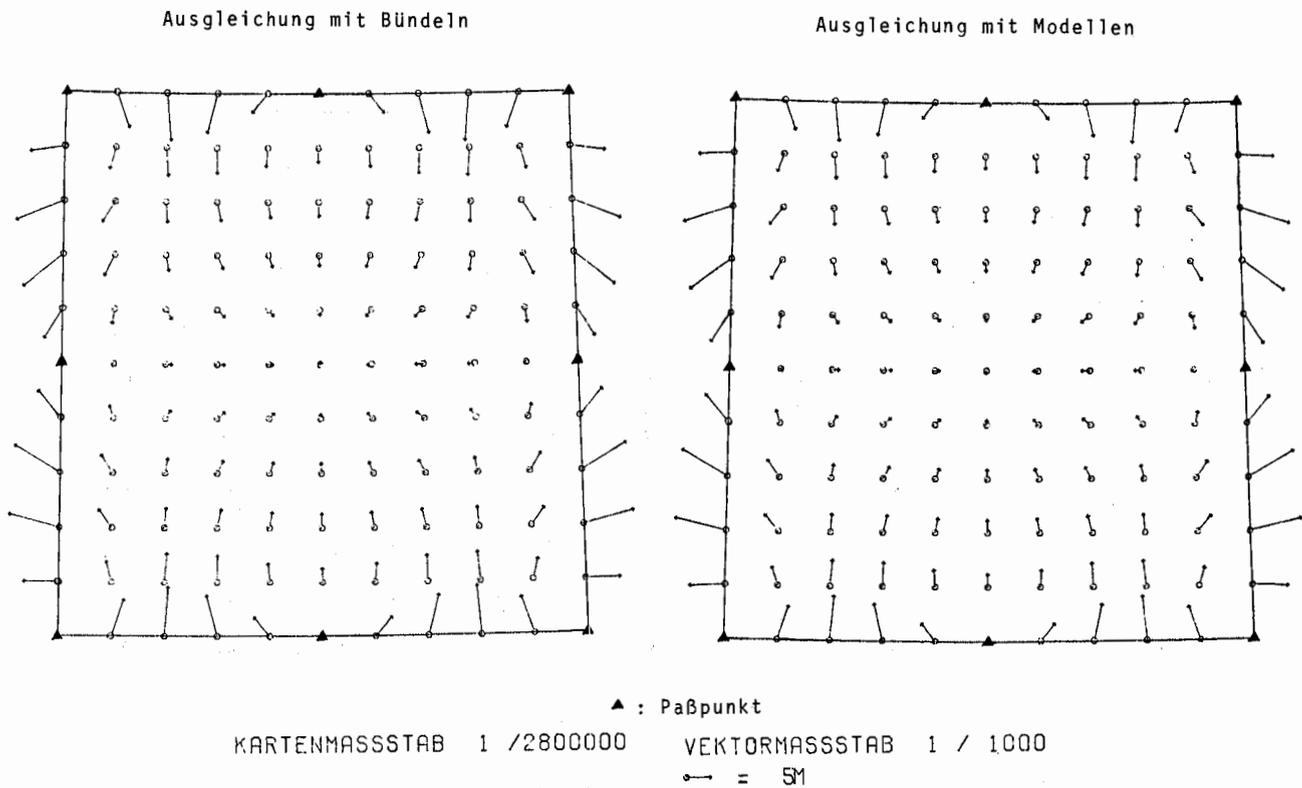
— = 0.5M

Bild 30.2 Lageverzerrung der Blockausgleichung in der Lambert Abbildung



KARTENMASSSTAB 1 / 2800000 VEKTORMASSSTAB 1 / 100
 → = 0.5M

Bild 30.3 Lageverzerrung der Blockausgleichung in der stereographischen Abbildung

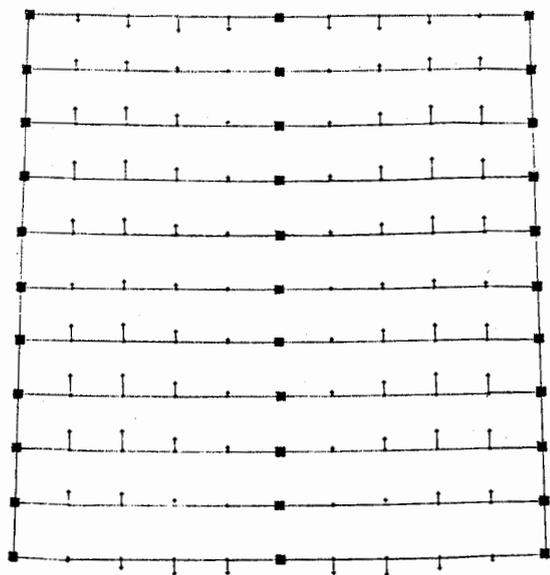


KARTENMASSSTAB 1 / 2800000 VEKTORMASSSTAB 1 / 1000
 → = 5M

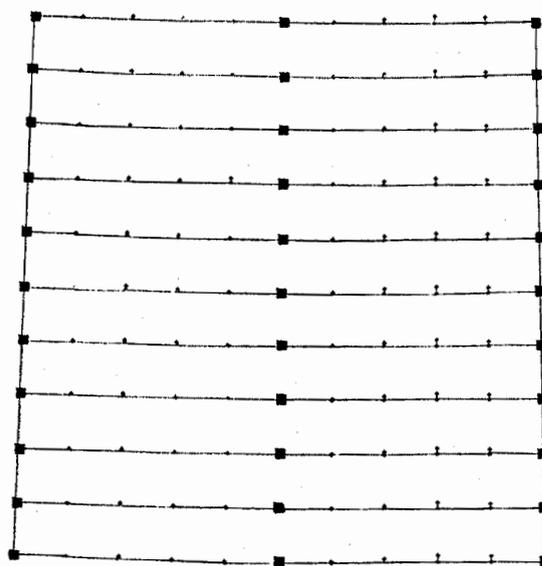
(Vektormaßstab 10fach kleiner als bei den konformen Abbildungen)

Bild 30.4 Lageverzerrung der Blockausgleichung in der ordinatentreuen Abbildung

Ausgleichung mit Bündeln



Ausgleichung mit Modellen



■ : Höhenpaßpunkt

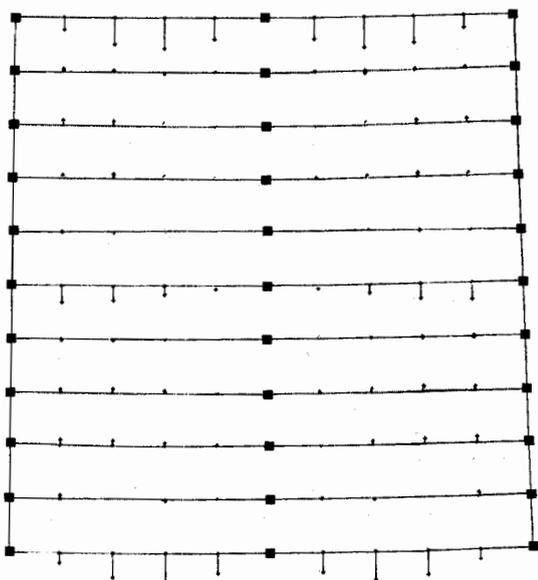
KARTENMASSTAB 1 / 2800000

VEKTORMASSTAB 1 / 50

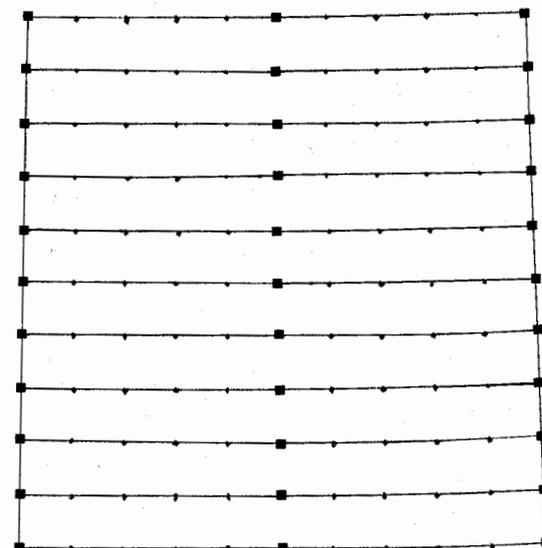
→ = 0.10M

Bild 31.1 Höhenverzerrung der Blockausgleichung in der Gauß-Krüger Abbildung

Ausgleichung mit Bündeln



Ausgleichung mit Modellen



■ : Höhenpaßpunkt

KARTENMASSTAB 1 / 2800000

VEKTORMASSTAB 1 / 50

→ = 0.10M

Bild 31.2 Höhenverzerrung der Blockausgleichung in der Lambert Abbildung

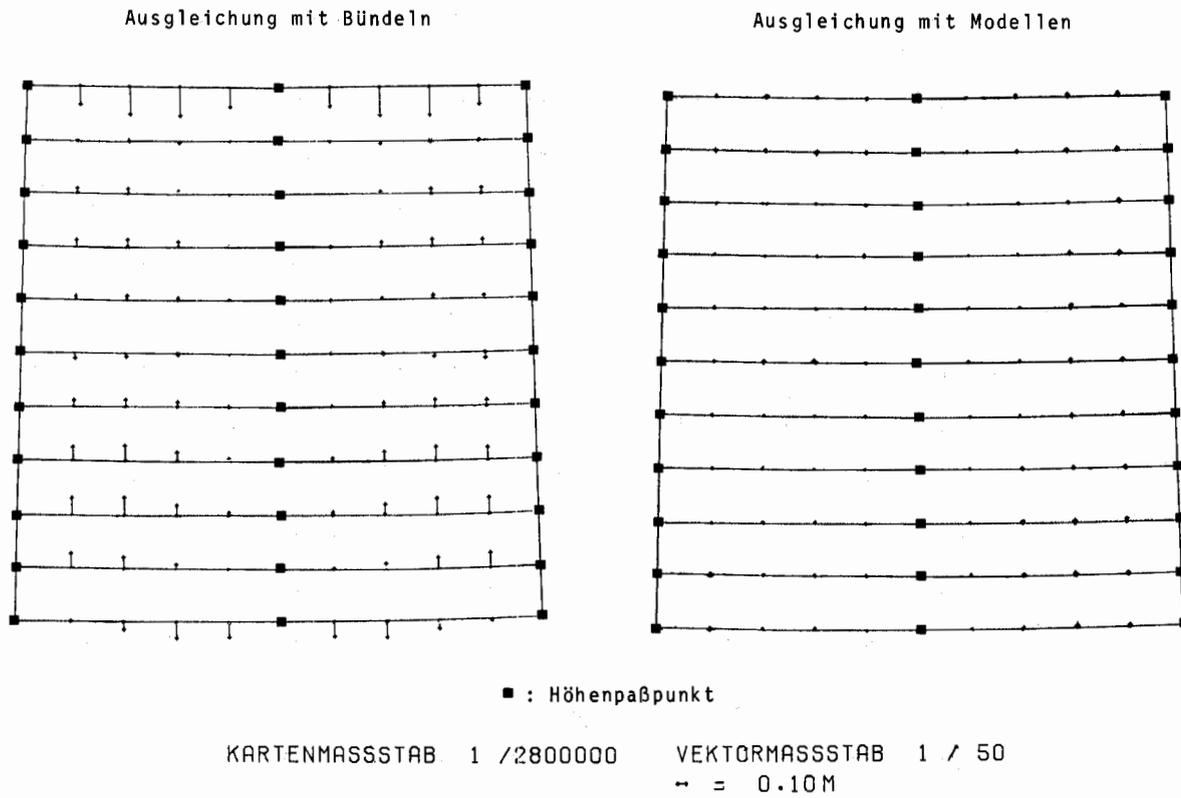


Bild 31.3 Höhenverzerrung der Blockausgleichung in der stereographischen Abbildung

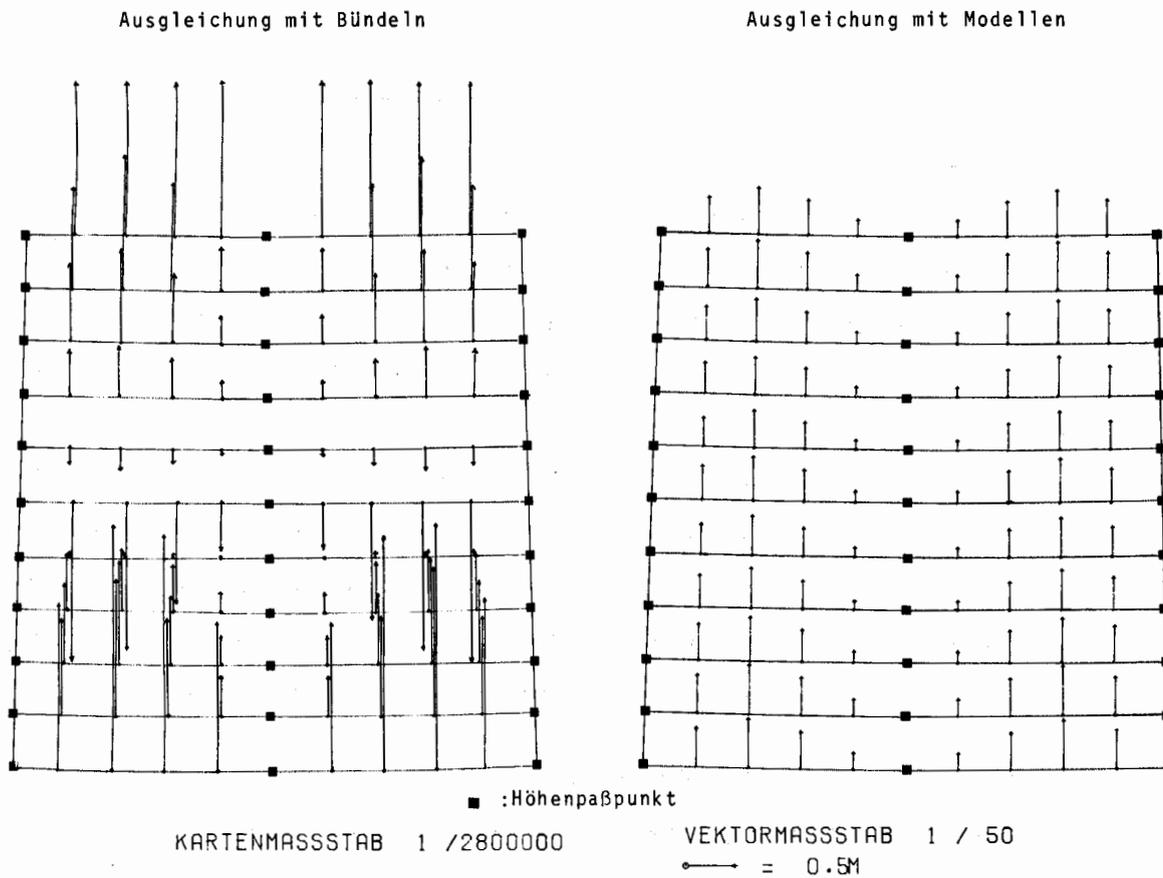


Bild 31.4 Höhenverzerrung der Blockausgleichung in der ordinatentreuen Abbildung

Die Höhendeverformungen des typischen Blocks sind für die verschiedenen Fälle wesentlich weniger gleichartig als die Lagedeverformungen. Weder zwischen den Ergebnissen der Modell- und der Bündelausgleichungen noch zwischen den verschiedenen konformen Abbildungen sind deutliche Ähnlichkeiten festzustellen. In dem mit unabhängigen Modellen ausgeglichenen Block sind die Höhendeverformungen ziemlich gleichmäßig. Es gibt kaum Unterschiede zwischen den Streifen, die alle gleichartig durchgebogen sind. Dagegen sind die Höhendeverformungen des Bündelblocks sehr unregelmäßig. Es gibt große Unterschiede zwischen den am Blockrand liegenden Streifen und denen im Blockinneren. Sowohl bei der Bündelausgleichung als auch bei der Ausgleichung mit unabhängigen Modellen hat stets die nicht-konforme ordinatentreue Abbildung die größten Höhenfehler.

III.3.3 Beurteilung der Ergebnisse des typischen Falls

Zieht man die kennzeichnenden Parameter des typischen Falls in Betracht (großer Block, kleiner Bildmaßstab, ungünstige Paßpunktbedingungen) müssen die Ergebnisse der Aerotriangulation abgesehen von der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung, in allen 3 konform abgebildeten Landeskoordinatensystemen als erstaunlich gut beurteilt werden. Die Einflüsse der Abbildungsverzerrungen bleiben überraschend klein, obwohl die Maßstabsverzerrungen der Abbildungen im betrachteten Gebiet erheblich sind.

Bei der Gauß-Krüger Abbildung zum Beispiel erfahren in nord-südlicher Richtung laufende Linien jeweils entlang jeder Linie eine konstante Maßstabsverzerrung. Jede Linie hat also ihren eigenen Maßstab. Bezogen auf eine Mittellinie hat z.B. bei der vorgegebenen Lage und Ausdehnung des Blocks der Ostrand des Blocks den Maßstab 1.00006, der Westrand den Maßstab 1.00001. Damit ist der Ostrand gegenüber der Mittelstrecke um etwa 180 Meter, der Westrand gegenüber der Mittelstrecke um etwa 30 Meter verlängert. Dennoch beträgt nach der Blockausgleichung der maximale absolute Lagefehler der ausgeglichenen Punkte nur 0.7 m (9 μm) bzw. die maximale Verbesserung der Modellkoordinaten nur 0.2 m (2.5 μm). Und trotz der nicht symmetrischen Verzerrung im Block (wegen der Lage des Blocks 100 km östlich vom Null-Meridian), sind nach der Ausgleichung die Lagefehler bezüglich der Hauptachsen und Diagonalen des Blocks ziemlich symmetrisch.

In der Höhe verursachen diese Maßstabsunterschiede im Block jedoch wegen der geringen Höhenausdehnung des Blocks (maximaler Höhenunterschied ist gleich der Flughöhe von 12 000 m) nur geringe Widersprüche. Die Z-Koordinaten der Projektionszentren am Ostrand sind z.B. nur um 0.7 m größer als die in der Blockmitte.

Die Aerotriangulationen mit unabhängigen Modellen und mit Bündeln sind in der Lage etwa gleich von der jeweiligen geodätischen Abbildung beeinflusst. Dagegen ist die Bündelmethode in der Höhe viel stärker von der geodätischen Abbildung betroffen. Je nach der Abbildung ist der mittlere Höhenfehler bei der Bündelmethode 3- bis 10-fach größer als bei der Methode der unabhängigen Modelle. Die Bündelmethode ist also wesentlich empfindlicher gegenüber der geodätischen Verzerrung. Allerdings sind die Beträge der Höhenfehler sehr klein und belaufen sich nur auf 1/6 bis 1/13 der Lagefehler. Im Vergleich zu den in der Praxis erreichbaren Genauigkeiten können die auf Grund der geodätischen Abbildungsver-

zerrungen auftretenden Höhendeformationen des Blocks jedenfalls für die konformen Abbildungen völlig vernachlässigt werden.

Wegen der unterschiedlichen Eigenschaften der Maßstabsverzerrung (vgl. Bild 15), ist das vom Block bedeckte Gebiet in den 3 konform abgebildeten Landessystemen unterschiedlich verzerrt. Dennoch sind nach der Blockausgleichung die absoluten Lagefehler bei allen 3 konformen Abbildungen fast gleich. Offenbar spielt hier keine Rolle mehr, wie das Gebiet im einzelnen verzerrt ist und tritt völlig zurück gegenüber der dominierenden Eigenschaft, daß die Verzerrung **k o n f o r m** ist.

Bezüglich der Höhenfehler treten auch zwischen den verschiedenen konformen Abbildungen doch große Unterschiede auf. Die Konformität der Abbildung spielt hier keine Rolle mehr. Die Erklärung dafür ist wohl dadurch gegeben, daß die Höhenfehler eine Sekundärwirkung der Maßstabsverzerrungen darstellen. Wie wir später sehen werden, ist die Höhengenaugigkeit bei der Aerotriangulation mit unabhängigen Modellen sehr stark von der Flugrichtung beeinflusst.

Nach EBNER |18| und |19| hat unser typischer Block auf der Basis zufälliger Fehler folgende theoretische Genauigkeiten zu erwarten:

- mit der Methode der unabhängigen Modelle

$$\mu_{x,y} = 1.8 \sigma_{0,L}$$

$$\sigma_{x,y \max} = 3.6 \sigma_{0,L}$$

$$\mu_z = 4.7 \sigma_{0,z}$$

$$\sigma_{z \max} = 6.5 \sigma_{0,z}$$

- mit der Bündelmethode

$$\mu_{x,y} = 3.5 \sigma_0$$

$$\sigma_{x,y \max} = 6.0 \sigma_0$$

$$\mu_z = 4.6 \sigma_0$$

$$\sigma_{z \max} = 7.1 \sigma_0$$

wobei

$\mu_{x,y}$: die mittlere Genauigkeit (quadratischer Mittelwert der Streuungen) der Lagekoordinaten der Neupunkte

$\sigma_{x,y \max}$: maximaler Wert aller Standardabweichungen der Lagekoordinaten der Neupunkte

μ_z : die mittlere Genauigkeit der Höhenkoordinaten der Neupunkte

$\sigma_{z \max}$: maximaler Wert aller Standardabweichungen der Höhenkoordinaten der Neupunkte

$\sigma_{0,L}$: Standardabweichung der gemessenen Lagekoordinaten der Modellpunkte

$\sigma_{0,z}$: Standardabweichung der gemessenen Höhenkoordinaten der Modellpunkte

σ_0 : Standardabweichung der gemessenen Bildkoordinaten

Setzen wir für die Standardabweichungen der als gleichgewichtige und unkorrelierte Beobachtungen geltenden Modell- und Bildkoordinaten z.B. die folgenden Werte an, die jeweils auf den Bildmaßstab bezogen sind:

$$\begin{aligned}\sigma_{o,L} &= 8 \mu\text{m} \\ \sigma_{o,z} &= 10 \mu\text{m} \\ \sigma_o &= 5 \mu\text{m}\end{aligned}$$

dann erhalten wir für unseren typischen Block die folgenden theoretischen Genauigkeiten

- mit der Methode der unabhängigen Modelle

$$\begin{aligned}\mu_{x,y} &= 14 \mu\text{m} \quad (\text{entspricht } 1.2 \text{ m im Gelände}) \\ \sigma_{x,y \text{ max}} &= 29 \mu\text{m} \quad (\quad " \quad 2.3 \text{ m} \quad " \quad) \\ \mu_z &= 47 \mu\text{m} \quad (\quad " \quad 3.8 \text{ m} \quad " \quad) \\ \sigma_z \text{ max} &= 65 \mu\text{m} \quad (\quad " \quad 5.2 \text{ m} \quad " \quad)\end{aligned}$$

- mit der Bündelmethode

$$\begin{aligned}\mu_{x,y} &= 18 \mu\text{m} \quad (\text{entspricht } 1.4 \text{ m im Gelände}) \\ \sigma_{x,y \text{ max}} &= 30 \mu\text{m} \quad (\quad " \quad 2.4 \text{ m} \quad " \quad) \\ \mu_z &= 23 \mu\text{m} \quad (\quad " \quad 1.8 \text{ m} \quad " \quad) \\ \sigma_z \text{ max} &= 36 \mu\text{m} \quad (\quad " \quad 2.9 \text{ m} \quad " \quad)\end{aligned}$$

Rechnen wir die mittlere Genauigkeit der Lagekoordinaten noch in die mittlere vektorielle Genauigkeit um, so erhalten wir für unseren Block mit den beiden Aerotriangulationsverfahren eine mittlere Lagegenauigkeit von $21 \mu\text{m}$ ($25 \mu\text{m}$) im Bildmaßstab bzw. 1.7 m (2.0 m) im Gelände.

Diese theoretischen Genauigkeiten setzen nur zufällige, unkorrelierte Fehler der gemessenen Modell- bzw. Bildkoordinaten voraus, was in der Praxis nicht zutrifft. Erfahrungsgemäß muß man daher praktisch mit einer Genauigkeitsreduktion bis zum Faktor 2 rechnen. So könnte man für unseren typischen Fall eine tatsächliche Genauigkeit der Lagekoordinaten von $< 3 \text{ m}$ und eine tatsächliche Höhengenaugigkeit von $< 8 \text{ m}$ ($< 4 \text{ m}$) erwarten.

Fordern wir für eine topographische Karte, daß der mittlere Lagefehler der Grundrißkartierung kleiner als 0.1 mm und der mittlere Lagefehler der Höhenlinien kleiner als 0.5 mm sein soll, dann wäre die Genauigkeit unseres typischen Blocks noch ausreichend für die topographische Kartierung von Hügel- und Bergland (Geländeneigung bis 15°) im Maßstab $1:50\,000$, mit 15 m Schichtlinienäquidistanz, nach dem Vorschlag von IMHOF |20|.

Vergleicht man die Ergebnisse in Tabelle 10 mit den genannten theoretischen Genauigkeiten¹⁾, so stellt man fest, daß die von der geodätischen Abbildungsverzerrung verursachten durchschnittlichen Lagefehler $< 5 \mu\text{m}$ und Höhenfehler $< 2 \mu\text{m}$ bei den 3 konformen Abbildungen sowohl für die Aerotriangulation mit unabhängigen

¹⁾ Hier soll darauf hingewiesen werden, daß die in Tabelle 10 angegebenen quadratischen Mittelwerte systematischer Fehler eine andere Bedeutung haben als die mittleren Streuungen im Sinne stochastischer Eigenschaften. Dennoch sind die Effekte superponierbar und die Mittelwerte quadratisch addierbar.

Modellen als auch für die Aerotriangulation nach der Bündelmethode weit unter der Grenze der theoretischen Wirkung der zufälligen Meßfehler der Bild- bzw. Modellkoordinaten liegt.

Nur bei der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung überschreitet der mittlere Einfluß der geodätischen Abbildungsverzerrung die Wirkung der zufälligen Meßfehler um etwa den Faktor 3. Der Effekt ist also im Vergleich zu den sonst zu erwartenden Lagegenauigkeiten dominierend und nicht mehr zu vernachlässigen. Wegen der Erdkrümmungskorrektur bleibt aber der mittlere Höheneinfluß der geodätischen Abbildung immer noch unter der theoretischen Wirkung der zufälligen Meßfehler. Insgesamt wäre also der Einfluß der ordinatentreuen Abbildung nicht mehr vernachlässigbar. Aber wie eingangs erwähnt wird diese Abbildung wie überhaupt jede andere nicht-konforme Abbildung kaum mehr für Landeskoordinatensysteme verwendet, und selbst bei der alten preußischen Katasterabbildung reichte die Systembreite nicht weiter als 60 km links und rechts vom Hauptmeridian. Demgegenüber hat unser typischer Block eine Ausdehnung von 150 km zu beiden Seiten des Hauptmeridians und somit wesentlich stärkere Verzerrungen. In den nachfolgenden Untersuchungen wird sich noch zeigen, daß der Einfluß dieser nicht-konformen Abbildung bei reduzierter Systembreite in den meisten Fällen ebenfalls vernachlässigbar wird.

III.3.4 Das weitere Untersuchungsprogramm auf der Basis der Ergebnisse des typischen Falls

Die Voruntersuchungen am "typischen" Fall sollte die Größenordnung des Einflusses der geodätischen Abbildung auf die Aerotriangulation aufzeigen, wobei der Block bezüglich der Blockgröße, des kleinen Bildmaßstabs und der wenigen Paßpunkte einen für die Praxis relativ ungünstigen Fall repräsentiert. Bei diesem ungünstigen Fall konnte vermutet werden, daß die Fehlerwirkungen der geodätischen Abbildungsverzerrungen deutlich in Erscheinung treten, daß also die Auswirkungen bei den normalerweise günstigeren Blöcken nur kleiner sein würden. Diese Vermutung wird sich bei den nachfolgenden Untersuchungen bestätigen.

Das wichtigste Ergebnis dieser Voruntersuchung ist die Erkenntnis, daß die Fehlerwirkungen der konformen geodätischen Abbildungen so klein sind, daß sie ohne weitere Maßnahmen vernachlässigbar sind. Damit kann ein Teil der ursprünglich geplanten Untersuchung über mögliche einfache Näherungsverfahren zur Datenkorrektur für den Fall, daß der Einfluß der geodätischen Abbildung bedenklich sein würde, entfallen.

Das repräsentative Beispiel hat zwar die Größenordnung des Einflusses der geodätischen Abbildung aufgezeigt, aber es bleibt die Frage zu untersuchen, welche Parameter die Ergebnisse noch beeinflussen können und wie sich die einzelnen Parameter auswirken. Im folgenden wird deshalb von den Erkenntnissen des typischen Falls ausgehend untersucht, wie die Fehlereinflüsse der geodätischen Abbildungen auf die photogrammetrische Blockausgleichung von den verschiedenen Parametern abhängt.

III.4 Untersuchungen über die Einflüsse verschiedener Projektparameter auf die Fehlerwirkung geodätischer Abbildungen bei der Ausgleichung photogrammetrischer Blöcke

III.4.1 Allgemeines

Im Abschnitt I.4.3 wurden die wichtigsten Projektparameter in zwei Gruppen unterschieden aufgelistet, von denen wir Einfluß auf die im Block verbleibenden Fehlerwirkungen der geodätischen Abbildungen zu erwarten haben. Wir werden nachfolgend die Wirkung der einzelnen Parameter systematisch untersuchen.

Um den Einfluß von jeweils nur einem Parameter zu erfassen, müssen jeweils die anderen Parameter, die ebenfalls die Ergebnisse beeinflussen können, konstant gehalten werden. Aus der Voruntersuchung wissen wir, daß der Einfluß der geodätischen Abbildung, vor allem der konformen Abbildungen, auf die Aerotriangulation insgesamt sehr klein ist. Dieses Ergebnis könnte im Prinzip dadurch bedingt sein, daß der Einfluß eines bestimmten Parameters durch eine ungünstige Festlegung anderer Parameter zu stark unterdrückt ist und die Abhängigkeit der Ergebnisse von diesem Parameter nicht mehr festzustellen ist. Hätten wir z.B. beim typischen Fall statt nur 8 Lagepaßpunkten die sogenannte dichte Randbesetzung von Lagepaßpunkten gewählt, wäre nach der Blockausgleichung wenigstens für die 3 konformen Abbildungen im Rahmen der vorliegenden Rechenschärfe und der Abrundungsfehler praktisch keine Verzerrung des Blocks festzustellen gewesen und es wäre nicht möglich, den Einfluß irgend eines anderen Parameters anzugeben oder zu variieren.

Wir werden daher die vorläufig konstant gehaltenen Parameter so festlegen, daß sie zwar den Bedingungen der Praxis noch entsprechen, aber doch eine möglichst große Auswirkung der geodätischen Verzerrung auf die ausgeglichenen Koordinaten zulassen. Gegebenenfalls werden einem Parameter mehrere Werte zugeordnet.

Aus der Erkenntnis, daß die Bündelmethode etwa im gleichen Maße wie die Methode der unabhängigen Modelle von den Abbildungsverzerrungen beeinflusst wird, werden nachfolgend die Blöcke nicht mehr mit beiden Methoden sondern nur mit der Methode der unabhängigen Modelle ausgeglichen. Die Ergebnisse bezüglich der Lagefehler sind direkt auf die Bündelmethode zu übertragen. Bezüglich der Höhen muß zwar bei der Bündelmethode mit etwas größeren Fehlern gerechnet werden, aber nach der vorauszugehenden strengen Erdkrümmungskorrektur der Bilder sind die Höhendeformationen absolut und im Vergleich zu den Lagedeformationen der Blöcke so klein, daß sie allgemein uninteressant im Hintergrund bleiben werden. Der Einfluß der geodätischen Abbildungsverzerrungen äußert sich nach der Erdkrümmungskorrektur der Bilder oder Modelle überwiegend nur in den Lagefehlern der ausgeglichenen Blöcke.

III.4.2 Einfluß der Flugrichtung

Aus Bild 15 ist ersichtlich, daß die Linien gleicher Maßstabsverzerrungen für die 3 konformen Abbildungen sehr unterschiedlich verlaufen. Bei der Gauß-Krüger Abbildung laufen sie in nord-südlicher, bei der Lambert Abbildung in ost-westlicher Richtung und bei der stereographischen Abbildung bilden sie genähert konzentrische Kreise um den Bezugspunkt. Die geodätische Verzerrung der konformen Abbildungen ist nach Definition zwar für ein unendlich kleines Gebiet richtungsunabhängig, aber in endlichen Bereichen doch deutlich lage- und richtungsabhängig.

Bei der üblichen Querüberdeckung von 20 % ist die Bild- oder Modellverknüpfung zwischen den Flugstreifen nicht so stark wie die Verknüpfung im Streifen, vor allem bezüglich der Höhen. Daher kann man vermuten, daß die Blockdeformationen durch die richtungsabhängige geodätische Verzerrung von der jeweiligen Flugrichtung beeinflußt werden. Wenn z.B. die Flugrichtung parallel zu den Linien gleicher Maßstabsverzerrung verläuft, erfährt jedes Modell in einem Streifen die gleiche Maßstabsverzerrung. Es wird folglich nur sehr kleine Widersprüche im Streifen geben, der als Ganzes sehr gut in das übergeordnete Landessystem einpassen wird. Verläuft aber die Flugrichtung senkrecht zu den Linien gleicher Maßstabsverzerrungen, variiert der Maßstab innerhalb eines Streifens beträchtlich. Folglich treten Widersprüche zwischen den Modellen eines Streifens auf, die besonders an den Projektionszentren in Erscheinung treten. Wenn in Streifenmitte keine oder nicht genügend Paßpunkte vorhanden sind, können die Maßstabsfehler der Modelle akkumulieren und zu spürbaren Lagefehlern bei der Einpassung ins Landessystem führen. Diese anschauliche Betrachtung der Verhältnisse der einzelnen Streifen kann zwar nicht unmittelbar auf den Block übertragen werden, da aber die Verknüpfungen im Block in der Flugrichtung und quer dazu nicht gleich sind, werden die verbleibenden Wirkungen der Abbildungsverzerrungen sicher auch von der Flugrichtung beeinflußt.

Wir werden nachfolgend die beiden Hauptflugrichtungen parallel und senkrecht zu den Linien gleicher Maßstabsverzerrung unterscheiden und untersuchen. Für dazwischen liegende Flugrichtungen werden vermittelnde Ergebnisse vermutet. Für die Gauß-Krüger- und die Lambert-Abbildungen bilden Ost-West und Nord-Süd annähernd die beiden Hauptflugrichtungen. Für die stereographische Abbildung, deren Linien gleicher Maßstabsverzerrung konzentrische Kreise um den Bezugspunkt sind, hängen die Hauptflugrichtungen von der Lage des Blocks in der Abbildungszone ab. Eine ost-westliche Flugrichtung ist z.B. annähernd parallel zu den Linien gleicher Maßstabsverzerrung und damit eine Hauptflugrichtung, wenn der Block direkt nördlich oder südlich vom Bezugspunkt liegt.

Für die nicht-konforme ordinatentreue Abbildung gibt es keine Linien gleicher Maßstabsverzerrung. Es ist daher nicht möglich, die Hauptflugrichtungen nach der obigen Definition festzulegen. Weil aber die längentreu abgebildeten Ordinaten in ost-westlicher Richtung verlaufen, ist zu erwarten, daß Ost-West und Nord-Süd zwei Extremfälle darstellen und ebenfalls Hauptflugrichtungen bilden.

Um den Unterschied der Verzerrungswirkungen zwischen den Hauptflugrichtungen nicht durch starke Paßpunktbesetzung zu unterdrücken, wird hier die im Abschnitt II.3.2 genannte besonders schwache Paßpunktversion I mit nur 4 Lagepaßpunkten und 2 Höhenketten gewählt. Da es nur um die Unterschiede zwischen den Hauptflugrichtungen geht, kann die Blockgröße auf $10 \times 20 = 200$ Modelle reduziert werden, was im Bildmaßstab 1:80 000 einer Fläche von $150 \times 150 \text{ km}^2$ entspricht. Jedes Modell hat außer 2 Projektionszentren nur 6 Verknüpfungspunkte.

Für die Gauß-Krüger- und die Lambert-Abbildung wird wiederum die Lage der Blockmitte in etwa 100 km Abstand vom Bezugsmeridian bzw. -parallelkreis angenommen. Der äußerste Rand des Blocks ist somit fast 180 km vom Nullmeridian der Gauß-Krüger-Abbildung bzw. vom Normalparallelkreis der Lambert-Abbildung entfernt und befindet sich somit noch innerhalb der normalen Zonenbreite der Abbildungen. Wegen der kreisförmigen Linien gleicher Maßstabsverzerrung wird für die stereographische Abbildung der Block in den sehr großen Abstand von etwa 1100 km nördlich vom Bezugspunkt gelegt, um im Block eine relativ kleine Krümmung der Linien gleicher Maßstabsverzerrung zu bekommen und damit den Unterschied zwischen ost-westlicher und nord-südlicher Flugrichtung zu betonen. Der Bezugspunkt der stereographischen Abbildung liegt auf dem Parallelkreis $B=40^\circ\text{N}$, die Blockmitte 10° nördlicher auf dem Parallelkreis $B=50^\circ\text{N}$. Dieser Abstand übersteigt zwar weit die Abbildungsbereiche stereographischer Landeskoordinatensysteme, aber wie sich später bestätigen wird, hat die Gebietslage innerhalb einer konform abgebildeten Zone beim Bildmaßstab von 1:80 000 nur einen sehr geringen Einfluß auf die Lageverzerrung des ausgeglichenen Blocks. Und die Höhenverzerrungen sind nach der Erdkrümmungskorrektur ohnehin vernachlässigbar klein.

Für die nicht-konforme ordinatentreue Abbildung wird der Block wieder zentral in die Abbildungszone gelegt. Somit liegt der äußerste Teil des Blocks ca. 75 km vom Hauptmeridian entfernt und überschreitet nur knapp die Systembreite der alten preußischen Katasterabbildung von $\pm 60 \text{ km}$.

Die Verzerrungsergebnisse der Blöcke mit den beiden Hauptflugrichtungen sind in Tabelle 11 für die 4 Abbildungen zusammengestellt. Im linken Teil werden jeweils die inneren Verzerrungen in Form der quadratischen Mittelwerte der Verbesserungen der Modellkoordinaten in den drei Koordinatenrichtungen (m_H, m_R, m_Z) in m-Einheiten im Landessystem bzw. in Klammern darunter in μm im Bildmaßstab angegeben. Im rechten Teil der Tabellen sind die äußeren Verzerrungen des Punktfeldes in Form der quadratischen Mittelwerte (M_H, M_R, M_Z) bzw. der Maximalwerte der wahren Fehler der ausgeglichenen Koordinaten wiederum in m bzw. in μm dargestellt.

Die Tabelle 11 zeigt im Ergebnis, daß bei allen 3 konformen Abbildungen die Flugrichtung praktisch keinen Einfluß auf die Größe der Lageverzerrungen hat. Vor allem sind die Verbesserungen der Lagekoordinaten in den Mittelwerten m_H und m_R überhaupt nicht von der Flugrichtung beeinflusst. Die Mittelwerte M_H, M_R der absoluten Lageverzerrungen ändern sich maximal um nur 6 % mit den beiden Hauptflugrichtungen.

Flug- richtung	innere Verzerrung			äußere Verzerrung					
	m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z

Gauß-Krüger Abbildung - Linien gleicher Maßstabsverzerrung
laufen N - S

O - W	0.060 (0.8)	0.004 (0.1)	0.029 (0.4)	0.226 (2.8)	0.195 (2.4)	0.173 (2.2)	0.548 (6.9)	0.440 (5.5)	0.259 (3.2)
N - S	0.067 (0.8)	0.008 (0.1)	0.002 (0.0)	0.223 (2.8)	0.305 (2.6)	0.078 (1.0)	0.560 (7.0)	0.452 (5.6)	0.120 (1.5)

Lambert Abbildung - Linien gleicher Maßstabsverzerrung
laufen O - W

O - W (paral.)	0.005 (0.1)	0.103 (1.3)	0.002 (0.0)	0.210 (2.6)	0.206 (2.6)	0.088 (1.1)	0.459 (5.7)	0.477 (6.0)	0.126 (1.6)
N - S (senkr.)	0.005 (0.1)	0.103 (1.3)	0.052 (0.7)	0.209 (2.6)	0.218 (2.7)	0.203 (2.5)	0.469 (5.9)	0.485 (6.1)	0.300 (3.8)

Stereographische Abbildung - Linien gleicher Maßstabsverzerrung
laufen O - W

O - W (paral.)	0.014 (0.2)	0.297 (3.7)	0.005 (0.1)	0.217 (2.7)	0.203 (2.5)	0.069 (0.9)	0.482 (6.0)	0.469 (5.9)	0.108 (1.4)
N - S (senkr.)	0.014 (0.2)	0.301 (3.8)	0.153 (1.9)	0.216 (2.7)	0.212 (2.7)	0.088 (1.1)	0.495 (6.2)	0.467 (5.8)	0.144 (1.8)

Ordinatentreue Abbildung

O - W	0.025 (0.3)	0.008 (0.1)	0.012 (0.2)	0.272 (3.4)	0.445 (5.6)	0.233 (2.9)	0.616 (7.7)	1.564 (20)	0.331 (4.1)
N - S	0.026 (0.3)	0.009 (0.1)	0.004 (0.1)	0.275 (3.4)	0.532 (6.7)	0.145 (1.8)	0.654 (8.2)	1.608 (20)	0.204 (2.6)

Tab. 11 Einfluß der Flugrichtung auf die inneren und äußeren Koordinatenverzerrungen durch die geodätischen Abbildungen. Quadratische Mittelwerte bzw. Maximalwerte in m im Gelände und in (μm) im Bildmaßstab - $10 \times 20 = 200$ Modelle, WW, Bildmaßstab 1:80 000, Paßpunktversion I

Bei der nicht-konformen Abbildung hat die Flugrichtung einen relativ größeren Einfluß auf die absoluten Lagefehler der ausgeglichenen Koordinaten. Die mittleren Fehler M_R unterscheiden sich bei den beiden Flugrichtungen um 20 %, während die Werte M_H gleich geblieben sind. Auch für die nicht-konforme Abbildung kann also nur ein schwacher Einfluß der Flugrichtung auf die Lagefehler festgestellt werden.

Relativ am stärksten sind jedoch die Höhenfehler von der Flugrichtung beeinflusst. Für die 3 konformen Abbildungen ist eine sehr einfache Abhängigkeit der inneren und der äußeren Höhenverzerrungen von der Flugrichtung zu beobachten: Die Höhengenaugigkeit ist stets bei der Flugrichtung deutlich besser, die parallel zu den Linien gleicher Maßstabsverzerrung verläuft. Der Unterschied ist besonders bei den inneren Verzerrungen besonders ausgeprägt (Faktor 16 - 30 in m_Z), er wird außerdem um so größer, je weiter der Block von der Bezugslinie bzw. dem Zentrum der Abbildung entfernt ist. Diese Verhältnisse der Höhenverbesserungen schlagen nur zu einem Teil auf die Absolutgenauigkeiten der Höhen durch, die sich immerhin bei geringen Absolutbeträgen noch bis zum Faktor 2 unterscheiden.

Auch bei der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung ist ein ähnlich deutlicher Unterschied in der Höhengenaugigkeit in Abhängigkeit von der Flugrichtung zu erkennen. Aus den Beispielen kann gefolgert werden, daß im allgemeinen die Flugrichtung praktisch keinen Einfluß auf die Lageverzerrungen und einen zwar deutlichen aber nicht dominierenden Einfluß auf die Höhenverzerrungen der Blöcke hat. Für die nachfolgenden Untersuchungen wird deshalb jeweils die bezüglich der Höhengenaugigkeit ungünstigere Flugrichtung benützt.

III.4.3 Einfluß der Paßpunktanordnung

Die Anordnung und Anzahl der Paßpunkte spielt in der Aerotriangulation stets eine besonders wichtige Rolle, denn nur durch sie wird überhaupt erst die Beziehung zwischen den photogrammetrischen Messungen und dem übergeordneten Koordinatensystem hergestellt und sie bestimmen entscheidend die erreichbare Genauigkeit. Die Anordnung der Paßpunkte ist deshalb einer der wichtigsten Projektparameter der Aerotriangulation. Entsprechend wird eine starke Abhängigkeit der verbleibenden Wirkungen der geodätischen Verzerrung von der Paßpunktanordnung erwartet.

In der Praxis der Aerotriangulation werden die Lage- und die Höhenpaßpunkte wegen ihrer geringen gegenseitigen Einflüsse auf die Höhen- bzw. Lagegenauigkeit in der Regel völlig unabhängig voneinander betrachtet und festgelegt. Bei normaler, genügend redundanter Paßpunktverteilung haben die Lagepaßpunkte auch tatsächlich keinen Einfluß auf die Höhen und die Höhenpaßpunkte keinen Einfluß auf die Lagekoordinaten, solange keine extremen Höhenunterschiede auftreten. Wie wir unten sehen werden, trifft diese Annahme bezüglich des Einflusses der geodätischen Verzerrungen nicht mehr ganz zu. Nach der Erdkrümmungskorrektur haben die Höhenpaßpunkte zwar fast keinen Einfluß auf die Lageverzerrungen, aber die Lagepaßpunkte haben einen Einfluß auf die Höhenverzerrungen der Blöcke. Allerdings bleibt der Einfluß bei den konformen Abbildungen sehr gering und nimmt nur bei der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung erhebliche Beträge

an. Wir werden im folgenden den Einfluß der Paßpunkte auf die Wirkungen der geodätischen Verzerrungen für Lage- und für Höhenpaßpunkte getrennt untersuchen.

Einfluß der Höhenpaßpunkte

Der Einfluß der Höhenpaßpunkte auf die Blockverzerrungen wird anhand eines Blocks mit $15 \times 30 = 450$ Modellen des Bildmaßstabs 1:80 000 untersucht. Der Block ist annähernd quadratisch und bedeckt eine Fläche von 200 km x 200 km Ausdehnung auf dem Ellipsoid. Um die Abhängigkeit der Ergebnisse von der Anordnung der Höhenpaßpunkte festzustellen, werden für die konformen Abbildungen jeweils 3 verschiedene Anordnungen von Höhenpaßpunkten in jeweils 2, 3 und 4 Ketten simuliert. Die Überbrückungsdistanz ist entsprechend 30, 15 und 10 Basislängen. Für die nicht-konforme ordinatentreue Abbildung wird zusätzlich ein weiteres Beispiel mit 6 Höhenketten (Überbrückungsdistanz 6 Basislängen) behandelt. Eine Basislänge entspricht etwa 7 km im Gelände.

Da die Lagepaßpunkte, wie die anschließende Untersuchung ergeben wird, bei den 3 konformen Abbildungen nur einen sehr geringen Einfluß auf die Höhenergebnisse haben, kann ihre Anzahl und Anordnung beliebig gewählt werden. Wir beschränken uns hier auf den Fall von nur 4 Lagepaßpunkten in den Blockecken. Für die ordinatentreue Abbildung wählen wir jedoch abweichend davon eine dichte Randbesetzung des Blocks mit Lagepaßpunkten, weil die Höhenverzerrungen im ausgeglichenen Block bei dieser Anordnung stets am größten sind.

Für die 3 konformen Abbildungen wird wieder die Blockmitte in etwa 100 km Abstand vom Bezug der Abbildung angenommen. Bei der Gauß-Krüger-Abbildung und der stereographischen Abbildung liegt der Block dann 100 km östlich vom Bezugsmeridian bzw. vom Bezugspunkt. In der Zone der Lambertschen Abbildung liegt der Block 100 km nördlich des Normalparallelkreises. Für die ordinatentreue Abbildung wird wiederum eine zentrale Blocklage gewählt.

Die Ergebnisse der nach der Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen verbleibenden inneren und äußeren Verzerrungen sind für die verschiedenen Anordnungen der Höhenpaßpunkte und für die 4 Abbildungen in Tabelle 12 zusammengestellt. Abgesehen von den Maximalfehlern in Z sind nur die quadratischen Mittelwerte jeweils wieder in m bezogen auf das Gelände und in (μm) im Bildmaßstab angegeben.

Aus der Tabelle 12 ist zunächst sehr deutlich zu sehen, daß die Anordnung der Höhenpaßpunkte überhaupt keinen Einfluß auf die Lageverzerrungen hat. Die quadratischen Mittelwerte der inneren und der äußeren Lageverzerrungen bleiben innerhalb jeder der geodätischen Abbildungen konstant, unabhängig von der Anzahl und damit vom Abstand der Höhenpaßpunktketten.

Dagegen sind die Höhenverzerrungen der ausgeglichenen Blöcke bei allen 4 geodätischen Abbildungen deutlich von der Anzahl der Höhenpaßpunktketten abhängig. Der einfachste (wegen systematischer Fehler in der Praxis stets auszuschließende) Fall mit nur 2 Paßpunktketten zeigt stets die größten Höhenfehler. Offensichtlich erfährt in diesem Fall fehlender Redundanz der Höhenpaßpunkte der Block unter der Wirkung der Abbildungsverzerrungen jeweils die volle (sekun-

Anzahl der Höhenketten	innere Verzerrung			äußere Verzerrung			
	m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_Z

Gauß-Krüger Abbildung

2 (i=30)	0.065 (0.8)	0.008 (0.1)	0.032 (0.4)	0.754 (9.4)	0.667 (8.3)	0.429 (5.4)	0.652 (8.2)
3 (i=15)	"	"	"	"	"	0.031 (0.4)	0.063 (0.8)
4 (i=10)	"	"	"	"	"	0.018 (0.2)	0.036 (0.5)

Lambert Abbildung

2 (i=30)	0.007 (0.1)	0.068 (0.9)	0.035 (0.4)	0.690 (8.6)	0.691 (8.6)	0.448 (5.6)	0.637 (8.0)
3 (i=15)	"	"	"	"	"	0.033 (0.4)	0.066 (0.8)
4 (i=10)	"	"	"	"	"	0.019 (0.2)	0.038 (0.5)

Stereographische Abbildung

2 (i=30)	0.033 (0.4)	0.016 (0.2)	0.016 (0.2)	0.705 (8.8)	0.672 (8.4)	0.122 (1.5)	0.215 (2.7)
3 (i=15)	"	"	"	"	"	0.056 (0.7)	0.099 (1.2)
4 (i=10)	"	"	"	"	"	0.040 (0.5)	0.093 (1.2)

Ordinatentreue Abbildung

2 (i=30)	0.093 (1.2)	0.133 (1.7)	0.016 (0.2)	0.059 (0.7)	1.043 (13.0)	10.885 (136)	15.005 (188)
3 (i=15)	"	"	"	"	"	1.153 (14.4)	2.015 (25.2)
4 (i=10)	"	"	"	"	"	0.774 (9.7)	1.538 (19.2)
6 (i= 6)	"	"	"	"	"	0.200 (2.5)	0.569 (7.1)

Tab. 12 Innere und äußere Verzerrungen in Form von quadratischen Mittelwerten bzw. Maximalwerten in Abhängigkeit von der Anzahl der Höhenpaßpunktketten. Angaben in m im Gelände und in (μ m) im Bildmaßstab - $15 \times 30 = 450$ Modelle, WW, Bildmaßstab 1:80 000, 4 Lagepaßpunkte bzw. dichte Randbesetzung bei der ordinatentreuen Abbildung

däre) Höhendeformation, bei im übrigen dadurch ebenfalls erklärter extrem geringer interner Verzerrungsbeträge. Bei zunehmender Verdichtung der Höhenpaßpunkte auf 3 oder 4 Ketten nehmen die verbleibenden absoluten Höhenverzerrungen zunächst drastisch ab, um offenbar dann annähernd proportional mit der abnehmenden Überbrückungsdistanz weiter zurückzugehen. Dieser Effekt zeigt sich bei allen Abbildungen, auch der nicht-konformen, in etwa gleicher Weise.

Bezüglich der Beträge kann der Einfluß der Höhenpaßpunktanordnung ab 3 Paßpunktketten für alle 3 konformen Abbildungen mit Werten $< 1 \mu\text{m}$ völlig vernachlässigt werden. Der Einfluß der Abbildungsverzerrung auf die Höhen wird - nach vorausgegangener Erdkrümmungskorrektur - schon durch wenige Höhenpaßpunkte praktisch völlig unterdrückt. Für die ordinatentreue Abbildung sind die Höhenfehler bei dem hier angenommenen ungünstigen Fall der dichten Randbesetzung der Lagepaßpunkte wesentlich größer. Obwohl hier ebenfalls eine drastische Verminderung der äußeren Höhenverzerrungen beim Übergang von 2 auf 3 Höhenketten zu beobachten ist, beträgt der mittlere Höhenfehler bei 3 Höhenketten noch $14 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab, ist also nicht mehr so weit unter der Grenze der Vernachlässigbarkeit. Da die absoluten Höhenverzerrungen bei dieser Abbildung sehr stark von der Anordnung der Lagepaßpunkte abhängig sind, wird dieser Fall unten bei der Untersuchung des Einflusses der Lagepaßpunkte auf die Höhengenaugigkeit wieder aufgegriffen werden.

Wir haben hier den Einfluß der Anordnung der Höhenpaßpunkte nur an einem einzelnen Block untersucht. Wie sich später bei der Untersuchung von Blockgröße und Bildmaßstab zeigen wird, sind die Höhenverzerrungen der ausgeglichenen Punkte bei gleichem Bildmaßstab und konstant bleibendem Abstand zwischen den Höhenketten praktisch nicht von der Blockgröße beeinflusst. Bei gleicher Blockgröße nehmen die Höhenfehler dann etwa linear mit dem Bildmaßstabsfaktor ab.

Einfluß der Lagepaßpunkte

Für alle 4 Abbildungen wird, jeweils der gleiche Block wie oben bei der Untersuchung der Anordnung der Höhenpaßpunkte benützt. Die Anordnung der Lagepaßpunkte wird in 4 Versionen variiert, wobei nur Punkte am Rand des Blocks Verwendung finden. Die 4 Versionen I - IV steigern die Anzahl der Lagepaßpunkte von 4 (in den Blockecken, $i=30b$) über 8 ($i=15b$) auf 12 ($i=10b$) und 60 (sogenannte dichte Randbesetzung, $i=2b$). Für die ordinatentreue Abbildung wird noch eine zusätzliche Version mit 24 Lagepaßpunkten ($i=5b$) eingeschoben, um die komplizierten Beziehungen zwischen der Anordnung der Lagepaßpunkte und den Blockverzerrungen bei dieser Abbildung etwas genauer betrachten zu können. Für die Höhenpaßpunktanordnung, die keinen Einfluß auf die Lageverzerrungen hat, wird die Anordnung von nur 2 Höhenketten gewählt, um somit stets den ungünstigsten Fall abzusichern.

In Tabelle 13 sind in Abhängigkeit von der Dichte der Lagepaßpunkte am Blockrand die nach der Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen verbleibenden Wirkungen der geodätischen Verzerrungen für alle 4 Abbildungen zusammengestellt. Die Werte beziehen sich wiederum auf die Mittelwerte (m_H , m_R , m_Z) der Verbesserungen sowie die Mittelwerte und die Maximalwerte der wahren Koordinatenfehler

Anzahl der Lage - PP	innere Verzerrung			äußere Verzerrung					
	m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z

Gauß-Krüger Abbildung

4 (i=30b)	0.065 (0.8)	0.008 (0.1)	0.032 (0.4)	0.754 (9.4)	0.667 (8.3)	0.429 (5.4)	1.925 (24)	1.521 (19)	0.652 (8.2)
8 (i=15b)	0.066 (0.8)	0.005 (0.1)	0.033 (0.4)	0.116 (1.5)	0.091 (1.1)	0.441 (5.5)	0.315 (3.9)	0.250 (3.1)	0.618 (7.7)
12 (i=10b)	"	"	"	0.041 (0.5)	0.026 (0.3)	0.431 (5.4)	0.113 (1.4)	0.076 (1.0)	0.598 (7.5)
60 (i= 2b)	"	"	"	0.001 (0.0)	0.000 (0.0)	0.380 (4.8)	0.005 (0.1)	0.001 (0.0)	0.522 (6.5)

Lambert Abbildung

4 (i=30b)	0.007 (0.1)	0.068 (0.9)	0.035 (0.4)	0.690 (8.6)	0.691 (8.6)	0.448 (5.6)	1.598 (20)	1.570 (20)	0.637 (8.0)
8 (i=15b)	"	"	"	0.093 (1.2)	0.110 (1.4)	0.432 (5.4)	0.235 (2.9)	0.303 (3.8)	0.617 (7.7)
12 (i=10b)	"	"	"	0.025 (0.3)	0.040 (0.5)	0.417 (5.2)	0.068 (0.9)	0.108 (1.4)	0.577 (7.2)
60 (i= 2b)	"	"	"	0.001 (0.0)	0.001 (0.0)	0.356 (4.6)	0.001 (0.0)	0.004 (0.1)	0.484 (6.1)

Stereographische Abbildung

4 (i=30b)	0.033 (0.4)	0.016 (0.2)	0.016 (0.2)	0.705 (8.8)	0.672 (8.4)	0.122 (1.5)	1.622 (20)	1.540 (19)	0.195 (2.4)
8 (i=15b)	"	"	"	0.103 (1.3)	0.099 (1.2)	0.144 (1.8)	0.256 (3.2)	0.265 (3.3)	0.215 (2.7)
12 (i=10b)	"	"	"	0.033 (0.4)	0.032 (0.4)	0.152 (1.9)	0.090 (1.1)	0.088 (1.1)	0.216 (2.7)
60 (i= 2b)	"	"	"	0.001 (0.0)	0.000 (0.0)	0.156 (2.0)	0.003 (0.0)	0.001 (0.0)	0.216 (2.7)

Ordinatentreue Abbildung

4 (i=30b)	0.039 (0.5)	0.013 (0.2)	0.019 (0.2)	0.910 (11)	1.474 (18)	0.573 (7.2)	2.323 (29)	5.404 (68)	0.813 (10)
8 (i=15b)	0.049 (0.6)	0.034 (0.4)	0.022 (0.3)	1.387 (17)	0.988 (12)	1.641 (20)	3.573 (45)	4.114 (51)	2.224 (28)
12 (i=10b)	0.065 (0.8)	0.059 (0.7)	0.025 (0.3)	1.092 (14)	0.821 (10)	3.962 (50)	3.385 (42)	3.316 (42)	5.504 (67)
24 (i= 5b)	0.080 (1.0)	0.106 (1.3)	0.021 (0.3)	0.366 (4.6)	0.836 (11)	8.583 (107)	1.731 (22)	1.531 (19)	11.865 (148)
60 (i= 2b)	0.093 (1.2)	0.133 (1.7)	0.016 (0.2)	0.059 (0.7)	1.043 (13)	10.885 (136)	0.471 (5.9)	1.819 (23)	15.005 (188)

Tab. 13 Innere und äußere Verzerrungen in Form von quadratischen Mittelwerten bzw. Maximalwerten in Abhängigkeit vom Abstand der Lagepaßpunkte am Blockrand. Angaben in m im Gelände und (μ m) im Bildmaßstab - 15 x 30 = 450 Modelle, WW, Bildmaßstab 1:80 000, 2 Höhenpaßpunktketten; Verfahren der unabhängigen Modelle

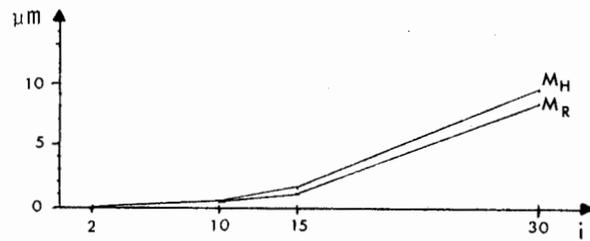
(M_H , M_R , M_Z bzw. Max_H , Max_R , Max_Z) sind in m und (μm) angegeben. Betrachten wir zunächst die Ergebnisse der 3 konformen Abbildungen, ist zunächst festzustellen, daß die internen Spannungen völlig unabhängig von der Anordnung der Lagepaßpunkte sind, obwohl die absoluten Lageverzerrungen mit der zunehmenden Anzahl von Lagepaßpunkten sehr drastisch abnehmen.

Stellen wir die quadratischen Mittelwerte M_H und M_R der absoluten Lagekoordinatenfehler graphisch als Funktion des Paßpunktabstands i dar (vgl. Bild 32), sehen wir sehr deutlich, daß die absolute Lagegenauigkeit bei allen drei konformen Abbildungen von der Verzerrung der geodätischen Abbildung gleich beeinflußt ist. Bei gleicher Paßpunktanordnung besteht im Mittel praktisch kein Unterschied zwischen den verschiedenen konformen Abbildungen. Im Fall der Minimalbesetzung mit nur 4 Lagepaßpunkten ist der Gesamteinfluß der Verzerrungen mit etwa $9 \mu\text{m} \approx 70 \text{ cm}$ zwar deutlich ausgeprägt. Dieser Betrag geht aber im Vergleich zu den in diesem Fall wesentlich größeren Wirkungen der zufälligen Meßfehler noch völlig unter und kann daher als vernachlässigbar gelten. Bei den dichteren Paßpunktrandbesetzungen nimmt der Einfluß der Abbildungsverzerrungen rasch ab und ist schon ab 8 Paßpunkten ($i=15b$) völlig unbedeutend.

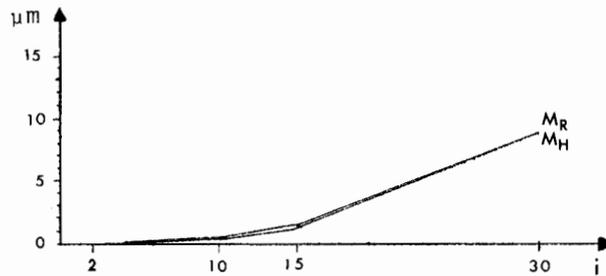
Bei den konformen Abbildungen hat die Anzahl der Lagepaßpunkte auch einen allerdings sehr geringen Einfluß auf die absolute Höhengenaugigkeit der Blöcke. Bei der Gauß-Krüger- und der Lambert-Abbildung nehmen die absoluten Höhenfehler geringfügig mit zunehmender Anzahl von Lagepaßpunkten ab, bei der stereographischen Abbildung steigen sie leicht. Der Unterschied der Höhengenaugigkeit zwischen den Extremfällen der Lagepaßpunktanordnung ist bei allen 3 konformen Abbildungen aber nur 20 - 30 % und braucht nicht weiter beachtet zu werden, da die Absolutbeträge der Höhenfehler trotz des extrem ungünstigen Falls der Höhenpaßpunktbesetzung sehr gering sind.

Die nicht-konforme ordinatentreue Abbildung zeigt wiederum ein völlig abweichendes Verhalten. Schon bei den internen Verzerrungen, d.h. bei den Verbesserungen selbst zeigt sich bei geringen Absolutbeträgen um $1 \mu\text{m}$ ein mit der Anzahl der Lagepaßpunkte zunehmender Einfluß in der Lage. Die Beträge der Höhenverbesserungen nehmen zunächst mit der Anzahl der Lagepaßpunkte zu, bei weiterer Verdichtung dann wieder ab. Die Beträge ($< 0.3 \mu\text{m}$) und die Änderungen der internen Höhenverzerrungen sind jedoch so gering, daß sie keiner weiteren Beachtung bedürfen.

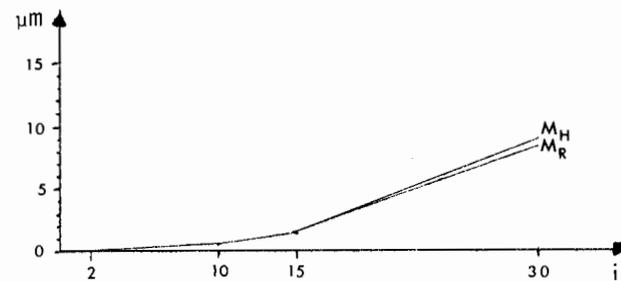
Während die internen Verzerrungen bei der nicht-konformen Abbildung insgesamt noch zu vernachlässigen wären nehmen die äußeren Verzerrungen in allen 3 Koordinatenkomponenten sehr große Beträge an und sind zudem stark von der Anzahl der Lagepaßpunkte abhängig. Die absoluten Fehler der Rechts- und der Hochwerte zeigen unter sich ein gegenläufiges Verhalten, nehmen aber mit zunehmender Anzahl der Lagepaßpunkte insgesamt ab. Immerhin betragen die Punktfehler auch bei der dichten Paßpunktrandbesetzung noch über $13 \mu\text{m}$. Sie können also im Vergleich zu den Wirkungen der zufälligen Fehler nicht mehr vernachlässigt werden.



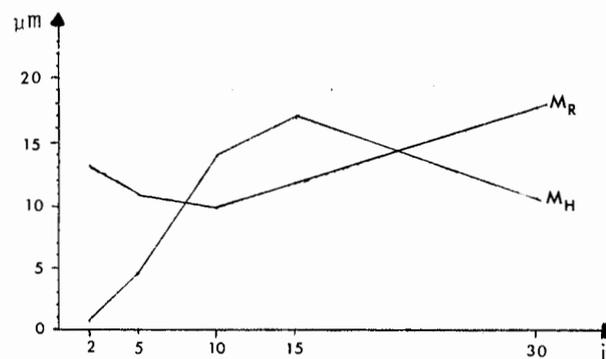
Gauß-Krüger Abbildung



Lambert Abbildung



Stereographische Abbildung



Ordinaten-treue Abbildung

Bild 32 Abhängigkeit der absoluten Lagefehler vom Abstand der Lagepaßpunkte am Blockrand

Dieselbe Aussage der großen absoluten Verzerrungen und der starken Abhängigkeit von der Lagepaßpunktbesetzung gilt bei der ordinatentreuen Abbildung auch für die Höhenkoordinaten. Überraschenderweise nimmt der Fehlereinfluß mit zunehmender Anzahl der Lagepaßpunkte stark zu. Während der mittlere Höhenfehler bei 4 Lagepaßpunkten noch bei $7 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab liegt, ist er bei der dichten Randbesetzung mit 60 Lagepaßpunkten auf $136 \mu\text{m}$ angewachsen. Diese großen Höhenfehler entstehen hauptsächlich dadurch, daß die Z-Koordinaten der Projektionszentren benachbarter Modelle von den Maßstabsverzerrungen beeinflusst sind. Ehe festgestellt wird, daß die Höhenverzerrungen nicht mehr vernachlässigt werden können, muß an die bei der Untersuchung des Höhenpaßpunkteinflusses getroffene Feststellung erinnert werden, daß 2 Höhenpaßpunktketten wie hier in der Praxis aus anderen Gründen ausscheiden. Drei oder mehr Höhenpaßpunktketten vermindern die Höhenwirkungen der geodätischen Abbildungsverzerrungen sofort um 1 Zehnerpotenz. Aber auch dann beträgt der mittlere Höhenfehler im Fall der ordinatentreuen Abbildung bei $i=15b$ immer noch $14 \mu\text{m}$ und fällt erst bei $i=10b$ unter $10 \mu\text{m}$. Die Fehler sind also nur bei relativ kurzen Überbrückungsdistanzen zu vernachlässigen.

Zusammengefaßt kann gesagt werden, daß die inneren Verzerrungen nach der Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen praktisch bei allen 3 konformen Abbildungen weder von den Lagepaßpunkten noch von den Höhenpaßpunkten beeinflusst werden. Die absoluten Höhenverzerrungen können bei allen 4 Abbildungen ab mindestens 3 Höhenpaßpunktketten vernachlässigt werden. Bei den konformen Abbildungen genügen schon 4 Lagepaßpunkte um den Einfluß der geodätischen Verzerrung auf die Lagekoordinaten auch für große Blöcke vernachlässigbar zu machen. Bei der nichtkonformen ordinatentreuen Abbildung dagegen sind die verbleibenden Verzerrungen so groß, daß der Einfluß von der geodätischen Abbildung bei großen Blöcken und kleinen Bildmaßstäben in der Regel nicht mehr vernachlässigt werden kann.

III.4.4 Einfluß der Blocklage

Jede der in dieser Untersuchung herangezogenen geodätischen Abbildungen hat eine verzerrungsfrei abgebildete Null-Linie oder Nullstelle: Bei der Gauß-Krüger Abbildung der Bezugs-Meridian, bei der Lambert Abbildung (mit nur einem längentreu abgebildeten Parallelkreis) der Normalparallelkreis, bei der stereographischen Abbildung der Berührungspunkt der Abbildungsebene (Tangentialebene an der vom Ellipsoid konform abgebildeten Kugel), bei der ordinatentreuen Abbildung ein längentreu abgebildeter Bezugs-Meridian. In der Nähe solcher Bezugslinien oder -stellen ist die Verzerrung sehr klein, sie nimmt aber mit wachsendem Abstand davon rasch zu. Dieser Zuwachs ist nicht linear, so daß die relative Verzerrung innerhalb des von einem Block bedeckten Gebiets nicht nur von der Größe sondern auch von der Lage des Gebiets innerhalb der Abbildungszone abhängt. Im Prinzip muß die Lage des Gebiets durch mindestens 2 unabhängige Größen, wie z.B. die Hoch- und Rechtskoordinaten der Gebietsmitte (gegebenenfalls mit einer zusätzlichen Richtungsangabe) beschrieben werden. Wir haben aber bisher die Gebietslage immer nur eindimensional durch den Abstand der Blockmitte zur Bezugslinie oder zum Nullpunkt des Abbildungssystems angegeben.

Wenn die Abbildung sphärisch ist, d.h. wenn die geodätische Abbildung von einer Kugel ausgeht, ist diese eindimensionale Angabe der Gebietslage ausreichend, denn alle Gebiete gleicher Form und Größe auf der Kugel, die vom Nullbezug der Abbildung gleich weit entfernt sind, erfahren bei der Abbildung von der Kugel in die Ebene gleiche Verzerrung (bei nicht symmetrischen Abbildungen wie z.B. den Kegelprojektionen ist zusätzlich noch ein Vorzeichen erforderlich zur Unterscheidung, auf welcher Seite der Abbildungszone das Gebiet liegt). Bei der sphärischen Abbildung des Ellipsoids ist diese eindimensionale Angabe der Gebietslage nicht mehr streng richtig. Wie wir aber unten sehen werden, ist der Unterschied der Blockausgleichsergebnisse zwischen Blöcken verschiedener Lage aber gleichen Abstands zum Nullbezug der Abbildung wegen der geringen Abplattung des Erdellipsoids vernachlässigbar, so daß wir die Blocklage auch bei sphäroidischen Abbildungen eindimensional durch den Abstand von der Blockmitte zum Nullbezug der Abbildung angeben dürfen.

Da sich die Angabe der Gebietslage nur auf die Blockmitte bezieht, gibt sie allein ohne Angabe der Blockgröße noch nicht genügend Informationen über die relativen Abbildungsverzerrungen in dem vom Block bedeckten Gebiet. Es ist deshalb notwendig, bei der Untersuchung über den Einfluß der Blocklage auch die Blockgröße mit zu berücksichtigen. Weil aber im nächsten Kapitel noch eingehend der Einfluß der Blockgröße untersucht werden soll, werden wir hier nur zwei extreme Blockgrößen in Betracht ziehen, die die Mitwirkung der Blockgröße bei unterschiedlichen Blocklagen repräsentativ zeigen können. Die eine Blockgröße umfaßt etwa $150 \times 150 \text{ km}^2$, die andere $45 \times 45 \text{ km}^2$. Sie unterscheiden sich also etwa um den Faktor 10 in der Fläche.

Für beide Blöcke wird der Bildmaßstab 1:80 000 angenommen. Der große Block enthält somit 10 Streifen mit je 20 Modellen, der kleine Block 3 Streifen mit je 6 Modellen. In der Praxis wird es zwar kaum vorkommen, daß ein Gebiet von nur $45 \times 45 \text{ km}^2$ im Bildmaßstab 1:80 000 aufgenommen wird, aber wie wir später bei der Untersuchung des Bildmaßstabs sehen werden, sind die Auswirkungen der Abbildungsverzerrungen umso größer, je kleiner der Bildmaßstab ist. Somit stellen hier die Ergebnisse gewisse Grenzwerte für die konventionelle Praxis dar. Außerdem können wir bei diesem kleinen Bildmaßstab den Einfluß der Blocklage besonders deutlich beobachten.

Um die Fehlerwirkungen deutlich in Erscheinung treten zu lassen, wählen wir für die 3 konformen Abbildungen die minimale Version I mit nur 4 Lagepaßpunkten und nur 2 Höhenpaßpunktketten. Für die nicht-konforme ordinatentreue Abbildung, bei der die Anordnung der Lagepaßpunkte einen großen Einfluß auf die Höhenverzerrungen hat, wird zusätzlich der Fall der dichten Randbesetzung der Lagepaßpunkte einbezogen.

Weil die Nullbezüge der Abbildungen sehr unterschiedlich sind und somit auch die Blocklage jeweils unterschiedlich anzugeben ist, wird im folgenden der Einfluß der Blocklage für jede Abbildung getrennt untersucht.

a) Gauß-Krüger Abbildung

Die Gauß-Krüger Abbildung hat als Bezugslinie einen längentreu abgebildeten Meridian, den sog. Nullmeridian. Die Abbildungsverzerrungen sind innerhalb einer Abbildungszone symmetrisch zu diesem Nullmeridian. Es genügt also, den Einfluß der Blocklage nur für eine Hälfte einer Abbildungszone zu untersuchen.

Für beide Blockgrößen wurden jeweils 4 Fälle mit 0, 100, 200 und 400 km Abstand vom Nullmeridian durchgerechnet. In der Gegend von 50°N entsprechen die vier Blocklagen etwa den Längenunterschieden von 0, 1.5, 3 und 6 Grad. Bei dem größten Abstand von 400 km liegen die Blöcke bei 6-Grad-Streifen schon in dem Gebiet der Nachbarstreifen, und 3-Grad-Streifen sogar in dem Gebiet des übernächsten Streifens.

Die resultierenden inneren und äußeren Verzerrungswirkungen sind in Tabelle 14a bzw. 14b für den großen Block und für den kleinen Block dargestellt. Die Angaben sind wiederum in m im Landessystem und in (μm) im Bildmaßstab und betreffen die mittleren und die maximalen Werte der Lage- und der Höhenverzerrungen.

Bezüglich der inneren Verzerrungen der ausgeglichenen Blöcke stellt man zunächst fest, daß bei jeweils gleicher Blocklage praktisch kein Unterschied zwischen dem großen und dem kleinen Block besteht, obwohl der große Block die mehr als 10-fach größere Fläche auf dem Ellipsoid bedeckt. Offenbar haben alle Blöcke gleichen Bildmaßstabs und gleicher Blocklage in einem Gauß-Krüger Streifen unabhängig von ihrer Größe etwa die gleiche innere Verzerrung. Die Beträge der inneren Verzerrungen sind klein, sie übersteigen erst ab 200 km Abstand vom Nullmeridian Werte von 0.1 m im Gelände bzw. 1 μm im Bildmaßstab.

Wie wir später bei der Untersuchung des Bildmaßstabs noch sehen werden, sind die inneren Verzerrungen, d.h. die Beträge der Verbesserungen stark vom Bildmaßstab abhängig. Mit größerem Bildmaßstab werden die Verbesserungen stetig kleiner, und zwar auch im Bildmaßstab ausgedrückt. Daß zwei verschieden große Blöcke bei gleicher Blocklage ungefähr dieselben inneren Verzerrungen erfahren hat also seine primäre Ursache im gleichen Bildmaßstab. Eine gewisse Abweichung zeigt sich lediglich bei dem Fall, daß die Blockmitte auf dem Nullmeridian liegt.

Die Erklärung ist vermutlich darin zu suchen, daß in diesem Fall die Unterschiede der geodätischen Verzerrungen zwischen Blockmitte und östlichem bzw. westlichem Rand größer sind.

Aus der vorangegangenen Untersuchung der Paßpunktanordnungen wissen wir, daß die inneren Verzerrungen bei allen drei konformen Abbildungen nicht von der Anordnung der Paßpunkte beeinflußt sind. Die in Tabelle 14 angegebenen inneren Verzerrungen gelten also auch für andere günstigere Paßpunktanordnungen. Da die inneren Verzerrungen außerdem bei größerem Bildmaßstab kleiner werden, stellen die Angaben der Tabelle 14 jeweils eine obere Grenze dar, abgesehen von noch kleineren Bildmaßstäben. Außerdem ist die halbe Breite eines 6-Grad-Streifens höchstens 390 km bzw. eines 3-Grad-Streifens nur 220 km, so daß die inneren Verzerrungswerte in Lage und Höhe in der Praxis der Aerotriangulation in der Regel völlig vernachlässigt werden können.

Abstand vom Null-Meridian	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
	m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
0 km	0,020 (0,3)	0,005 (0,1)	0,009 (0,1)	0,226 (2,8)	0,195 (2,4)	0,173 (2,2)	0,548 (6,9)	0,437 (5,5)	0,267 (3,3)
100 km	0,060 (0,8)	0,005 (0,1)	0,029 (0,4)	0,226 (2,8)	0,195 (2,4)	0,173 (2,2)	0,548 (6,9)	0,440 (5,5)	0,259 (3,2)
200 km	0,114 (1,4)	0,011 (0,1)	0,058 (0,7)	0,226 (2,8)	0,196 (2,5)	0,174 (2,2)	0,548 (6,9)	0,443 (5,4)	0,251 (3,1)
400 km	0,223 (2,5)	0,038 (0,5)	0,109 (1,4)	0,227 (2,6)	0,196 (2,5)	0,180 (2,3)	0,547 (6,8)	0,449 (5,6)	0,257 (3,2)

Tab. 14a Einfluß der Blocklage beim großen Block
150 km x 150 km, 50°N

Abstand vom Null-Meridian	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
	m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
0 km	0,006 (0,1)	0,002 (0,0)	0,002 (0,0)	0,010 (0,1)	0,005 (0,1)	0,014 (0,2)	0,022 (0,3)	0,009 (0,1)	0,019 (0,2)
100 km	0,059 (0,7)	0,004 (0,1)	0,027 (0,3)	0,011 (0,1)	0,051 (0,6)	0,021 (0,3)	0,023 (0,3)	0,081 (1,0)	0,030 (0,4)
200 km	0,114 (1,4)	0,010 (0,1)	0,053 (0,7)	0,013 (0,2)	0,099 (1,2)	0,030 (0,4)	0,026 (0,3)	0,153 (1,9)	0,047 (0,6)
400 km	0,227 (2,8)	0,037 (0,5)	0,105 (1,3)	0,034 (0,4)	0,196 (2,5)	0,056 (0,7)	0,062 (0,8)	0,295 (3,7)	0,085 (1,1)

Tab. 14b Einfluß der Blocklage beim kleinen Block
45 km x 45 km 50°N

Abstand vom Null-Meridian	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
	m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
100 km	0,062 (0,8)	0,005 (0,1)	0,030 (0,4)	0,226 (2,6)	0,202 (2,5)	0,180 (2,0)	0,495 (6,2)	0,455 (5,7)	0,257 (3,2)
200 km	0,117 (1,5)	0,005 (0,1)	0,056 (0,7)	0,226 (2,6)	0,202 (2,5)	0,180 (2,0)	0,495 (6,2)	0,455 (5,7)	0,257 (3,2)

Tab. 14c Einfluß der Blocklage beim großen Block
in der Nähe des Äquators (1°N)

Tab. 14a - 14c Innere und äußere Wirkung der Abbildungsverzerrungen in Abhängigkeit von der Blocklage - Gauß-Krüger Abbildung, 1:80 000, 4 Lage-Paßpunkte, 2 Höhenpaßpunktketten, Methode der unabhängigen Modelle, Angaben in m und (μ m)

Ein deutlich anderes Verhalten zeigen dagegen die Ergebnisse der äußeren Verzerrungen. Die absoluten Koordinatenfehler der beiden Blockgrößen unterscheiden sich deutlich und ebenso ihre Abhängigkeit von der Blocklage. Die äußeren Verzerrungen sind beim großen Block zwar deutlich größer als beim kleinen Block, aber sie sind praktisch unabhängig von der Blocklage, im Gegensatz zu einer deutlichen Abhängigkeit des kleinen Blocks. Die mittleren Fehler der ausgeglichenen Koordinaten des großen Blocks bleiben bei allen Blocklagen ziemlich konstant und betragen 23 cm ($3 \mu\text{m}$) in der Hochrichtung, 20 cm ($2.5 \mu\text{m}$) in der Rechtsrichtung und 18 cm ($2 \mu\text{m}$) in der Höhe. Diese Beträge sind in der Praxis zu vernachlässigen.

Im Gegensatz dazu wachsen die mittleren Fehler der ausgeglichenen Koordinaten des kleinen Blocks schnell mit wachsender Entfernung vom Nullmeridian, vor allem in der Rechtsrichtung. M_R nimmt bei jeder Vergrößerung des Abstandes vom Nullmeridian um 100 km etwa linear um 5 cm ($0.6 \mu\text{m}$) zu. Bei 400 km Abstand ist M_R mit 0.20 m ($2.5 \mu\text{m}$) schon 39fach so groß wie bei der Ausgangslage. Dieser Wert kann allerdings noch stets vernachlässigt werden. Da die Fehler der Rechtskoordinaten beim kleinen Block schnell mit wachsendem Abstand vom Nullmeridian zunehmen, beim großen Block jedoch fast unverändert bleiben, gibt es einen bestimmten Abstand, der etwa bei 400 km liegt, ab dem die Fehler des kleinen Blocks diejenigen des großen Blocks übersteigen.

In der Hochrichtung und in der Höhe wachsen die quadratischen Fehlerwerte M_H und M_Z des kleinen Blocks zunächst mit wachsendem Abstand vom Nullmeridian nur langsam, bei größerem Abstand zunehmend schneller. Aber bis zum Abstand von 400 km sind die Fehler erst auf das 3 bis 4fache angestiegen. Da der maximale Abstand vom Nullmeridian selbst bei 6-Grad-Streifen < 400 km bleibt, sind die äußeren Verzerrungen im Fall der Gauß-Krüger Abbildung im allgemeinen bei großen Blöcken stets größer als bei kleinen. Diese Fehlerwirkungen sind dann von der Blocklage fast nicht beeinflußt und sind mit Beträgen $< 2 \mu\text{m}$ so klein, daß sie stets vernachlässigt werden können.

Wir haben bisher den Einfluß der Blocklage für die beiden unterschiedlichen Blockgrößen in der Gegend von 50° nördlicher Breite untersucht. Um zu demonstrieren, daß die Verschiebung des Blocks in Nord-Süd-Richtung innerhalb eines Gauß-Krüger Streifens auch tatsächlich keinen nennenswerten zusätzlichen Einfluß bewirkt und somit die eindimensionale Angabe der Blocklage nur durch den Abstand vom Nullmeridian ausreichend ist, wird der große Block von $150 \times 150 \text{ km}^2$ Ausdehnung zum Vergleich in die Nähe des Äquators verschoben (Blockmitte bei 1° nördlicher Breite). Die Ergebnisse der Tabelle 14c zeigen im Vergleich mit Tabelle 14a, daß bei gleichen Entfernungen vom Nullmeridian praktisch kein Unterschied besteht. Die Verzerrungen eines Blocks mit einer bestimmten Entfernung vom Nullmeridian sind innerhalb eines Gauß-Krüger Streifens praktisch nicht von der geographischen Breite beeinflußt. Die Schlußfolgerung, daß der Einfluß der Blocklage stets vernachlässigt werden kann, ist somit bestätigt. Ebenso ist bestätigt, daß die Werte der Tabelle 14 Grenzwerte darstellen, die in der Regel überschritten werden.

b) Lambertsche Abbildung

Die Lambertsche Abbildung hat einen Parallelkreis als Bezugslinie, sie unterscheidet sich somit von den Abbildungen mit einem Meridian als Bezugslinie in zwei Hauptpunkten: Die Verzerrung ist innerhalb einer abgebildeten Zone nicht symmetrisch zur Bezugslinie, und die Verzerrungen verschiedener Abbildungszonen sind verschieden. Aber bei der gewöhnlich sehr schmalen Zonenbreite (weniger als 300 - 400 km nördlich und südlich des Normalparallelkreises) ist zu erwarten, daß die unterschiedlichen Verzerrungswirkungen auf die Blockausgleichung zwischen der nördlichen und der südlichen Hälfte einer Zone bzw. zwischen unterschiedlichen Zonen mit verschiedenen Normalparallelkreisen sehr klein und in der Praxis der Aerotriangulation vernachlässigbar sein werden. Dies wird im folgenden bestätigt werden:

Zunächst wollen wir den Unterschied der Verzerrungswirkungen zwischen dem nördlichen und südlichen Teil derselben Abbildungszone feststellen, also Blöcke vergleichen, die dieselbe Größe und Paßpunktanordnung haben, auch gleich weit vom Normalparallelkreis entfernt sind, aber jeweils in unterschiedlichen Hälften des Systems nördlich bzw. südlich des Normalparallelkreises liegen. Dazu nehmen wir den großen Block mit $150 \times 150 \text{ km}^2$ Ausdehnung und betrachten ihn in einem System der Lambert Abbildungen mit dem Normalparallelkreis 40°N an vier Stellen 330 km bzw. 1100 km nördlich (+) und südlich (-) vom Normalparallelkreis entfernt.

Der größte Abstand von 1100 km entspricht einem Breitenunterschied von 10 Graden. In der Praxis der Landesvermessung gibt es keine Lambert Systeme dieser Ausdehnung. Aber wir nehmen hier diesen Extremfall, um die vermutlich kleinen Effekte deutlich in Erscheinung treten zu lassen.

Tabelle 15a zeigt die Ergebnisse dieser Voruntersuchung. Die absoluten Lage- und Höhenverzerrungen der Blöcke sind bei gleichem Abstand nördlich und südlich vom Normalparallelkreis fast völlig identisch. Die inneren Verzerrungen zeigen leichte Unterschiede der Art, daß die Verbesserungen eines Blocks in der südlichen Hälfte des Systems etwas geringer sind als in der nördlichen Hälfte. Die Unterschiede der quadratischen Mittelwerte bleiben jedoch selbst im Extremfall $< 1 \mu\text{m}$, so daß genügend abgesichert ist, daß sich die Wirkungen der Abbildungsverzerrungen der Lambert-Abbildung nördlich und südlich des Normalparallelkreises praktisch nicht unterscheiden.

Aus Tabelle 15a ist weiter zu erkennen, daß der Unterschied in der absoluten Verzerrungswirkung zwischen Blöcken mit sehr unterschiedlicher Entfernung vom Normalparallelkreis sehr gering ist. Um diese Eigenschaft der Lambertschen Abbildung bei verschiedenen Blocklagen zu erhärten, wurden in der nördlichen Hälfte dieses Systems drei weitere Blocklagen mit 0, 110 und 660 km Abstand vom Normalparallelkreis untersucht (Tab. 15b) und dieselben Fälle mit der kleineren Blockgröße von $45 \times 45 \text{ km}^2$ wiederholt (Tab. 15c).

Vergleicht man die inneren Verzerrungen des großen mit dem kleinen Block bei gleicher Blocklage, so stellt man fest, daß sie praktisch nicht von der Blockgröße abhängig sind. Die Verzerrungen wirken sich auf die Verbesserungen hauptsächlich in der Rechtsrichtung und in der Höhe aus, in der Hochrichtung dagegen

Abstand vom Normal-Parallelkreis	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
	m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
+330 km	0,005 (0,1)	0,185 (2,3)	0,092 (1,2)	0,209 (2,6)	0,219 (2,7)	0,196 (2,5)	0,467 (5,8)	0,487 (6,1)	0,276 (3,5)
-330 km	0,005 (0,1)	0,177 (2,2)	0,088 (1,1)	0,208 (2,6)	0,218 (2,7)	0,207 (2,5)	0,466 (5,8)	0,484 (6,1)	0,290 (3,6)
+1100 km	0,009 (0,1)	0,668 (8,6)	0,339 (4,2)	0,212 (2,7)	0,222 (2,8)	0,286 (3,6)	0,472 (5,9)	0,495 (6,2)	0,407 (5,1)
-1100 km	0,007 (0,1)	0,576 (7,2)	0,287 (3,6)	0,212 (2,7)	0,224 (2,6)	0,279 (3,5)	0,474 (5,9)	0,497 (6,2)	0,386 (4,8)

Tab. 15a Einfluß der Blocklage nördlich und südlich des Normalparallelkreises, großer Block (150 km x 150 km), 40°N

Abstand vom Normal-Parallelkreis	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
	m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
0 km	0,005 (0,1)	0,021 (0,3)	0,010 (0,1)	0,208 (2,6)	0,217 (2,7)	0,192 (2,4)	0,464 (5,8)	0,482 (6,0)	0,273 (3,4)
+110 km	0,005 (0,1)	0,064 (0,8)	0,032 (0,4)	0,207 (2,6)	0,219 (2,7)	0,200 (2,5)	0,464 (5,8)	0,485 (6,1)	0,282 (3,5)
+330 km	0,005 (0,1)	0,185 (2,2)	0,092 (1,2)	0,209 (2,6)	0,219 (2,7)	0,196 (2,4)	0,467 (5,8)	0,487 (6,1)	0,276 (3,5)
+660 km	0,006 (0,1)	0,383 (4,8)	0,195 (2,4)	0,210 (2,6)	0,220 (2,8)	0,231 (2,9)	0,470 (5,9)	0,489 (6,1)	0,335 (4,2)

Tab. 15b Einfluß der Blocklage beim großen Block (150 km x 150 km), 40°N

Blocklage km	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
	m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
0	0,002 (0,0)	0,006 (0,1)	0,002 (0,0)	0,006 (0,1)	0,010 (0,1)	0,014 (0,2)	0,010 (0,1)	0,023 (0,3)	0,020 (0,3)
+110	0,002 (0,0)	0,060 (0,8)	0,029 (0,4)	0,049 (0,6)	0,011 (0,1)	0,020 (0,2)	0,078 (1,0)	0,023 (0,3)	0,029 (0,4)
+330	0,002 (0,0)	0,184 (2,2)	0,087 (1,1)	0,149 (1,9)	0,011 (0,1)	0,047 (0,6)	0,224 (2,8)	0,023 (0,3)	0,071 (0,9)
+660	0,002 (0,0)	0,379 (4,7)	0,180 (2,2)	0,307 (3,8)	0,011 (0,1)	0,094 (1,2)	0,455 (5,7)	0,023 (0,3)	0,139 (1,7)

Tab. 15c Einfluß der Blocklage beim kleinen Block (45 km x 45 km), 40°N

Blocklage km	System (Normal- Parallel- kreis)	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
		m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
0	40°N	0,005 (0,1)	0,021 (0,3)	0,010 (0,1)	0,208 (2,6)	0,217 (2,7)	0,192 (2,4)	0,464 (5,8)	0,482 (6,0)	0,273 (3,4)
	50°N	0,005 (0,1)	0,021 (0,3)	0,010 (0,1)	0,209 (2,6)	0,218 (2,7)	0,198 (2,5)	0,469 (5,9)	0,485 (6,1)	0,296 (3,7)
+330	40°N	0,005 (0,1)	0,185 (2,3)	0,092 (1,2)	0,209 (2,6)	0,219 (2,7)	0,196 (2,5)	0,467 (5,8)	0,487 (6,1)	0,276 (3,5)
	50°N	0,005 (0,1)	0,186 (2,3)	0,095 (1,2)	0,209 (2,6)	0,218 (2,7)	0,207 (2,6)	0,469 (5,9)	0,486 (6,1)	0,305 (3,8)

Tab. 15d Einfluß der Blocklage in verschiedenen Abbildungs-
 zonen, großer Block (150 km x 150 km)

Tab. 15a - 15d Innere und äußere Wirkung der Abbildungsverzerrungen in Ab-
 hängigkeit von der Blocklage - Lambert Abbildung, 1:80 000,
 4 Lagepaßpunkte, 2 Höhenpaßpunktketten, Methode der unab-
 hängigen Modelle - Angaben in m und (μ m)

sind die Verknüpfungen der Modelle fast fehlerfrei. Dies steht eindeutig mit dem Verlauf der Linien gleicher Maßstabsverzerrung (Bild 10b) im Zusammenhang, die etwa in der Rechtsrichtung verlaufen. Da die inneren Verzerrungen wie auch bei den anderen konformen Abbildungen von der Paßpunktanordnung nicht weiter beeinflußt sind, und da sie bei größerem Bildmaßstab nur geringer werden (auch bezogen auf den Bildmaßstab, vgl. III.4.6) verkörpern die Werte der Tabellen 15b und 15c, die sich auf den Bildmaßstab 1:80 000 beziehen für die jeweilige Blocklage praktische Grenzwerte für die konventionelle Aerotriangulation. Bei einer Systembreite von 6 Graden (330 km Ausdehnung nördlich und südlich vom Normalparallelkreis) ist der Einfluß der Lambertschen Abbildung auf die inneren Verzerrungen für die extremen Blocklagen im System höchstens 3 μ m in der Lage und 1 μ m in der Höhe, bezogen auf den Bildmaßstab. Der Einfluß von der Blocklage auf die inneren Verzerrungen steigt ungefähr linear mit der Entfernung vom Normalparallelkreis. Bei dem Bildmaßstab 1:80 000 nimmt der quadratische Mittelwert der Verbesserungen in der Lage um etwa 6 cm, in der Höhe um etwa 3 cm pro 100 km Abstand vom Normalparallelkreis zu, was nur 0.8 μ m bzw. 0.4 μ m im Bildmaßstab entspricht. Diese Raten stellen Grenzwerte dar, die bei größeren Bildmaßstäben nur unterschritten werden.

Bezüglich der äußeren Verzerrungen zeigt sich bei der Lambert-Abbildung eine ähnliche Erscheinung wie bei der Gauß-Krüger Abbildung. Während die äußeren Verzerrungen des großen Blocks fast unabhängig von der Blocklage sind, zeigt sich beim kleinen Block ein deutlicher Einfluß, der allerdings auf die Hochrichtung beschränkt ist. Der mittlere Fehler der Hochkoordinaten des kleinen Blocks wächst etwa linear um 5 cm (0.6 μ m im Bildmaßstab), der Höhenkoordinaten um etwa 1 cm (0.2 μ m im Bildmaßstab) pro 100 km Abstand vom Normalparallelkreis. Man könnte also wiederum hochrechnen, daß die mittleren Fehler der Hochkoordinaten des kleinen Blocks ab 660 km Abstand vom Normalparallelkreis die des großen Blocks übersteigen würden.

Dieser Fall tritt jedoch innerhalb einer Zonenbreite von 6 Grad und damit innerhalb tatsächlicher Landesvermessungssysteme nicht ein. Ebenso bleiben die Absolutbeträge der Verbesserungen in Lage und Höhe klein genug, um stets vernachlässigt werden zu können, zumal die in der Praxis weniger ungünstigen Paßpunktanordnungen die Beträge der Verzerrungswirkungen noch weiter reduzieren.

Nun verbleibt noch festzustellen, ob die Verzerrungswirkungen verschiedener benachbarter Lambert Abbildungen mit verschiedenen Normalparallelkreisen unterschiedlich ausfallen. Dazu nehmen wir als Beispiel zwei Lambert-Systeme mit den Normalparallelkreisen 40°N bzw. 50°N , die etwa 1100 km auseinander liegen.

In jedem System wird der große Block (150 km x 150 km) an zwei Stellen (0 und +330 km vom Normalparallelkreis entfernt) betrachtet. Die Ergebnisse, die in Tabelle 15d zusammengestellt sind, lassen keinerlei Unterschiede zwischen beiden Systemen erkennen. Lediglich in den Höhen scheint sich mit zunehmender geographischer Breite ein ganz geringfügiger ($0.1 \mu\text{m}$) Unterschied anzudeuten, der jedoch völlig unbeachtet bleiben kann.

c) Stereographische Abbildung

Bei dieser, in großer Näherung radialsymmetrischen Abbildung ist nur der Bezugspunkt verzerrungsfrei. Die Blocklage kann daher unabhängig vom Azimut allein durch den Radialabstand vom Bezugspunkt dargestellt werden.

Aus der vorabgegangenen Untersuchung wissen wir, daß die Flugrichtung Einfluß auf die Verzerrungswirkungen der geodätischen Abbildung hat. Die Flugrichtung ist bei dieser Abbildung nur relativ zu den Linien gleicher Maßstabsverzerrung (Bild 15c) wesentlich. Wenn sie annähernd senkrecht zu diesen Linien steht, hat die Abbildungsverzerrung den größten Einfluß auf die Höhenkoordinaten. Bei der Variation der Blocklage wird hier deshalb darauf geachtet, daß die Flugrichtung bezüglich der Linien gleicher Maßstabsverzerrung gleich bleibt. Der Einfachheit halber wählen wir hier die nord-südliche Flugrichtung und legen die Blockmitten stets auf den durch den Bezugspunkt gehenden Meridian. Nach den Erfahrungen mit der Lambert Projektion kann im übrigen sicher davon ausgegangen werden, daß sich stereographische Abbildungen mit verschiedenen Bezugspunkten in den Verzerrungswirkungen nicht unterscheiden. Daher wird hier als repräsentativer Fall der Bezugspunkt auf den Parallelkreis 40°N gelegt und die Untersuchung auf Blöcke mit 0, 110, 330, 660 und 1100 km Abstand vom Bezugspunkt ausgedehnt. Der letztere Fall unterschreitet schon bei weitem den in der Praxis tatsächlicher Landesvermessungen auf etwa 400 km beschränkten Ausdehnungsbereich stereographischer Abbildungen.

Die Ergebnisse sind für die zwei Blockgrößen in Tabelle 16 zusammengestellt. Sie sind mit denen der beiden anderen konformen Abbildungen weitgehend vergleichbar: Die inneren Verzerrungen sind unabhängig von der Blockgröße, aber stark von der Blocklage beeinflusst, mit deren Abstand vom Bezugspunkt sie ungefähr linear zunehmen. Da die inneren Verzerrungen bei dieser Abbildung wie bei den beiden anderen konformen Abbildungen nicht von der Paßpunktanordnung beeinflusst sind, stellen die quadratischen Mittelwerte der Verbesserungen der Tabelle 16 bei dem hier angenommenen kleinen Bildmaßstab praktisch obere Grenzwerte dar. Sie erreichen

Block- lage (km)	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
	m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
0	0,010 (0,1)	0,011 (0,1)	0,005 (0,1)	0,213 (2,7)	0,211 (2,6)	0,055 (0,7)	0,483 (6,0)	0,463 (5,8)	0,087 (1,1)
110	0,010 (0,1)	0,031 (0,4)	0,016 (0,2)	0,212 (2,7)	0,212 (2,7)	0,061 (0,8)	0,482 (6,0)	0,466 (5,8)	0,095 (1,2)
330	0,011 (0,1)	0,090 (1,1)	0,045 (0,6)	0,214 (2,7)	0,212 (2,7)	0,054 (0,7)	0,485 (6,1)	0,468 (5,9)	0,084 (1,1)
660	0,012 (0,2)	0,180 (2,3)	0,090 (1,1)	0,214 (2,7)	0,211 (2,6)	0,061 (0,8)	0,489 (6,1)	0,464 (5,8)	0,093 (1,2)
1100	0,014 (0,2)	0,301 (3,8)	0,153 (1,9)	0,216 (2,7)	0,212 (2,7)	0,088 (1,1)	0,495 (6,2)	0,467 (5,8)	0,144 (1,8)

Tab. 16a Einfluß der Blocklage beim großen Block
(150 km x 150 km)

Block- lage (km)	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
	m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
0	0,003 (0,0)	0,003 (0,0)	0,001 (0,0)	0,006 (0,1)	0,010 (1,0)	0,004 (0,1)	0,015 (0,2)	0,018 (0,2)	0,006 (0,1)
110	0,003 (0,0)	0,030 (0,4)	0,014 (0,2)	0,025 (0,3)	0,010 (0,1)	0,008 (0,1)	0,044 (0,6)	0,017 (0,2)	0,012 (0,2)
330	0,003 (0,0)	0,089 (1,1)	0,042 (0,5)	0,073 (0,9)	0,010 (0,1)	0,022 (0,3)	0,114 (1,4)	0,018 (0,2)	0,032 (0,4)
660	0,030 (0,0)	0,178 (2,2)	0,085 (1,1)	0,145 (1,8)	0,010 (0,1)	0,044 (0,6)	0,220 (2,8)	0,017 (0,2)	0,063 (0,8)
1100	0,004 (0,1)	0,299 (3,7)	0,142 (1,8)	0,242 (3,0)	0,010 (0,1)	0,073 (0,9)	0,365 (4,6)	0,017 (0,2)	0,105 (1,3)

Tab. 16b Einfluß der Blocklage beim kleinen Block
(45 km x 45 km)

Tab. 16a - 16b Innere und äußere Wirkung der Abbildungsverzerrungen der stereographischen Abbildung ($40^\circ N$) in Abhängigkeit von der Blocklage (nördl. Abstand vom Bezugspunkt) 1:80 000, 4 Lagepaßpunkte, 2 Höhenpaßpunktketten, Methode der unabhängigen Modelle - Angaben in m und in (μm)

innerhalb der üblichen Abbildungszone (< 330 km) nur Beträge um 1 μm , die stets vernachlässigt werden können und bei größeren Bildmaßstäben nur unterschritten werden (vgl. Abschnitt III.4.6).

Die äußeren Verzerrungen sind wiederum beim großen Block praktisch nicht, dagegen beim kleinen Block deutlich von der Blocklage beeinflusst. Die Beträge sind beim großen Block mit etwa 3 μm in der Lage und 1 μm in der Höhe etwa gleich groß wie bei der Gauß-Krüger Abbildung. Die äußeren Verzerrungen belaufen sich beim kleinen Block in zentraler Lage nur etwa auf 1/8 dieser Beträge, wachsen aber in

der Hochrichtung und in der Höhe wie bei den anderen konformen Abbildungen mit zunehmendem Abstand des Blocks vom Bezugspunkt deutlich an, während die Fehler der Rechtskoordinaten (quer zur Flugrichtung) konstant und klein bleiben. Im extremen Abstand von 1100 km weist der kleine Block sogar größere Verzerrungen in der Hochrichtung auf als der vergleichbare große Block. Aber innerhalb der praktisch vorkommenden Abbildungsbereiche (< 330 km) bleiben die äußeren Verzerrungen kleiner Blöcke stets viel kleiner als die großer Blöcke und sind im übrigen betraglich stets zu vernachlässigen, ganz davon abgesehen, daß die in der Praxis aus Genauigkeitsgründen erforderliche größere Paßpunktdichte die Fehlerbeträge weiter reduziert.

d) Ordinaten-treue Abbildung

Diese Abbildung ist mit der Gauß-Krüger Abbildung eng verwandt und hat als Abszissenachse ebenfalls einen verzerrungsfrei abgebildeten Meridian, den sog. Hauptmeridian. Entsprechend sind die Verzerrungen symmetrisch zum Hauptmeridian, und alle Systeme mit unterschiedlichen Hauptmeridianen sind identisch. Es genügt hier also wiederum den Einfluß der Blocklage nur in der Hälfte eines Systems zu untersuchen.

Voruntersuchungen, die hier nicht im einzelnen aufgeführt sind, haben zunächst bestätigt, daß die Verschiebung eines Blocks in der Nord-Süd-Richtung wie bei der Gauß-Krüger Abbildung keinen wesentlichen Einfluß auf seine Verzerrungen hat. Ein Block hat am Äquator im allgemeinen etwas größere Verzerrung als ein weiter nördlich oder südlich liegender Block. Aber die Unterschiede sind im Vergleich zu den wesentlich größeren Wirkungen der Ost-West-Verschiebung sehr klein. Sie belaufen sich bei 2 großen Blöcken ($150 \times 150 \text{ km}^2$) mit den geographischen Breiten 50°N und 1°N und 110 km Abstand vom Hauptmeridian (doppelte Zonenbreite der alten preußischen Katasterabbildung) und bei verschiedenen Paßpunktverteilungen auf höchstens 8 %. Wir können also bei der Untersuchung des Einflusses der Blocklage die geographische Breite ausklammern und uns auf den Abstand vom Hauptmeridian als wirksamen Parameter beschränken. Wir legen deshalb alle zu untersuchenden Blöcke in die geographische Breite 50°N .

Wegen der mit dem Abstand vom Hauptmeridian schnell anwachsenden Verzerrungen beschränken wir uns hier auf relativ schmale Abbildungszonen und dehnen die Untersuchung nur auf Abstände bis 100 km (Blockrand 175 km) vom Hauptmeridian aus.

Aus der Untersuchung der Paßpunktanordnung wissen wir, daß die äußeren Verzerrungswirkungen der ordinaten-treuen Abbildung stärker als bei konformen Abbildungen von der Paßpunktverteilung beeinflusst sind. Vor allem können die Abbildungsverzerrungen in Lage und Höhe auch bei dichter Randbesetzung mit Lagepaßpunkten nicht so wirksam unterdrückt werden. Wir untersuchen deswegen den Einfluß der Blocklage bei dieser Abbildung nicht nur mit der Minimalanordnung von nur 4 Lagepaßpunkten, sondern zusätzlich auch für den Fall der dichten Randbesetzung (= 40 Lagepaßpunkte beim großen Block und 12 Lagepaßpunkte beim kleinen Block).

Da die Höhenpaßpunktanordnung dagegen keinen Einfluß auf die Lageverzerrungen und unabhängig von der Lagepaßpunktanordnung einen überschaubaren Einfluß auf die Höhenverzerrung hat, wird hier wie bei den konformen Abbildungen die Minimalanordnung von nur 2 Höhenketten gewählt. Man erfaßt somit stets den größtmöglichen Einfluß der Abbildungsverzerrungen auf die Höhen.

Um den Einfluß der Blocklage, der hier wesentlich stärker ist als bei den konformen Abbildungen, besser verfolgen zu können, wird der Abstand vom Hauptmeridian in kleineren Schritten variiert (0, 35, 70 und 100 km).

Die resultierenden Verzerrungswirkungen der ordinatentreuen Abbildung sind in Tabelle 17 für zwei verschiedene Lagepaßpunktanordnungen und für zwei Blockgrößen zusammengestellt. Die Ergebnisse dieser Tabelle bestätigen unmittelbar die Erwartung, daß die inneren Verzerrungswirkungen der ordinatentreuen Abbildung im Gegensatz zu den konformen Abbildungen sowohl von der Lage des Blocks im Abbildungsgebiet, von der Blockgröße und von der Paßpunktanordnung abhängig sind.

Der kleine Block hat im allgemeinen kleinere innere Verzerrungen als der große. Nur bei der Minimalanordnung von nur 4 Lagepaßpunkten und großem Abstand (70 km und 100 km) vom Hauptmeridian übersteigen die Verbesserungen im kleinen Block die des großen Blocks. Aus der Untersuchung der Paßpunktanordnung im Abschnitt III.4.3 ist bekannt, daß bei der ordinatentreuen Abbildung die Verbesserungen der Lagekoordinaten um so größer sind, je mehr Lagepaßpunkte verwendet werden. Dieser Effekt wird hier bestätigt und dahingehend präzisiert, daß auch mit dichter Paßpunkt-Randbesetzung die inneren Verzerrungen mit dem Abstand der Blöcke vom Hauptmeridian deutlich zunehmen.

Die inneren Verzerrungswirkungen auf die Lagekoordinaten sind bei der gewählten Anordnung im allgemeinen in der Rechtsrichtung größer als in der Hochrichtung. Der quadratische Mittelwert der Verbesserungen der Rechtswerte wächst mit wachsendem Abstand vom Hauptmeridian im großen Block bei der dichten Paßpunktbesetzung 10mal schneller als bei nur 4 Lagepaßpunkten bzw. im kleinen Block etwa 3mal schneller.

Die größten inneren Verzerrungen treten entsprechend beim großen Block im weitesten Abstand (100 km) vom Hauptmeridian und bei dichter Paßpunktbesetzung auf. Der Mittelwert m_R der Verbesserungen der Rechtswerte beträgt dann $6 \mu\text{m}$ ($4 \mu\text{m}$ beim kleinen Block). Derartige Beträge wären nicht mehr zu vernachlässigen. Da aber die Zonenbreite ordinatentreuer Abbildungen in Landesvermessungen $\pm 60 \text{ km}$ nicht übersteigt, gehen die inneren Verzerrungswirkungen in der Praxis nur bis etwa $2 \mu\text{m}$ und bleiben damit vernachlässigbar. Im übrigen werden die Fehlerwirkungen bei größeren Bildmaßstäben weiter reduziert, wie im Abschnitt III.4.5 gezeigt werden wird. Der Einfluß der Abbildungsverzerrungen auf die Höhenverbesserungen bleibt nach der strengen Erdkrümmungskorrektur in der Regel deutlich unter $1 \mu\text{m}$ und somit stets vernachlässigbar klein.

Block-Lage (km)	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
	m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
0	0,025 (0,3)	0,008 (0,1)	0,012 (0,2)	0,272 (3,4)	0,445 (5,6)	0,233 (2,9)	0,616 (7,7)	1,564 (20)	0,331 (4,1)
35	0,034 (0,4)	0,012 (0,2)	0,016 (0,2)	0,539 (6,7)	1,722 (22)	0,279 (3,5)	1,406 (18)	2,347 (27)	0,394 (4,9)
70	0,055 (0,7)	0,024 (0,3)	0,026 (0,3)	1,547 (19)	3,531 (44)	0,418 (5,2)	3,917 (49)	4,944 (62)	0,582 (7,3)
100	0,081 (1,0)	0,043 (0,5)	0,039 (0,5)	2,951 (37)	5,706 (71)	0,649 (8,1)	8,100 (101)	9,168 (115)	0,896 (11)

Tab. 17a Der Einfluß der Blocklage beim großen Block (150 km x 150 km) mit nur 4 Lagepaßpunkten

Block-Lage (km)	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
	m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
0	0,042 (0,5)	0,057 (0,7)	0,010 (0,1)	0,027 (0,3)	0,302 (3,8)	2,116 (27)	0,177 (2,2)	0,528 (6,6)	2,890 (36)
35	0,082 (1,0)	0,110 (1,4)	0,013 (0,2)	0,057 (0,7)	0,827 (10)	3,829 (48)	0,437 (5,5)	1,619 (20)	5,283 (66)
70	0,170 (2,1)	0,242 (3,0)	0,020 (0,3)	0,149 (1,9)	1,589 (20)	8,899 (111)	0,811 (10)	2,849 (36)	12,288 (154)
100	0,294 (3,7)	0,441 (5,5)	0,029 (0,4)	0,221 (2,8)	2,334 (29)	17,315 (217)	1,296 (16)	4,179 (52)	23,929 (299)

Tab. 17b Der Einfluß der Blocklage beim großen Block mit dichter Lagepaßpunkt-Randbesetzung

Block-Lage (km)	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
	m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
0	0,007 (0,1)	0,003 (0,0)	0,003 (0,0)	0,005 (0,1)	0,013 (0,2)	0,019 (0,2)	0,010 (0,1)	0,035 (0,4)	0,025 (0,3)
35	0,027 (0,3)	0,016 (0,2)	0,011 (0,1)	0,107 (1,3)	0,188 (2,4)	0,059 (0,7)	0,241 (3,0)	0,271 (3,4)	0,078 (1,0)
70	0,069 (0,9)	0,057 (0,7)	0,027 (0,3)	0,420 (5,3)	0,510 (6,4)	0,180 (2,3)	0,946 (12)	0,963 (12)	0,236 (2,9)
100	0,133 (1,7)	0,123 (1,5)	0,051 (0,6)	0,941 (12)	1,015 (13)	0,382 (4,8)	2,122 (27)	2,100 (26)	0,499 (6,2)

Tab. 17c Einfluß der Blocklage beim kleinen Block (45 km x 45 km) mit nur 4 Lagepaßpunkten

Block- Lage (km)	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
	m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
0	0,007 (0,1)	0,006 (0,1)	0,002 (0,0)	0,002 (0,0)	0,012 (0,2)	0,029 (0,4)	0,006 (0,1)	0,020 (0,3)	0,036 (0,5)
35	0,037 (0,5)	0,047 (0,6)	0,088 (1,1)	0,032 (0,4)	0,086 (1,1)	0,183 (2,3)	0,106 (1,3)	0,149 (1,9)	0,230 (2,9)
70	0,113 (1,4)	0,161 (2,0)	0,016 (0,2)	0,110 (1,4)	0,188 (2,4)	0,645 (8,1)	0,320 (4,0)	0,298 (3,7)	0,814 (10)
100	0,237 (3,0)	0,350 (4,4)	0,023 (0,3)	0,239 (3,0)	0,320 (4,0)	1,414 (18)	0,646 (8,1)	0,517 (6,5)	1,786 (22)

Tab. 17d Einfluß der Blocklage beim kleinen Block mit dichter Lagepaßpunkt-Randbesetzung

Tab. 17a - 17d Innere und äußere Wirkung der Abbildungsverzerrungen der ordinatentreuen nicht-konformen Abbildung in Abhängigkeit von der Blocklage (Abstand vom Hauptmeridian) bei $50^\circ N$, von der Blockgröße und von der Anordnung der Lagepaßpunkte - 1:80 000, 2 Höhenpaßpunktketten, Methode der unabhängigen Modelle - Angaben in m und in (μm)

Ähnlich interessant und komplex ist bei der ordinatentreuen Abbildung auch die äußere Verzerrungswirkung auf die Ergebnisse der Blockausgleichungen. Selbst bei dichter Randbesetzung der Lagepaßpunkte (Tab. 17b und 17d) sind die ausgeglichenen Lagekoordinaten stärker betroffen als bei den konformen Abbildungen. Außerdem ist hier der Abstand vom Hauptmeridian ein sehr wirksamer Parameter, so daß bei Abständen > 70 km die äußeren Verzerrungen im großen Block selbst bei dichter Paßpunktbesetzung die Wirkungen der zufälligen Fehler überschreiten können. Im Beispiel der Tabelle 17b übersteigen die mittleren Lageverzerrungen den Betrag von $20 \mu m$ im Bildmaßstab und sind damit in der Praxis nicht mehr vernachlässigbar, während beim selben Block in der zentralen Lage die Lageverzerrungen nur $4 \mu m$ erreichen. Der Einfluß der Blocklage auf die äußeren Lageverzerrungen ist also bei der ordinatentreuen Abbildung im Gegensatz zu den konformen Abbildungen sehr erheblich.

Bei dem kleinen Block ist der Einfluß der Blocklage auf die äußeren Lageverzerrungen ebenfalls stark, aber mit dichter Paßpunktbesetzung sind die Beträge stets vernachlässigbar. Sie erreichen z.B. bei einem Abstand von 70 km vom Hauptmeridian nur $2 \mu m$ im Bildmaßstab. Anders als bei den konformen Abbildungen spielt jedoch auch der Bildmaßstab eine Rolle, die äußeren Verzerrungen sind nämlich bei dieser Abbildung auf das Gelände bezogen nicht vom Bildmaßstab abhängig. Mit größeren Bildmaßstäben werden die Koordinatenfehler bei gleich bleibender Blockgröße und Paßpunktanordnung bezogen auf das Gelände nicht kleiner, im Bildmaßstab ausgedrückt daher größer. Wenn die kleine Blockfläche von $45 \text{ km} \times 45 \text{ km}$ mit 4mal so vielen Bildern im 4fach größeren Bildmaßstab 1:20 000 überdeckt ist, dann werden die äußeren Lageverzerrungen bezogen auf den Bildmaßstab ebenfalls 4mal größer, sofern die Anzahl und Anordnung der Paßpunkte unverändert bleibt. (Wenn dagegen an Stelle der Anzahl der Paßpunkte die Anzahl

der überbrückten Basislängen zwischen den Paßpunkten konstant bleiben soll, was eine entsprechend größere Anzahl von Paßpunkten bedeutet, dann nehmen die im Bildmaßstab ausgedruckten Verzerrungen auch bei größeren Bildmaßstäben ab, vgl. Abschnitt III.4.6).

Der Verzerrungseinfluß der ordinatentreuen Abbildung auf die Lagekoordinaten wächst insgesamt bei dichter Lagepaßpunktbesetzung annähernd linear mit der Entfernung der Blockmitten vom Hauptmeridian und übersteigt die vernachlässigbaren Grenzwerte. Bei der Minimalbesetzung von nur 4 Lagepaßpunkten wachsen die äußeren Verzerrungen der Lagekoordinaten stärker als linear mit dem Abstand vom Hauptmeridian und erreichen die vernachlässigbaren Beträge noch früher.

Auf die Höhenkoordinaten wächst der Einfluß der Abbildungsverzerrungen mit dem Abstand vom Hauptmeridian ebenfalls sehr schnell an. Wie bereits bei der Untersuchung der Paßpunktanordnungen schon festgestellt wurde, ist er vor allem bei der dichten Anordnung der Lagepaßpunkte sehr groß. Aber im Gegensatz zu den äußeren Lageverzerrungen kann der Einfluß auf die Höhenverzerrungen durch die in der Praxis vorhandene größere Höhenpaßpunktdichte relativ gut unterdrückt werden, strenge Erdkrümmungskorrektur vorausgesetzt. Während z.B. der mittlere Fehler der Höhenkoordinaten des großen Blocks mit dichter Lagepaßpunktbesetzung bei nur 2 Höhenpaßpunktketten und bei 100 km Abstand vom Hauptmeridian 17 m im Gelände ($217 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab) beträgt geht er bei den Höhenpaßpunktketten des kleinen Blocks ($i=6b$) auf 40 cm im Gelände ($5 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab) zurück. Außerdem sind die Höhenverzerrungen stark vom Bildmaßstab abhängig, so daß sie bei gleicher Blockgröße (im Gelände) und gleichbleibender Anzahl von Höhenpaßpunkten bei größerem Bildmaßstab schnell zurückgehen. Im Vergleich zu dem Einfluß auf die Lagegenauigkeit ist somit der Verzerrungseinfluß der ordinatentreuen Abbildung auf die Höhen in der Praxis weniger kritisch.

Da die ordinatentreue Abbildung eng mit der Gauß-Krüger Abbildung verwandt ist, wollen wir den Einfluß der Blocklage bei den beiden Abbildungen zusammenfassend vergleichen:

1. Nur bei sehr kleinen Blöcken (kleiner als $50 \times 50 \text{ km}^2$) bzw. bei größeren Blöcken in zentraler Lage hat die ordinatentreue Abbildung etwa die gleiche Verzerrungswirkung auf die Blockausgleichung wie die Gauß-Krüger Abbildung, sonst sind die Verzerrungswirkungen der ordinatentreuen Abbildung bei vergleichbarer Blocklage stets größer.
2. Bei beiden Abbildungen sind die inneren Verzerrungen von der Blocklage abhängig. Bei der Gauß-Krüger Abbildung aber beschränkt sich der Einfluß auf die Hochrichtung und in der Höhe, während er sich bei der ordinatentreuen Abbildung in allen 3 Koordinatenrichtungen auswirkt.
3. Bei der Gauß-Krüger Abbildung sind die äußeren Verzerrungswirkungen in großen Blöcken von der Blocklage unabhängig, während bei der ordinatentreuen Abbildung eine Abhängigkeit von der Blocklage deutlich ausgeprägt ist. Wenn die äußeren Verzerrungswirkungen auf die Lagekoordinaten bei der ordinatentreuen Abbildung unter $5 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab bleiben sollen, muß dichte Lagepaßpunkt-Randbesetzung vorgesehen werden, und darf kein Teil des Blocks weiter als 100 km vom Hauptmeridian entfernt sein. Bei der Gauß-Krüger Abbil-

derung dagegen bleiben bei dieser Paßpunktanordnung die Lagefehler auch bei einer Entfernung von 1000 km vom Nullmeridian noch immer kleiner als $1 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab.

4. Während der Verzerrungseinfluß der Gauß-Krüger Abbildung auf die Höhen auch bei nur 2 Höhenpaßpunktketten sehr klein und fast unabhängig von der Blocklage und der Lagepaßpunktanordnung ist, sind die Fehlerwirkungen der ordinatentreuen Abbildung auf die Höhen betragsmäßig viel größer und stark sowohl von der Blocklage als auch von der Lagepaßpunktanordnung abhängig.

Die Verzerrungswirkung der ordinatentreuen Abbildung auf die Ergebnisse der Blockausgleichung nimmt also stark mit wachsendem Abstand der Blöcke vom Hauptmeridian zu. Wenn allerdings die Systembreite wie bei der alten preußischen Katasterabbildung auf 60 km zu beiden Seiten des Hauptmeridian beschränkt wird, bleibt der Fehlereinfluß im allgemeinen auch bei Blöcken am Rande des Systems und mit dichter Lagepaßpunktbesetzung und wenigstens 3 Höhenpaßpunktketten stets unter $5 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab, und somit in der Regel vernachlässigbar.

Beurteilen wir vergleichend alle vier geodätischen Abbildungen, so ist zusammenfassend festzustellen, daß der Verzerrungseinfluß der Blocklage bei allen drei konformen Abbildungen im Endergebnis gleich ist. Bei den größeren Blöcken hat die Blocklage praktisch keinen Einfluß auf ihre äußeren Verzerrungen. Bei kleiner werdenden Blockflächen wächst zwar der Fehlereinfluß relativ an, die absoluten Fehlerbeträge bleiben jedoch klein. Somit ist der Einfluß der Blocklage auf die äußeren Verzerrungen bei den drei konformen Abbildungen insgesamt unbedeutend und vernachlässigbar. Bei der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung dagegen hat die Blocklage sehr deutlichen Einfluß auf die äußeren Verzerrungen der ausgeglichenen Blöcke. Nur durch Beschränkung der Systembreite der Abbildung auf ± 60 km vom Hauptmeridian und durch gute Paßpunktbesetzung kann der Einfluß der Abbildungsverzerrungen unter der Wirkung der zufälligen Fehler gehalten werden.

Der deutlichste Einfluß der Blocklage zeigt sich in den inneren Verzerrungen der Blöcke. Obwohl die Beträge der Verbesserungen in der Regel klein sind, spielen sie bei der statistischen Genauigkeitsüberprüfung eine Rolle. Man beurteilt die Präzision einer Aerotriangulation in der Praxis anhand der Verbesserungen der Beobachtungen bzw. des daraus abgeleiteten mittleren Gewichtseinheitsfehlers. Gerade in dieser Größe aber ist der Einfluß der Blocklage auf die inneren Verzerrungen am stärksten wirksam. Zum Beispiel steigen die inneren Verzerrungen beim Bildmaßstab 1:80 000 und bei der Gauß-Krüger Abbildung von $0.3 \mu\text{m}$ auf über $2.5 \mu\text{m}$, wenn der Abstand vom Nullmeridian von 0 auf 400 km wächst, obwohl die absoluten Verzerrungswirkungen (des großen Blocks) fast unverändert bleiben. Außerdem ist der innere Verzerrungseinfluß der 3 konformen Abbildungen nicht von der Paßpunktanordnung abhängig. Selbst wenn also der äußere Verzerrungseinfluß der Abbildung durch sehr gute Paßpunktanordnung (z.B. dichte Randbesetzung mit Lagepaßpunkten und 4 oder 5 Höhenpaßpunktketten) völlig unterdrückt ist, bleibt der innere Verzerrungseinfluß der Abbildungen unverändert bestehen und muß gegebenenfalls bei der statistischen Überprüfung von Blockausgleichungen berücksichtigt werden.

III.4.5 Einfluß der Blockgröße

In der Aerotriangulation versteht man unter Blockgröße normalerweise nicht die absolute Größe des von einem Block bedeckten Gebiets sondern vielmehr die Anzahl der Bilder bzw. der Modelle, die den Block bilden. Ein großes Gebiet kann demnach als ein kleiner Block betrachtet werden, wenn der Bildmaßstab klein ist und der Block somit nur wenige Bilder enthält. Umgekehrt kann ein aus vielen Bildern entsprechend großen Bildmaßstabs bestehender Verband, der nur einen kleinen Ausschnitt der Erdoberfläche überdeckt, als ein großer Block betrachtet werden. Die "Größe" eines Blocks wird also von der tatsächlichen Größe des vom Block überdeckten Gebiets wie auch von der Größe des Bildverbandes, d.h. von der Anzahl der Bilder bestimmt.

Bei der Untersuchung des Verzerrungseinflusses der geodätischen Abbildungen auf die Aerotriangulation haben wir in dieser Arbeit bisher unter Blockgrößen stets die wahre Gebietsgröße verstanden und behalten diese Definition weiterhin bei. Der Einfluß des Bildmaßstabs und damit der Anzahl der Bilder eines Blocks wird im nächsten Abschnitt III.4.6 gesondert untersucht werden. Zur Untersuchung des Verzerrungseinflusses der Block- d.h. der Gebietsgröße halten wir den Bildmaßstab von 1:80 000 an.

Weil die relativen Verzerrungen geodätischer Abbildung innerhalb eines Gebiets mit der Gebietsgröße wachsen, hat die Blockgröße zweifellos Einfluß auf die nach der Blockausgleichung verbleibenden Verzerrungen. Da aber die Blockgröße und die Paßpunktanordnung nicht voneinander zu trennen sind, kann bei einer Änderung der Blockgröße entweder die Anzahl der Paßpunkte oder der Abstand zwischen den Paßpunkten konstant gehalten werden. Um die Verzerrungen unterschiedlicher Blockgrößen vergleichen zu können, müssen die Blöcke vergleichbare Paßpunktanordnungen haben. Man kann z.B. die Anzahl und Anordnung der Paßpunkte konstant halten, was dann bei größeren Blöcken größere Abstände zwischen den Paßpunkten bedeutet. Oder der Abstand zwischen benachbarten Paßpunkten bleibt konstant, was bei größeren Blöcken eine relative Paßpunktverdichtung bedeutet.

Wir wollen nachfolgend den Einfluß der Blockgröße unter beiden Paßpunktbedingungen untersuchen. Zunächst werden alle Blöcke auf nur 4 Lagepaßpunkten und 2 Höhenpaßpunktketten bezogen. Mit dieser konstant gehaltenen Minimalanordnung von Paßpunkten bekommt man für jede Blockgröße die maximale äußere Verzerrungswirkung der geodätischen Abbildung. Die zweite Reihe untersucht den Einfluß der Blockgröße bei konstant gehaltenem Abstand zwischen Paßpunkten. Da Lagepaßpunkte im Blockinneren keinen bedeutenden Einfluß auf die Ergebnisse der Blockausgleichung haben, wird nur die Randbesetzung von Lagepaßpunkten betrachtet. Unter konstantem Abstand ist entsprechend der Abstand benachbarter Lagepaßpunkte am Blockrand gemeint.

Da es sich gezeigt hat, daß der Einfluß der Blockgröße bei allen drei konformen Abbildungen ziemlich ähnlich, bei der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung dagegen davon sehr verschieden ist, werden im folgenden die konformen Abbildungen getrennt von der nicht-konformen Abbildung betrachtet.

Zunächst untersuchen wir den Einfluß der Blockgröße bei den 3 konformen Abbildungen anhand von 4 Blockgrößen von $75 \times 75 \text{ km}^2$, $150 \times 150 \text{ km}^2$, $220 \times 220 \text{ km}^2$ und $300 \times 300 \text{ km}^2$ Ausdehnung. Die überdeckten Flächen stehen im Verhältnis von $1 : 4 : 9 : 16$. Mit dem Bildmaßstab $1:80\,000$ setzen sich die Blöcke entsprechend aus 5×10 , 10×20 , 15×30 bzw. 20×40 Modellen zusammen.

Unter der Bedingung der konstant gehaltenen Anzahl von Paßpunkten hat jeder Block 4 Lagepaßpunkte in den Ecken und 2 Höhenpaßpunktketten an den beiden Stirnseiten. Für die Bedingung konstanten Abstandes zwischen den Paßpunkten wird die Oberbrückungsdistanz sowohl für die Lagepaßpunkte als auch für die Höhenpaßpunktketten auf 10 Basislängen festgesetzt, was der Seitenlänge des kleinsten Blocks entspricht. Somit erhalten die vier Blockgrößen entsprechend 4, 8, 12 bzw. 16 Lagepaßpunkte und 2, 3, 4 bzw. 5 Höhenpaßpunktketten.

Die Flugrichtung wird so angeordnet, daß sie den größtmöglichen Einfluß der geodätischen Abbildungsverzerrungen auf die Höhen zuläßt. Für alle drei Abbildungen werden die Blockmitten jeweils in etwa 100 km Abstand von der Bezugslinie bzw. vom Bezugspunkt angenommen.

Die Ergebnisse sind in den Tabellen 18 bis 20 jeweils getrennt für die beiden Paßpunktanordnungen zusammengestellt.

Betrachtet man zunächst die inneren Verzerrungen, dann ist bei allen 3 konformen Abbildungen festzustellen, daß bei jeweils gleicher Blockgröße die verschiedenen Paßpunktanordnungen praktisch keinerlei Unterschiede bewirken. Dieses Ergebnis entspricht der schon im Abschnitt III.4.3 gewonnenen Erkenntnis, daß nämlich die inneren Verzerrungswirkungen der konformen Abbildungen nicht von der Anordnung der Paßpunkte abhängig sind. Darüber hinaus zeigen die Tabellen 18 bis 20, daß die Unterschiede der inneren Verzerrungen bei verschiedenen Blockgrößen ebenfalls verschwindend gering sind. Die Unterschiede der ohnehin sehr kleinen inneren Verzerrungen belaufen sich bei den 3 Abbildungen zwischen dem jeweils größten und kleinsten Block auf nur 22 %, 14 % bzw. 29 %. Im Vergleich zu den viel stärkeren Abhängigkeiten der inneren Verzerrungen vom Bildmaßstab und von der Blocklage ist der Einfluß der Blockgröße bei den konformen Abbildungen völlig unbedeutend und kann stets vernachlässigt werden.

Im Gegensatz dazu wachsen die äußeren Verzerrungen der Blöcke bei der minimalen Paßpunktanordnung von nur 4 Lagepaßpunkten und 2 Höhenketten sehr rasch mit wachsender Blockgröße. Die Blockgröße ist also ein wesentlicher Einflußparameter auf die äußeren Verzerrungen bei konstant gehaltener Paßpunktanordnung. Ferner stellt man noch fest, daß der starke Einfluß der Blockgröße auf die äußeren Verzerrungen bei allen 3 konformen Abbildungen gleich ist. Die mittleren Fehler der ausgeglichenen Lagekoordinaten vergrößern sich in allen Fällen etwa um den Faktor 50, wenn die Blockgröße von $75 \times 75 \text{ km}^2$ um den Faktor 16 auf $300 \times 300 \text{ km}^2$ vergrößert wird. Die absoluten Fehlerbeträge steigen dabei auf über $20 \text{ }\mu\text{m}$ im Bildmaßstab an, wobei allerdings der Paßpunktabstand auf 300 km angewachsen ist. Schränkt man die zulässigen Paßpunktabstände auf 150 km ein, was in der Praxis als extreme Grenze gelten kann, bleiben auch die äußeren Verzerrungen im Bereich von $2 \text{ }\mu\text{m}$ und damit im Vergleich zu den zufälligen Fehlerwirkungen völlig vernachlässigbar.

Blockgröße in Modellen (km ²)	Abstand in Basislängen bzw.in(km)zwischen den Lage PP Höhenketten		innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
			m _H	m _R	m _Z	M _H	M _R	M _Z	Max _H	Max _R	Max _Z
5 x 10 (75 x 75)	10 (75)	10 (75)	0,058 (0,7)	0,004 (0,1)	0,028 (0,3)	0,036 (0,5)	0,027 (0,3)	0,043 (0,5)	0,079 (1,0)	0,051 (0,6)	0,061 (0,8)
10 x 20 (150 x 150)	20 (150)	20 (150)	0,060 (0,8)	0,005 (0,1)	0,029 (0,4)	0,226 (2,8)	0,195 (2,4)	0,173 (2,2)	0,548 (6,9)	0,440 (5,5)	0,259 (3,2)
15 x 30 (220 x 220)	30 (220)	30 (220)	0,065 (0,8)	0,008 (0,1)	0,032 (0,4)	0,745 (9,4)	0,667 (8,3)	0,429 (5,4)	1,926 (24)	1,513 (19)	0,652 (8,2)
20 x 40 (300 x 300)	40 (300)	40 (300)	0,070 (0,9)	0,010 (0,1)	0,034 (0,4)	1,808 (23)	1,548 (19)	0,753 (9,4)	4,746 (59)	3,616 (45)	1,087 (14)

a) 4 Lagepaßpunkte, 2 Höhenpaßpunktketten

Blockgröße in Modellen (km ²)	Anzahl der Lage PP Höhenketten		innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
			m _H	m _R	m _Z	M _H	M _R	M _Z	Max _H	Max _R	Max _Z
5 x 10 (75 x 75)	4	2	0,058 (0,7)	0,004 (0,1)	0,028 (0,4)	0,036 (0,5)	0,027 (0,3)	0,043 (0,5)	0,078 (1,0)	0,051 (0,6)	0,061 (0,8)
10 x 20 (150 x 150)	8	3	0,060 (0,8)	0,004 (0,1)	0,029 (0,4)	0,041 (0,5)	0,027 (0,3)	0,018 (0,2)	0,101 (1,3)	0,065 (0,8)	0,031 (0,4)
15 x 30 (220 x 220)	12	4	0,066 (0,8)	0,005 (0,1)	0,032 (0,4)	0,041 (0,5)	0,026 (0,3)	0,018 (0,2)	0,113 (1,4)	0,076 (1,0)	0,036 (0,5)
20 x 40 (300 x 300)	16	5	0,071 (0,9)	0,006 (0,1)	0,035 (0,4)	0,040 (0,5)	0,024 (0,3)	0,014 (0,2)	0,120 (1,5)	0,078 (1,0)	0,042 (0,5)

b) konstanter Abstand zwischen den Paßpunkten (i = 10b = 75 km)

Tab. 18 Innere und äußere Verzerrungswirkungen der Gauß-Krüger Abbildung in Abhängigkeit von Blockgröße und Paßpunktabständen - 1:80 000, Methode der unabhängigen Modelle - Angaben in m und in (µm)

Blockgröße in Modellen (km ²)	Abstand in Basislängen bzw.in(km)zwischen den Lage PP Höhenketten		innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
			m _H	m _R	m _Z	M _H	M _R	M _Z	Max _H	Max _R	Max _Z
5 x 10 (75 x 75)	10 (75)	10 (75)	0,003 (0,0)	0,062 (0,8)	0,030 (0,4)	0,028 (0,4)	0,036 (0,5)	0,047 (0,6)	0,054 (0,7)	0,074 (0,9)	0,065 (0,8)
10 x 20 (150 x 150)	20 (150)	20 (150)	0,005 (0,1)	0,064 (0,8)	0,032 (0,4)	0,207 (2,6)	0,219 (2,7)	0,200 (2,5)	0,464 (5,8)	0,485 (6,1)	0,282 (3,5)
15 x 30 (220 x 220)	30 (220)	30 (220)	0,007 (0,1)	0,068 (0,9)	0,036 (0,5)	0,690 (8,6)	0,691 (8,6)	0,448 (5,6)	1,598 (20)	1,570 (20)	0,637 (8,0)
20 x 40 (300 x 300)	40 (300)	40 (300)	0,009 (0,1)	0,070 (0,9)	0,038 (0,5)	1,633 (20)	1,553 (19)	1,004 (13)	3,839 (48)	3,635 (46)	1,382 (17)

a) 4 Lagepaßpunkte, 2 Höhenpaßpunktketten

Blockgröße in Modellen (km ²)	Anzahl der Lage PP Höhenketten		innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
			m _H	m _R	m _Z	M _H	M _R	M _Z	Max _H	Max _R	Max _Z
5 x 10 (75 x 75)	4	2	0,003 (0,0)	0,062 (0,8)	0,030 (0,4)	0,025 (0,4)	0,036 (0,5)	0,047 (0,6)	0,054 (0,7)	0,074 (0,9)	0,065 (0,8)
10 x 20 (150 x 150)	8	3	0,002 (0,0)	0,064 (0,8)	0,032 (0,4)	0,028 (0,4)	0,038 (0,5)	0,020 (0,3)	0,064 (0,8)	0,094 (1,2)	0,034 (0,4)
15 x 30 (220 x 220)	12	4	0,002 (0,0)	0,069 (0,9)	0,035 (0,4)	0,025 (0,3)	0,040 (0,5)	0,016 (0,2)	0,068 (0,9)	0,108 (1,4)	0,041 (0,5)
20 x 40 (300 x 300)	16	5	0,002 (0,0)	0,069 (0,9)	0,038 (0,5)	0,023 (0,3)	0,042 (0,5)	0,014 (0,2)	0,071 (0,9)	0,115 (1,4)	0,051 (0,6)

b) Abstand zwischen den Paßpunkten (i = 10b = 75 km)

Tab. 19 Innere und äußere Verzerrungswirkungen der Lambert-Abbildung in Abhängigkeit von Blockgröße und Paßpunktabständen - 1:80 000, Methode der unabhängigen Modelle - Angaben in m und in (µm)

Blockgröße in Modellen (km ²)	Abstand in Basislängen bzw. in (km) zwischen den Lage PP Höhenketten		innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
			m _H	m _R	m _Z	M _H	M _R	M _Z	Max _H	Max _R	Max _Z
5 x 10 (75 x 75)	10 (75)	10 (75)	0,029 (0,4)	0,005 (0,1)	0,014 (0,2)	0,033 (0,4)	0,029 (0,4)	0,012 (0,2)	0,066 (0,8)	0,061 (0,8)	0,019 (0,2)
10 x 20 (150 x 150)	20 (150)	20 (150)	0,030 (0,4)	0,011 (0,1)	0,015 (0,2)	0,215 (0,3)	0,200 (0,3)	0,053 (0,7)	0,476 (6,0)	0,456 (5,7)	0,080 (1,0)
15 x 30 (220 x 220)	30 (220)	30 (220)	0,033 (0,4)	0,016 (0,2)	0,016 (0,2)	0,705 (8,8)	0,672 (8,4)	0,122 (1,5)	1,622 (2,0)	1,540 (19)	0,195 (2,4)
20 x 40 (300 x 300)	40 (300)	40 (300)	0,035 (0,4)	0,021 (0,3)	0,017 (0,2)	1,632 (2,0)	1,545 (19)	0,215 (2,7)	3,836 (48)	3,600 (45)	0,347 (4,3)

a) 4 Lagepaßpunkte, 2 Höhenpaßpunktketten

Blockgröße in Modellen (km ²)	Anzahl der		innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
	Lage PP	Höhenketten	m _H	m _R	m _Z	M _H	M _R	M _Z	Max _H	Max _R	Max _Z
5 x 10 (75 x 75)	4	2	0,029 (0,4)	0,005 (0,1)	0,014 (0,2)	0,033 (0,4)	0,029 (0,4)	0,012 (0,2)	0,066 (0,8)	0,061 (0,8)	0,019 (0,2)
10 x 20 (150 x 150)	8	3	0,030 (0,4)	0,011 (0,1)	0,015 (0,2)	0,035 (0,4)	0,032 (0,4)	0,012 (0,2)	0,081 (1,0)	0,077 (1,0)	0,023 (0,3)
15 x 30 (220 x 220)	12	4	0,033 (0,4)	0,017 (0,2)	0,016 (0,2)	0,033 (0,4)	0,032 (0,4)	0,007 (0,1)	0,090 (1,1)	0,088 (1,1)	0,019 (0,2)
20 x 40 (300 x 300)	16	5	0,035 (0,4)	0,024 (0,3)	0,018 (0,2)	0,031 (0,4)	0,032 (0,4)	0,006 (0,1)	0,101 (1,3)	0,102 (1,3)	0,023 (0,3)

b) Abstand zwischen den Paßpunkten (i = 10b = 75 km)

Tab. 20 Innere und äußere Verzerrungswirkungen der stereographischen Abbildung in Abhängigkeit von Blockgröße und Paßpunktabständen - 1:80 000, Methode der unabhängigen Modelle - Angaben in m und in (µm)

Blockgröße in Modellen (km ²)	Abstand in Basislängen bzw. in (km) zwischen den Lage PP Höhenketten		innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
			m _H	m _R	m _Z	M _H	M _R	M _Z	Max _H	Max _R	Max _Z
5 x 10 (75 x 75)	10 (75)	10 (75)	0,012 (0,2)	0,005 (0,1)	0,005 (0,1)	0,030 (0,4)	0,059 (0,7)	0,055 (0,7)	0,061 (0,8)	0,185 (2,3)	0,077 (1,0)
10 x 20 (150 x 150)	20 (150)	20 (150)	0,025 (0,3)	0,008 (0,1)	0,012 (0,2)	0,272 (3,4)	0,445 (5,6)	0,233 (2,9)	0,616 (7,8)	1,564 (20)	0,331 (4,1)
15 x 30 (220 x 220)	30 (220)	30 (220)	0,039 (0,5)	0,013 (0,2)	0,019 (0,2)	0,910 (11)	1,474 (18)	0,573 (7,2)	2,323 (29)	5,404 (68)	0,813 (10)

a) 4 Lagepaßpunkte, 2 Höhenpaßpunktketten

Blockgröße in Modellen (km ²)	Anzahl der		innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
	Lage PP	Höhenketten	m _H	m _R	m _Z	M _H	M _R	M _Z	Max _H	Max _R	Max _Z
5 x 10 (75 x 75)	20	2	0,014 (0,2)	0,015 (0,2)	0,004 (0,1)	0,008 (0,1)	0,042 (0,5)	0,158 (2,0)	0,032 (0,4)	0,076 (1,0)	0,211 (2,6)
10 x 20 (150 x 150)	40	3	0,042 (0,5)	0,057 (0,7)	0,009 (0,1)	0,027 (0,3)	0,302 (3,8)	0,218 (2,7)	0,177 (2,2)	0,528 (6,6)	0,365 (4,6)
15 x 30 (220 x 220)	60	4	0,093 (1,2)	0,133 (1,7)	0,016 (0,2)	0,059 (0,7)	1,043 (13)	0,774 (9,7)	0,471 (5,9)	1,819 (23)	1,538 (19)

b) konstanter Abstand zwischen den Paßpunkten
 i = 2b = 15 km für Lagepaßpunkte, i = 10b = 75 km für Höhenpaßpunktketten

Tab. 21 Innere und äußere Verzerrungswirkungen der ordinatentreuen Abbildung in Abhängigkeit von Blockgröße und Paßpunktabständen - 1:80 000, Methode der unabhängigen Modelle - Angaben in m und in (µm)

Wenn dagegen die absoluten Abstände zwischen den Paßpunkten mit $i = 10b = 75$ km konstant gehalten werden, haben alle Blockgrößen ungefähr die gleichen äußeren Verzerrungen. Die Höhenfehler nehmen sogar mit zunehmender Blockgröße ab. Alle Verzerrungsbeträge sind selbst bei dem großen Paßpunktabstand von $75 \text{ km} < 1 \mu\text{m}$. Die Blockgröße hat also keinen Einfluß auf die absolute Genauigkeit, wenn der Abstand zwischen den Paßpunkten konstant gehalten wird.

Betrachten wir nun den Einfluß der Blockgröße bei der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung. Da die Systembreite dieser Abbildung nicht zu groß sein darf, wird für diese Abbildung die maximale Blockgröße auf $220 \times 220 \text{ km}^2$ beschränkt. Außerdem begnügen wir uns mit einer zentralen Blocklage, damit der äußere Teil des größten Blocks nicht zu weit über den eigentlichen Abbildungsbereich hinausragt.

Der Einfluß von der Blockgröße wird hier ebenfalls unter den beiden Paßpunktbedingungen konstanter Anzahl bzw. konstanten Abstandes untersucht. Aus der Untersuchung des Einflusses der Paßpunktanordnung (Abschnitt III.4.3) wissen wir, daß die ordinatentreue Abbildung die äußeren Verzerrungen der Blöcke selbst bei dichter Paßpunkt-Randbesetzung noch erheblich sind, so daß wir hier im Gegensatz zu den konformen Abbildungen den konstant gehaltenen Abstand der Lagepaßpunkte auf 2 Basislängen = 15 km verkürzen, was dem Fall der sogenannten dichten Randbesetzung entspricht. Für die Höhe kann weiterhin die Überbrückungsdistanz von 10 Basislängen = 75 km zwischen benachbarten Höhenpaßpunktketten beibehalten werden. Denn der Verzerrungseinfluß auf die Höhen kann stets durch engerabständige Höhenpaßpunktketten völlig unterdrückt werden.

Die Verzerrungswirkungen der ordinatentreuen Abbildung bei verschiedenen Blockgrößen sind für die beiden Paßpunktanordnungen in Tabelle 21 zusammengestellt. Bei der minimalen Paßpunktanordnung sind die inneren Verzerrungen schon deutlicher als bei den konformen Abbildungen von der Blockgröße beeinflusst, bei der dichteren Paßpunktbesetzung tritt der Einfluß der Blockgröße auf die inneren Verzerrungen jedoch noch wesentlich stärker in Erscheinung, was den früheren Feststellungen über den Einfluß der Paßpunktanordnung entspricht. Dennoch bleiben die Beträge unter $2 \mu\text{m}$ und damit klein genug, um in allen praktischen Fällen vernachlässigt zu werden.

Bezüglich der äußeren Verzerrungen der ausgeglichenen Blöcke zeigt Tabelle 21, daß bei der Minimalanordnung der Paßpunkte die Blockgröße einen sehr starken Einfluß ausübt. Der mittlere Fehler der ausgeglichenen Koordinaten wächst in der Hochrichtung um den Faktor 30, in der Rechtsrichtung um den Faktor 25, wenn sich die Blockgröße von $75 \times 75 \text{ km}^2$ auf $220 \times 220 \text{ km}^2$ 9fach, der Paßpunktabstand 3fach vergrößert. Die Fehler der Rechtskoordinaten sind stets etwa 1.6-fach größer als die der Hochkoordinaten. Bei konstant und klein gehaltenem Abstand zwischen den Paßpunkten bleiben die äußeren Verzerrungen der Blöcke im Gegensatz zu den Verhältnissen bei den konformen Abbildungen mit wachsender Blockgröße nicht konstant. Sie verschlechtern sich sowohl in der Lage als auch in der Höhe ganz deutlich mit wachsender Blockgröße bis auf einen Betrag von $13 \mu\text{m}$. Es bestätigt sich die schon früher getroffene Feststellung, daß die äußeren Verzerrungswirkungen der ordinatentreuen Abbildung nur innerhalb einer schmalen Abbildungszone zu vernachlässigen sind.

Nachdem bisher stets nur quadratische Blöcke betrachtet wurden, sind für die ordinatentreue Abbildung auch eine Reihe von rechteckigen Blöcken untersucht worden, die hier nicht im einzelnen aufgeführt sind. Die Ergebnisse zeigen jedoch, daß die äußeren Verzerrungen nicht von der absoluten Blockgröße sondern hauptsächlich nur durch die Ausgehnung der Blöcke in Ost-West Richtung bestimmt sind, wogegen die Ausdehnung in Nord-Süd Richtung bei konstant gehaltenem Paßpunktabstand praktisch ohne Einfluß ist.

Wir haben aus den Untersuchungen für den realistischen Fall konstanten Abstandes zwischen den Paßpunkten bei variabler Blockgröße somit folgende Hauptergebnisse gewonnen: Die inneren und äußeren Verzerrungswirkungen der konformen Abbildungen sind bei konstant gehaltenem Abstand zwischen den Paßpunkten nicht von der Größe der Blöcke beeinflusst. Für die ordinatentreue Abbildung dagegen ist ein deutlicher Einfluß der Blockgröße vorhanden, der aber nur von der Ausdehnung in der Ost-West Richtung, nicht aber von der Ausdehnung in der Nord-Süd Richtung bewirkt wird.

III.4.6 Einfluß des Bildmaßstabs

Wir haben bis jetzt die Verzerrungswirkungen der geodätischen Abbildungen auf die Blockausgleichung stets nur mit dem Bildmaßstab 1:80 000 untersucht, in der Vermutung, daß die Wirkungen bei kleinen Bildmaßstäben bzw. bei großen Flächen am deutlichsten in Erscheinung treten. Wie sich zeigen wird, nimmt der Einfluß der Abbildungsverzerrungen bei größeren Bildmaßstäben tatsächlich ab. Ein Großteil der praktischen photogrammetrischen Arbeiten benützt Bildmaßstäbe $> 1:80\,000$ und ist daher in noch wesentlich geringerem Maße von Abbildungsverzerrungen betroffen als in den vorhergegangenen Abschnitten festgestellt worden ist.

Der Bildmaßstab bei gegebener Gebietsgröße bestimmt die Anzahl der Bilder bzw. der Modelle und beeinflusst damit die Verteilung systematischer Fehler, wie z.B. der geodätischen Abbildungsverzerrungen. Zur Untersuchung des Einflusses des Bildmaßstabs auf die Verzerrung von Blöcken nehmen wir für ein gegebenes Gebiet auf dem Ellipsoid verschiedene Bildmaßstäbe an und vergleichen die Ergebnisse unter sonst gleichen Umständen, d.h. insbesondere mit gleicher Anzahl von Lagepaßpunkten bzw. die gleicher Anzahl von Höhenpaßpunktketten, gleicher Flugrichtung und gleicher Anzahl von Verknüpfungspunkten.

Da die Einflüsse der sonstigen Parameter aus den Untersuchungen der Abschnitte III.4.1-5 genügend bekannt sind, genügt es hier, die Wirkung des Bildmaßstabs anhand eines Gebiets von $45 \times 45 \text{ km}^2$ Ausdehnung zu untersuchen, das in den Bildmaßstäben 1:80 000, 1:60 000, 1:40 000 und 1:20 000 entsprechend durch 3×6 , 4×8 , 6×12 und 12×24 Modelle überdeckt wird. Bildmaßstäbe größer als 1:20 000 brauchen nicht mehr untersucht zu werden, da die Verzerrungswirkungen der konformen Abbildungen dann schon auf mm-Beträge auf dem Ellipsoid abgeklungen sind bzw. in unserer Untersuchung schon fast die Grenze der Abrundungsfehler der simulierten Landeskoordinaten erreicht haben. Alle Fälle werden mit derselben minimalen Paßpunktbesetzung von nur 4 Lagepaßpunkten in den Blockecken und 2 Höhenpaßpunktketten behandelt. Die Paßpunktabstände sind somit 45 km und auf das Gebiet bezogen konstant.

Wie bereits festgestellt wurde, hat bei konformen Abbildungen die Blockgröße bei gleich bleibendem Abstand zwischen den Paßpunkten keinen Einfluß auf die äußeren Verzerrungen der Blöcke. Entsprechend sind die Ergebnisse des hier untersuchten Falles direkt auf größere Blöcke mit gleichem Abstand zwischen den Paßpunkten übertragbar. In der Praxis ist der Abstand zwischen den Paßpunkten vor allem bei großen Bildmaßstäben in der Regel noch wesentlich kleiner, so daß auch die Verzerrungswirkungen noch entsprechend kleiner und damit völlig vernachlässigbar ausfallen werden. Aus den bisherigen Untersuchungen wissen wir außerdem, daß die inneren Verzerrungen der Blöcke bei konform abgebildeten Landessystemen weder von der Blockgröße noch von der Paßpunktanordnung beeinflusst sind, so daß die hier erzielten Ergebnisse auch bezüglich der inneren Verzerrungen direkt auf andere Blöcke gleicher Lage zu übertragen sind.

Bei der Untersuchung der Blocklage wurde festgestellt, daß ihr Einfluß bei der hier angenommenen kleinen Gebietsgröße doch einen relativ starken Einfluß auf die Verzerrungen der Blöcke ausübt. Deshalb wird hier eine möglichst ungünstige Blocklage mit großem Abstand von der Bezugslinie bzw. vom Bezugspunkt der jeweiligen Abbildung gewählt. Als in der Praxis maximal vorkommende Abstände wurde für die drei konformen Abbildungen 300 km, für die ordinatentreue Abbildung 70 km gewählt. Letzterer Abstand entspricht der Ausdehnung der alten preußischen Katasterabbildung.

Die Verzerrungsergebnisse für die 4 verschiedenen Bildmaßstäbe und die 4 geodätischen Abbildungen sind in den Tabellen 22 - 25 zusammengestellt. Es wird darauf hingewiesen, daß im Gegensatz zu den bisherigen Tabellen wegen der verschiedenen Bildmaßstäbe nun zum erstenmal die auf das Gelände und die auf den Bildmaßstab bezogenen Angaben getrennt beurteilt werden müssen.

Da wiederum die Ergebnisse der drei konformen Abbildungen sehr ähnlich sind, werden sie zunächst gemeinsam betrachtet. Die Tabellen 22 - 25 zeigen übereinstimmend, daß die absoluten, auf das Gelände bezogenen Beträge sowohl der inneren als auch der äußeren Verzerrungen mit wachsendem Bildmaßstab rasch zu völlig unbedeutenden Werten abnehmen. Interessant ist, daß parallel dazu die auf den Bildmaßstab bezogenen Verzerrungen wenn auch langsamer aber ebenfalls stetig

Bildmaßstab	Anzahl der Modelle	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
		m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
1:80 000	3 x 6	0,152 (1,9)	0,017 (0,2)	0,070 (0,9)	0,018 (0,2)	0,132 (1,7)	0,039 (0,5)	0,036 (0,5)	0,200 (2,5)	0,060 (0,8)
1:60 000	4 x 8	0,089 (1,5)	0,009 (0,2)	0,041 (0,7)	0,012 (0,2)	0,074 (1,2)	0,025 (0,4)	0,025 (0,4)	0,112 (1,9)	0,038 (0,6)
1:40 000	6 x 12	0,038 (1,0)	0,004 (0,1)	0,018 (0,5)	0,007 (0,2)	0,033 (0,8)	0,012 (0,3)	0,016 (0,4)	0,056 (1,4)	0,018 (0,5)
1:20 000	12 x 24	0,010 (0,5)	0,001 (0,1)	0,005 (0,3)	0,006 (0,3)	0,006 (0,3)	0,004 (0,2)	0,012 (0,6)	0,014 (0,7)	0,006 (0,3)

Tab. 22 Gauß-Krüger Abbildung, Blocklage 300 km östlich des Bezugsmeridians

Bildmaßstab	Anzahl der Modelle	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
		m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
1:80 000	3 x 6	0,002 (0,0)	0,184 (2,3)	0,087 (1,1)	0,149 (1,9)	0,011 (0,1)	0,047 (0,6)	0,224 (2,8)	0,023 (0,3)	0,071 (0,9)
1:60 000	4 x 8	0,001 (0,0)	0,103 (1,7)	0,052 (0,9)	0,083 (1,4)	0,008 (0,1)	0,029 (0,5)	0,124 (2,1)	0,018 (0,3)	0,045 (0,8)
1:40 000	6 x 12	0,000 (0,0)	0,046 (1,2)	0,023 (0,6)	0,038 (1,0)	0,006 (0,2)	0,015 (0,4)	0,063 (1,6)	0,015 (0,4)	0,023 (0,6)
1:20 000	12 x 24	0,000 (0,0)	0,012 (0,6)	0,006 (0,3)	0,006 (0,3)	0,006 (0,3)	0,008 (0,4)	0,013 (0,7)	0,013 (0,7)	0,011 (0,6)

Tab. 23 Lambertsche Abbildung, Blocklage 300 km nördlich des Normalparallelkreises

Bildmaßstab	Anzahl der Modelle	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
		m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
1:80 000	3 x 6	0,003 (0,0)	0,089 (0,1)	0,042 (0,5)	0,073 (0,9)	0,010 (0,1)	0,022 (0,3)	0,114 (1,4)	0,018 (0,2)	0,032 (0,4)
1:60 000	4 x 8	0,002 (0,0)	0,050 (0,8)	0,025 (0,4)	0,040 (0,7)	0,008 (0,1)	0,013 (0,2)	0,068 (1,1)	0,015 (0,3)	0,020 (0,3)
1:40 000	6 x 12	0,001 (0,0)	0,022 (0,6)	0,011 (0,3)	0,020 (0,5)	0,006 (0,2)	0,007 (0,2)	0,039 (1,0)	0,014 (0,4)	0,010 (0,3)
1:20 000	12 x 24	0,000 (0,0)	0,006 (0,3)	0,003 (0,2)	0,006 (0,3)	0,006 (0,3)	0,004 (0,2)	0,014 (0,7)	0,013 (0,7)	0,006 (0,3)

Tab. 24 Stereographische Abbildung, Blocklage 300 km vom Bezugspunkt

Bildmaßstab	Anzahl der Modelle	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
		m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
1:80 000	3 x 6	0,069 (0,9)	0,057 (0,7)	0,027 (0,3)	0,420 (5,3)	0,510 (6,4)	0,180 (2,3)	0,946 (11,8)	0,963 (12,0)	0,236 (3,0)
1:60 000	4 x 8	0,039 (0,7)	0,032 (0,5)	0,017 (0,3)	0,413 (6,9)	0,510 (8,5)	0,146 (2,4)	0,989 (16,5)	1,043 (17,4)	0,194 (3,2)
1:40 000	6 x 12	0,018 (0,5)	0,014 (0,4)	0,008 (0,2)	0,400 (10,0)	0,506 (12,7)	0,107 (2,7)	1,021 (25,5)	1,073 (26,8)	0,138 (3,5)
1:20 000	12 x 24	0,004 (0,2)	0,004 (0,2)	0,002 (0,1)	0,384 (19,2)	0,499 (25,0)	0,053 (2,7)	1,043 (52,2)	1,092 (54,6)	0,072 (3,6)

Tab. 25 Ordinaten-treue Abbildung, Blocklage 70 km östlich des Hauptmeridians

Tab. 22 - 25 Innere und äußere Verzerrungswirkungen verschiedener geodätischer Abbildungen in Abhängigkeit vom Bildmaßstab - Blockgröße 45 x 45 km, 4 Lagepaßpunkte, 2 Höhenpaßpunktketten - Methode der unabhängigen Modelle, Angaben in m und in (μ m)

abnehmen. Die Verzerrungswirkungen der konformen geodätischen Abbildungen nehmen also sowohl absolut auf das Gelände als auch relativ auf den Bildmaßstab bezogen mit wachsendem Bildmaßstab ab.

Die Beträge der Verzerrungen sind in allen Fällen sehr gering. Beim Bildmaßstab 1:20 000 kommen sie in den mm-Bereich im Gelände und nähern sich unter den gegebenen Simulationsbedingungen bereits der Größe der Abrundungsfehler der Landeskordinaten (1 mm). Im übrigen bestätigt sich wieder die starke Richtungsabhängigkeit der Verzerrungsergebnisse. In einer der beiden Hauptrichtungen sind die Verzerrungen so klein, daß praktisch keine weitere Beeinflussung mehr festgestellt werden kann. Die etwa proportional mit wachsendem Bildmaßstab verlaufende absolute und relative Abnahme der Verzerrungen betrifft die jeweils andere Hauptrichtung. Weitere, hier nicht mehr einzeln aufgeführte Untersuchungen haben weiterhin gezeigt, daß die Geschwindigkeit der Abnahme stark von der Blocklage in der Abbildungszone abhängig ist. Je näher das Gebiet in der Abbildungszone liegt, um so geringer ist die Verminderung der Verzerrungen mit wachsendem Bildmaßstab. Dieser Zusammenhang ist damit zu erklären, daß bei zentraler Blocklage der gesamte Einfluß der geodätischen Verzerrungen von vornherein sehr klein ist, und somit die weitere Verringerung durch den Bildmaßstab nur noch relativ unwirksam sein kann.

Man kann also allgemein feststellen, daß der Verzerrungseinfluß konformer geodätischer Abbildungen bei gegebenem Gebiet mit fester Anzahl und Anordnung von Paßpunkten um so kleiner ist, je größer der Bildmaßstab, d.h. je größer die Zahl der Bilder oder Modelle im Block ist.

Betrachten wir nun die nicht-konforme ordinatentreue Abbildung, dann zeigt Tabelle 25, daß der Einfluß des Bildmaßstabs sich bei dieser Abbildung völlig anders verhält als bei den konformen Abbildungen. Die auf das Gelände bezogenen äußeren Lageverzerrungen sind vom Bildmaßstab fast nicht beeinflusst. Zum Beispiel reduzieren sich die Werte M_H und M_R von 42 cm bzw. 51 cm nur auf 38 cm bzw. 50 cm, wenn der Bildmaßstab von 1:80 000 auf 1:20 000 steigt. Entsprechend steigen die auf den Bildmaßstab bezogenen Lageverzerrungen mit dem Bildmaßstab etwa um den Faktor 4. Die maximalen Lagefehler nehmen sogar absolut mit wachsendem Bildmaßstab leicht zu. Die absoluten Höhenfehler bleiben auf den Bildmaßstab bezogen fast konstant, d.h. sie verbessern sich auf das Gelände bezogen ungefähr proportional mit dem wachsenden Bildmaßstab. Lediglich die inneren Verzerrungen der Blöcke, die auch bei der ordinatentreuen Abbildung hier von Anfang an klein sind, verbessern sich mit wachsendem Bildmaßstab sowohl absolut auf das Gelände als auch relativ auf den Bildmaßstab bezogen.

Da man die Genauigkeit der Aerotriangulation gewöhnlich nicht absolut auf das Gelände bezieht sondern (weil dabei konstant) relativ im Bildmaßstab auszudrücken pflegt, sieht es zunächst nach Tabelle 25 so aus, als verschlechtere wachsender Bildmaßstab die Genauigkeit der Aerotriangulation. Diese Feststellung ist jedoch dahingehend zu präzisieren, als sie sich auf im Gelände konstanten Paßpunktabstand bezieht, die Zahl der überbrückten Modelle daher linear mit dem Bildmaßstab größer wird. Rechnet man die Ergebnisse auf gleiche Paßpunktabstände im Sinne gleicher Anzahl überbrückter Modelle um, dann zeigt sich, daß die äuße-

ren Verzerrungen der Lagekoordinaten im Bildmaßstab jeweils etwa konstant bleiben, die Höhenfehler dagegen umgekehrt proportional zum Bildmaßstab abnehmen. Dennoch bleibt die Schlußfolgerung bestehen, daß anders als bei den konformen Abbildungen bei der ordinatentreuen Abbildung die relativen äußeren Lageverzerrungen durch größere Bildmaßstäbe nicht reduziert werden.

Wie bereits im Abschnitt III.4.4 festgestellt wurde, sind die Verzerrungswirkungen der ordinatentreuen Abbildung stark von der Blocklage abhängig. Entsprechend sind hier die großen Fehlerbeträge zunächst durch den Abstand (70 km) vom Hauptmeridian bestimmt. Und eine Durchrechnung mit dichter Paßpunkt-Randbesetzung hat für den Bildmaßstab 1:20 000 (Abstand zwischen den Lagepaßpunkten $i = 2b = 3.6$ km) bestätigt, daß der mittlere Fehler M_R der Rechtswerte bei dieser Blocklage immer noch 0.143 m im Landessystem oder 7 μ m im Bildmaßstab beträgt.

Zusammenfassend kann somit festgestellt werden, daß bei festgehaltener Paßpunktanordnung die äußeren Verzerrungswirkungen der ordinatentreuen Abbildung auf die Lagekoordinaten bezogen auf das Gelände nicht vom Maßstab der Bilder beeinflusst sind, bezogen auf den Bildmaßstab jedoch umso stärker zum Ausdruck kommen, je größer der Bildmaßstab ist. Die Höhenverzerrungen bleiben auf den Bildmaßstab bezogen bei allen Bildmaßstäben fast gleich. Sie können im Gegensatz zu den Lageverzerrungen durch engerabständige Höhenpaßpunktketten beliebig reduziert werden. Die inneren Verzerrungen der Blöcke nehmen absolut (auf das Gelände bezogen) und relativ (auf die Bilder bezogen) mit wachsendem Bildmaßstab stetig ab.

III.4.7 Einfluß starker Bildverknüpfungen

Die bisherigen Untersuchungen der Verzerrungswirkungen geodätischer Abbildungen haben sich auf relativ große Gebiete (von 45 x 45 km² bis 300 x 300 km²) auf kleine bzw. mittlere Bildmaßstäbe (von 1:80 000 bis 1:20 000) bezogen, wobei der Praxis entsprechend stets der Standardfall von 9 Verknüpfungspunkten pro Bild bzw. 6 + 2 Projektionszentren pro Modell und 60 % Längs- und 20 % Querüberdeckung angenommen wurde. Diese Verhältnisse entsprechen den Anwendungsbereichen, in denen am ehesten mit deutlichen Fehlerwirkungen der geodätischen Abbildungen zu rechnen war. Die großmaßstäbige Aerotriangulation ist dagegen, wie die Untersuchungen gezeigt haben, wegen der kleinen Flächenausdehnung und der in der Regel großen Paßpunktdichte durch die Abbildungsverzerrungen nicht gefährdet. Es bleibt jedoch noch der bei großmaßstäbigen Anwendungen wichtige Fall der sogenannten starken Verknüpfungen zu untersuchen, der sich möglicherweise gegenüber den Abbildungsverzerrungen anders verhält als die bisher behandelten Standardfälle.

Bei großmaßstäbigen Anwendungen der Aerotriangulation werden starke Verknüpfungen aus Genauigkeitsgründen bevorzugt. Sie werden entweder durch doppelte oder gar mehrfache Bildüberdeckungen oder durch Erhöhung der Anzahl der Verknüpfungspunkte, z.B. bei der Katasterphotogrammetrie erzielt. Bildverbände mit starken Verknüpfungen sind in sich starrer und gegen Deformationen widerstandsfähiger, so daß sie sich möglicherweise schlechter an geodätische Abbildungsverzerrungen anpassen.

Starke Verknüpfungen werden sich bezüglich der Verzerrungseigenschaften in erster Näherung gleichartig verhalten, unabhängig davon, ob sie durch Mehrfachüberdeckung oder durch eine große Zahl von Verknüpfungspunkten zustande kommen. Eine Ausnahme bildet lediglich die Höhenversteifung der Blöcke mit 60 % Querüberdeckung. Da aber nach der Erdkrümmungskorrektur der photogrammetrischen Daten die Aufwölbung der Höhenbezugsfläche beseitigt ist, ist dieser Fall hier von untergeordnetem Interesse und braucht hier nicht speziell behandelt zu werden. Es genügt daher im folgenden, das Problem der starken Verknüpfungen anhand von Bildverbänden mit 20 % Querüberdeckung und mit erhöhter Anzahl von Verknüpfungspunkten zu untersuchen.

In realistischer Anlehnung an die praktischen Fälle starker Verknüpfungen wählen wir hier eine Blockgröße von 22 km x 22 km und betrachten die Bildmaßstäbe 1:20 000 und 1:10 000. Das Gebiet wird somit von 6 x 12 bzw. 12 x 24 Modellen überdeckt.

Aus den bisherigen Untersuchungen ist bekannt, daß die Verzerrungswirkungen konformer Abbildungen weniger von der Größe des Gebiets als vom Abstand zwischen den Paßpunkten und vom Bildmaßstab abhängig sind. Die Verzerrungsbeträge sind wegen der geringen Gebietsgröße erwartungsgemäß sehr klein. Um überhaupt nennenswerte Verzerrungsbeträge zu erhalten, wählen wir deshalb die schwache Paßpunktanordnung mit 4 Lagepaßpunkten und 2 Höhenpaßpunktketten. Die damit erzielten Ergebnisse gelten für die konformen Abbildungen auch für größere Blöcke mit gleich großen Paßpunktabständen. Bei der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung ist ohnehin eher die Blocklage als die Blockgröße von Einfluß.

Um auf der sicheren Seite zu bleiben wählen wir deshalb für diese Abbildung mit 70 km einen großen Abstand vom Bezugsmeridian. Entsprechend wird der Block auch bei den konformen Abbildungen an den Rand der jeweiligen Abbildungszone gelegt. Für die Gauß-Krüger Abbildung wird ein Abstand von etwa 150 km vom Nullmeridian gewählt, womit der äußere Teil des Blocks am Äquator am Rand eines 3-Grad-Streifens, bei 50°N bereits im Nachbarstreifen liegt. Für die Lambertsche Abbildung wird ein Abstand von 200 km vom Normalparallelkreis gewählt, was der Randlage in einer 4-Grad-Zone entspricht. Ebenso liegt der Block mit 150 km Abstand vom Bezugspunkt bei der stereographischen Abbildung am Rand der üblichen Ausdehnung der Abbildungszone.

Die starke Verknüpfung wird durch Erhöhung der Anzahl der Verknüpfungspunkte um den Faktor 10 simuliert. Sie werden in Zehnergruppen an die 9 Standardpositionen gelegt. Zum Vergleich wird jeweils der Fall der einfachen Verknüpfung (5 Punkte pro Bild) mitberechnet. Anzumerken bleibt noch, daß die terrestrischen Paßpunktkoordinaten jeweils mit dem Gewicht ∞ eingeführt werden.

Die Ergebnisse der Verzerrungswirkungen der 4 geodätischen Abbildungen bei starker Verknüpfung sind in Tabelle 26 zusammengestellt.

Betrachten wir zunächst die drei konformen Abbildungen, so zeigt sich übereinstimmend, daß sowohl die inneren wie auch die äußeren Verzerrungswirkungen auch bei starker Verknüpfung völlig unbedeutend bleiben und den Betrag von 1 μ m im Bildmaßstab kaum erreichen bzw. übersteigen. Die inneren Verzerrungen bleiben

Bildmaßstab	Verknüpfung	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
		m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
1:20 000	1x	0,005 (0,3)	0,000 (0,0)	0,002 (0,1)	0,001 (0,1)	0,004 (0,2)	0,002 (0,1)	0,003 (0,2)	0,009 (0,5)	0,004 (0,2)
	10x	0,005 (0,3)	0,000 (0,0)	0,000 (0,0)	0,017 (0,9)	0,013 (0,7)	0,001 (0,1)	0,040 (2,0)	0,031 (1,6)	0,002 (0,1)
1:10 000	1x	0,001 (0,1)	0,000 (0,0)	0,001 (0,1)	0,002 (0,2)	0,001 (0,1)	0,001 (0,1)	0,004 (0,4)	0,003 (0,3)	0,001 (0,1)
	10x	0,001 (0,1)	0,000 (0,0)	0,000 (0,0)	0,005 (0,5)	0,003 (0,3)	0,001 (0,1)	0,013 (1,3)	0,009 (0,9)	0,001 (0,1)

Tab. 26a Gauß-Krüger Abbildung, Blocklage 150 km vom Bezugsmeridian

Bildmaßstab	Verknüpfung	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
		m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
1:20 000	1x	0,000 (0,0)	0,008 (0,4)	0,004 (0,2)	0,006 (0,3)	0,001 (0,1)	0,003 (0,2)	0,011 (0,6)	0,002 (0,1)	0,004 (0,2)
	10x	0,000 (0,0)	0,007 (0,4)	0,000 (0,0)	0,019 (1,0)	0,027 (1,4)	0,001 (0,1)	0,044 (2,2)	0,063 (3,2)	0,002 (0,1)
1:10 000	1x	0,000 (0,0)	0,002 (0,2)	0,001 (0,1)	0,002 (0,2)	0,001 (0,1)	0,001 (0,1)	0,003 (0,3)	0,003 (0,3)	0,001 (0,1)
	10x	0,000 (0,0)	0,002 (0,2)	0,000 (0,0)	0,005 (0,5)	0,007 (0,7)	0,001 (0,1)	0,013 (1,3)	0,019 (1,9)	0,001 (0,1)

Tab. 26b Lambertsche Abbildung, Blocklage 200 km vom Normal-parallelkreis

Bildmaßstab	Verknüpfung	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
		m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
1:20 000	1x	0,002 (0,1)	0,000 (0,0)	0,001 (0,1)	0,001 (0,1)	0,002 (0,1)	0,001 (0,1)	0,003 (0,2)	0,005 (0,3)	0,003 (0,2)
	10x	0,002 (0,1)	0,000 (0,0)	0,000 (0,0)	0,009 (0,5)	0,006 (0,3)	0,001 (0,1)	0,021 (1,1)	0,017 (0,9)	0,001 (0,1)
1:10 000	1x	0,001 (0,1)	0,000 (0,0)	0,000 (0,0)	0,002 (0,2)	0,001 (0,0)	0,001 (0,1)	0,004 (0,4)	0,003 (0,3)	0,001 (0,1)
	10x	0,001 (0,1)	0,000 (0,0)	0,000 (0,0)	0,003 (0,3)	0,002 (0,2)	0,001 (0,1)	0,007 (0,7)	0,005 (0,5)	0,001 (0,1)

Tab. 26c Stereographische Abbildung, Blocklage 150 km vom Bezugspunkt

Bildmaßstab	Verknüpfung	innere Verzerrungen			äußere Verzerrungen					
		m_H	m_R	m_Z	M_H	M_R	M_Z	Max_H	Max_R	Max_Z
1:20 000	1x	0,007 (0,4)	0,007 (0,4)	0,003 (0,2)	0,198 (9,9)	0,215 (10,8)	0,051 (2,6)	0,503 (25,2)	0,522 (26,1)	0,066 (3,3)
	10x	0,006 (0,3)	0,006 (0,3)	0,000 (0,0)	0,194 (9,7)	0,212 (10,6)	0,023 (1,2)	0,459 (23,0)	0,489 (24,5)	0,029 (1,5)
1:10 000	1x	0,002 (0,2)	0,002 (0,2)	0,001 (0,1)	0,189 (18,9)	0,211 (21,1)	0,010 (1,0)	0,510 (51,0)	0,529 (52,9)	0,014 (1,4)
	10x	0,002 (0,2)	0,002 (0,2)	0,000 (0,0)	0,188 (18,8)	0,209 (20,9)	0,003 (0,3)	0,495 (49,5)	0,517 (51,7)	0,003 (0,3)

Tab. 26d Ordinaten-treue Abbildung, Blocklage 70 km vom Hauptmeridian

Tab. 26a - 26d Innere und äußere Verzerrungen großmaßstäbiger Blöcke in Abhängigkeit von der Anzahl der Verknüpfungspunkte - Blockgröße 22 km x 22 km, 4 Lagepaßpunkte, 2 Höhenpaßpunktketten - Methode der unabhängigen Modelle, Angaben in m und in (μ m)

wegen der geringen Gebietsgröße überhaupt sehr gering und zeigen keinen Unterschied zwischen schwacher und starker Verknüpfung. Ebenso bleiben die absoluten Höhenfehler im Bereich weniger mm im Gelände ($0,1 \mu$ m im Bildmaßstab) und sind an der Grenze der Rechenschärfe der simulierten Daten. Ein Einfluß der Verknüpfungen ist nicht erkennbar. Obwohl die Beträge insgesamt sehr gering und vernachlässigbar sind, zeigt sich bei den äußeren Lageverzerrungen deutlich der erwartete Einfluß der starken Verknüpfung bei allen drei konformen Abbildungen. Die Wirkung ist um so erheblicher, je kleiner der Bildmaßstab ist. Beim Bildmaßstab 1:20 000 sind die Lagefehler je nach der geodätischen Abbildung 10 bis knapp 30fach größer als bei der einfachen Verknüpfung. Beim Bildmaßstab 1:10 000 geht der Effekt auf das 2 bis 3fache zurück. Nachdem die absoluten Beträge der Verzerrungswirkungen der konformen Abbildungen auch bei den Fällen starker Verknüpfung der Tabelle 26 vernachlässigbar klein sind, ist damit sichergestellt, daß bei noch größeren Bildmaßstäben und den dabei üblichen dichteren Paßpunktbesetzungen keinerlei störende Verzerrungswirkungen zu befürchten sind.

Die nicht-konforme ordinaten-treue Abbildung zeigt wie in allen anderen Fällen auch hier ein völlig anderes Verhalten als die konformen Abbildungen. Während die inneren Verzerrungen im mm-Bereich und damit vernachlässigbar bleiben, sind die äußeren Lageverzerrungen beträchtlich, was hier primär auf die schwache Paßpunktbesetzung zurückzuführen ist. Die Lagefehler liegen bei beiden Bildmaßstäben etwa konstant bei 20 cm im Gelände und damit bei 10μ m bzw. 20μ m im Bildmaßstab. Bemerkenswerterweise hat die starke Verknüpfung praktisch keinen Einfluß auf die Lagefehler, während die wesentlich geringeren Höhenfehler bei der starken Verknüpfung sogar zurückgehen.

Insgesamt bestätigt sich wieder, daß Blockausgleichungen in der nicht-konformen ordinaten-treuen Abbildung die Abbildungsverzerrungen nur schlecht unterdrücken können und deshalb bei der Präzisions-Aerotriangulation in dieser Abbildung mit nicht vernachlässigbaren Verzerrungswirkungen gerechnet werden muß. Diese Eigenschaft ist weitgehend unbeeinflusst von der Stärke der Verknüpfungen.

IV. ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSSFOLGERUNG

Die direkte Verwendung des geodätisch abgebildeten Landeskoordinatensystems als übergeordnetes Koordinatensystem der photogrammetrischen Auswertung führt im Prinzip zu zusätzlichen systematischen Fehlern, weil die ursprüngliche Erdoberfläche im Landeskoordinatensystem verzerrt dargestellt und somit nicht mit ihrer photogrammetrischen räumlichen Rekonstruktion kompatibel ist. Zu den Verzerrungen gehört in erster Linie die Verebnung der Erdoberfläche bezüglich dem als Referenzfläche dienenden Rotationsellipsoid. Die bei der photogrammetrischen Auswertung im Prinzip räumlich unverzerrt rekonstruierte Erdoberfläche zeigt gegenüber ihrer Darstellung im Landeskoordinatensystem eine "Aufwölbung". Da die Ellipsoidoberfläche und ihre Verebnung im Landeskoordinatensystem als Höhenbezugsfläche dienen, ergibt sich eine entsprechende Höhenverzerrung der Auswertung. Mit der Verebnung der Ellipsoidoberfläche entstehen zusätzlich aber auch Lageverzerrungen, von allerdings wesentlich geringerer Größe. Streng genommen können die Höhen- und Lageverzerrungen nicht voneinander getrennt werden. In der Praxis hat man es jedoch in der Regel nur mit einem kleinen Teil der Erdoberfläche zu tun, wobei Höhenausdehnung und Aufwölbung klein sind im Vergleich zur horizontalen Ausdehnung des Gebiets, so daß man Höhen- und Lageverzerrungen getrennt behandeln kann.

Die Höhenverzerrung bzw. die Aufwölbung der photogrammetrischen Geländerekonstruktion wächst innerhalb eines kleinen Gebiets annähernd quadratisch mit der Gebietsausdehnung und ist schon bei der photogrammetrischen Auswertung einzelner klein- bis mittelmaßstäbiger Bildpaare nicht mehr zu vernachlässigen. Der Effekt wird seit langem in der Praxis durch eine sogenannte Erdkrümmungskorrektur zu beseitigen versucht. Dagegen wird die Lageverzerrung bei der photogrammetrischen Auswertung wegen ihrer kleinen Beträge bisher nicht besonders berücksichtigt.

Diese Arbeit hat sich zum Ziel gesetzt, den Fehlereinfluß der geodätischen Abbildungen bei photogrammetrischen Auswertungen, insbesondere aber hinsichtlich der Aerotriangulation zu untersuchen. Dabei waren alle wichtigen Einflußfaktoren, wie z.B. Paßpunktanordnung, Art der geodätischen Abbildung, Gebietslage in der Abbildungszone, Bildmaßstab usw., zu berücksichtigen.

Von den zahlreichen möglichen geodätischen Abbildungen werden heute in den verschiedenen Ländern der Welt praktisch nur konforme Abbildungen, und zwar die Gauß-Krüger, die Lambertsche und die stereographische Abbildung als die Koordinatensysteme der Landesvermessung benützt. Deshalb sind in dieser Arbeit in erster Linie die Verzerrungswirkungen dieser drei konformen Abbildungen untersucht worden, denen zum Vergleich die fast nicht mehr gebrauchte nicht-konforme ordinatentreue Abbildung gegenübergestellt wird. Die Einbeziehung dieser Abbildung erwies sich als sehr nützlich, um die sehr unterschiedlichen Auswirkungen der konformen und der nicht-konformen Abbildungen auf die photogrammetrische Auswertung aufzeigen zu können.

Die Untersuchungen dieser Arbeit haben gezeigt, daß die Fehlereinflüsse der geodätischen Verzerrung auf die photogrammetrische Auswertung zwar wegen der Abhängigkeit von vielen Faktoren recht kompliziert sind, aber im allgemeinen können sie beim heutigen Genauigkeitsstand nach der sog. Erdkrümmungskorrektur der photogrammetrischen Daten vernachlässigt werden.

IV.1 Einzelbild- und Bildpaarauswertung

Bei der Einzelbildauswertung entsteht ein Fehlereinfluß bei allen drei konformen Abbildungen hauptsächlich im Sinne der Reliefversetzung auf Grund der Krümmung der Höhenbezugsfläche. Er ist von der Gebietslage in der Abbildungszone fast unabhängig. Wegen der bei der Einzelbildauswertung (z.B. bei der Herstellung von Orthophotokarten) normalerweise niedrigen Genauigkeitsforderungen ist dieser Fehlereinfluß der konformen Abbildungen stets vernachlässigbar. Der mittlere Fehlereinfluß wächst bei gegebenem Bildformat annähernd proportional mit der Bildmaßstabszahl. Selbst wenn man bei der Herstellung der Orthophotokarten aus groß- bis mittelmaßstäbigen Bildern ($\approx 1:40\ 000$) mit einer Vergrößerung bis 10fach, bzw. aus kleinmaßstäbigen Bildern ($< 1:40\ 000$) mit bis 2fach rechnet, bleibt der mittlere Lagefehler wegen der geodätischen Verzerrung auch bei ungünstiger Paßpunktverteilung (Paßpunkte nur über die Hälfte des vom Bild bedeckten Gebiets verteilt) und ohne jegliche Korrektur immer noch kleiner als 0.1 mm in der Orthophotokarte.

Bei der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung hängt die Größe des Fehlereinflusses der Abbildung sehr stark vom Abstand des auszuwertenden Gebiets vom Hauptmeridian ab, wogegen die Gebietslage in der Nord-Süd-Richtung praktisch ohne Einfluß ist. Bei zentraler Gebietslage ist der Fehlereinfluß ungefähr gleich groß wie bei den konformen Abbildungen. Die Fehler entstehen also hierbei auch hauptsächlich durch die Reliefversetzung der gekrümmten Höhenbezugsfläche. Mit zunehmender Entfernung des Gebiets vom Hauptmeridian wächst der Fehlereinfluß rasch an. Bei 200 km Abstand vom Hauptmeridian beträgt der von der Abbildungsverzerrung verursachte mittlere Lagefehler im Bild schon 30 μm bei großem, bzw. 40 μm bei kleinem Bildmaßstab. Beschränkt man aber die Systembreite der nicht-konformen Abbildung wie z.B. bei der alten preußischen Katasterabbildung auf ± 60 km vom Hauptmeridian, kann der Fehlereinfluß auf Orthophotos ebenfalls wie bei den konformen Abbildungen völlig vernachlässigt werden.

Da die Fehlerwirkungen der geodätischen Abbildungsverzerrungen bei der Einzelbildauswertung hauptsächlich durch die Aufwölbung der Erdoberfläche gegenüber der verebneten Höhenbezugsfläche im Landeskoordinatensystem verursacht werden, hängen die Fehlerbeträge bei der Einzelbildauswertung von Satellitenaufnahmen nur von der Größe des von dem Bild bedeckten Gebiets und von dem Öffnungswinkel der Aufnahmekammer ab. Bei den in dieser Arbeit näher betrachteten S-190A und S-190B Aufnahmen aus SKYLAB (Bildmaßstab 1:2 900 000 bzw. 1:950 000) ist der Fehlereinfluß wegen des schmalen Öffnungswinkels im Vergleich zu den konventionellen photogrammetrischen Weitwinkel- und Überweitwinkelbildern relativ klein. Der mittlere Lagefehler beträgt unabhängig von den geodätischen Abbildungen bei günstiger Paßpunktverteilung (4 Paßpunkte in den Bildecken) weniger als 40 μm im Bild für die S-190A Bilder bzw. für die S-190B Bilder sogar weniger als 30 μm . Erst bei 3 bzw. 4facher Vergrößerung zur Herstellung von Bildplänen ohne jegliche Korrektur wird die 0.1 mm Grenze überschritten. Bei derartig kleinen Bildmaßstäben sind jedoch stärkere Vergrößerungen erforderlich, die somit eine weitgehende Korrektur der geodätischen Abbildungsverzerrungen notwendig machen.

Bei der Einzelmodellauswertung ohne Erdkrümmungskorrektur ist der Fehlereinfluß in der Höhe wegen der Aufwölbung bereits vom Bildmaßstab 1:10 000 ab deutlich spürbar. Bei ungünstiger Paßpunktverteilung (Paßpunkte nur in einer Hälfte des vom Bildpaar gemeinsam überdeckten Gebiets) kann der mittlere Fehlereinfluß in der Höhe bei diesem Bildmaßstab schon über 7 μm im Bild betragen. Bei noch kleineren Bildmaßstäben ist für die Höhenauswertung eine Erdkrümmungskorrektur stets notwendig.

Die Erdkrümmungskorrektur als Verzeichnungskorrektur der Einzelbilder ist zwar im Prinzip nicht streng, da die beiden Bilder des Bildpaares auf unterschiedliche Höhenbezugsflächen (Tangentialebenen) reduziert werden, aber sie ist praktisch fast so gut wie die von der Konzeption her richtigere Korrektur im (relativ orientierten) Modell. Allerdings müssen Bildneigung und Geländehöhenunterschiede bei der Erdkrümmungskorrektur berücksichtigt werden. Der maximale Restfehler in der Höhe beträgt danach nur noch 0.2 μm im Bildmaßstab 1:80 000.

Sowohl die Erdkrümmungskorrektur an den einzelnen Bildern als auch die Korrektur im Modell ergibt bis zum Bildmaßstab 1:80 000 praktisch keine Änderungen der Lagekoordinaten. Dagegen ist der Fehlereinfluß der geodätischen Abbildungsverzerrungen auf die Lage deutlicher ausgeprägt. Er hängt stark von der Gebietslage in der jeweiligen geodätischen Abbildungszone ab. Unter Gebietslage brauchen wir hier nur den Abstand des vom Bildpaar überdeckten Gebiets zum Bezug (Nullmeridian, Normalparallelkreis oder Bezugspunkt) der jeweiligen geodätischen Abbildung zu betrachten. Verschiebungen senkrecht dazu haben praktisch keinen Einfluß auf die Lageverzerrungen der Bildauswertung.

Bei zentraler Gebietslage verursacht die geodätische Abbildung praktisch keine Lagefehler der Bildpaarauswertung. Der maximale Lagefehler beträgt in diesem Fall selbst bei sehr ungünstiger Paßpunktverteilung (Paßpunkte nur in einer Hälfte des Modells) nur 0.1 μm im Bildmaßstab 1:80 000. Mit wachsender Entfernung vom Bezug steigert sich der Fehlereinfluß und zeigt sich allmählich auch ein Unterschied zwischen den konformen und der nicht-konformen Abbildung. Bei allen konformen Abbildungen ist der im Bildmaßstab ausgedrückte Fehlereinfluß der geodätischen Verzerrung auf die Lagekoordinaten bei nicht-zentraler Gebietslage etwa proportional mit der Bildmaßstabzahl, bei der ordinatentreuen Abbildung bleibt er dagegen bei allen Bildmaßstäben gleich. In der Landesvermessung ist die Ausdehnung der Abbildungszonen bei den konformen Abbildungen ziemlich beschränkt (nicht größer als ± 400 km von den Bezugslinien oder 400 km Radius um den Bezugspunkt). Als Folge bleiben die mittleren Lagefehler selbst bei Bildpaaren am Rand der Abbildungszone und in den ungünstigen Fällen kleinen Bildmaßstäbs (1:80 000) und ungünstiger Paßpunktverteilung unter Beträgen von 4 μm im Bild, was noch generell als vernachlässigbar gelten kann.

Bei der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung ist der Verzerrungseinfluß auf die Lagekoordinaten des Einzel-Bildpaares viel stärker von der Gebietslage beeinflusst. Bereits bei einem Abstand von 200 km vom Hauptmeridian beträgt die mittlere Lageverzerrung auch bei günstiger Paßpunktverteilung (Paßpunkte in den 4 Modellecken) schon 16 μm im Bild (für alle Bildmaßstäbe). Lediglich durch die Beschränkung der Systembreite wie bei der alten preußischen Katasterabbildung

auf ± 60 km vom Hauptmeridian kann der Fehlereinfluß dieser Abbildung auf weniger als $3 \mu\text{m}$ im Bild heruntergedrückt und somit für die Praxis ebenfalls vernachlässigbar klein gehalten werden.

IV.2 Bildverbände, Aerotriangulation

In der Aerotriangulation sind die Verzerrungswirkungen geodätischer Abbildungen wegen der Abhängigkeit von Gebietsausdehnung, Anzahl und Maßstab der Bilder, Anzahl und Anordnung der Paßpunkte usw. recht kompliziert. Außerdem ist der Fehlereinfluß der Abbildungsverzerrung noch von der Methode der Aerotriangulation abhängig. Im Gegensatz zur Einzelbild- und Einzelmodellauswertung ist bei der Aerotriangulation in jedem Fall auch bei großen Bildmaßstäben eine Erdkrümmungskorrektur vorzusehen, um unzulässige Höhenfehler zu vermeiden. Bei der Methode der unabhängigen Modelle ist dabei auch die Korrektur der Projektionszentren wegen der Divergenz der Lotrichtungen inbegriffen.

Die Untersuchung der Fehlerwirkungen der geodätischen Abbildungsverzerrungen auf die Aerotriangulation kann sich wegen der überraschend günstigen Ergebnisse im wesentlichen auf die Methode der unabhängigen Modelle als hinreichend repräsentativ beschränken.

Durch eine repräsentative Voruntersuchung des relativ ungünstigen Falls eines quadratischen Standardblocks mit 20×41 Bildern im Bildmaßstab 1:80 000 ($q = 20 \%$, $p = 60 \%$, Gebietsgröße ca. $300 \times 300 \text{ km}^2$) mit nur 8 Lagepaßpunkten am Blockrand und 3 quer zur Streifenrichtung verlaufenden Höhenpaßpunktketten (Überbrückungsdistanz $i = 20b \approx 150 \text{ km}$) wurde zunächst aufgezeigt, daß der Fehlereinfluß der Abbildungsverzerrungen auch bei der Aerotriangulation im allgemeinen vernachlässigbar ist. Die Verzerrungswirkungen bleiben bei den 3 konformen Abbildungen (nach der Erdkrümmungskorrektur) wesentlich kleiner als die bei dem heute erreichten Genauigkeitsstand zu erwartenden Einflüsse der zufälligen Fehler. Die inneren Verzerrungen des ausgeglichenen Blocks (d.h. die Fehlereinflüsse auf die Verbesserungen) belaufen sich bei der Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen im Mittel auf nur etwa $1 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab, bei der Bündelgleichung sind die Beträge noch kleiner. Auf die äußeren Lageverzerrungen des ausgeglichenen Punktfeldes wirken sich die geodätischen Abbildungsverzerrungen bei beiden Blockausgleichungsmethoden mit maximal $5 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab praktisch gleich aus. Als Sekundäreffekt ergeben sich wegen der Maßstabsfehler zusätzliche Höhenfehler, die bei der Bündelmethode etwas größer ausfallen als bei der Methode der unabhängigen Modelle, die aber mit Maximalbeträgen von $1.5 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab allgemein zu vernachlässigen sind.

Dagegen sind bei der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung die äußeren Lageverzerrungen des repräsentativen Blocks mit mittleren Lagefehlern von über $50 \mu\text{m}$ im Bildmaßstab um eine Zehnerpotenz größer. Erst bei einer Beschränkung der Gebietsgröße und -lage z.B. auf die Systembreite der alten preußischen Katasterabbildung von ± 60 km vom Hauptmeridian kann der Einfluß der Abbildungsverzerrungen auch bei dieser nicht-konformen Abbildung vernachlässigbar klein gehalten werden.

Die anschließenden Einzeluntersuchungen haben gezeigt, daß die inneren und äußeren Verzerrungswirkungen zwar noch von vielen Faktoren abhängig sind, daß aber die für das repräsentative Beispiel ermittelten Fehlerbeträge für die Praxis, bei der die Paßpunktanordnungen gewöhnlich wesentlich günstiger sind, als obere Grenzwerte betrachtet werden können.

Der nach der Erdkrümmungskorrektur verbleibende sekundäre Fehlereinfluß auf die Höhen ist in allen Fällen vernachlässigbar klein. Er entsteht hauptsächlich durch die örtlichen Maßstabsunterschiede in der Abbildungszone. Es genügte im allgemeinen bei Blöcken mit 20 % Querüberdeckung 3 quer zur Streifenrichtung verlaufende Höhenpaßpunktketten, um den Einfluß der Abbildungsverzerrungen auf die Höhen völlig zu unterdrücken. Als im einzelnen näher zu untersuchen verblieben somit lediglich die inneren und äußeren Lageverzerrungen der Blöcke.

Die Verzerrungswirkungen auf die Lagekoordinaten sind bei allen untersuchten geodätischen Abbildungen nach der Erdkrümmungskorrektur unabhängig von der Höhenpaßpunktanordnung bzw. von dem Fehlereinfluß der Abbildungsverzerrungen auf die Höhen. Die Ergebnisse der detaillierten Untersuchungen können in folgenden allgemeinen Feststellungen zusammengefaßt werden.

Der Fehlereinfluß auf die Lageverzerrungen ist bei allen drei konformen Abbildungen sehr ähnlich. Es gilt insbesondere:

1. Bei gegebenem Bildmaßstab der photogrammetrischen Aufnahmen wird der Fehlereinfluß auf die Lagekoordinaten der Neupunkte um so kleiner, je größer die Anzahl der am Blockrand liegenden Lagepaßpunkte bzw. je kürzer der (absolute) Abstand zwischen den Lagepaßpunkten ist. Lagepaßpunkte im Blockinnern tragen nicht zur weiteren Unterdrückung der Verzerrungen bei.
2. Bei fester Paßpunktanordnung wird der Fehlereinfluß um so kleiner, je größer der Bildmaßstab der photogrammetrischen Bilder, d.h. je kleiner das von einem Bild bedeckte Gebiet ist. (Obwohl die Anzahl der Basislängen zwischen den Lagepaßpunkten bei größerem Bildmaßstab dann größer wird.)
3. Trotz der mit wachsender Entfernung vom Bezug der geodätischen Abbildung zunehmenden Abbildungsverzerrungen hat die Lage des Gebiets in der Abbildungszone praktisch keinen Einfluß auf die äußeren Lageverzerrungen.
4. Anzahl und Anordnung der Lagepaßpunkte haben praktisch keinen Einfluß auf die durch die Abbildungsverzerrungen verursachten Klaffungen zwischen den Modellen.
5. Die Klaffungen zwischen den Modellen bezogen auf das Modell nehmen mit wachsendem Bildmaßstab ab, d.h. die Winkel- und Maßstabsverzerrungen der ausgeglichenen Modelle nehmen proportional zur Bildmaßstabszahl ab.
6. Insgesamt können die inneren und äußeren Verzerrungswirkungen in allen Fällen (einschließlich der Extremfälle) der heutigen Anwendungen der Aerotriangulation vernachlässigt werden.

Dagegen zeigen die Fehlereinflüsse der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung ein völlig anderes Verhalten:

1. Die Erhöhung der Anzahl der am Blockrand liegenden Lagepaßpunkte bringt bei großen Blöcken bzw. bei Blöcken mit großem Abstand vom Hauptmeridian nur eine geringe Verkleinerung der Lagefehler. Der Fehlereinfluß auf die Höhen wird dabei sogar drastisch vergrößert.
2. Bei fester Paßpunktanordnung sind die auf das Gelände bezogenen Verzerrungsbeträge praktisch von dem Bildmaßstab unabhängig.
3. Der Fehlereinfluß hängt sehr stark von der Lage des Blocks in der Abbildungszone ab. Während die Verzerrungen bei (kleinen) unmittelbar am Hauptmeridian liegenden Blöcken fast gleich groß sind wie bei konformen Abbildungen, nehmen sie bei Blöcken, bei denen ein Teil des Gebiets über 100 km weit vom Hauptmeridian entfernt ist, schon so große Beträge an, daß sie in der Praxis nicht mehr vernachlässigbar sind.
4. Die durch Abbildungsverzerrungen verursachten Klaffungen zwischen den Modellen sind stark von der Anzahl der Lagepaßpunkte abhängig. Insbesondere führt eine höhere Zahl von Paßpunkten zu stärkeren inneren Verzerrungen der Blöcke.
5. Die Klaffungen zwischen den Modellen nehmen zwar bei dünner Paßpunktbesetzung auch mit wachsendem Bildmaßstab ab. Dagegen sind sie bei dichter Paßpunktbesetzung praktisch vom Bildmaßstab unabhängig. Das heißt, die inneren Verzerrungen können durch Vergrößerung des Bildmaßstabs dann nicht mehr verkleinert werden.

IV.3 Zur Erklärung der Ergebnisse

Die große Ähnlichkeit und die geringen Beträge der Verzerrungswirkungen der konformen Abbildungen bzw. die grundsätzlichen Unterschiede zwischen konformen und nicht-konformen Abbildungen, die hier empirisch festgestellt wurden, lassen sich aus einer grundlegenden Eigenschaft konformer Abbildungen bzw. mit Hilfe eines Satzes aus der Funktionstheorie begründen bzw. verstehen.

Dazu beschränken wir uns im folgenden auf die Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen. Die Übertragung auf die Blockausgleichung mit Bündeln ist möglich.

Nach Cauchy gilt für eine in einem Gebiet definierte komplexe analytische Funktion $f(z)$:

Der Funktionswert $f(z)$ eines Punktes z , der im inneren eines Teilgebiets G' von G liegt, läßt sich mit Hilfe des Integrals

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\bar{z} - \zeta} d\zeta$$

bestimmen, wobei das Integral über den Rand γ des Teilgebiets G' zu nehmen ist. Wenn also die Funktion auf dem Rand eines Gebiets bestimmt ist, sind alle Funktionswerte innerhalb des Gebiets festgelegt.

Für die Anwendung dieses Satzes in der Aerotriangulation in einem konform abgebildeten Landeskoordinatensystem muß man zeigen, 1. daß sich die durch die Blockausgleichung bewirkte Transformation als Funktion einer komplexen Variablen deuten läßt, 2. unter welcher Bedingung diese Funktion konform und damit analytisch ist. Daraus wird folgen, daß die Abbildung im inneren des Blocks bestimmt ist, wenn sie konform und durch einen dichten Paßpunktrand vorgegeben ist.

Dazu betrachten wir zunächst die ausgeglichenen Koordinaten x, y , einer freien Blockausgleichung, die wir zu einer komplexen Variablen $z = x + iy$ zusammenfassen können (vgl. Bild 33 links). Die Blockausgleichung mit Paßpunkten, die auf das abgebildete geodätische Landessystem bezogen sind, führt zu anderen ausgeglichenen Koordinaten u, v , die wir als komplexen Funktionswert $w = u + iv$ interpretieren können (vgl. Bild 33 rechts). Diese Betrachtungsweise gilt für konforme und nicht-konforme Abbildungen gleichermaßen.

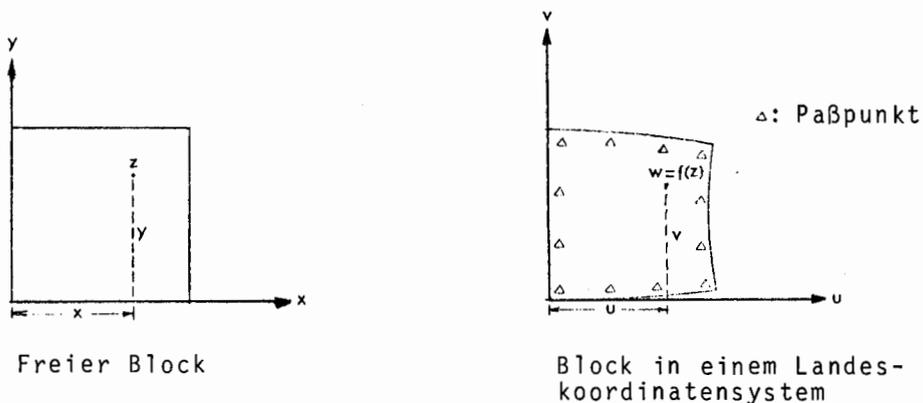


Bild 33 Zur komplexen Darstellung der Blockausgleichung

Die freie (Lage-)Blockausgleichung bildet jedes einzelne Modell konform ab. Klaffungen zwischen den Modellen treten bei der sonst angenommenen Fehlerfreiheit nicht auf. Durch den Zwang der Paßpunkte können Klaffungen zwischen den Modellen entstehen, und die Blockausgleichung bildet nicht mehr unbedingt konform ab. (Dies bezieht sich auf die ausgeglichenen Koordinaten.)

Wenn aber die Klaffungen unter bestimmten Bedingungen verschwinden, bildet die Blockausgleichung weiter konform ab. Wie wir oben empirisch gefunden haben, werden die Klaffungen verschwinden, a) wenn entweder das von einem Modell bedeckte Gebiet differentiell klein gegenüber dem Paßpunktabstand ist (unabhängig davon, ob die Paßpunkte konform abgebildet sind oder nicht, oder b) wenn die Modelle und der Paßpunktabstand gleichzeitig differentiell klein¹⁾ aber die Paßpunkte konform abgebildet sind.

¹⁾ Da bei der geodätischen Abbildung als wichtigstes gefordert wird, daß das Abbild möglichst geringe Verzerrung vom Urbild aufweist, kann man aus den Ergebnissen der Untersuchungen sehen, daß die Modelle bereits beim Bildmaßstab 1:10 000 als differentiell klein betrachtet werden können, wenn die Genauigkeitsforderung etwa bei 1 cm im Gelände liegt.

Nur die Bedingung b) führt zu einer Erfüllung des Cauchy'schen Satzes. Die Aero-triangulation in einem konform abgebildeten Landeskoordinatensystem erfüllt mit großem Bildmaßstab und dichter Randbesetzung der Lagepaßpunkte diese Bedingung annähernd, womit die Punkte 1 bis 3 der Eigenschaften der konformen Abbildungen erklärt sind. Da die geodätische Abbildung insgesamt geringe Verzerrungen aufweist, ist der Gebietsrand praktisch schon bei nur 8 Lagepaßpunkten (Version II) so gut bestimmt, daß weitere Lagepaßpunkte nur unwesentliche Änderungen bringen. Dies führt zu dem unter Punkt 4 genannten Ergebnis der konformen Abbildungen. Im übrigen bestätigt die Analogie zum Cauchyschen Satz, daß die Form des Blocks bzw. des Blockrandes bei dichter Paßpunktbesetzung ohne Einfluß ist.

Wenn dagegen die Paßpunkte zwar in einem konformen Landeskoordinatensystem dargestellt sind, aber der Abstand zwischen ihnen und/oder die Modelle als diskrete Einheiten nicht klein genug sind, kommt es zu Abweichungen von dem Cauchyschen Integral. In diesem Fall ist die Blockausgleichung nicht mehr streng konform, weil $f(z)$ auf dem Rand nicht vollständig bestimmt und die Voraussetzung der Stetigkeit nicht mehr gegeben ist. Die durch die Blockausgleichung bewirkte Abbildung ist damit nicht mehr einwandfrei mit dem Landeskoordinatensystem zur Deckung zu bringen. Dies zeigen unsere Fälle von Blockausgleichungen in konformen Landessystemen mit nur 4 Lagepaßpunkten und mit kleinem Bildmaßstab. Wegen der insgesamt geringen Verzerrungen der geodätischen Abbildung ist dennoch der Rand des Blocks auch bei nur 4 Lagepaßpunkten noch ziemlich gut bestimmt und bleiben die Abweichungen doch noch vernachlässigbar klein.

Wenn sich die Paßpunkte nicht auf ein konformes Landeskoordinatensystem beziehen, ihre Anzahl aber klein bzw. der Paßpunktabstand im Vergleich zur Modellgröße groß ist, so daß die Klaffungen zwischen den Modellen wegen des geringen Zwangs von Seiten der Paßpunkte verschwindend klein sind, bildet die Blockausgleichung noch annähernd konform ab (vgl. obige Bedingung a)). Aber diese Abbildung deckt sich nicht mit dem Landeskoordinatensystem, so daß große äußere Lageabweichungen des ausgeglichenen Punktfeldes die Folge sind. Diese Abweichungen hängen dann stark von der Verzerrung des Landessystems und somit auch von der Lage des Blocks in der Abbildungszone ab. Dies zeigen unsere Fälle von Blockausgleichungen in der nicht-konformen Projektion mit nur 4 Lagepaßpunkten. Der Bildmaßstab spielt bei so großem Paßpunktabstand dann keine bedeutende Rolle mehr.

Bei stärkerer Paßpunktbesetzung üben in einem nicht-konformen Landessystem die Paßpunkte immer mehr Zwang auf die Blockausgleichung aus. Da die Blockausgleichung von sich aus eine konforme Abbildung anstrebt, werden dadurch die Klaffungen zwischen den Modellen größer, ohne daß aber die gesamten Widersprüche zwischen der inhärenten Abbildung der Blockausgleichung und dem Landeskoordinatensystem wesentlich verkleinert werden könnten. In diesem Fall hängt der Fehlereinfluß weiter stark von der Gebietslage in der Abbildungszone ab. Die Klaffungen zwischen den Modellen werden zwar bei größerem Bildmaßstab kleiner, weil sie sich dann auf eine größere Zahl von Modellen verteilen, aber am relativen Größenverhältnis zwischen Klaffungen und Modellgröße ändert sich nichts. Damit sind die bei der nicht-konformen ordinatentreuen Abbildung festgestellten Verhältnisse begründet und verstehbar.

Obwohl in dieser Arbeit nur eine nicht-konforme Abbildung untersucht worden ist, ließen sich die daraus gewonnenen Ergebnisse generell auch auf andere nicht-konforme Abbildungen übertragen. Denn die entscheidenden Eigenschaften sind nur durch die Konformität bzw. Nicht-Konformität der geodätischen Abbildung bedingt. Aber heute werden nicht-konforme Abbildungen in der Landesvermessung nicht mehr benützt.

IV.4 Extrapolation der Ergebnisse

Die vorliegende Untersuchung hat sich auf die repräsentative Bestimmung der Verzerrungswirkungen der wichtigsten Einflußfaktoren beschränken müssen. Die Ergebnisse erlauben jedoch, in praktisch allen Fällen der konventionellen Aerotriangulation die zu erwartenden Verzerrungsbeträge abzuschätzen bzw. ihre Vernachlässigbarkeit zu beurteilen. Dies gilt insbesondere für die allein wichtigen konformen Landesvermessungsprojektionen.

Die Untersuchungen haben sich auf die Verhältnisse tatsächlich existierender Landesvermessungssysteme beschränkt. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß die Ausdehnung der Abbildungszonen auf weniger als 300 - 400 km links und rechts der jeweiligen Bezugslinie oder auf einen entsprechenden Radius um einen Bezugspunkt beschränkt ist. Damit sind alle in der Praxis der Luftbildmessung vorkommenden Fälle einschließlich der neuerdings möglichen sehr großen Blöcke erfaßt.

Nun deutet sich in der neuesten Entwicklung der Photogrammetrie an, daß zur Herstellung und Fortführung topographischer Karten sehr kleinmaßstäbige photogrammetrische Aufnahmen aus Raumsatelliten (Spacelab) Verwendung finden sollen. In diesem Fall beträgt die Flughöhe mindestens 200 km. Damit ist die von einem Bild bedeckte Fläche bzw. die mögliche Gebietsausdehnung der Aerotriangulation entsprechend groß, siehe [22], [23].

Die in diesen Fällen zu erwartenden Verzerrungswirkungen ließen sich sogar aus den vorliegenden Untersuchungen noch abschätzen. Insbesondere bräuchte bei konformen Abbildungen und Gebietsgrößen bis über 1000 km Ausdehnung mit entsprechender Paßpunktverteilung noch kein wesentlicher Einfluß der Abbildungsverzerrungen befürchtet zu werden. Dagegen wird die Größe der diskreten Modelle stärker als bisher als wirksame Verzerrungsursache in Erscheinung treten. Im übrigen werden Ausdehnung und Orientierung der Bildreihen in der Regel dazu führen, daß mehrere Landesvermessungszonen überstrichen werden, die Voraussetzungen zur Blockausgleichung innerhalb einer Abbildungszone also kaum mehr gegeben sein werden.

In diesem Fall wird man aus Sicherheitsgründen und als einfachste Methode die Paßpunkte geodätisch in ein geeignetes dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem umrechnen und die Blockausgleichung verzerrungsfrei in diesem System durchführen. Das Ergebnis kann dann anschließend wieder beliebig geodätisch abgebildet werden. Diese Methode, die auch in den konventionellen Fällen angewendet werden könnte, bildet ein strenges in sich geschlossenes, konsistentes System, bei dem das Scheinproblem der Verzerrungswirkungen geodätischer Abbil-

dungen auf die Aerotriangulation völlig vermieden wird. Damit ist diese Methode im Prinzip weder von der Gebietsgröße, dem Bildmaßstab, der Paßpunktbesetzung noch von den Krümmungsverhältnissen des Objekts beeinflußt und daher z.B. auch auf die photogrammetrische Aufnahme anderer Himmelskörper anwendbar.

LITERATURHINWEISE

- | 1 | SCHWIDEFSKY, K., ACKERMANN, F.: Photogrammetrie, G.B. Teubner Verlag, Stuttgart, 1976
- | 2 | JORDAN/EGGERT/KNEISSL: Handbuch der Vermessungskunde Band III a/3, 1972, J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart
- | 3 | FINSTERWALDER, R.: Die Berücksichtigung der Erdkrümmung bei der photogrammetrischen Auswertung, ZfV 1963, 190-196
- | 4 | RINNER, K.: Einfluß der Definition der Landeskoordinaten auf die photogrammetrische Triangulation, DGK Reihe A Nr. 34 / Teil II, München 1959
- | 5 | DOYLE, F.J.: Space Photography, Invited paper, ISP Kongreß Helsinki, 1976
- | 6 | ALI, M.E.O.: Aerotriangulation with SKYLAB photography, Presented paper, ISP Kongreß Helsinki, 1976
- | 7 | KELLER, M.: Analytic aerotriangulation utilizing Skylab Earth Terrain Camera (S-190B) photography, Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, Vol. 42, No. 11, 1976, 1375-1383
- | 8 | WONG, KAM W.: Geometric and cartographic accuracy of ERTS-1 imagery, Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 1975, 621-635
- | 9 | BRUCKLACHER, W.: Zur räumlichen Aerotriangulation von Bildstreifen, DGK Reihe A, Nr. 34 / Teil I, München 1959
- | 10 | JORDAN/EGGERT/KNEISSL: Handbuch der Vermessungskunde Band V, 10. Ausgabe 1956/1969, J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart
- | 11 | JORDAN/EGGERT/KNEISSL: Handbuch der Vermessungskunde Band 4, 2. Hälfte, 10. Ausgabe 1959, J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart
- | 12 | GROSSMANN, W.: Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung, Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart 1976
- | 13 | LUDWIG, K.: Mercatorkarte und Abbildung des Rotationsellipsoids, Journal für reine und angewandte Mathematik, Jahrgang 1943
- | 14 | KLEIN, H.: New results of bundle block adjustments with additional parameters, Schriftenreihe des Instituts für Photogrammetrie der Universität Stuttgart 6, 1980, S. 13-30
- | 15 | ACKERMANN, F., EBNER, H., KLEIN, H.: Ein Programmpaket für die Aerotriangulation mit unabhängigen Modellen, BuL 28, 1970, 218-224
- | 16 | EBNER, H.: Methode der räumlichen Blockausgleichung und ihr numerischer Aufwand, Österreichische Zeitschrift für Vermessung, 59, 1971, 129-139
- | 17 | MAYER, R.: Empirische Untersuchung der Rechenschärfe bei räumlicher Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen in Abhängigkeit von der Blockgröße, Diplom-Arbeit, Institut für Photogrammetrie der Universität Stuttgart, 1975
- | 18 | ACKERMANN, F.: Numerische Photogrammetrie, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1973
- | 19 | EBNER, H., KRACK, K., SCHUBERT, E.: Genauigkeitsmodelle für die Bündelblocktriangulation, BuL 5, 1977, 141-148
- | 20 | IMHOF, E.: Kartographische Geländemodelle, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1965
- | 21 | ECKER, E.: Conformal Mapping of the Earth Ellipsoid, Manuscripta geodaetica, Vol. 3, 1978, 229-251
- | 22 | DOYLE, F.: The next decade of satellite remote sensing, Photogrammetric Engineering, 2, 1978, 155-164
- | 23 | DOYLE, F.: A large format camera for shuttle, Photogrammetric Engineering, 1, 1979, 73-78
- | 24 | MALING, D.H.: Coordinate Systems and Map Projections, George Philip and Son Limited, London, 1980

LEBENS LAUF

SHUE-CHIA W A N G

- 1.7.1946 geboren in China, in Kuoyang
in der Provinz An-hwei
Vater: Siao-fu Wang, Mutter: Ying (geb. Liu)
- 1952 - 1958 Besuch der Primary School
- 1958 - 1961 Besuch der Junior Highschool
- 1961 - 1964 Besuch der Senior Highschool
- 1964 - 1968 Studium in Department of Civil Engineering
der Cheng Kung Universität.
Abschluß Degree B.S.E. (Bachelor of Science
& Engineering)
- 1968 - 1970 Studium in Graduateschool for Civil Engineering
Abschluß Degree M.S.E. (Master of Science
& Engineering)
- 1970 - 1971 Pflichtwehrdienst (2. Leutnant der Artillerie)
- 1971 - 1973 Assistant Engineer im Autobahn-Bauamt des
Ministeriums für Verkehrswesen
- 1973 - 1974 Sprachkurs am Goethe-Institut in Schwäbisch Hall
(4 Monate)
Studium im Fachbereich Vermessungswesen
der Universität Stuttgart
Zulassung zur Promotion in Photogrammetrie
- 1974 - 1980 Promotion am Institut für Photogrammetrie
der Universität Stuttgart