

DEUTSCHE GEODÄTISCHE KOMMISSION
bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Reihe C

Dissertationen

Heft Nr. 316

Ein erweitertes
mathematisches Modell der Aerotriangulation
zur hochgenauen Punktbestimmung

Von der
Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde
eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

vorgelegt von
Dipl.-Ing. Ralf Schroth
geboren in Berlin

München 1986

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

ISSN 0065-5325

ISBN 3 7696 9366 3

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:

DEUTSCHE GEODÄTISCHE KOMMISSION

Marstallplatz 8, D-8000 München 22

Telefon (089) 23031 – 0

Telex 5213550 dgfi d

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. F. Ackermann
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Grafarend
Prof. Dr.-Ing. H. Ebner

Tag der Einreichung 10. September 1984
Tag der mündlichen Prüfung: 25. April 1985

© 1986 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet, die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

Druck: Reiff, Druck und Verlag, München

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
I. EINLEITUNG UND ZIELSETZUNG	7
1. Einführung	7
2. Stochastische Eigenschaften von Bildkoordinaten	8
3. Zielsetzung und Überblick	10
II. MATHEMATISCHE MODELLE	13
1. Einleitung	13
1.1 Modellvorstellung in Natur- und Ingenieurwissenschaften	13
1.2 Statistische Schätztheorie	14
1.3 Grundlagen der Modellbildung und Schätzung; Diskussion	16
1.4 Zielsetzung und Überblick	17
2. Ausgleichungsmodelle	18
2.1 Modelle mit gegebener Dispersion	19
2.1.1 Das univariate Gauß-Markoff-Modell	19
2.1.2 Das erweiterte univariate Gauß-Markoff-Modell	22
2.1.3 Das gemischte Modell	26
2.1.4 Das erweiterte gemischte Modell und seine Modifikationen	30
2.2 Modelle mit unbekannter Dispersion	36
2.2.1 Das multivariate Gauß-Markoff-Modell	36
2.2.2 Das Varianz-Kovarianzkomponenten-Modell	40
2.3 Übersicht	45
3. Zur Wahl der Kovarianzstruktur	49
3.1 Einführung	49
3.1.1 Strukturierung von Kovarianzmatrizen	50
3.1.2 Stochastische Prozesse	51
3.1.3 Übersicht	52
3.2 Konstruktiv definierbare stochastische Prozesse	52
3.2.1 Autoregressiver moving average-Prozeß	52
3.2.2 Autoregressiver Prozeß	54
3.2.3 Wertung und Bezüge	58
3.3 Analyse von Kovarianzmatrizen	59
3.3.1 Vergleich verschiedener Analyseverfahren	59
3.3.2 Principal Components-Analyse	61
4. Das kombinierte Modell	62
4.1 Modelldefinition	63
4.1.1 Das kombinierte Modell mit erweitertem stochastischen Teil	63
4.1.2 Das kombinierte Modell mit erweitertem Funktionalteil	66
4.2 Modelläquivalenz und Schätzung	66
4.3 Modelldiskussion	69
5. Zusammenfassung	70

III.	ERWEITERTES MATHEMATISCHES MODELL DER AEROTRIANGULATION	73
1.	Modellentwicklung in der Aerotriangulation	73
1.1	Entwicklung des mathematischen Modells	73
1.2	Genauigkeitssteigerung durch Verfeinerung des Modellansatzes	76
2.	Das kombinierte Modell in der Aerotriangulation	78
2.1	Umsetzung des kombinierten Modells	78
2.2	Modelldiskussion	80
2.2.1	Vergleich mit konventionellen Verfahren	80
2.2.2	Diskussion des stochastischen Modells	81
2.2.3	Numerische Betrachtung	82
2.2.4	Anwendungsbereiche	87
2.3	Abschätzung der zu erwartenden Genauigkeitssteigerung	87
2.3.1	Abschätzung mit Hilfe des allgemeinen Eigenwertproblems	87
2.3.2	Eigenwertzerlegung von Töplitzmatrizen	90
2.3.3	Eine Funktion zur Abschätzung der mittleren Genauigkeitssteigerung	90
3.	Zusammenfassung	92
IV.	EMPIRISCHE UNTERSUCHUNGEN UND SIMULATIONSANALYSEN	94
1.	Einleitung	94
2.	Gewinnung des Datenmaterials der empirischen Untersuchungen	94
2.1	Befliegungen	94
2.2	Messung des Bildmaterials	96
3.	Schätzung und Analyse von Kovarianzmatrizen	97
3.1	Theorie zur Schätzung von Kovarianzmatrizen aus Reseauaufnahmen	97
3.1.1	Erweitertes multivariates Gauß-Markoff-Modell	98
3.1.2	Schätzverfahren	98
3.2	Analyse der geschätzten Kovarianzmatrizen	99
3.2.1	Ergebnisse der Analyse	100
3.2.2	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	109
4.	Zeitreihenanalyse systematischer Bilddeformationen	110
4.1	Gewinnung der Zeitreihen	110
4.2	Ergebnisse der Zeitreihenanalyse	111
4.2.1	Zeitreihen der Parameter	111
4.2.2	Autoregressive Analyse	117
4.3	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	118
5.	Simulationen mit verschiedenen Modellansätzen	119
5.1	Grundlagen der Simulationsberechnungen	119
5.1.1	Simulierter photogrammetrischer Block	119
5.1.2	Simulationsmodelle und Generierungsparameter	120
5.1.3	Berechnungsmodelle	121

5.2	Ergebnisse der Simulationsanalysen	123
5.2.1	Vergleich unterschiedlicher Simulations- und Berechnungsmodelle	123
5.2.2	Vergleich unterschiedlichen Korrelationsverhaltens zwischen den Bildern	126
5.2.3	Einfluß unrichtiger Gewichts- und Korrelationsannahmen	127
5.3	Zusammenfassung	128
6.	Empfehlungen und Vorschläge für künftige Versuche	129
6.1	Voruntersuchungen und Simulationsanalysen	129
6.1.1	Befliegungen mit Reseaukammern	130
6.1.2	Simulationsanalysen	130
6.2	Testfeldbefliegungen	131
V.	ZUSAMMENFASSUNG	133
Anhang		136
A0	Bezeichnungen, Symbole, Abkürzungen	136
A1	Einfluß eines Modellfehlers im stochastischen Teil des mathematischen Modells auf die Schätzung der Varianz der Gewichtseinheit	137
A2	Ableitung der Varianz des AR(1)-Prozesses	138
A3	Ableitung der Kovarianzmatrix der einen AR(1)-Prozeß beschreibenden Zufallsvariablen	138
A4	Multivariate Darstellung mehrerer Zeitreihen mit gleichem stochastischen Verhalten zwischen den Epochen	140
A5	Beweis der Gleichung (IV.3.1.1-1)	140
A6	Beweis, daß Gleichung (IV.3.1.1-1) eine LS-Schätzung repräsentiert	141
Literaturverzeichnis		142

I. EINLEITUNG UND ZIELSETZUNG

1. Einführung

Das mathematische Modell der Aerotriangulation als Grundlage der analytisch-photogrammetrischen Punktbestimmung hat seit den Veröffentlichungen von H. Schmid (1958 und 1959) ein qualitativ hochwertiges Niveau erreicht. Die simultane Behandlung ganzer photogrammetrischer Bildverbände in einem Block und die Erfassung systematischer Bilddeformationen mit Hilfe zusätzlicher Parameter bei der Blockausgleichung begründeten ein beachtliches Genauigkeitspotential. Die Entwicklung der den Lösungsalgorithmen zugrundeliegenden mathematischen Modelle vollzog sich dabei vorwiegend im Bereich der funktionalen Beziehungen, d.h. im deterministischen Ansatz, während der stochastische Bereich weitgehend unberücksichtigt blieb und sehr vereinfacht gehandhabt wurde. Hierfür waren zum einen operationelle Gesichtspunkte maßgebend. Der Entwicklung anwendungsorientierter Rechenprogramme wurde gegenüber einer umfassenden Modellentwicklung der Vorrang eingeräumt. Zum anderen waren über die Fehlereigenschaften, d.h. das stochastische Verhalten der Bild- bzw. Modellkoordinaten noch keine brauchbaren quantitativen Aussagen vorhanden. Da unter diesen Voraussetzungen dennoch die Genauigkeitsanforderungen aus den Anwendungsbereichen weitgehend erfüllt bzw. sogar übertroffen wurden, setzte in Bezug auf die Modellentwicklung in den letzten Jahren eine gewisse Stagnation ein.

Lediglich die Untersuchungen von Testfeldebfliegungen (Berichte des OEEPE-Symposiums in Brüssel (1973), Ebner (1977), Klein (1980)) deuteten immer wieder darauf hin, daß aufgrund der Diskrepanz zwischen theoretisch zu erwartenden und empirisch gewonnenen Genauigkeitsaussagen im Bereich der Modellentwicklung noch Genauigkeitsreserven verborgen liegen.

Diese lassen sich durch eine umfassende mathematische Modellbildung, insbesondere im stochastischen Teil, erschließen. Außerdem ist es auch neben dieser eher praxisorientierten Beziehung zwischen Genauigkeitssteigerung und Modellentwicklung vom wissenschaftlichen Standpunkt aus sinnvoll und notwendig, ein möglichst umfassendes Modell der Aerotriangulation zu definieren, um auf dieser Grundlage einfachere Modellansätze beurteilen und werten zu können.

Somit ist die Entwicklung und Definition eines integralen mathematischen Modells der Aerotriangulation zur hochgenauen photogrammetrischen Punktbestimmung als Zielsetzung dieser Arbeit zu sehen. Dabei liegt der Schwerpunkt in der Formulierung eines geeigneten und möglichst realistischen stochastischen Modells für das Verfahren der Bündelblockausgleichung, da die als nächste Stufe in der Modellentwicklung anstehende Erfassung von variierenden Bilddeformationen sich mit statistischen Methoden sehr gut beschreiben läßt.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Ackermann für die Anregung und für die während der Bearbeitung gewährte Unterstützung herzlich danken. Ebenfalls gilt mein besonderer Dank Herrn Dr.-Ing. W. Förstner für die wertvollen Diskussionen und Denkanstöße, die wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

2. Stochastische Eigenschaften von Bildkoordinaten

Die Definition eines realitätsbezogenen stochastischen Modells der Aerotriangulation konzentriert sich am besten auf qualitative und quantitative Informationen über das stochastische Verhalten von Bildkoordinaten, da sie die wesentlichen Meßgrößen darstellen. Deshalb soll dieser Abschnitt einen Überblick über Ergebnisse neuerer Untersuchungen geben und damit vor allem die Motivation für diese Arbeit verdeutlichen.

Anhand veröffentlichter empirischer Untersuchungen wird gezeigt, inwieweit verschiedene mathematische Modelle den photogrammetrischen Aufnahme- und Auswerteprozess repräsentieren und in welche Richtung eine Modellentwicklung gehen muß.

(1) Untersuchungen zur Genauigkeit der Bündelblockausgleichung am Testprojekt Appenweier mit verschiedenen Verfeinerungsstufen des mathematischen Modells ergaben einige interessante Resultate (siehe Klein (1980)), insbesondere bezüglich der Abhängigkeit der Genauigkeit von der Blockgeometrie und dem Verfeinerungsgrad des mathematischen Modells (siehe Tabelle 2.1). Beim Übergang von Einfachblöcken (20% Querüberdeckung) auf Doppelblöcke (60% Querüberdeckung), d.h. mit Stabilisierung der Blockgeometrie, ist eine signifikante Genauigkeitssteigerung zu erkennen. Das gleiche gilt, eingeschränkt auf die Lagegenauigkeit, für den Verfeinerungsgrad des mathematischen Modells bei den Modellansätzen a) ohne Erfassung der systematischen Bildfehler, b) mit Erfassung systematischer Bildfehler durch einen blockinvarianten Ansatz zusätzlicher Parameter (Parametersatz nach Ebner (1977)) und c) mit einem flugstreifenweisen Ansatz zusätzlicher Parameter. Aber auch bei der höchsten Modellstufe und bei einer Querüberdeckung von 60% erreichen die Werte nicht die theoretisch zu erwartenden Genauigkeiten für die Bündelblockausgleichung (siehe Ebner, Krack und Schubert (1977)). Diese Diskrepanzen lassen sich durch Vernachlässigungen im mathematischen Modell, u.a. im stochastischen Bereich, aber auch durch unrealistische Annahmen über die Genauigkeit der Paß- und Vergleichspunkte erklären.

Zusätzliche Parameter	Einfachblock (20% Quer.)					Doppelblock (60% Quer.)				
	$\hat{\sigma}_o$	μ_{xy}	μ_z	$\frac{\mu_{xy}}{\hat{\sigma}_o}$	$\frac{\mu_z}{\hat{\sigma}_o}$	$\hat{\sigma}_o$	μ_{xy}	μ_z	$\frac{\mu_{xy}}{\hat{\sigma}_o}$	$\frac{\mu_z}{\hat{\sigma}_o}$
	[µm]					[µm]				
keine	3.0	7.3	11.2	2.4	3.7	3.6	4.4	8.2	1.2	2.3
12 Parameter blockinvariant	2.4	4.9	10.1	2.0	4.2	2.7	3.3	8.3	1.2	3.1
12 Parameter streifenweise	2.3	4.4	9.4	1.9	4.1	2.6	2.6	8.1	1.0	3.1
theoretisch zu erwartende Genauigkeiten	-	-	-	0.9	1.7	-	-	-	0.6	1.2

Tabelle 2.1: Genauigkeit der Bündelblockausgleichung beim Testfeld Appenweier nach Klein (1980); Bildmaßstab 1 : 7 800, Paßpunktverteilung: Lagepaßpunkte alle 2 Basislängen am Blockrand (27 Punkte), Höhenpaßpunkte in Punktgruppen gleichmäßig verteilt im Block; geschätzte Genauigkeit der geodätisch bestimmten Paßpunkte 1.2 cm.

μ = quadratischer Mittelwert der Verbesserungen der Vergleichspunkte (Lage: $\mu_{xy} = \sqrt{(\mu_x^2 + \mu_y^2)}/2$; Höhe: μ_z)
 $\hat{\sigma}_o$ = geschätzte Streuung der Gewichtseinheit

Betrachtet man bei Klein (1980) beim streifenweisen Ansatz der zusätzlichen Parameter die einzelnen Parameterwerte, so ist für den jeweiligen Parametertyp keine Konstanz über den gesamten Block zu erkennen. Die Parameterwerte vom gleichen Typ variieren signifikant von Streifen zu Streifen. Da aber kein unmittelbarer Zusammenhang zwischen einer Zerlegung der systematischen Bilddeformationen in streifenweise Anteile zu ersehen ist, wendete Jaud (1980) auf das gleiche Datenmaterial die zusätzlichen Parameter halbstreifenweise an. Dabei ergab sich eine noch deutlichere Variation der zusätzlichen Parameter, deren Streuungen, aus den Mittelwerten über die Halbstreifen abgeleitet, Beträge zwischen $0.4 \mu\text{m}$ und $3.8 \mu\text{m}$ annahmen (Werte normiert auf die maximale Auswirkung des einzelnen Parametertyps im Bild).

Weitere empirische Untersuchungen mit Datenmaterial von Reseaubefliegungen berücksichtigten eine bildweise Erfassung der systematischen Deformationen und bestätigten deren stochastisches Verhalten, welches sich in einer zeitabhängigen Variation über den gesamten Film ausdrückt (siehe Schroth (1982) und Kapitel IV dieser Arbeit).

Da alle hier aufgeführten Untersuchungen nur Teile der systematischen Bildfehler erfassen konnten, werden im folgenden Abschnitt die Ergebnisse einer umfassenden Testfelduntersuchung zum stochastischen Verhalten von Bildkoordinaten beschrieben.

(2) Untersuchungen zur Genauigkeitsstruktur des photogrammetrischen Luftbildes führte Schilcher (1980) mit Bildmaterial des Testfeldes Rheidt durch. Bezüglich der systematischen Bildfehler kam er zu folgenden Ergebnissen:

- Die systematischen Bildfehler sind nur zu einem Teil konstant, der durch einen Globalanteil als Trend beschrieben werden kann; der Restanteil stellt um diesen Trend variierende Bilddeformationen dar (vgl. Schilcher (1980), S. 78).
- Im Gegensatz zum Betrag der Systematik bleibt der Typ konstant über den Flug (vgl. Schilcher (1980), S. 74).
- Eine bildweise Korrektur der systematischen Bildfehler ergibt eine Genauigkeitssteigerung um den Faktor 2.0 gegenüber einer globalen, über den gesamten Flug angesetzten Korrektur bei einem stochastischen Modellansatz mit gleichgenauen und unkorrelierten Beobachtungen (vgl. Schilcher (1980), S. 84).

Zur Verdeutlichung der Variation der systematischen Bildfehler dient die Tabelle 2.2, in der die Ergebnisse einer Bestimmung der systematischen Bildfehler für unterschiedliche Bildgruppen beschrieben sind (siehe Schilcher (1980), S. 72). Die Beträge der systematischen Bildfehler sind deutlich von der Größe der Bildgruppe, aus denen sie berechnet wurden, abhängig. Die niedrigsten Beträge ergeben sich aus der gesamtflugweisen Bestimmung und die höchsten im Einzelbild. Dies ist ein direkter Hinweis auf eine Variation der systematischen Bildfehler von Bild zu Bild, denn die dominanten Bilddeformationen sind nicht konstant über den Flug.

(3) Den hier aufgeführten empirischen Untersuchungen ist als wesentliches Resultat eine Variation der systematischen Bildfehler bzw. Bilddeformationen gemeinsam. Für die mathematische Modellbildung bedeutet dies, daß systematische Effekte nicht fest über einen gesamten Flug angesetzt werden dürfen, sondern daß diese Effekte den stochastischen Eigenschaften der Bildkoordinaten zugerechnet und damit im stochastischen Teil des mathematischen Modells der Aero-triangulation behandelt werden müssen.

Bildgruppe	quadratische Mittelwerte der systematischen Bildfehler			
	Weitwinkel		Überweitwinkel	
	\bar{s}_x [μm]	\bar{s}_y [μm]	\bar{s}_x [μm]	\bar{s}_y [μm]
Einzelbild	3.2	3.0	5.2	4.1
Flugstreifen (3 Bilder)	2.5	2.5	4.7	3.3
6 Bilder	2.2	2.1	4.3	2.8
12 Bilder	1.9	1.8	4.2	2.6
15 Bilder	1.9	1.9	4.2	2.6
Gesamtflug (60 Bilder)	1.7	1.6	4.0	2.3

Tabelle 2.2: Bestimmung der systematischen Bildfehler für verschiedene Bildgruppen (quadratische Mittelwerte an 41 Vergleichspunkten) nach Schilcher (1980, S. 72)

Die Ergebnisse der Testfeldebefliegung Oberschwaben stehen hierzu scheinbar im Widerspruch. Die Untersuchungen von Haug (1980) ergaben beim Oberschwabenmaterial eine beachtliche Konstanz der systematischen Bilddeformationen über den gesamten photogrammetrischen Block. Dieser Widerspruch läßt sich sehr einfach aus den erreichten Genauigkeiten beim Test Oberschwaben und den im Verhältnis hierzu niedrigen Beträgen der Variationen der systematischen Bilddeformationen erklären. Außerdem war der Versuch Oberschwaben nicht zur Erfassung von Variationen systematischer Bildfehler ausgelegt. In diesem Sinne kann ganz allgemein von Variationen ausgegangen werden, auch wenn sie nicht in einzelnen Tests nachgewiesen wurden.

Eine Klassifikation der Fehlerquellen beim photogrammetrischen Aufnahme- und Auswerteprozess, wie z. B. Punktidentifizierung, Refraktion, Verzeichnung, usw., hinsichtlich ihrer Berücksichtigung als stochastische bzw. nicht-stochastische Größen im Modell gibt Förstner (1982b) an. Dabei ist ersichtlich, daß die meisten Fehlereinflüsse über die Zeit variieren oder zumindest nicht als konstant angenommen werden dürfen und zu Korrelationen im Einzelbild und zwischen den Bildern führen.

Die Ergebnisse dieser empirischen Untersuchungen und deren Beurteilung bildeten den Ausgangspunkt für diese Arbeit. Das beobachtete Verhalten der sogenannten systematischen Bildfehler gibt Anlaß zur Konzeption einer theoretisch umfassenden und möglichst abschließenden Modellentwicklung für die Aerotriangulation, wobei weitere Gesichtspunkte zu der im folgenden Abschnitt präzisierten Zielsetzung führen.

3. Zielsetzung und Überblick

(1) Diese Arbeit hat die Definition eines verallgemeinerten mathematischen Modells für die Aerotriangulation unter möglichst guter Approximation an die Realität und übersichtlich strukturiertem Modellbau zum Ziel. Der Schwerpunkt liegt dabei im stochastischen Bereich des Modells. Die Erkenntnisse aus empirischen Untersuchungen über die Variation systematischer Bilddeforma-

tionen werden bewußt in die Modellbildung integriert. Da für die Schätzung im stochastischen Modell aufwendige numerische Lösungsverfahren erforderlich sind, die mitunter nicht unproblematisch sind, wird das Funktionalmodell, auch aus Gründen der Übersichtlichkeit, so weit ausgebaut werden, wie es numerisch und theoretisch vertretbar ist, d.h. auch die stochastischen Eigenschaften von Parametern sollen weitgehend funktional erfaßt werden.

Bei der Modelldefinition wird eine Synthese aus physikalischer und nach operationellen Gesichtspunkten formaler Betrachtungsweise angestrebt. Der durch physikalische Betrachtungen bestimmten Definition wird allerdings nur dann der Vorrang eingeräumt, wenn nach operationellen Gesichtspunkten rein mathematisch argumentierende Ansätze nicht plausibel und erfolgversprechend erscheinen.

Das zu definierende mathematische Modell soll es ermöglichen, die Genauigkeit der photogrammetrischen Punktbestimmung gegenüber konventionellen Modellen zu steigern. Es soll dabei vor allem auch ein übergeordnetes Modell darstellen, auf dessen Grundlage sich einfachere Modellansätze beurteilen und werten lassen. Weiterhin soll es von seiner Struktur her flexibel sein gegenüber weiterführenden Erkenntnissen über die stochastischen Eigenschaften der Bildkoordinaten und auch die Basis für künftige Untersuchungen legen.

(2) Für die Definition eines umfassenden mathematischen Modells für die Aerotriangulation ist es Voraussetzung, unterschiedliche Ausgleichungsmodelle, von ihrem Ansatz und ihrer Leistungsfähigkeit aus betrachtet, beurteilen zu können. Dazu gehört im stochastischen Bereich des Modells auch die Kenntnis über Aufbau- und Strukturierungsmöglichkeiten von Kovarianzmatrizen. Wesentlich für die Modelldefinition ist die Integration von Vorinformationen und Plausibilitätsannahmen, die auf vorangegangenen empirischen Untersuchungen beruhen. Aus diesen Gründen gliedert sich die vorliegende Arbeit in drei Teilbereiche:

Der erste Bereich (Kapitel II) umfaßt die gesamten theoretischen Grundlagen, die für eine integrale Modellbildung notwendig sind. Er ist dabei so allgemein und übergreifend gehalten, daß er nicht nur auf das Fachgebiet der Photogrammetrie beschränkt ist. Insbesondere der Abschnitt II.2 über die Ausgleichungsmodelle kann auch völlig separat von der eigentlichen Zielsetzung der Arbeit gesehen werden. Er ist in sich geschlossen, beinhaltet den gesamten methodischen Apparat der Modelldefinitionen unter Berücksichtigung einer konsistenten statistischen Bezeichnungsweise und dient als theoretischer Bezugspunkt für die Modellentwicklung in den anschließenden Abschnitten. Eine ähnlich allgemeine Zielsetzung hat auch der unmittelbar darauf folgende Abschnitt II.3 über die Wahl der Kovarianzstruktur, worin insbesondere die Strukturfindung und deren Konkretisierung im stochastischen Modell behandelt wird. Gegen Schluß dieses Kapitels erfolgt eine immer weitergehende Spezialisierung in Form eines übergeordneten, vor allem im stochastischen Bereich stark strukturierten mathematischen Modells. Die primäre Ursache für die Spezialisierung des Modells ist in der Zeitabhängigkeit des photogrammetrischen Aufnahme- und Auswerteprozesses zu sehen, aber es läßt sich durchaus auf adäquate Aufgabenstellungen außerhalb der Photogrammetrie übertragen.

Der zweite Bereich (Kapitel III) beinhaltet die Umsetzung und Präzisierung der im Kapitel II theoretisch abgeleiteten Modellbeziehungen in die Photogrammetrie. Die Modellentwicklung in der Aerotriangulation und eine damit verbundene Steigerung des Genauigkeitspotentials bildet den Hintergrund für die Vorstellung eines, im Sinne einer besseren Anpassung an die Realität erweiterten mathematischen Modells. Die Diskussion und Wertung dieses Modells in Bezug auf Modell-

eigenschaften, numerischen Aufwand und Genauigkeitspotential sind wesentliche Bestandteile dieses Kapitels. Die Entwicklung dieses zweiten Teilbereichs über das erweiterte mathematische Modell in der Photogrammetrie erfolgt in dieser Arbeit anhand des direkten Bezugs zu den allgemeinen Modelldefinitionen des Kapitels II. Der Modellaufbau ist aber gleichzeitig motiviert und abgesichert durch die im anschließenden Kapitel IV geschilderten empirischen Untersuchungen.

Das Kapitel IV als dritter Teilbereich unterbreitet alle empirischen und numerischen Analysen, die im Zusammenhang mit dieser Arbeit notwendig waren. Es erfüllt dabei eine zweifache Funktion. Zum einen werden die empirischen Untersuchungen über das stochastische Verhalten der Bildkoordinaten vorgestellt, auf die sich das im Kapitel III beschriebene erweiterte Modell direkt stützt. Auch diesen Untersuchungen liegen unmittelbar die theoretischen Ableitungen und Definitionen des Kapitels II zugrunde. Zum zweiten werden ausführliche Simulationsuntersuchungen zur Beurteilung dieses Modells beschrieben. Übergreifend faßt der letzte Abschnitt dieses Kapitels IV die Erfahrungen aus den empirischen und den Simulationsanalysen zusammen, indem er Empfehlungen und Richtlinien für künftige Versuche zum stochastischen Modell der Aerotriangulation gibt.

Diese Arbeit versucht somit, ein durchaus theoretisches mathematisches Konzept der Modellbildung in der Aerotriangulation zu entwickeln. Durch die unmittelbare und bewußte Einbeziehung empirischer Untersuchungsergebnisse ist aber der spezielle Realitätsbezug beachtet und damit die Abgrenzung gegenüber möglicherweise noch allgemeineren Darstellungen gezogen worden. Natürlich ist zunächst eine Anwendung des hier vorgeschlagenen mathematischen Modells in der Praxis, allein vom erforderlichen numerischen Aufwand aus gesehen, nur in Ausnahmefällen, in denen höchste Präzision gefordert wird, zu erwarten. Dieser Gesichtspunkt tritt jedoch zunächst zurück gegenüber der anstehenden wissenschaftlichen Aufgabe, ein umfassendes mathematisches Modell der Aerotriangulation aufzustellen, das geeignet ist, praktisch alle Genauigkeitsfragen der Aerotriangulation zu beantworten und die verschiedenen Verfahren vergleichend zu beurteilen. Inwieweit dieses Modell dann auch noch als Arbeitsverfahren realisiert und direkt angewandt wird, bleibt abzuwarten. Hierbei wird die jeweilige Genauigkeitssteigerung sowie die weitere Entwicklung der Rechenhilfsmittel und der Anwendungen mit besonderen Anforderungen eine Rolle spielen.

II. MATHEMATISCHE MODELLE

1. Einleitung

1.1 Modellvorstellung in Natur- und Ingenieurwissenschaften

Die Tätigkeit in den Natur- und nicht-konstruktiven Ingenieurwissenschaften im empirischen Bereich geht vom Beobachten von Erscheinungen bzw. Ereignissen aus, die unter bestimmten Bedingungen auftreten oder ablaufen. Aus diesen Beobachtungen zieht man Rückschlüsse auf bestimmte Regelmäßigkeiten und trifft Vorhersagen über Ereignisse und künftige Experimente. Die Abstraktionsfähigkeit des Menschen erlaubt ihm, aus diesen Regelmäßigkeiten eine Modellvorstellung, gemäß der die Erscheinungen ablaufen, zu entwickeln und sie so zu "verstehen".

Ein Beispiel für eine Modellentwicklung im obigen Sinne ist die sich über Jahrtausende erstreckende Bestimmung der Gestalt der Erde. Mit der Begründung der Mathematik durch die Pythagoräer im hellenischen Kulturkreis wurde erstmals auf Grund philosophischer und heuristischer Überlegungen vom Modell der sphärischen Erdform ausgegangen. Auf dieser Annahme basierten die folgenden Experimente zur mathematischen Beschreibung der Erdfigur, welche auf unsere heutige Modellvorstellung von der tatsächlichen Erdgestalt führten (vgl. Bialas (1982)).

Auch unsere physikalischen Naturgesetze sind nichts anderes als eine Modellierung der "realen" Welt. Die Projektion der Realität in einen Modellraum gibt dem Wissenschaftler erst die Möglichkeit, physikalische Erscheinungen zu interpretieren, zu werten und vorherzusagen. Somit ist die Modellentwicklung im Prinzip niemals vollständig abgeschlossen. Natürlich hängt die Modellentwicklung auch von einer gewissen Zielvorstellung ab, wonach man ab einem bestimmten Punkt die Annäherung an die Realität als ausreichend betrachten kann. Wie kommt nun ein Modell zustande?

Die Bedingungen, unter denen Erscheinungen, z.B. in einem Experiment, ablaufen, werden vom Beobachter zum Teil kontrolliert oder zumindest beeinflusst. Die Beobachtungen entsprechen einer quantitativen Beschreibung (Messen, Zählen, Ablesen eines Instrumentes) eines Versuchsausganges. Sie lassen sich im Bereich der kontrollierten Bedingungen in eine mathematisch analytische Form fassen, beinhalten aber darüber hinaus weit mehr Informationen, die sich aus den nichtkontrollierten Bedingungen ergeben. Zur sinnvollen Deutung von Beobachtungen ist es daher unerlässlich, neben den funktionalen Beziehungen der kontrollierten Bedingungen die nichtkontrollierten Bedingungen in eine mathematische Form zu fassen. Diese Form läßt sich entweder als Inkonsistenz der funktionalen Beziehungen, wie es bei der kleinsten Quadrate Approximation geschieht, oder mit Hilfe der statistischen Wahrscheinlichkeitstheorie definieren. Die Wahrscheinlichkeitstheorie, auch als Theorie der zufälligen (stochastischen) Ereignisse und Prozesse bezeichnet, bietet die Möglichkeit, das Naturgeschehen sehr differenziert zu beschreiben, weshalb sie sich für die Formulierung der nichtkontrollierten Bedingungen am stärksten durchgesetzt hat und am weitesten entwickelt ist. Die Gesamtheit der funktionalen und stochastischen Beziehungen werden in einem gemeinsamen Modell, dem mathematischen Modell, zusammengefaßt.

Im einzelnen werden den Beobachtungen (Meßwerten), d.h. den Realisierungen eines Experiments, Zufallsvariable zugeordnet. Damit beschreibt das mathematische Modell den Zusammenhang zwischen den Zufallsvariablen und anderen Parametern. Die Zufallsvariablen lassen sich durch ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung M , einen unbekanntem Erwartungswert E und einer bekannten oder ebenfalls unbekanntem Dispersion D beschreiben.

Bei der Beschreibung der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable beschränkt man sich üblicherweise auf ihre ersten und zweiten Momente (Erwartungswert und Dispersion), da dies für die Schätzung in dem mathematischen Modell ausreichend ist. Vor allem wird für die Beobachtungen auf Grund des zentralen Grenzwertsatzes (vgl. Fisz (1962), S. 174) in der Regel die Normalverteilung postuliert, welche durch die ersten beiden Momente vollständig beschrieben wird. Der Erwartungswert läßt sich durch die funktionalen Beziehungen der kontrollierten Bedingungen darstellen, die sich aus einem konsistenten funktionalen Modell ergeben, d.h. als Funktion einer Gruppe von Parametern. Die Dispersion läßt sich ebenfalls als Funktion von Parametern definieren, denn den nichtkontrollierten Bedingungen können durchaus auch physikalisch-mathematische Zusammenhänge zugrundeliegen.

Formal läßt sich das mathematische Modell also durch

$$\underline{l}_o \sim M(E(\underline{l}_o), D(\underline{l}_o)) \quad (1.1-1)$$

beschreiben, in dem \underline{l}_o der den Meßwerten bzw. Beobachtungen l_o zugeordnete Zufallsvektor ist. Im folgenden wird bei der Beschreibung der mathematischen Modelle vom Zufallsvektor \underline{l}_o der Beobachtungen gesprochen, der sich durch Unterstreichung von dem Vektor der Beobachtungen l_o hervorhebt.

Der eigentlichen Formulierung des mathematischen Modells mit Hilfe geometrischer und physikalischer Zusammenhänge für die Anwendung gehen Analysen einer Reihe von Experimenten voraus, d.h. das Modell wird stufenweise aus den Erkenntnissen dieser Analysen entwickelt. Daneben basiert die Modellformulierung auch häufig auf rein heuristischen Überlegungen und intuitiven Ansätzen, die sich in der Anwendung bewährt haben. Historisch betrachtet beruht die Entwicklung bzw. Verfeinerung des Modells nicht nur auf erweiterten Kenntnissen der mathematischen und physikalischen Zusammenhänge, sondern auch auf gesteigerten Anforderungen der Praxis. Während zum Beispiel bei der photogrammetrischen Punktbestimmung in der Katasterphotogrammetrie vor 10 Jahren der Modellansatz mit unabhängigen photogrammetrischen Modellen ausreichte, ist heute, durch die höhere Genauigkeit der geodätischen Netze bedingt, die strengere Lösung nach der Bündelmethode angebracht.

Überhaupt unterscheidet sich der Vorgang der Modellentwicklung in den technischen Bereichen oft erheblich von dem in den Naturwissenschaften. Bei den technischen Disziplinen steht der operationelle Einsatz eines mathematischen Modells deutlich im Vordergrund, wobei die mathematisch-physikalischen Zusammenhänge häufig sehr vereinfacht dargestellt werden. Eingehende Angaben über die mathematische Modellbildung sind u. a. bei Ackermann (1965), Papoulis (1965) und Baarda (1967) zu finden.

Die Modellentwicklung in der Photogrammetrie und auch in der Geodäsie beschränkte sich lange Zeit nur auf die Erweiterung und den Ausbau der funktionalen Beziehungen im Modell. Heute weist eine Vielzahl von wissenschaftlichen Arbeiten und Veröffentlichungen auf eine deutliche Verlagerung in Richtung der Beschreibung von stochastischen Zusammenhängen im Modell hin. Insbesondere seien hier die Arbeiten auf dem Gebiet der Varianz-Kovarianzkomponenten-Schätzung erwähnt, von denen nur einige repräsentativ genannt werden sollen: Kubik (1967), Grafarend und d'Hone (1978), Koch (1978), Förstner (1979) und Schaffrin (1983).

1.2 Statistische Schätztheorie

Ist die Gesamtheit der funktionalen und stochastischen Beziehungen im mathematischen Modell definiert, so führt man die Analyse, d.h. die Auswertung der Beobachtungen mit dem Hilfsmittel der statistischen Schätztheorie durch. Die im Modell definierten unbekannten Parameter, wie Erwartungswerte im funktionalen Teil oder Varianzen im stochastischen Teil, welche die gemeinsame

Verteilung der Beobachtungen charakterisieren, lassen sich mit dieser Theorie bestimmen, in dem sie mittels einer Schätzfunktion der Beobachtungen geschätzt werden. Die Schätztheorie ist am weitesten im Bereich der linearen Modelle entwickelt. Hier steht unter der Annahme bestimmter Verteilungen auch ein weites Instrumentarium an Hypothesentests zur Beurteilung der Schätzergebnisse zur Verfügung. Die bekanntesten und gebräuchlichsten Schätzverfahren bei linearen Modellen sind die beste erwartungstreue Schätzung (best unbiased estimation), die Schätzung nach der Methode der kleinsten Quadrate (LS = least squares) und die Maximum-Likelihood-Schätzung (ML). Diese drei Schätzverfahren liefern identische Schätzwerte für die unbekannt Parameter, vorausgesetzt man legt für die ML-Schätzung normalverteilte Beobachtungen zugrunde (vgl. Rao (1973)).

Im folgenden sollen die für die Schätzverfahren wichtigen Schätzfunktionen angesprochen werden.

a) Lineare und quadratische Schätzfunktionen

Schätzfunktionen $g(\underline{l})$ sind Funktionen der Beobachtungswerte \underline{l} und dienen zur Bestimmung der Schätzung \hat{x} der im funktionalen oder stochastischen Teil des linearen Modells definierten unbekannt Parameter x , d.h. $\hat{x} = g(\underline{l})$. Die Schätzung der unbekannt Parameter im Funktionalmodell erfolgt in der klassischen Schätztheorie mit linearen Funktionen der Beobachtungen ($g(\underline{l}) = \underline{p}^T \underline{l}$), da diese einfach zu handhaben sind und unter dem Postulat der Normalverteilung zur Schätzung der Erwartungswerte (1. Momente) stochastischer Variablen ausreichen. Somit spricht man in der Schätztheorie zum Beispiel von besten linearen erwartungstreuen Schätzungen (BLUE = best linear unbiased estimation). Möchte man unbekannt Parameter τ im stochastischen Modell schätzen ($\hat{\tau} = g(\underline{l})$), d.h. Parameter der zweiten Momente, dann benötigt man, Normalverteilung vorausgesetzt, bilineare oder quadratische Funktionen der Beobachtungen ($g(\underline{l}) = \underline{l}^T \underline{Q} \underline{l}$). In Analogie zur BLU-Schätzung spricht man hier von der besten quadratischen erwartungstreuen Schätzung (BIQUE = best invariant quadratic unbiased estimation (vgl. Grafarend und d'Hone (1978)); "invariant" vgl. Abschnitt 1.3).

b) Robuste Schätzfunktionen

Die in letzter Zeit im Zusammenhang mit Untersuchungen über den Einfluß grober Beobachtungsfehler auf die Schätzung diskutierten Schätzverfahren mit Robustheitseigenschaften, d.h. Unempfindlichkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Schätzfunktion gegenüber kleinen Veränderungen der Verteilung der Stichprobe, weisen genähert die statistischen Eigenschaften der besten und erwartungstreuen Schätzung auf (Hampel (1973)). Die robusten Schätzverfahren gehen, bedingt durch Rundungsfehler und grobe oder systematische Beobachtungsfehler, von nicht-normalverteilten Beobachtungen aus. Numerisch läßt sich die robuste Schätzung, z.B. nach dem Verfahren von Huber in Verbindung mit der LS-Schätzung (Huber (1973) und (1981), S. 153ff) oder das Verfahren von Krarup et al. (1980) und Krarup und Kubik (1983), welches ebenfalls auf Huber (1973) aufbaut, ohne großen zusätzlichen Aufwand zu den bisherigen LS-Verfahren durchführen (Ansätze mit nicht-linearen Schätzfunktionen). Allerdings ist eine strenge Beurteilung des Ergebnisses der robusten Schätzung bis jetzt nicht möglich. Statistische Eigenschaften der Schätzung, wie Suffizienz und Effizienz, sind nur genähert (asymptotisch) bekannt (vgl. Hampel (1973)). Ihre überwiegende Bedeutung werden die Schätzverfahren mit robusten Schätzfunktionen als Bestandteil von Fehlersuchstrategien erlangen, wobei sie bei der automatischen Elimination großer grober Datenfehler, d.h. bei der Datenbereinigung, bereits gute Ergebnisse aufweisen konnten (vgl. Carusio (1979), Fuchs (1980), Förstner (1982a) und Klein/Förstner (1984)).

Auf Grund der statistisch nicht hinreichend bekannten Eigenschaften der robusten Schätzfunktionen wird sich diese Arbeit ausschließlich auf die effizienten Schätzfunktionen, d.h. die besten linearen und quadratischen erwartungstreuen Schätzungen, beschränken. Sie benötigen nicht die vollständige Information über die Art der Verteilung wie die ML-Schätzungen und können, im Gegensatz zur eingeschränkten Allgemeingültigkeit der LS-Schätzung (vgl. Rao (1973)), die Hilfsmittel der mathematischen Statistik vollkommen ausschöpfen.

1.3 Grundlagen der Modellbildung und Schätzung; Diskussion

Das Kapitel II über mathematische Modelle soll allgemein und weitgehend unabhängig von speziellen Anwendungen Möglichkeiten der Modellformulierung für die Parameterschätzung aufzeigen. Es umfaßt die wichtigsten und gebräuchlichsten Modelltypen und soll speziell im Teil II.2 einen Überblick über die Modelle und deren Zusammenhänge und Modifikationen geben. Die nachfolgenden Abschnitte und Kapitel greifen direkt auf die hier charakterisierten Modelle zurück.

Jedes einzelne Modell wird unter Angabe seiner speziellen Struktur diskutiert. Zusätzlich zur Beschreibung der Schätzung der unbekannt Parameter wird es im Vergleich zu den übrigen Modelltypen gewertet, die Einflüsse von Modellfehlern auf die Parameterschätzung untersucht und der numerische Aufwand für die Schätzung diskutiert. Anwendungen aus der Geodäsie und Photogrammetrie stellen in diesem überwiegend theoretisch orientierten Kapitel Bezüge zur Praxis her.

Als Grundlage für alle Modelle dient das Gauß-Markoff-Modell (GM-Modell), in der Ausgleichsrechnung als Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen (Standard-Problem II in der Bezeichnungsweise nach Tienstra (1956)) bezeichnet. Alle übrigen Modelle werden aus dem GM-Modell durch Erweiterung im funktionalen und stochastischen Teil entwickelt. Dies entspricht in der Regel auch der historischen Entwicklung der Modelle in der Geodäsie und der Photogrammetrie.

Auf eine ausführliche Beschreibung des Modells der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen (Standard-Problem I) wird hier bewußt verzichtet, da es sich unter bestimmten Bedingungen eindeutig in das GM-Modell überführen läßt (vgl. Koch (1980), S. 201)), worauf aber in der Modelldiskussion noch eingegangen wird.

Hierbei ist jedoch anzumerken, daß gerade die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen, im Gegensatz zur Entwicklung in der mathematischen Statistik, bevorzugt von der Delfter Schule um Baarda behandelt wird. Denn die Modellierung mit Bedingungsgleichungen in einzelnen Berechnungsphasen eignet sich von der Konstruktion her sehr gut für den Einsatz statistischer Hypothesentests (vgl. Baarda (1967), Molenaar (1983)).

Die Ableitung der Modelle und die Beziehungen untereinander erfolgen alle, unabhängig von der Verteilung der Zufallsvariablen, im Modellraum durch Substitution der Modellparameter. Es werden nicht, wie in der Literatur häufig üblich, über die Schätzung der unbekannt Parameter die Beziehungen zwischen den Modellen hergestellt. Denn sind die Modelle im Modellraum ineinander überführbar, dann gilt dies zwangsläufig auch für ihre Schätzungen, vorausgesetzt man verwendet Schätzverfahren mit identischen Eigenschaften. Die Unabhängigkeit von der Schätzung bedeutet auch, daß man nicht auf lineare Schätzfunktionen angewiesen ist.

Die Darstellung der Modelle erfolgt in der Momentenschreibweise (vgl. Pukelsheim (1979)). Die im Modell vorkommenden Variablen oder Variablenvektoren werden durch die Erwartungswerte (1. Momente) und ihre Dispersion (2. Momente) beschrieben. Dadurch läßt sich eine eindeutige Charakterisierung erreichen. Stochastische (random) Variable oder Vektoren werden durch Unterstreichen

von den festen (fixed) Variablen hervorgehoben, wobei das Attribut "fest" im Sinne von nicht stochastisch verstanden wird (vgl. Searle (1971), S. 382f). Zur Beschreibung der Modelle ist die Zugrundelegung einer bestimmten Verteilung nicht notwendig, weshalb bei der Momentendarstellung eine beliebige Verteilung M zugelassen wird. Setzt aber die Schätzung eine bestimmte Verteilung voraus, wie z.B. bei der Varianz-Kovarianzkomponenten-Schätzung, dann wird diese im einzelnen angegeben.

Zur Einordnung der Modelltypen wird die Klassifizierung nach Grafarend (1978a) verwendet. Hierbei können die in einem linearen Gleichungssystem $y = Ax$ vorkommenden drei Größen y , A , x die Eigenschaften stochastisch (S) oder fest (F) annehmen. So ist zum Beispiel bei dem Modell vom Typ SFF der Vektor y stochastisch, die Koeffizientenmatrix A und der Vektor x dagegen fest.

Die Schätzung in den einzelnen mathematischen Modellen erfolgt grundsätzlich nach der Punktschätzung. Die unbekannt Parameter werden hierbei mit Hilfe von Schätzfunktionen mit optimalen Eigenschaften als Funktion der Beobachtungen geschätzt. Optimale statistische Eigenschaften einer Schätzfunktion sind:

- erwartungstreu (unverzerrt, unbiased)

Der Erwartungswert der zu schätzenden Funktion $h(x)$ der unbekannt Parameter x stimmt mit dem Erwartungswert ihrer geschätzten Funktion $g(\underline{l})$ der Beobachtungen \underline{l} überein:

$$E(g(\underline{l})) = E(h(x)) .$$

- minimale Varianz V (beste Schätzung)

Minimale Varianz der Schätzung bedeutet beste Schätzung im Sinne, daß die zu erwartende quadratische Differenz minimal wird:

$$E((g(\underline{l}) - h(x))^2) \rightarrow \min.$$

- invariant

Invariante Schätzung bedeutet Unabhängigkeit der Schätzung von anderen Schätzungsergebnissen aus dem gleichen mathematischen Modell.

Im folgenden werden, wie bereits oben erwähnt, ausschließlich Schätzungen in linearen Modellen behandelt, wobei nur beste lineare und quadratische erwartungstreue Schätzer verwendet werden. Die beste erwartungstreue Schätzung für feste und stochastische Parameter ist u.a. in Koch (1980, S. 142f) definiert (siehe auch S. 20 dieser Arbeit).

1.4 Zielsetzung und Überblick

Die Zielsetzung dieses Kapitels ist es, über eine Beschreibung und Diskussion der in der geodätischen oder photogrammetrischen Praxis üblichen mathematischen Modelle und unter Einführung der aus der stochastischen Prozeßtheorie entnommenen autoregressiven Modelle auf ein spezielles, auf den zuvor erläuterten Modellen aufbauendes, kombiniertes Modell hinzuzuführen. Dieses kombinierte Modell faßt ein erweitertes funktionales und ein erweitertes stochastisches Modell ¹⁾ zusammen und stellt somit speziell für die Aerotriangulation eine konsequente Weiterentwicklung des mathematischen Modells aller auf diesem Gebiet vorangegangenen Untersuchungen dar. Es soll weiter-

¹⁾ erweitert im Sinne einer besseren Anpassung an die Realität

hin als Grundlage für künftige theoretische und empirische Untersuchungen zur Genauigkeitssteigerung in der photogrammetrischen Punktbestimmung dienen.

Aus dieser Zielsetzung heraus ist das Kapitel II in 3 Abschnitte unterteilt. Im ersten Abschnitt werden Ausgleichungsmodelle und ihre zugehörige Parameterschätzung in allgemeiner Form diskutiert. Die Bezeichnungsweise orientiert sich vorwiegend an der mathematischen Statistik. Bezüge zur traditionellen Ausgleichungsrechnung werden hergestellt. Am Schluß dieses Abschnittes wird eine Übersicht über die diskutierten Modelle und ihre Beziehungen gegeben.

Der zweite Abschnitt befaßt sich mit der Wahl der Kovarianzstruktur im stochastischen Teil des mathematischen Modells. Insbesondere wird dabei auf die Verwendung stochastischer Prozesse zur Beschreibung der Kovarianzstruktur eingegangen. Dazu finden Spezialfälle stochastischer Prozesse, die autoregressiven Modelle, Verwendung. Autoregressive Modelle gehören zur Gruppe der stationären stochastischen Prozesse. Der autoregressive Prozeß stellt an das Datenmaterial keine so großen Anforderungen wie zum Beispiel ein Markoff-Prozeß und weist somit auch keine reichhaltigen Strukturen auf. Dies macht ihn für die Anwendung durchsichtiger und leichter handhabbar.

Der dritte Abschnitt zeigt die Verbindung zwischen den in den vorangegangenen Abschnitten aufgeführten Modellen und den autoregressiven Prozessen auf und führt auf das kombinierte Modell. Plausibilitätsüberlegungen und empirische Untersuchungen bilden die Grundlage für dieses Modell mit allen seinen, auch speziell für die Anwendung ausgerichteten, Strukturen.

Eine Zusammenfassung schließt das Kapitel ab. Ableitungen und Beweise werden nur ausgeführt, wenn sie neu oder für den Zusammenhang als notwendig erachtet werden. Ansonsten wird auf die entsprechenden Literaturstellen verwiesen.

2. Ausgleichungsmodelle

Die in diesem Abschnitt dargestellten Ausgleichungsmodelle repräsentieren die in der statistischen Theorie am weitesten entwickelten und in der Anwendung am häufigsten eingesetzten Modelltypen. Alle hier vorgestellten Ausgleichungsmodelle lassen sich in das Gauß-Helmert-Modell, auch Allgemeinfeld der Ausgleichungsrechnung oder Bedingte Ausgleichung mit Unbekannten (Standard-Problem IV nach Tienstra) genannt, überführen. Das Gauß-Helmert-Modell wurde von Wolf (1978 u. 1980) hinsichtlich seiner statistischen Eigenschaften und der Möglichkeit von Hypothesentests ausführlich diskutiert. Dennoch genügt es, alle hier aufgeführten Modelle auf dem speziellen Gauß-Markoff-Modell aufzubauen, um der historischen Entwicklung und der einfachen Struktur dieses Typs Rechnung zu tragen.

Möchte man Modellzusammenhänge aufzeigen, so steht man vor dem Problem der Wahl zwischen zwei verschiedenen Betrachtungsweisen: Modelle lassen sich zum einen aus einem einfachen Ansatz aufbauen, sprich erweitern, oder aber ein übergeordnetes Modell mit einer einfachen Struktur beinhaltet bereits alle komplizierteren Strukturen in Form von Modellkomponenten, d.h. es läßt sich in diese Komponenten zerlegen. Um einen klaren Ablauf unter Einbeziehung der historischen Entwicklung zu erhalten, eignet sich die aufbauende Vorstellung, d.h. die Modellentwicklung wesentlich besser, weshalb ihr im folgenden der Vorzug gegeben wird. Als Endergebnis erhält man dann ein aus Modellkomponenten zusammengesetztes allgemeineres Modell.

Der Modellfehler läßt sich als Differenz zwischen Realität und Modellvorstellung definieren, wobei letztere sich üblicherweise aus dem deterministischen (funktionalen) Anteil und dem zufälligen Fehleranteil zusammensetzt. Betrachtet man ein Modell im Sinne der statistischen Testtheorie als Nullhypothese über die Realität, so geht man bei der Modelldefinition davon aus, daß der Modellfehler Null ist, sowohl im Erwartungswert als auch in der Dispersion. Eine Überprüfung der Nullhypothese fordert die Definition einer oder mehrerer Alternativhypothesen, welche in der Regel eine Verfeinerung der Modellvorstellung beinhalten und somit die Modellfehler reduzieren sollen. Diese Verfeinerung im Falle einer Ablehnung der Nullhypothese gliedert sich nahtlos in die Betrachtungsweise der Modellentwicklung ein. Der Begriff des Modellfehlers findet in der hier definierten Weise Eingang in die Modelldiskussionen.

Da alle Modelle des Abschnitts 2 dieses Kapitels in Beziehung zueinander stehen, werden bei der Modelldiskussion sich wiederholende Gesichtspunkte nur an dem dafür geeigneten Modell aufgezeigt. Bei den übrigen Modellen wird hierauf verwiesen. Soweit nicht anders erwähnt, wird bei der Parameterschätzung von Modellen mit vollem Rang ausgegangen, d.h. Datums- und Konfigurationsdefekte sind nicht zugelassen.

Obwohl die Modelle in einer stetigen Entwicklung aufgezeigt werden sollen, wird eine Zusammenfassung in Gruppen von Modellen mit bekanntem bzw. unbekanntem stochastischen Teil für sinnvoll erachtet.

2.1 Modelle mit gegebener Dispersion

Alle in diesem Abschnitt definierten und diskutierten Modelle besitzen als Gemeinsamkeit bekannte bzw. vorgegebene Informationen über die Dispersion der Beobachtungen und aller übrigen stochastisch modellierten Parameter. Herkunft und Art dieser a priori Informationen sollen hier nicht diskutiert werden.

2.1.1 Das univariate Gauß-Markoff-Modell

a) Definition und Anwendung

Das bekannteste und in der Anwendung am weitesten verbreitete Ausgleichsmodell ist das univariate Gauß-Markoff-Modell (GM). Es ist ein Modell vom Typ SFF und läßt sich wie folgt definieren:

Definition II.2-1: Univariates Gauß-Markoff-Modell (Modell A)

$\underline{l} = Ax + \underline{\varepsilon}$ <p>oder</p> $\underline{l} = \sum_{i=1}^u a_i x_i + \underline{\varepsilon}$	$x \sim M(x, 0)$
	$\underline{\varepsilon} \sim M(0, C_{\varepsilon\varepsilon})$
$\underline{l} \sim M(Ax, C_{\varepsilon\varepsilon})$	

Hierbei bedeutet:

\underline{l} = Zufallsvektor der n Beobachtungen ($o(\underline{l}) = n \times 1$)

A = Koeffizienten- oder Designmatrix 1. Ordnung ($o(A) = n \times u$, $r(A) = u$),

a_i = Spaltenvektor i der Matrix A

x = Vektor der unbekannt, festen Parameter ($o(x) = u \times 1$), x_i = i -tes Element des Vektors x

$\underline{\epsilon}$ = Zufallsvektor der Beobachtungsfehler ($o(\underline{\epsilon}) = n \times 1$)

$C_{\epsilon\epsilon}$ = Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $\underline{\epsilon}$ ($o(C_{\epsilon\epsilon}) = n \times n$, $r(C_{\epsilon\epsilon}) = n$), die auch als Produkt der Varianz der Gewichtseinheit σ_o^2 und der Gewichtskoeffizientenmatrix (Kofaktormatrix) $Q_{\epsilon\epsilon}$ dargestellt werden kann; identisch mit der Kovarianzmatrix C_{11} der Beobachtungen.

Hinweis:

Ein konstanter Anteil k in den in Gl. (1.1-1) definierten Beobachtungen \underline{l}_o läßt sich durch die Reduktion $\underline{l} = \underline{l}_o - k$ eliminieren, so daß er auf die Modellbildung keinen Einfluß hat und man die in der Literatur übliche Darstellung erhält.

Einige repräsentative Beispiele für das univariate GM-Modell mit dieser einfachen Struktur sind die konventionellen geodätischen Lage- und Höhennetzausgleichungen, die Helmertransformations, die Polynomausgleichung, in der Photogrammetrie die Ausgleichung nach unabhängigen Modellen und die Bündelblockausgleichung unter ausschließlicher Berücksichtigung der perspektiven Projektion, d.h. ohne zusätzliche Parameter.

b) Schätzung

Für die BLU-Schätzung im GM-Modell müssen nach Koch (1980, S. 147f) folgende Bedingungen eingehalten werden:

- (1) Der Erwartungswert der linearen Schätzfunktion $g(\underline{l}) = p^T \underline{l}$ muß mit dem Erwartungswert der zu schätzenden Funktion $h(x) = q^T x$ übereinstimmen:

$$E(p^T \underline{l}) = p^T E(\underline{l}) = p^T A x = q^T x, \quad \text{da } E(h(x)) = h(x) .$$

Daraus folgt:

$$A^T p - q = 0 . \tag{2.1.1-1}$$

- (2) Die Varianz der Schätzfunktion muß minimal sein:

$$V(p^T \underline{l}) = p^T D(\underline{l}) p = p^T C_{11} p \rightarrow \min. \tag{2.1.1-2}$$

Die Extremwertberechnung mit der Lagrangefunktion führt unter Einbeziehung der Nebenbedingung $p^T A = q^T$ auf folgendes Ergebnis (Koch (1980), S. 148):

$$p^T = q^T (A^T C_{11}^{-1} A)^{-1} A^T C_{11}^{-1} . \tag{2.1.1-3}$$

Geht man vom Erwartungswert der Schätzfunktion auf die Schätzung über, so ergibt sich aus Gl. (2.1.1-1)

$$p^T \underline{l} = \widehat{q^T x} = q^T \hat{x} .$$

Daraus folgt mit Gl. (2.1.1-3)

$$q^T \hat{x} = q^T (A^T C_{11}^{-1} A)^{-1} A^T C_{11}^{-1} \underline{l}$$

und

$$\hat{\underline{x}} = (A^T C_{11}^{-1} A)^{-1} A^T C_{11}^{-1} \underline{1} \quad (2.1.1-4)$$

Diese BLU-Schätzung der festen, unbekannt Parameter x ist identisch mit dem bekannten Ergebnis der LS-Schätzung. Um die geschätzten Genauigkeiten der Parameter $\hat{\underline{x}}$ zu beschreiben, benötigt man neben der Erwartungstreue $E(\hat{\underline{x}}) = x$ auch deren Dispersion:

$$D(\hat{\underline{x}}) = E((\hat{\underline{x}} - E(\hat{\underline{x}}))(\hat{\underline{x}} - E(\hat{\underline{x}}))^T) = (A^T C_{11}^{-1} A)^{-1} = C_{\hat{\underline{x}}\hat{\underline{x}}} \quad (2.1.1-5)$$

Damit lassen sich die geschätzten Parameter in der Momentenschreibweise darstellen:

$$\hat{\underline{x}} \sim M(x, C_{\hat{\underline{x}}\hat{\underline{x}}}) \quad .$$

Um ein Modell auf Grund der Schätzungsergebnisse beurteilen zu können, benötigt man die Schätzung des Fehlervektors $\underline{\varepsilon}$. Die Schätzung $\hat{\underline{\varepsilon}}$ entspricht in der Ausgleichsrechnung dem negativen Vektor der Verbesserungen \underline{v} . Sie ergibt sich als Differenz aus Beobachtung und ausgeglichener Beobachtung:

$$\hat{\underline{\varepsilon}} = \underline{1} - \hat{\underline{1}} = \underline{1} - A\hat{\underline{x}} \quad (2.1.1-6)$$

und damit der Erwartungswert

$$E(\hat{\underline{\varepsilon}}) = E(\underline{1} - A\hat{\underline{x}}) = E(\underline{1}) - AE(\hat{\underline{x}}) = 0 \quad .$$

Die Dispersion von $\hat{\underline{\varepsilon}}$ ergibt sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$D(\hat{\underline{\varepsilon}}) = D(\underline{1}) - D(\hat{\underline{1}}) = C_{11} - A(A^T C_{11}^{-1} A)^{-1} A^T = C_{\hat{\underline{\varepsilon}}\hat{\underline{\varepsilon}}} \quad , \quad (2.1.1-7)$$

mit dem Rang $r(C_{\hat{\underline{\varepsilon}}\hat{\underline{\varepsilon}}}) = n-u$ (vgl. Koch (1980, S. 151)).

Ein wichtiges Kriterium zur Beurteilung eines Modells mittels Hypothesentests bildet die aus der quadratischen Form der Schätzung $\hat{\underline{\varepsilon}}$ abgeleitete erwartungstreue Schätzung der Varianz der Gewichtseinheit (Varianzfaktor nach Baarda):

$$E(\hat{\underline{\varepsilon}}^T C_{11}^{-1} \hat{\underline{\varepsilon}}) = \sigma_o^{-2} E(\hat{\underline{\varepsilon}}^T Q_{11}^{-1} \hat{\underline{\varepsilon}}) = \text{sp}(E(\hat{\underline{\varepsilon}}\hat{\underline{\varepsilon}}^T) C_{11}^{-1}) = \text{sp}(Q_{\hat{\underline{\varepsilon}}\hat{\underline{\varepsilon}}} Q_{11}^{-1}) \quad .$$

Mit dem Übergang vom Erwartungswert auf die Schätzung erhält man:

$$\hat{\sigma}_o^{-2} \hat{\underline{\varepsilon}}^T Q_{11}^{-1} \hat{\underline{\varepsilon}} = \text{sp}(Q_{\hat{\underline{\varepsilon}}\hat{\underline{\varepsilon}}} Q_{11}^{-1}) = n - u$$

und damit

$$\hat{\sigma}_o^{-2} = \frac{\hat{\underline{\varepsilon}}^T Q_{11}^{-1} \hat{\underline{\varepsilon}}}{n - u} \quad (2.1.1-8)$$

Aus der geschätzten Varianz der Gewichtseinheit ergibt sich für die geschätzte Genauigkeit der ausgeglichenen Beobachtungen:

$$\hat{C}_{\hat{\underline{1}}\hat{\underline{1}}} = \hat{\sigma}_o^2 Q_{\hat{\underline{1}}\hat{\underline{1}}} \quad .$$

Die Schätzung in den nachfolgenden Modellen wird sich auf diese Darstellungen beziehen, so daß dort die Beschreibung der Schätzung auf die wesentlichen Gesichtspunkte beschränkt sein wird.

Das in Definition II.2-1 vorgestellte GM-Modell wird nun die Grundlage für alle weiteren Modelle bilden. Sie ergeben sich durch Erweiterungen im funktionalen und stochastischen Teil des Modells und werden in den folgenden Abschnitten ausführlich diskutiert.

2.1.2 Das erweiterte univariate Gauß-Markoff-Modell

a) Definition und Anwendung

Das erweiterte univariate Gauß-Markoff-Modell erhält man durch die Einführung zusätzlicher fester, unbekannter Parametergruppen im Funktionalteil des Modells A. Diese Modellstruktur kommt überwiegend bei der Bestimmung und Erfassung sogenannter systematischer Einflüsse durch zusätzliche Parameter vor. Bei der Bündelmethode in der Aerotriangulation hat sich dieses Modell bereits fest etabliert, wobei die zusätzlichen Parameter sowohl global, d.h. nur eine weitere Parametergruppe, als auch lokal in mehreren Gruppen Anwendung finden. Bei den geodätischen Netzen werden durch Einführung zusätzlicher Parameter unter anderem Refraktionskoeffizienten, Additionskonstanten und zyklische Fehler bestimmt.

Im folgenden wird die Erweiterung der Übersichtlichkeit wegen auf eine einzelne zusätzliche Parametergruppe beschränkt; weitere Gruppierungen können analog behandelt werden (siehe additive Zerlegung der Koeffizientenmatrix bei Modell A). Das erweiterte univariate GM-Modell ist ebenfalls ein Modell vom Typ SFF und läßt sich wie folgt definieren:

Definition II.2-2: Erweitertes univariates Gauß-Markoff-Modell (Modell B)

$\underline{l} = Ax + By + \underline{\varepsilon}$	$x \sim M(x, 0)$
	$y \sim M(y, 0)$
	$\underline{\varepsilon} \sim M(0, C_{\varepsilon\varepsilon})$
$\underline{l} \sim M(Ax + By, C_{\varepsilon\varepsilon})$	

Hierbei bedeutet:

\underline{l} = Zufallsvektor der n Beobachtungen ($o(\underline{l}) = n \times 1$)

A = Koeffizientenmatrix der ersten unbekannt Parametergruppe ($o(A) = n \times u$, $r(A) = u$)

B = Koeffizientenmatrix der zweiten unbekannt Parametergruppe ($o(B) = n \times k$, $r(B) = k$)

x = Vektor der ersten unbekannt (festen) Parametergruppe ($o(x) = u \times 1$)

y = Vektor der zweiten unbekannt (festen) Parametergruppe ($o(y) = k \times 1$)

$\underline{\varepsilon}$ = Zufallsvektor der Beobachtungsfehler ($o(\underline{\varepsilon}) = n \times 1$)

$C_{\varepsilon\varepsilon}$ = Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $\underline{\varepsilon}$ ($o(C_{\varepsilon\varepsilon}) = n \times n$, $r(C_{\varepsilon\varepsilon}) = n$)

Dieses Modell B läßt sich durch Zusammenfassen der Koeffizientenmatrizen zur Matrix $\bar{A} = [A \ B]$ und der Parametervektoren zum Vektor $\bar{x}^T = [x^T \ y^T]$ in die Form des Modells A überführen.

b) Schätzung

Die BLU-Schätzung im erweiterten GM-Modell ist formal identisch mit der Schätzung im Modell A. Die Schätzung der unbekannt Parameter ergibt sich somit zu

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T C_{11}^{-1} A & A^T C_{11}^{-1} B \\ B^T C_{11}^{-1} A & B^T C_{11}^{-1} B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^T C_{11}^{-1} \underline{l} \\ B^T C_{11}^{-1} \underline{l} \end{bmatrix} \quad (2.1.2-1)$$

Die Dispersion der geschätzten Parameter lautet

$$D \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T C_{11}^{-1} A & A^T C_{11}^{-1} B \\ B^T C_{11}^{-1} A & B^T C_{11}^{-1} B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} N^{-1} + N^{-1} A^T C_{11}^{-1} B M^{-1} B^T C_{11}^{-1} A N^{-1} & -N^{-1} A^T C_{11}^{-1} B M^{-1} \\ -M^{-1} B^T C_{11}^{-1} A N^{-1} & M^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.1.2-2)$$

mit $N = A^T C_{11}^{-1} A$ und $M = B^T C_{11}^{-1} B - B^T C_{11}^{-1} A N^{-1} A^T C_{11}^{-1} B$ (vgl. Koch (1980), S. 34), wobei die Inversion auf einer Reduktion des Gleichungssystems (2.1.2-1) um den Parametervektor y beruht.

Die Schätzung des Fehlervektors $\underline{\hat{\epsilon}}$ ergibt

$$\underline{\hat{\epsilon}} = \underline{l} - \underline{\hat{l}} = \underline{l} - A \hat{x} - B \hat{y} \quad (2.1.2-3)$$

und dessen Dispersion

$$D(\underline{\hat{\epsilon}}) = C_{11} - [A \ B] D \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}^{-1} [A \ B]^T \quad (2.1.2-4)$$

Die geschätzte Varianz der Gewichtseinheit lautet analog zu Gl. (2.1.1-8)

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\epsilon}^T Q_{11}^{-1} \hat{\epsilon}}{n - u - k} \quad (2.1.2-5)$$

c) Modelldiskussion

(1) Das Modell B bietet sich von seiner Struktur her als Erweiterung des Modells A für die Diskussion von Fehlern im Funktionalteil der Modellannahme an (vgl. Koch (1980), S. 164ff und Pelzer (1982)). Fehler im stochastischen Teil werden im Abschnitt 2.1.3 besprochen. Drei mögliche Typen von Modellfehlern sollen hier im einzelnen behandelt werden:

- 1.) Im Modell werden zu wenige feste Parameter angesetzt
(richtiges Modell: $E(\underline{l}) = Ax + By$).
- 2.) Im Modell werden zu viele feste Parameter angesetzt
(richtiges Modell: $E(\underline{l}) = Ax$).
- 3.) Im Modell wird aus Unkenntnis die Gruppe $B_2 y_2$ von zusätzlichen Parametern angesetzt
(richtiges Modell: $E(\underline{l}) = Ax + B_1 y_1$).

Der erste Fall, bei dem zu wenige Parameter angesetzt werden, tritt zum Beispiel ein, wenn systematische Fehler $\forall l = By$ die Beobachtungen beeinflussen und dennoch die Beobachtungen lediglich als Funktion der Unbekanntengruppe x modelliert werden. Dies führt zu einer Verzerrung der Schätzung um den Vektor

$$\underline{v}_x = (A^T C_{11}^{-1} A)^{-1} A^T C_{11}^{-1} B y \quad (2.1.2-6)$$

Als skalares Maß für diese Verzerrung führt Förstner (1982b) in einer Verallgemeinerung des Begriffs $\bar{\chi}$ von Baarda (1976) die Bezeichnung $\bar{\delta}^2$ ein mit

$$\bar{\delta}^2 = E(\underline{v}_x^T C_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \underline{v}_x) = y^T B^T C_{11}^{-1} A (A^T C_{11}^{-1} A)^{-1} A^T C_{11}^{-1} B y \quad (2.1.2-7)$$

das zum Beispiel die gesamte Deformation eines Netzes durch nicht im Modell erfaßte systematische Einflüsse beschreibt. Diese Deformation ist nur dann gleich Null, wenn $A^T C_{11}^{-1} B = 0$ ist,

so daß folgt

$$\bar{\delta}^2(v1) = 0 \iff A^T C_{11}^{-1} B = 0 . \quad (2.1.2-8)$$

Die vernachlässigten Parameter y haben somit keinen Einfluß auf die Schätzung der Unbekannten x , wenn x orthogonal zu y ist.

Neben der verzerrten Schätzung für die unbekannt Parameter x ergeben sich bei diesem Modellfehlertyp für die Dispersion $D(\hat{x})$ ¹⁾ zu kleine Werte. Das bedeutet, die Kovarianzmatrix der geschätzten Parameter wird zu optimistisch gegenüber der Realität angegeben, denn es wird, wie aus Gl. (2.1.2-2) ersichtlich, der additive Anteil

$$v C_{\hat{x}\hat{x}} = N^{-1} A^T C_{11}^{-1} B M^{-1} B^T C_{11}^{-1} A N^{-1} \quad (2.1.2-9)$$

vernachlässigt. Die Schätzung der Varianz der Gewichtseinheit ergibt sich ebenfalls verzerrt und zwar zu pessimistisch:

$$E(\hat{\underline{\epsilon}}^T Q_{11}^{-1} \hat{\underline{\epsilon}}) = \sigma_o^2(n - u) + E(\underline{1})^T D^T Q_{11}^{-1} D E(\underline{1}) = \sigma_o^2(n - u) + y^T B^T D^T Q_{11}^{-1} D B y \quad (2.1.2-10)$$

mit $D = (I - A(A^T C_{11}^{-1} A)^{-1} A^T C_{11}^{-1})$ und $E(\underline{1}) = Ax + By$.

Gilt die Bedingung (2.1.2-8), so ist die Kovarianzmatrix $C_{\hat{x}\hat{x}}$ richtig, aber nicht die Schätzung von σ_o^2 .

Werden im zweiten Fall zu viele Parameter angesetzt, so hat dies keinen Einfluß auf die Erwartungstreue der Schätzung dieser Parameter, denn mit $E(\underline{1}) = Ax$ gilt:

$$\begin{aligned} E(\hat{x}) &= (N^{-1} + N^{-1} A^T C_{11}^{-1} B M^{-1} B^T C_{11}^{-1} A N^{-1}) A^T C_{11}^{-1} E(\underline{1}) \\ &\quad - N^{-1} A^T C_{11}^{-1} B M B^T C_{11}^{-1} E(\underline{1}) \\ &= x . \end{aligned} \quad (2.1.2-11)$$

Der Modellfehler hat zwar keinen Einfluß auf die Erwartungstreue, aber auf den Betrag der Schätzung. Dieser Einfluß läßt sich analog zu Gl. (2.1.2-6) angeben, wobei hier geschätzte, d.h. stochastische, Größen verwendet werden müssen:

$$v \hat{x} = -N^{-1} A^T C_{11}^{-1} B \hat{y} . \quad (2.1.2-12)$$

Damit ergibt sich das skalare Maß $\bar{\delta}^2$:

$$\bar{\delta}^2 = E(v \hat{x}^T C_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} v \hat{x}) = \text{sp}(B^T C_{11}^{-1} A N^{-1} A^T C_{11}^{-1} B M^{-1}) . \quad (2.1.2-13)$$

Die Bedingung der Gl. (2.1.2-8) gilt auch in diesem Fall.

Die Dispersion der geschätzten Parameter wird bei diesem Modellfehler zu pessimistisch angegeben, denn es wird der Anteil der Gl. (2.1.2-9) hinzuaddiert. Die tatsächlich erreichte Genauigkeit wird also verzerrt angegeben.

Die Schätzung der Varianz der Gewichtseinheit ergibt sich in diesem Fall unverzerrt, denn

$$E(\hat{\underline{\epsilon}}^T Q_{11}^{-1} \hat{\underline{\epsilon}}) = \sigma_o^2(n - u - k) + E(\underline{1})^T \bar{D}^T Q_{11}^{-1} \bar{D} E(\underline{1}) \quad (2.1.2-14)$$

1) theoretische Genauigkeit: $D(\hat{x}) = C_{\hat{x}\hat{x}} = \sigma_o^2 Q_{\hat{x}\hat{x}}$

mit $\bar{D} = (I - [A \ B]([A \ B]^T C_{11}^{-1} [A \ B])^{-1} [A \ B]^T C_{11}^{-1})$ und $E(\underline{1}) = Ax$, wobei wegen $\bar{D} [A \ B] = 0$ gilt:

$$E(\underline{1})^T \bar{D}^{-1} Q_{11}^{-1} \bar{D} E(\underline{1}) = 0 .$$

Wird im dritten Fall bei der Modellformulierung eine unrichtige Parametergruppe y_2 eingeführt, so entspricht dies einer Kombination aus dem ersten und dem zweiten Fall. Die richtige Parametergruppe x wird verzerrt geschätzt:

$$E(\hat{x}) = x + N^{-1} A^T C_{11}^{-1} B_1 y_1 + N^{-1} A^T C_{11}^{-1} B_2 \bar{M}^{-1} B_2^T C_{11}^{-1} (AN^{-1} A^T C_{11}^{-1} - I) B_1 y_1$$

mit $N = A^T C_{11}^{-1} A$ und $\bar{M} = B_2^T C_{11}^{-1} B_2 - B_2^T C_{11}^{-1} AN^{-1} A^T C_{11}^{-1} B_2$.

Das skalare Maß der Einflußgröße auf die Parametergruppe x lautet:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= E(\nabla x^T C_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \nabla x) \\ &= y_1^T B_1^T (I + (C_{11}^{-1} AN^{-1} A^T - I) C_{11}^{-1} B_2 \bar{M}^{-1} B_2^T) C_{11}^{-1} AN^{-1} A^T C_{11}^{-1} \\ &\quad \cdot (I + B_2 \bar{M}^{-1} B_2^T C_{11}^{-1} (AN^{-1} A^T C_{11}^{-1} - I)) . \end{aligned} \quad (2.1.2-15)$$

Die Dispersion der geschätzten Parameter \hat{x} kann sowohl zu große oder auch zu kleine Werte annehmen, was sich aus der Mischung der Fehlerfälle 1 und 2 ergibt:

$$\nabla C_{\hat{x}\hat{x}} = N^{-1} A^T C_{11}^{-1} (B_2 M_2^{-1} B_2^T - B_1 M_1^{-1} B_1^T) C_{11}^{-1} AN^{-1} \quad (2.1.2-16)$$

mit $M_i = B_i^T C_{11}^{-1} B_i - B_i^T C_{11}^{-1} AN^{-1} A^T C_{11}^{-1} B_i$, $i = 1, 2$.

Für die Schätzung der Varianz der Gewichtseinheit, die ebenfalls verzerrt ist, gilt:

$$\nabla \sigma_o^2 = E(\hat{\sigma}_o^2) - E(\hat{\sigma}_o^2) = \frac{E(\underline{1})^T D_2^T Q_{11}^{-1} D_2 E(\underline{1})}{n - u - k_2} \quad (2.1.2-17)$$

mit $k_2 = \text{Anzahl der Parameter in Gruppe 2}$, $E(\underline{1}) = Ax + B_1 y_1$ und

$$D_2 = (I - [A \ B_2]([A \ B_2]^T C_{11}^{-1} [A \ B_2])^{-1} [A \ B_2]^T C_{11}^{-1}) .$$

Die Varianz der Gewichtseinheit wird somit zu pessimistisch, bzw. im Extremfall, wenn die Parametergruppe y_1 eine Teilmenge von y_2 ist, sogar unverzerrt geschätzt.

(2) Die numerische Betrachtung innerhalb der Modelldiskussion beim erweiterten GM-Modell soll, ähnlich der Modellfehlerdiskussion, auf der Partitionierung des Gleichungssystems zur Bestimmung der unbekannt Parameter (Gl. (2.1.2-1)) aufbauen. Die Partitionierung, bedingt durch die Parametergruppen, gestattet es, eine Reduktion des Gleichungssystems vorzunehmen, um numerische Vorteile bei der Lösung auszunützen. Die Reduktion, oder auch Teilreduktion bei mehr als 2 Parametergruppen, hängt vorrangig von der Struktur und der Ordnung der zu invertierenden Matrizen ab, d.h. dieser Gesichtspunkt entscheidet u.a. welche Parametergruppe eliminiert, bzw. auf welche Gruppe reduziert werden soll. Vorteilhaft sind Matrizen mit Bandstruktur, für die eine Vielzahl von Inversionsalgorithmen zur Verfügung stehen. Die Bandbreite einer Bandmatrix hängt häufig, wie zum Beispiel bei geodätischen Netzen und auch bei photogrammetrischen Bildverbänden, von den Punktnumerierungsschemata der zu bestimmenden Neupunkte ab. Weiteren Einfluß auf die Art der Reduktion hat auch die Zielsetzung der Schätzung, d.h. ob der volle Umfang der Schätzergebnisse gewünscht ist oder ob man sich zum Beispiel nur auf die Dispersion einer geschätzten Para-

metergruppe zur Beurteilung des Ergebnisses beschränken will. An dieser Stelle sei noch auf die in jüngster Zeit entwickelten Verfahren zur Lösung dünnbesetzter Gleichungssysteme (sparse technique) verwiesen (Steidler (1980), Stark (1983)).

Eine ausführliche numerische Betrachtung hat Bähr (1978) im Hinblick auf die Eliminierung einer Gruppe von unbekanntem Parametern ausgeführt, wobei er allerdings keine Gleichungssysteme mit Bandstruktur berücksichtigt hat.

(3) Die in diesem Abschnitt definierte Form des erweiterten univariaten GM-Modells soll nun repräsentativ für alle Erweiterungen im Funktionalteil des mathematischen Modells stehen, unabhängig von der Anzahl der gewählten Parametergruppen. Auf die Erweiterung des Funktionalteils wurde in der Vergangenheit sowohl in der Geodäsie als auch in der Photogrammetrie der Schwerpunkt der Entwicklung gelegt, da hier die Zusammenhänge überschaubar und die Schätzungen numerisch verhältnismäßig einfach waren. Erst seitdem die von der Anwendung geforderten oder möglich gewordenen Genauigkeiten einen Stand erreicht haben, bei dem das Funktionalmodell sehr aufwendig wird, hat man sich in der Forschung der Erweiterung des stochastischen Modells zugewandt.

2.1.3 Das gemischte Modell

a) Definition und Anwendung

Das gemischte Modell ergibt sich durch die Erweiterung des stochastischen Teils des univariaten GM-Modells. Man führt wie bei Modell B eine Gruppe zusätzlicher unbekannter Parameter ein, die aber jetzt stochastische Eigenschaften aufweisen, etwa orts- oder zeitabhängig miteinander korreliert sind. Somit erhält man ein Modell vom Typ SFF-SFS, das bedeutet eine Mischung des GM-Modells (SFF) mit den SFS-Modellen aus der Theorie der stochastischen Prozesse.

Der entscheidende Unterschied zu den vorangegangenen Modellen besteht in der notwendigen zusätzlichen a priori Information statistischer Art über die Gruppe der stochastischen unbekanntem Parameter, wogegen in den Modellen A und B lediglich die stochastischen Eigenschaften der Beobachtungsfehler bekannt sein mußten.

Definition II.2-3: Gemischtes Modell (Modell C)

$\underline{l} = Ax + Cz + \underline{\epsilon}$	$x \sim M(x, 0)$
	$\begin{bmatrix} \underline{z} \\ \underline{\epsilon} \end{bmatrix} \sim M \left(\begin{bmatrix} \underline{z}_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{zz} & 0 \\ 0 & C_{\epsilon\epsilon} \end{bmatrix} \right)$
$\underline{l} \sim M(Ax + Cz_0, CC_{zz}C^T + C_{\epsilon\epsilon})$	

Hierbei bedeutet:

\underline{l} = Zufallsvektor der n Beobachtungen ($o(\underline{l}) = n \times 1$)

A = Koeffizientenmatrix der festen unbekanntem Parametergruppe ($o(A) = n \times u$, $r(A) = u$)

C = Koeffizientenmatrix der stochastischen unbekanntem Parametergruppe ($o(C) = n \times k$, $r(C) = k$)

x = Vektor der festen unbekanntem Parametergruppe ($o(x) = u \times 1$)

\underline{z} = Vektor der stochastischen unbekanntem Parametergruppe ($o(\underline{z}) = k \times 1$)

z_0 = Vektor der Erwartungswerte des Zufallsvektors \underline{z} ($o(z_0) = k \times 1$)
 $\underline{\varepsilon}$ = Zufallsvektor der Beobachtungsfehler ($o(\underline{\varepsilon}) = n \times 1$)
 C_{zz} = Kovarianzmatrix des Zufallsvektors \underline{z} ($o(C_{zz}) = k \times k$, $r(C_{zz}) = k$),
 $C_{\varepsilon\varepsilon}$ = Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $\underline{\varepsilon}$ ($o(C_{\varepsilon\varepsilon}) = n \times n$, $r(C_{\varepsilon\varepsilon}) = n$)
 Korrelationen zwischen den Zufallsvektoren $\underline{\varepsilon}$ und \underline{z} werden nicht angenommen ($C_{z\varepsilon} = 0$).

Das Modell C läßt sich wie das erweiterte univariate GM-Modell in die Form des Modells A überführen, indem man den Zufallsvektor \underline{z} in den festen Anteil (Erwartungswert) und den zufälligen Anteil aufgliedert:

$$\underline{z} = z_0 + \underline{t} \quad \text{mit} \quad E(\underline{t}) = 0 \quad \text{und} \quad D(\underline{t}) = C_{zz} \quad .$$

Faßt man noch den Funktionalteil und den stochastischen Teil des Modells zusammen, so ergibt sich mit $\underline{l} = Gk + \underline{\gamma}$ das Modell

$$\underline{l} \sim M(Gk, CC_{zz}C^T + C_{\varepsilon\varepsilon}) \quad (2.1.3-1)$$

mit $G = [A \ C]$, $k^T = [x^T \ z_0^T]$ und $\underline{\gamma} = C\underline{t} + \underline{\varepsilon}$ (vgl. Grafarend (1978b), S. 45).

Das gemischte Modell findet in der Geodäsie und der Photogrammetrie unter den Begriffen "Prädiktion" und "Filterung" seine Anwendung, wobei der funktionale Teil $Ax + Cz_0$ als Trend und der stochastische Teil mit Signal $C\underline{t}$ und Rauschen $\underline{\varepsilon}$ bezeichnet wird. Der direkte Bezug des gemischten Modells zur Kollokation ist in Schwintzer (1984) hergestellt. Entscheidend für die Anwendung, gleichgültig, ob mit Hilfe der Prädiktion zwischen Stützwerten interpoliert, von Stützwerten aus extrapoliert oder ob die Stützwerte selbst gefiltert werden, ist die Kenntnis der Kovarianzmatrix C_{zz} , d.h. die stochastischen Eigenschaften der zusätzlichen Parameter. Beispiele für die Anwendung dieses Modelltyps sind die Interpolation nach kleinsten Quadraten bei digitalen Geländemodellen (Kraus (1971)), die Bestimmung der Verzeichnungskorrektur in Meßbildern (Kraus und Stark (1973)) oder das umfassende Modell der integrierten Geodäsie, bei dem jede geodätische Beobachtung als Funktion von Punktkoordinaten (fest) und des Schwerepotentials (stochastisch) ausgedrückt wird (Hein (1983)).

In der Aerotriangulation werden für die zusätzlichen Parameter im allgemeinen aus numerischen Gründen fiktive zusätzliche Beobachtungsgruppen mit zugehöriger Kovarianzmatrix eingeführt (vgl. Ebner (1977)). Dies entspricht der Struktur des GM-Modells, läßt sich aber in das Gauß-Helmert-Modell (Ebner (1973)) und mit $E(\underline{z}) = 0$ in das gemischte Modell überführen (vgl. Abschnitt 2.1.4).

Da in der Anwendung häufig keine oder nur geringe statistische Informationen über die stochastischen Parameter vorliegen, geht man oftmals dazu über, die benötigte Kovarianzmatrix C_{zz} aus den Beobachtungen zu schätzen (Koch (1980), S. 227) oder durch Kovarianzfunktionen zu approximieren (vgl. Abschnitt 3.1).

b) Schätzung

Das Schätzverfahren der unbekanntesten festen Parameter ist identisch mit dem der Modelle A und B, denn das Modell C ist, wie in Gleichung (2.1.3-1) gezeigt, in die Form des GM-Modells überführbar. Da der Erwartungswert z_0 des Zufallsvektors \underline{z} in der Regel nicht bekannt ist, muß er als unbekannter fester Parameter im Funktionalteil mitgeschätzt werden:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{z}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T C_{11}^{-1} A & A^T C_{11}^{-1} C \\ C^T C_{11}^{-1} A & C^T C_{11}^{-1} C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^T C_{11}^{-1} \underline{1} \\ C^T C_{11}^{-1} \underline{1} \end{bmatrix} \quad (2.1.3-2)$$

mit $C_{11} = CC_{zz}C^T + C_{\epsilon\epsilon}$. Bezüglich der Dispersion der unbekannt Parameter x und z_o siehe Gl. (2.1.2-2).

Die BLU-Schätzung für die stochastischen Unbekannten \underline{t} mit $E(\underline{t}) = 0$ erhält man (Grafarend (1978a), S. 272) mit

$$\hat{\underline{t}} = C_{t1} C_{11}^{-1} (\underline{1} - A\hat{x} - C\hat{z}_o), \quad (2.1.3-3)$$

wobei $C_{t1} = E((\underline{t} - E(\underline{t}))(\underline{1} - E(\underline{1})))^T = C_{zz}C^T$ ist. Die Dispersion $D(\hat{\underline{t}})$ ergibt sich durch Einsetzen der Schätzungen \hat{x} und \hat{z}_o in Gleichung (2.1.3-3) nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz zu

$$D(\hat{\underline{t}}) = C_{t1} C_{11}^{-1} C_{t1}^T - C_{t1} C_{11}^{-1} G (G^T C_{11}^{-1} G)^{-1} G^T C_{11}^{-1} C_{t1}^T \quad (2.1.3-4)$$

mit $G = [A \ C]$. Die Matrix $D(\hat{\underline{t}})$ ist singulär mit dem Rangdefekt $n-(u+k)$. Moritz (1973) gibt zur Beurteilung des geschätzten Signals die Dispersion der Differenz zwischen "wahrem" Signal und geschätztem Signal an.

Die Schätzung des Fehlervektors $\underline{\epsilon}$ ergibt

$$\hat{\underline{\epsilon}} = \underline{1} - A\hat{x} - C\hat{z}_o - C\hat{\underline{t}} = C_{\epsilon\epsilon} (CC_{zz}C^T)^{-1} C\hat{\underline{t}} \quad (2.1.3-5)$$

und dessen Dispersion

$$\begin{aligned} D(\hat{\underline{\epsilon}}) &= D(\underline{1}) - D(\hat{\underline{1}}) \\ &= C_{11} - [A \ C \ C] \begin{bmatrix} C_{\hat{x}\hat{x}} & C_{\hat{x}\hat{z}_o} & C_{\hat{x}\hat{\underline{t}}} \\ C_{\hat{z}_o\hat{x}} & C_{\hat{z}_o\hat{z}_o} & C_{\hat{z}_o\hat{\underline{t}}} \\ C_{\hat{\underline{t}}\hat{x}} & C_{\hat{\underline{t}}\hat{z}_o} & C_{\hat{\underline{t}}\hat{\underline{t}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T \\ C^T \\ C^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1.3-6)$$

mit $C_{\hat{x}\hat{\underline{t}}} = C_{\hat{z}_o\hat{\underline{t}}} = 0$, wobei $\hat{\underline{1}}$ in der Kollokation als gefilterte Beobachtung bezeichnet wird. Die Schätzung der festen Parameter x und z_o ist orthogonal zur Schätzung der stochastischen Parameter \underline{t} , was sich aus der Orthogonalitätsbeziehung zu den geschätzten Beobachtungsfehlern $\hat{\underline{\epsilon}}$ ergibt.

Die geschätzte Varianz der Gewichtseinheit lautet:

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{(\underline{1} - A\hat{x} - C\hat{z}_o)^T Q_{11}^{-1} (\underline{1} - A\hat{x} - C\hat{z}_o)}{n - u - k} \quad (2.1.3-7)$$

c) Modelldiskussion

(1) Die Erweiterung des stochastischen Teils des mathematischen Modells bietet nun die Grundlage, um Fehler in diesem Teil diskutieren zu können. Modellfehler können hier wie im Funktionalteil durch Vernachlässigung oder durch unrichtigen Ansatz von stochastischen unbekannt Parameter verursacht werden. Dies hat die gleiche Wirkung wie ein Fehler in der Kovarianzmatrix der Beobachtungen. Denn vernachlässigt man zum Beispiel beim Modell C die stochastischen Unbekannten \underline{t} , so hat dies auf die Erwartungstreue der Schätzung der festen Parameter x und z_o keinen Ein-

fluß, aber die damit fehlerhafte Dispersionsmatrix $D(\underline{l}) = C_{\varepsilon\varepsilon}$ führt zu Veränderungen in der Parameterschätzung.

Den Einfluß einer fehlerhaften Gewichtskoeffizientenmatrix auf die Schätzung $\hat{\underline{x}}$ gibt Förstner (1982b) mit

$$\underline{\nabla x} = (A^T P_{11} A)^{-1} A^T P_{11} \underline{\nabla Q}_{11} P_{11} (I - A(A^T P_{11} A)^{-1} A^T P_{11}) \underline{l} \quad (2.1.3-8)$$

an, wobei $P_{11} = \underline{Q}_{11}^{-1}$ (Gewichtsmatrix der Beobachtungen), $\underline{\nabla Q}_{11}$ der nicht notwendigerweise positiv definite Fehler der Gewichtskoeffizientenmatrix Q_{11} und $(P_{11} \underline{\nabla Q}_{11} P_{11}) = \underline{\nabla P}_{11}$ ist (vgl. Koch (1980), S. 166f). Die Auswirkung unrichtiger Annahmen über Gewichte und Korrelationen der Beobachtungen auf die Genauigkeit der geschätzten Parameter geben bereits Linkwitz (1961), Wolf (1961) und Gotthardt (1962) an.

Rao zeigte 1967 in seinem Satz über LS-Schätzer (Lemma 5a), daß eine Kovarianzmatrix der Beobachtungen mit der Struktur

$$C_{11} = A C_I A^T + U C_{II} U^T + \sigma_o^2 I$$

unter der Bedingung $U^T A = 0$ bei beliebigem C_I , C_{II} und σ_o^2 im GM-Modell $\underline{l} \sim M(Ax, C_{11})$ auf die gleiche LS-Schätzung führt wie im Modell $\underline{l} \sim M(Ax, \sigma_o^2 I)$. Hierbei ist A die Koeffizientenmatrix im GM-Modell und U^T die Koeffizientenmatrix im Modell der Ausgleichung mit bedingten Beobachtungen $U^T(\underline{l} - \underline{\varepsilon}) = u_o$ mit $u_o = \text{const.}$, die unter Einhaltung der o.g. Bedingung ineinander überführbar sind (Koch (1980), S. 201).

Dieser Satz bedeutet, daß ein Fehler in der Kovarianzmatrix der Beobachtungen, der die geometrischen Eigenschaften des Funktionalteils beinhaltet, keinen Einfluß auf die Schätzung der unbekannt Parameter hat. Geometrisch interpretiert haben zum Beispiel vernachlässigte stochastische Parameter keinen Einfluß auf die Schätzung der festen Parameter, wenn sie bereits im Funktionalteil des Modells als Linearkombination entweder der Bedingungsgleichungen zwischen den Beobachtungen oder der festen Parameter enthalten sind.

Damit liefert der Satz von Rao auch die indirekte Erklärung für die heuristischen Ausführungen von Ackermann (1965) und für das empirische Ergebnis von Schilcher (1980) über den Dualismus, d.h. die Austauschbarkeit von stochastischem und funktionalen Teil des mathematischen Modells.

Förstner (1982b) gibt, wie im Abschnitt 2.1.2 bereits für feste Parameter gezeigt (Gl.(2.1.2-7)), ein skalares Maß für den zu erwartenden Einfluß eines Fehlers im stochastischen Modell aufbauend auf Gl. (2.1.3-8) an, wobei er im Gegensatz zu Rao (1967) von einer sehr kleinen Änderung $\underline{\nabla Q}_{11}$ ausgeht:

$$\bar{\delta}^2(\underline{\nabla Q}_{11}) = E(\underline{\nabla x}^T C_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \underline{\nabla x}) = \text{sp}(P_{11} \underline{\nabla Q}_{11} P_{11} Q_{\hat{1}\hat{1}} P_{11} \underline{\nabla Q}_{11} P_{11} Q_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}) \quad (2.1.3-9)$$

mit $Q_{\hat{1}\hat{1}} = A(A^T Q_{11}^{-1} A)^{-1} A^T$ und $Q_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} = Q_{11} - Q_{\hat{1}\hat{1}}$. Er zeigt weiterhin, daß die Größe $\bar{\delta}^2(\underline{\nabla Q}_{11})$ nur unter den folgenden Bedingungen zu Null wird, wobei er den Fehler im stochastischen Modell als einen vernachlässigten Einfluß von systematischen Fehlern $\underline{\nabla Q}_{11} = C C_{zz}^T$ betrachtet:

$$\bar{\delta}(\underline{\nabla Q}_{11}) = 0 \iff \begin{array}{l} 1. \quad A^T C_{11}^{-1} C = 0 \\ 2. \quad U^T C = 0 \end{array} \quad (2.1.3-10)$$

Die Matrix U ist wiederum die Koeffizientenmatrix im Modell der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen. Die Bedingungen stimmen mit den von Rao (1967) allgemein abgeleiteten vollständig überein.

Damit gibt die Beziehung (2.1.3-10) die vollständigen Bedingungen für feste und stochastische zusätzliche Parameter unabhängig von ihrem Wirkungsgrad an, unter denen sie keinen Einfluß auf die Schätzung haben, wenn sie im mathematischen Modell vernachlässigt werden. Erfüllen die Parameter x und z_0 die zweite Bedingung, so ist die Normalgleichungsmatrix $[A \ C]^T C_{11}^{-1} [A \ C]$ für das gemischte Modell singular, da die Matrix C Element des Spalten- oder Rangraumes der Matrix A ist, die Beziehung $A^T U = 0$ gilt und die Matrix $[A \ U]$ vollen Rang hat.

Für empirische Untersuchungen sind die Bedingungen der Gl. (2.1.3-10) von besonderer Bedeutung, wenn man zum Beispiel eine Trennung des Einflusses physikalischer Effekte auf das Ergebnis erreichen möchte.

(2) Die numerische Betrachtung des gemischten Modells zeigt deutlich die Zweiteilung in die Schätzung der festen und der stochastischen Parameter. Für die festen Parameter gelten die gleichen Beziehungen wie bei den Modellen A und B, nur daß der Aufbau der Kovarianzmatrix C_{11} abhängig ist von der geometrischen Struktur der zusätzlichen Parameter z und der Struktur der Matrizen C_{zz} und $C_{\epsilon\epsilon}$. Aber selbst wenn die Parameter z zueinander orthogonal und die Kovarianzmatrizen C_{zz} und $C_{\epsilon\epsilon}$ Diagonalgestalt besitzen, erhält man die Matrix C_{11} dennoch als voll besetzte Matrix. Die Schätzung der stochastischen Parameter erfordert neben der Kenntnis ihrer Kovarianzmatrix C_{zz} auch die Schätzung der festen Parameter.

2.1.4 Das erweiterte gemischte Modell und seine Modifikationen

a) Definition und Anwendung

Das erweiterte gemischte Modell stellt sich als Kombination des erweiterten univariaten GM-Modells (Modell B) und des gemischten Modells (Modell C) dar. Es ergibt sich aus dem Modell A durch Erweiterung des Funktionalteils und des stochastischen Teils, womit sich ein sehr allgemeines mathematisches Modell zur Parameterschätzung formulieren läßt. Die relativ aufwendige Struktur des Modells bedingt in der Anwendung eine Einschränkung auf Spezialfälle. In der Aerotriangulation kann dieses Modell zum Tragen kommen, wenn bei der Bündelblockausgleichung neben den Parametern aus den perspektiven Beziehungen und den stochastischen zusätzlichen Parametern zur Beschreibung von Bilddeformationen noch Parameter aus Hilfsdaten, z.B. systematische Anteile bei APR- oder Stoskopmessungen (Ackermann und Schneider (1983)), bestimmt werden müssen. Ein anderer Anwendungsfall für dieses Modell ist die zusätzliche Bestimmung der Parameter der inneren Orientierung beim Einsatz nicht-metrischer Kameras für Nahbereichsaufnahmen mit analytischer Auswertung (Fraser (1982)).

Das erweiterte gemischte Modell kann mit drei gleichwertigen Formulierungen dargestellt werden, die im Modellraum ineinander überführbar sind und damit auch auf die gleichen Schätzergebnisse führen. Das folgende Modell vom Typ SFF-SFS stellt das eigentliche erweiterte gemischte Modell dar, die beiden anderen Modellformulierungen werden auf dieses zurückgeführt (siehe Teil c) dieses Abschnitts).

Im erweiterten gemischten Modell werden p einzelne stochastische Parametergruppen

$$\underline{z}^{(i)} = z_1 + \underline{t}^{(i)} \quad , \quad i = 1, \dots, p \quad , \quad o(\underline{t}^{(i)}) = m_1 \times 1 \quad , \quad m_1 p = m$$

geschätzt, die um einen gemeinsamen unbekanntem Erwartungswert variieren und den p Gruppen $\underline{1}^{(i)}$ von Beobachtungen zugeordnet sind.

In der ersten Formulierung wird $\underline{z}^{(i)}$ als stochastische Variable mit unbekanntem Mittelwert behandelt. Gruppenweise formuliert stellt sich das Modell wie folgt dar:

Definition II.2-4: Erweitertes gemischtes Modell (Modell D), komponentenweise

$\underline{1}^{(i)} = A^{(i)}x + B^{(i)}y + C^{(i)}\underline{z}^{(i)} + \underline{\varepsilon}^{(i)}$	$x \sim M(x, 0)$
	$y \sim M(y, 0)$
	$\underline{z}^{(i)} \sim M(z_1, C_{zz}^{(i)})$
	$\underline{\varepsilon}^{(i)} \sim M(0, C_{\varepsilon\varepsilon}^{(i)})$
$\underline{1}^{(i)} \sim M(A^{(i)}x + B^{(i)}y + C^{(i)}z_1, C^{(i)}C_{zz}^{(i)}C^{(i)T} + C_{\varepsilon\varepsilon}^{(i)})$	

Es läßt sich in eine kompaktere Form bringen, wenn man die indizierten Größen zusammenfaßt:

$\underline{1} = Ax + By + Cz + \underline{\varepsilon}$	$x \sim M(x, 0)$
	$y \sim M(y, 0)$
	$\begin{bmatrix} \underline{z} \\ \underline{\varepsilon} \end{bmatrix} \sim M \left(\begin{bmatrix} z_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{zz} & 0 \\ 0 & C_{\varepsilon\varepsilon} \end{bmatrix} \right)$
$\underline{1} \sim M(Ax + By + Cz_0, CC_{zz}C^T + C_{\varepsilon\varepsilon})$	

Hierbei bedeutet:

- $\underline{1} = (\underline{1}^{(i)})$ = Zufallsvektor der n Beobachtungen ($o(\underline{1}) = n \times 1$)
 $A = (A^{(i)})$ = Koeffizientenmatrix der ersten festen Parametergruppe ($o(A) = n \times u$, $r(A) = u$)
 $B = (B^{(i)})$ = Koeffizientenmatrix der zweiten festen Parametergruppe ($o(B) = n \times k$, $r(B) = k$)
 $C = \text{diag}(C^{(i)})$ = Koeffizientenmatrix der stochastischen Parametergruppe ($o(C) = n \times m$, $r(C) = m$)
 $C_1 = (C^{(i)})$ = Koeffizientenmatrix der Erwartungswerte der stochastischen Parametergruppe
 $(o(C_1) = n \times m_1$, $r(C_1) = m_1$)
 x = Vektor der ersten festen Parametergruppe ($o(x) = u \times 1$)
 y = Vektor der zweiten festen Parametergruppe ($o(y) = k \times 1$)
 $\underline{z} = (\underline{z}^{(i)})$ = Vektor der stochastischen Parametergruppe ($o(\underline{z}) = m \times 1$)
 $z_0 = 1 \otimes z_1$ = Vektor der Erwartungswerte des Zufallsvektors \underline{z} ($o(z_0) = m \times 1$)
 $\underline{\varepsilon}$ = Zufallsvektor der Beobachtungsfehler ($o(\underline{\varepsilon}) = n \times 1$)
 C_{zz} = Kovarianzmatrix des Zufallsvektors \underline{z} ($o(C_{zz}) = m \times m$, $r(C_{zz}) = m$)
 $C_{\varepsilon\varepsilon}$ = Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $\underline{\varepsilon}$ ($o(C_{\varepsilon\varepsilon}) = n \times n$, $r(C_{\varepsilon\varepsilon}) = n$)

Korrelationen zwischen den Zufallsvektoren $\underline{\varepsilon}$ und \underline{z} werden nicht angenommen ($C_{z\varepsilon} = 0$). Der Zufallsvektor \underline{z} läßt sich so in den festen Anteil z_0 (Erwartungswert) und den stochastischen Anteil \underline{t} mit $E(\underline{t}) = 0$ und $D(\underline{t}) = C_{zz}$ zerlegen.

b) Schätzung

Für die Schätzung im Modell D werden die Koeffizientenmatrizen und die festen Parameter der übersichtlicheren Darstellung wegen zusammengefaßt, wobei der (unbekannte) Erwartungswert $z_0 = 1 \otimes z_1$ des Zufallsvektors \underline{z} im Funktionalteil berücksichtigt werden muß. Damit ergibt sich mit $G = [A \ B \ C_1]$ und $k^T = [x^T \ y^T \ z_1^T]$ die BLU-Schätzung der festen Parameter wie im GM-Modell zu

$$\hat{k} = (G^T C_{11}^{-1} G)^{-1} G^T C_{11}^{-1} \underline{1} \quad (2.1.4-1)$$

und deren Dispersion

$$D(\hat{k}) = (G^T C_{11}^{-1} G)^{-1} \quad (2.1.4-2)$$

Die Schätzung der stochastischen Unbekannten \underline{t} erhält man wie im Abschnitt 2.1.3 mit

$$\hat{t} = C_{t1} C_{11}^{-1} (\underline{1} - G \hat{k}) \quad (2.1.4-3)$$

Die Dispersion $D(\hat{t})$ läßt sich nach Gl. (2.1.3-4) bestimmen. Sie hat den Rangdefekt von $n-(u+k+m)$.

Die Schätzung des Fehlervektors $\underline{\varepsilon}$ ergibt

$$\hat{\varepsilon} = \underline{1} - G \hat{k} - C \hat{t} = C_{\varepsilon\varepsilon} (C C_{zz} C^T)^{-1} C \hat{t} \quad (2.1.4-4)$$

und dessen Dispersion

$$D(\hat{\varepsilon}) = C_{\varepsilon\varepsilon} - [A \ B \ C_1 \ C] \begin{bmatrix} C_{\hat{x}\hat{x}} & C_{\hat{x}\hat{y}} & C_{\hat{x}\hat{z}_1} & 0 \\ & C_{\hat{y}\hat{y}} & C_{\hat{y}\hat{z}_1} & 0 \\ & & C_{\hat{z}_1\hat{z}_1} & 0 \\ \text{sym.} & & & C_{\hat{t}\hat{t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T \\ B^T \\ C_1^T \\ C^T \end{bmatrix} \quad (2.1.4-5)$$

Die geschätzte Varianz der Gewichtseinheit lautet:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(\underline{1} - G \hat{k})^T Q_{11}^{-1} (\underline{1} - G \hat{k})}{n - (u + k + m)} \quad (2.1.4-6)$$

c) Modellmodifikationen

(1) Eine Modifikation des erweiterten gemischten Modells ist das Modell D1 (Typ SFF), welches man durch die Zusammenfassung der stochastischen Komponenten zu

$$\underline{Y} = C \underline{t} + \underline{\varepsilon} \quad \text{und} \quad C_{YY} = C_{\varepsilon\varepsilon} + C C_{zz} C^T \quad (2.1.4-7)$$

erhält (vgl. Gl. (2.1.3-1)). Somit läßt sich das Modell D in ein gleichwertiges erweitertes GM-Modell überführen und kann wie folgt definiert werden:

Definition II.2-5: Modell D1

$\underline{1} = Ax + By + C_1 z_1 + \underline{\gamma}$	$x \sim M(x, 0)$
	$y \sim M(y, 0)$
	$z_1 \sim M(z_1, 0)$
	$\underline{\gamma} \sim M(0, C_{\gamma\gamma})$
$\underline{1} \sim M(Ax + By + C_1 z_1, CC_{zz}C^T + C_{\epsilon\epsilon})$	

Hierbei bedeutet:

$\underline{\gamma}$ = Konsistenzparameter des Modells ($o(\underline{\gamma}) = n \times 1$)

$C_{\gamma\gamma}$ = Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $\underline{\gamma}$ ($o(C_{\gamma\gamma}) = n \times n$, $r(C_{\gamma\gamma}) = n$)

Die übrigen Komponenten sind gleichbedeutend mit denen des Modells D.

Die Schätzung der festen Unbekannten und deren Dispersion ist identisch mit Gl. (2.1.4-1) und Gl. (2.1.4-2) von Modell D. Alle übrigen Schätzungsergebnisse sind ebenfalls auf die Ergebnisse des Modells D zurückführbar.

(2) Eine weitere Modifikation des Modells D, die ebenfalls auf den SFF-Typ des GM-Modells führt, erhält man, indem für die stochastischen Parameter \underline{t} zusätzliche Beobachtungen eingeführt werden. Als Beobachtung für diese Parameter nimmt man deren Erwartungswerte $E(\underline{t}) = 0$ an und behandelt diese wie die eigentlichen Beobachtungen $\underline{1}$ als stochastische Größen. Die unbekannte Parametergruppe t wird nun als feste Größe behandelt, da ihre stochastischen Eigenschaften über die zusätzlichen Beobachtungen eingeführt werden. Diese Modellvariante kann wie folgt definiert werden:

Definition II.2-6: Modell D2

$\underline{1} = Ax + By + C_1 z_1 + Ct + \underline{\epsilon}$	$x \sim M(x, 0)$
	$y \sim M(y, 0)$
	$z_1 \sim M(z_1, 0)$
	$t \sim M(t, 0)$
$\underline{0} =$	$It + \underline{\epsilon}_t$
$\begin{bmatrix} \underline{\epsilon} \\ \underline{\epsilon}_t \end{bmatrix} \sim M \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{\epsilon\epsilon} & 0 \\ 0 & C_{zz} \end{bmatrix} \right)$	
$\begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \sim M \left(\begin{bmatrix} Ax + By + C_1 z_1 + Ct \\ It \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{\epsilon\epsilon} & 0 \\ 0 & C_{zz} \end{bmatrix} \right)$	

Hierbei bedeutet abweichend von Modell D:

$\underline{0}$ = Zufallsvektor der zusätzlichen Beobachtungen, alle Elemente gleich Null ($o(\underline{0}) = m \times 1$)

t = Vektor der festen Parametergruppe t ($o(t) = m \times 1$)

$\underline{\epsilon}_t$ = Konsistenzparameter der zusätzlichen Beobachtungsgleichungen ($o(\underline{\epsilon}_t) = m \times 1$)

Diese Modellvorstellung ist sehr plausibel, denn stochastische Größen, deren statistische Eigenschaften bekannt sind, besitzen die gleichen charakteristischen Merkmale wie Beobachtungen und lassen sich somit auch als solche behandeln.

Das Modell D2 läßt sich im Modellraum in das erweiterte gemischte Modell (Modell D) überführen, indem die Gleichungen der zusätzlichen Beobachtungen in die Gleichungen der Beobachtungen $\underline{1}$ eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}\underline{1} &= Ax + By + C_1 z_1 + C(\underline{0} - \underline{\varepsilon}_t) + \underline{\varepsilon} \\ &= Ax + By + C_1 z_1 - C\underline{\varepsilon}_t + \underline{\varepsilon}\end{aligned}$$

mit $\underline{t} = -\underline{\varepsilon}_t$ und $\underline{z} = z_o + \underline{t}$ ergibt sich das Modell D:

$$\underline{1} = Ax + By + C\underline{z} + \underline{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad D(\underline{1}) = C_{\varepsilon\varepsilon} + CC_{zz}C^T.$$

Die Schätzung im Modell D2 führt auf identische Ergebnisse wie im Modell D. Mit $G = \begin{bmatrix} A & B & C_1 \end{bmatrix}$ und $k^T = \begin{bmatrix} x^T & y^T & z_1^T \end{bmatrix}$ läßt sich das Modell D2 wie folgt schreiben:

$$\begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & C \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{\varepsilon}_t \end{bmatrix}, \quad D \begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\varepsilon\varepsilon} & 0 \\ 0 & C_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.1.4-8)$$

Die Schätzung ergibt sich wie im GM-Modell zu

$$\begin{bmatrix} \hat{k} \\ \hat{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^T C_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} G & G^T C_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} C \\ C^T C_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} G & C^T C_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} C + C_{zz}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G^T & 0 \\ C^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} & 0 \\ 0 & C_{zz}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (2.1.4-9)$$

und man erhält

$$\begin{aligned}\hat{k} &= (G^T(C_{\varepsilon\varepsilon} + CC_{zz}C^T)^{-1}G)^{-1}G^T(C_{\varepsilon\varepsilon} + CC_{zz}C^T)^{-1}\underline{1} \\ \hat{t} &= C_{zz}C^T(C_{\varepsilon\varepsilon} + CC_{zz}C^T)^{-1}(\underline{1} - G\hat{k})\end{aligned} \quad (2.1.4-10)$$

(vgl. Gl. (2.1.4-1) und Gl. (2.1.4-3)). Die Identität der Schätzungen im Modell D und Modell D2 wurde von Schwarz (1974 und 1976) nach einem Vorgang von Rao (1965) gezeigt.

(3) Im folgenden soll ergänzend eine Erweiterung des Modells D2 behandelt werden, die aber nicht mehr auf die Form des Modells D zurückgeführt werden kann. Führt man an Stelle des Nullvektors für die zusätzlichen Beobachtungen fiktive oder auch wirkliche Beobachtungswerte \underline{s} mit $o(\underline{s}) = m \times 1$ ein, so läßt sich das Modell D2 in erweiterter Form schreiben:

Definition II.2-7: Modell D2 (erweiterte Form)

$\underline{l} = Ax + By + C_1 z_1 + Ct + \underline{\varepsilon}$	$x \sim M(x, 0)$
$\underline{s} = \quad \quad \quad It + \underline{\varepsilon}_t$	$y \sim M(y, 0)$
	$z_1 \sim M(z_1, 0)$
	$t \sim M(t, 0)$
	$\begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{\varepsilon}_t \end{bmatrix} \sim M \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{\varepsilon\varepsilon} & 0 \\ 0 & C_{zz} \end{bmatrix} \right)$
$\begin{bmatrix} \underline{l} \\ \underline{s} \end{bmatrix} \sim M \left(\begin{bmatrix} Ax + By + C_1 z_1 + Ct \\ It \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{\varepsilon\varepsilon} & 0 \\ 0 & C_{zz} \end{bmatrix} \right)$	

Die Komponenten sind gleichbedeutend mit denen der Modelle D und D2.

Dieses Modell ist identisch mit dem Gauß-Helmert-Modell, was durch Einsetzen der beiden Beobachtungsgleichungen gezeigt werden kann (vgl. Ebner (1973)):

$$\begin{bmatrix} A & B & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{l} - \underline{\varepsilon} \\ \underline{s} - \underline{\varepsilon}_t \end{bmatrix} = 0, \quad D \begin{bmatrix} \underline{l} \\ \underline{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\varepsilon\varepsilon} & 0 \\ 0 & C_{zz} \end{bmatrix}.$$

Es kann zum Beispiel beim Vorliegen von Beobachtungswerten aus Kalibrierungen zur Anwendung gelangen, oder wenn bei einer geodätischen Netzausgleichung die Genauigkeitseigenschaften der Festpunkte mit berücksichtigt werden sollen (v. Mierlo (1981)). Ausführlich behandelt wurde das Modell in Schmid, H. H. und Schmid, E. (1965), Brown et al. (1964), Ebner (1973) und Förstner (1980). Eine Gegenüberstellung mit der Kollokation zeigte Wolf (1977). Die Anwendung der zusätzlichen Beobachtungen als fingierte oder Pseudobeobachtungen zur Beseitigung von Rangdefekten in singulären Systemen ist in Krüger (1980) beschrieben.

Beim Modell D2 in der erweiterten Form wird direkt das Signal beobachtet, während beim gemischten Modell das Signal aus den Beobachtungen \underline{l} geschätzt wird. Eine Überführung in das gemischte Modell ist nur möglich, wenn der Beobachtungsvektor \underline{s} mit Null angenommen wird.

d) Modelldiskussion

Da das erweiterte gemischte Modell (Modell D) in die bereits vorgestellten Modelle C bzw. A und B eindeutig rückführbar ist, gelten auch die in den vorangegangenen Abschnitten aufgeführten Bemerkungen über Modellfehler und numerische Betrachtungen. Neu hinzugekommen ist der Aspekt, daß man für die stochastischen Parameter zusätzliche Beobachtungen einführen kann (Modell D2). Das hat zwar auf das Ergebnis der Schätzung im gemischten Modell keinen Einfluß, gestattet aber eine einfachere Handhabung und übersichtlichere Darstellung, da es die Struktur des einfachen GM-Modells (Modell A bzw. B) annimmt. Auch numerisch bzw. rechentechnisch bietet die Schätzung im Modell D2 eindeutige Vorteile. Die Lösung des Gleichungssystems (2.1.4-9) ist, vor allem im Fall, daß $C_{\varepsilon\varepsilon}$ und C_{zz} Diagonalmatrizen darstellen, rechentechnisch einfacher als die Lösung mit den Gleichungen (2.1.4-1) und (2.1.4-3). Denn die Matrix $(C^T C_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} C + C_{zz}^{-1})$ hat im allgemeinen eine deutlich kleinere Dimension als die Matrix $(C_{\varepsilon\varepsilon} + C C_{zz}^{-1} C^T)$, d.h. die Anzahl der zusätzlichen Parameter ist geringer

als die Anzahl der Beobachtungen, da sonst die Schätzung an Präzision verliert (zu kleine Stichprobe) und im Extremfall das Gleichungssystem numerisch instabil bzw. singular wird.

Das erweiterte gemischte Modell stellt gewissermaßen einen Abschluß bei den Modellen mit bekannten zweiten Momenten dar. Es vereinigt die Modellerweiterungen im funktionalen und stochastischen Teil des Modells. In den folgenden Ausführungen dieser Arbeit wird dieses Modell, speziell in der Form D2 und dessen Erweiterung (Def. II.2-6 und Def. II.2-7), als Grundbaustein für ein neues Modell in der Aerotriangulation Verwendung finden.

Alle vorangegangenen Modelle setzten die vollständige Information über die Dispersion voraus. Da aber gerade hierüber in der Regel nur selten ausreichende Kenntnisse vorliegen, soll der folgende Abschnitt 2.2 Modelle aufzeigen, in denen neben der Schätzung der Erwartungswerte auch die Dispersionen geschätzt werden können. Diese Modelle sind u.a. geeignet für empirische Untersuchungen über das stochastische Verhalten von Parametern und deren Strukturen, bevor man sie in künftigen Modellen durch einfache Funktionen (z.B. Kovarianzfunktionen) modelliert.

2.2 Modelle mit unbekannter Dispersion

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Modelle ermöglichen es, neben den unbekannt Parametern des Funktionalteils (Schätzung der 1. Momente) auch Parameter der 2. Momente des stochastischen Teils zu bestimmen. Eine Modellerweiterung findet somit dahingehend statt, daß die folgenden Modelle im Gegensatz zu den Modellen der vorangegangenen Abschnitte nicht nur auf die Schätzung der Erwartungswerte beschränkt sind. Dabei nimmt das multivariate Gauß-Markoff-Modell eine Zwischenstellung ein, denn es kann durchaus auch als Modell mit bekannten, bzw. vorgegebenen Dispersionen definiert werden. Da es sich in seiner einfachsten Form auch als univariates GM-Modell, allerdings mit einer speziellen Dispersionsstruktur, definieren läßt, soll es in diesem Abschnitt als Vorstufe zu den Varianz-Kovarianzkomponenten-Modellen eingeführt werden. Kompliziertere Strukturen dieses Modells, wie das unvollständige multivariate GM-Modell mit unterschiedlichen Beobachtungsplänen zwischen den Meßepochen (vgl. Koch (1980), S. 226f und Koch (1983)) oder das multivariate GM-Modell mit Parameteransätzen über mehrere Epochen (vgl. Buck (1977)), sollen hier nicht diskutiert werden.

Die im Abschnitt 2.1 geführte Diskussion der Modellfehler ist auf die in diesem Abschnitt besprochenen Modelle vollständig übertragbar (vgl. Lindner (1983)).

2.2.1 Das multivariate Gauß-Markoff-Modell

a) Definition und Anwendung

Das multivariate Gauß-Markoff-Modell setzt sich aus mehreren univariaten GM-Modellen mit gleichem Design 1. und 2. Ordnung zusammen, d.h. aus sich in zeitlichen Abständen (Epochen) wiederholenden Beobachtungsabläufen mit gleicher geometrischer Anordnung und gleicher Gewichtskoeffizientenmatrix der Beobachtungen pro Epoche. Die Parameter der verschiedenen Epochen sind nicht durch Beobachtungen miteinander verknüpft. Sind die Beobachtungen zusätzlich zu ihren Fehler-eigenschaften pro Epoche auch zwischen den Epochen korreliert, z.B. durch einseitige Refraktions-einflüsse wie sie bei Beobachtungen an Staumauern auftreten können, so wird die Autokorrelation zwischen zwei beliebigen Epochen als konstant für alle Beobachtungen pro Epoche angenommen. Der

wesentliche Zweck des multivariaten Ansatzes ist neben der simultanen Ausgleichung aller Epochen die Möglichkeit der Schätzung im stochastischen Teil des Modells, d.h. der Kovarianzmatrizen der Beobachtungen zwischen den Epochen oder in der einzelnen Epoche, was eine Überprüfung von zeitlichen Veränderungen erlaubt.

Zur Anwendung kommt dieses Modell überwiegend bei der Auswertung und Analyse von Deformationsmessungen mit Hilfe von Lage- und Höhennetzen (Niemeier (1978), Lindner (1983)). Im Bereich der Photogrammetrie verwendete Buck (1977) das multivariate Modell, allerdings mit funktionalen Beziehungen zwischen den Epochen, für photogrammetrische Deformationsmessungen. Zur Schätzung von Kovarianzmatrizen aus aufeinanderfolgenden Reseauaufnahmen setzten Förstner und Schroth (1982) ebenfalls dieses Modell an. Auch die Schätzung der Kovarianzmatrizen im photogrammetrischen Einzelmodell bzw. Einzelbild von Stark (1973) und Schilcher (1980) muß zur multivariaten Analyse gerechnet werden, obwohl sie nicht unter diesem Gesichtspunkt angewendet wurde.

Da sich das multivariate GM-Modell aus mehreren univariaten GM-Modellen für verschiedene Epochen zusammensetzt, gibt die folgende Definition das univariate GM-Modell für die i-te Epoche an (vgl. Modell A):

Definition II.2-8:

$\underline{l}^{(i)} = AX^{(i)} + \underline{\epsilon}^{(i)}$	$x^{(i)} \sim M(x^{(i)}, 0)$
	$\underline{\epsilon}^{(i)} \sim M(0, C_{\epsilon\epsilon}^{(i)})$

Faßt man mehrere univariate Modelle mit identischen Koeffizientenmatrizen und keinen gemeinsamen Parametern zwischen den Epochen zusammen, so ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \underline{l}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{l}^{(i)} \\ \vdots \\ \underline{l}^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & A \\ & 0 & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & & & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(i)} \\ \vdots \\ x^{(p)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\epsilon}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{\epsilon}^{(i)} \\ \vdots \\ \underline{\epsilon}^{(p)} \end{bmatrix} \quad (2.2.1-1)$$

und man kann das Modell wie folgt definieren:

Definition II.2-9:

$\underline{L} = AX + \underline{E}$	$X \sim M(X, 0)$
	$\underline{E} \sim M(0, C_{EE})$
$\underline{L} \sim M(AX, C_{EE})$	

mit

$$\begin{aligned} \underline{L} &= [\underline{l}^{(1)}, \dots, \underline{l}^{(i)}, \dots, \underline{l}^{(p)}] & , \quad o(\underline{L}) = n \times p \\ \underline{E} &= [\underline{\epsilon}^{(1)}, \dots, \underline{\epsilon}^{(i)}, \dots, \underline{\epsilon}^{(p)}] & , \quad o(\underline{E}) = n \times p \\ X &= [x^{(1)}, \dots, x^{(i)}, \dots, x^{(p)}] & , \quad o(X) = u \times p \end{aligned}$$

(n = Anzahl Beobachtungen pro Epoche, p = Anzahl Epochen, u = Anzahl Unbekannte pro Epoche, $o(A) = n \times u$).

Mit Benutzung des "vec" Operators (vgl. Henderson und Searle (1979)) und des Kroneckerprodukts (vgl. Rao (1973), S. 29) ergibt sich aus Definition (II.2-9):

$$\text{vec}\underline{L} = (I_p \otimes A)\text{vec}X + \text{vec}\underline{E} \quad (2.2.1-2)$$

Im multivariaten GM-Modell werden die stochastischen Eigenschaften der Beobachtungen innerhalb einer Epoche für jede Epoche als identisch angenommen:

$$V(\underline{1}^{(1)}) = V(\underline{1}^{(2)}) = \dots = V(\underline{1}^{(p)}) = C_{11} \quad (2.2.1-3)$$

Damit ergibt sich die spezielle Dispersionsstruktur dieses Modells:

$$D(\text{vec}\underline{L}) = \begin{bmatrix} C_{11} & r_{12}C_{11} & \cdot & \cdot & r_{1p}C_{11} \\ & C_{11} & \cdot & \cdot & r_{2p}C_{11} \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ \text{sym.} & & & & C_{11} \end{bmatrix} = R \otimes C_{11} = \Sigma \otimes Q_{11} \quad (2.2.1-4)$$

Mit den o.g. Einschränkungen im funktionalen und stochastischen Teil kann das vollständige multivariate GM-Modell wie folgt in der Form des univariaten GM-Modells definiert werden:

Definition II.2-10: Vollständiges multivariates Gauß-Markoff-Modell (Modell E)

$\text{vec}\underline{L} = (I_p \otimes A)\text{vec}X + \text{vec}\underline{E}$	$\text{vec}X \sim M(\text{vec}X, 0)$
	$\text{vec}\underline{E} \sim M(0, R \otimes C_{11})$
$\text{vec}\underline{L} \sim M((I_p \otimes A)\text{vec}X, R \otimes C_{11})$	

Hierbei bedeutet:

$\text{vec}\underline{L}$ = Zufallsvektor aller Beobachtungen der p Epochen ($o(\text{vec}\underline{L}) = np \times 1$)

A = Koeffizientenmatrix der unbekannt Parameter einer Epoche ($o(A) = n \times u$, $r(A) = u$),
für alle Epochen gleich

$\text{vec}X$ = Vektor der unbekannt Parameter ($o(\text{vec}X) = up \times 1$)

$\text{vec}\underline{E}$ = Zufallsvektor der Beobachtungsfehler ($o(\text{vec}\underline{E}) = np \times 1$)

R = bekannte oder unbekannt Korrelationsmatrix zwischen den Epochen ($o(R) = p \times p$, $r(R) = p$)

C_{11} = bekannte oder unbekannt Kovarianzmatrix der Beobachtungen einer Epoche ($o(C_{11}) = n \times n$,
 $r(C_{11}) = n$), für alle Epochen gleich

b) Schätzung und Diskussion

(1) Die Schätzung im Modell E ist völlig analog zum univariaten GM-Modell. Für die Schätzung der unbekannt Parameter erhält man:

$$\begin{aligned}\text{vec}\hat{\underline{X}} &= ((I_p \otimes A)^T (R \otimes C_{11})^{-1} (I_p \otimes A))^{-1} (I_p \otimes A)^T (R \otimes C_{11})^{-1} \text{vec}\underline{L} \\ &= (I_p \otimes (A^T C_{11}^{-1} A)^{-1} A^T C_{11}^{-1}) \text{vec}\underline{L}\end{aligned}\quad (2.2.1-5)$$

oder in Matrizen dargestellt

$$\hat{\underline{X}} = (A^T C_{11}^{-1} A)^{-1} A^T C_{11}^{-1} \underline{L} \quad (2.2.1-6)$$

Die Dispersion der geschätzten Parameter lautet

$$D(\text{vec}\hat{\underline{X}}) = R \otimes (A^T C_{11}^{-1} A)^{-1} \quad (2.2.1-7)$$

Die Schätzung der Beobachtungsfehler \underline{E} ergibt

$$\begin{aligned}\text{vec}\hat{\underline{E}} &= \text{vec}\underline{L} - \text{vec}\hat{\underline{X}} = \text{vec}\underline{L} - (I_p \otimes A)(I_p \otimes (A^T C_{11}^{-1} A)^{-1} A^T C_{11}^{-1}) \text{vec}\underline{L} \\ &= (I_p \otimes (I_n - A(A^T C_{11}^{-1} A)^{-1} A^T C_{11}^{-1})) \text{vec}\underline{L} = C_{\hat{\underline{E}}\hat{\underline{E}}} (R^{-1} \otimes C_{11}^{-1}) \text{vec}\underline{L}\end{aligned}\quad (2.2.1-8)$$

mit

$$\begin{aligned}C_{\hat{\underline{E}}\hat{\underline{E}}} &= (R \otimes C_{11}) - (I_p \otimes A)(R \otimes (A^T C_{11}^{-1} A)^{-1})(I_p \otimes A)^T \\ &= R \otimes (C_{11} - A(A^T C_{11}^{-1} A)^{-1} A^T)\end{aligned}\quad (2.2.1-9)$$

Ein wesentlicher Vorteil des multivariaten GM-Modells besteht in der Unabhängigkeit der Schätzung der unbekannt Parameter von den Korrelationen der Beobachtungen zwischen den Epochen (vgl. Gl. (2.2.1-6)).

(2) Das multivariate GM-Modell bietet darüber hinaus die Möglichkeit, die Kovarianzmatrix Σ (oder R) zwischen den Epochen bzw. die Kovarianzmatrix C_{11} (oder Q_{11}) der einzelnen Epochen zu schätzen. Normalverteilte Beobachtungen vorausgesetzt, erhält man die beste erwartungstreue Schätzung der Kovarianzmatrix Σ nach Koch (1980, S. 219) aus der quadratischen und bilinearen Form der Verbesserungen $\underline{V} = -\hat{\underline{E}}$ mit

$$\hat{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{n-u} (\underline{A}\hat{\underline{X}} - \underline{L})^T Q_{11}^{-1} (\underline{A}\hat{\underline{X}} - \underline{L}) \quad (2.2.1-10)$$

Diese Schätzung ist mit Wahrscheinlichkeit eins positiv definit (vgl. Koch (1980), S. 239), vorausgesetzt die Anzahl der Epochen ist kleiner als die Anzahl der Beobachtungen je Epoche ($p \leq n$). Die Gewichtskoeffizientenmatrix Q_{11} muß bekannt sein.

Verfahren zur Schätzung der Kovarianzmatrix C_{11} sind in Förstner und Schroth (1982) und Koch (1983) angegeben. Koch bestimmt die geschätzte Kovarianzmatrix mit Hilfe der Varianz-Kovarianzkomponenten-Schätzung, wobei er die Gewichtskoeffizientenmatrix Q_{11} zerlegt in:

$$Q_{11} = q_{11} e_1 e_1^T + q_{12} (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T) + \dots + q_{nn} e_n e_n^T,$$

mit $e_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$ und $n \leq p$.

Damit ergibt sich die Dispersion der Beobachtungen zu

$$\begin{aligned} D(\text{vec}\underline{L}) &= \Sigma \otimes Q_{11} = q_{11}\Sigma \otimes e_1 e_1^T + q_{12}\Sigma \otimes (e_1 e_2^T + e_2 e_1^T) + \dots + q_{nn}\Sigma \otimes e_n e_n^T \\ &= q_{11}V_1 + q_{12}V_2 + \dots + q_{nn}V_k \end{aligned} \quad (2.2.1-11)$$

mit $k = n(n+1)/2$ und $V_1 = \Sigma \otimes e_i e_j^T$ für $i=j$ und $V_1 = \Sigma \otimes (e_i e_j^T + e_j e_i^T)$ für $i \neq j$.

Die Elemente q_{ij} lassen sich mit Hilfe der Varianz-Kovarianzkomponenten-Schätzung bestimmen, die im Abschnitt 2.2.2 dieses Kapitels diskutiert wird. Nach dem Verfahren von Koch ist die positive Definitheit der geschätzten Matrix \hat{Q}_{11} nicht garantiert.

Im Gegensatz hierzu liefert das Schätzverfahren nach Förstner und Schroth, welches für eine spezielle Anwendung entwickelt wurde, von der Konstruktion her in jedem Fall eine positiv definite Kovarianzmatrix \hat{C}_{11} . Auf dieses Verfahren wird im Kapitel IV ausführlicher eingegangen werden.

Beide Verfahren erlauben keine gleichzeitige positiv definite Schätzung aller Elemente der Kovarianzmatrizen Σ und C_{11} , da die Matrix der Verbesserungen i.a. eine Rechteckmatrix ist, deren Rang von der Anzahl der Epochen p , bzw. der Anzahl der Beobachtungen n je Epoche bestimmt wird, und der somit für den Fall $n \neq p$ kleiner dem Rang von Σ oder C_{11} ist, d.h. $\hat{\Sigma}$ oder \hat{C}_{11} wäre singular. Für den Fall $n=p$ liegt keine Redundanz mehr vor und die Schätzung ist nicht mehr zuverlässig. Eine simultane Schätzung ist nur möglich, wenn nicht alle Elemente der Kovarianzmatrizen geschätzt werden müssen und Strukturinformationen vorliegen bzw. plausibel angenommen werden können. Solche Annahmen könnten zum Beispiel bei der Matrix R Töplitzstrukturen mit, durch den zeitlichen Abstand zwischen den Epochen bedingt, abnehmenden Korrelationsfunktionen, oder bei der Matrix C_{11} entfernungsabhängige Bildungsgesetze sein. Unter diesen Voraussetzungen lassen sich beide Matrizen nur iterativ schätzen, da die Schätzung für die Matrix Σ auf der Matrix Q_{11}^{-1} aufbaut und umgekehrt.

(3) Das multivariate GM-Modell kann gleich dem univariaten GM-Modell sowohl im funktionalen als auch im stochastischen Teil im Modellraum erweitert werden, was hier nicht weiter vertieft werden soll. Eine spezielle Erweiterung für eine bestimmte Aufgabenstellung wird im Kapitel IV besprochen.

2.2.2 Das Varianz-Kovarianzkomponenten-Modell

a) Definition

Bei der Beschreibung des multivariaten GM-Modells wurde bereits angedeutet, daß unbekannte Parameter nicht nur im Funktionalteil des mathematischen Modells sondern auch im stochastischen Teil eingeführt werden können. Die besprochenen Modelle A bis D setzen alle die stochastischen Eigenschaften der Beobachtungen als bekannt voraus. Aber gerade über diesen Teil des mathematischen Modells liegen im allgemeinen die geringsten Informationen vor, weshalb bereits von Helmert (1907) ein Verfahren zur Bestimmung unbekannter Parameter des stochastischen Modells vorgeschlagen wurde. Unter dem Begriff der Varianz-Kovarianzkomponenten-Schätzung wurde die Theorie der Bestimmung und Analyse des stochastischen Modells in der mathematischen Statistik und der Geodäsie entwickelt und ausführlich diskutiert. Stellvertretend für eine Vielzahl von Publikationen auf diesem Gebiet sollen die Arbeiten von Harville (1977), Grafarend und d'Hone (1978), Searle

(1978) und Persson (1980) genannt werden, da sie einen Überblick über diesen Themenbereich geben. In diesem Abschnitt sollen vor allem die Bezüge zu den vorangegangenen Modellen aufgezeigt werden.

Das Varianz-Kovarianzkomponenten-Modell (VCC = variance covariance components) läßt sich als eine Erweiterung des univariaten GM-Modells im stochastischen Teil definieren, indem ähnlich wie im Funktionalteil die Dispersion des Beobachtungsfehlervektors $\underline{\varepsilon}$ in additive Anteile zerlegt wird.

Definition II.2-11: Varianz-Kovarianzkomponenten-Modell (Modell F)

$\underline{l} = w + \underline{\varepsilon}$	$w \sim M\left(\sum_{i=1}^u x_i a_i, 0\right)$
	$\underline{\varepsilon} \sim M\left(0, \sum_{j=1}^k \tau_j V_j\right)$
$\underline{l} \sim M\left(\sum_{i=1}^u x_i a_i, \sum_{j=1}^k \tau_j V_j\right)$	

Hierbei bedeutet:

\underline{l} = Zufallsvektor der Beobachtungen ($o(\underline{l}) = n \times 1$)

w = Vektor der funktionalen Beziehungen ($o(w) = n \times 1$)

a_i = i-ter Spaltenvektor der Koeffizientenmatrix A ($o(a_i) = n \times 1$)

x_i = i-tes Element des unbekanntem Parametervektors x ($o(x) = u \times 1$)

$\underline{\varepsilon}$ = Zufallsvektor der Beobachtungsfehler ($o(\underline{\varepsilon}) = n \times 1$)

τ_j = unbekanntem Varianz-Kovarianzkomponente j

V_j = bekannte Strukturmatrix der Kovarianzmatrix C_{11} ($o(V_j) = n \times n$, $r(V_j) \leq n$, $V_j = V_j^T$)

Die unbekanntem Varianz-Kovarianzkomponenten, auch Dispersionsparameter genannt, werden in dieser Arbeit ausschließlich als feste Größen behandelt.

b) Modellbeziehungen

Das VCC-Modell kann als das allgemeinste aller zuvor genannten Modelle betrachtet werden. Es beinhaltet neben den Modellen A bis E nach Harville (1977) auch die Varianzanalyse, die multivariate Analyse, die Zeitreihen- und Faktorenanalyse. Im folgenden werden die Beziehungen zu den Modellen C und E im Modellraum aufgezeigt.

(1) Das gemischte Modell (Modell C) läßt sich sehr einfach durch Zerlegung des Fehlervektors $\underline{\varepsilon}$ in eine Linearkombination $B\underline{\eta}$ unbekanntem stochastischer Parameter $\underline{\eta}$ in das VCC-Modell überführen (vgl. Rao (1973), S. 302 und Koch (1980), S. 205):

$$\underline{l} = Ax + B\underline{\eta} = Ax + U_1 \underline{\varepsilon}_1 + U_2 \underline{\varepsilon}_2 + \dots + U_1 \underline{\varepsilon}_1 \quad (2.2.2-1)$$

mit $E(\underline{\varepsilon}_i) = 0$ und $C(\underline{\varepsilon}_i, \underline{\varepsilon}_j) = \sigma_{ij} Q_{ij}$. Dabei bedeuten U_i die Koeffizientenmatrizen ($o(U_i) = n \times r_i$) und $\sigma_{ij} Q_{ij}$ die Kovarianzmatrizen ($o(Q_{ij}) = r_i \times r_j$) der Zufallsvektoren $\underline{\varepsilon}_1$ und $\underline{\varepsilon}_j$. Somit läßt sich die Dispersion der Beobachtungen \underline{l} nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz angeben:

$$D(\underline{l}) = \sigma_{11} U_1 Q_{11} U_1^T + \sigma_{12} (U_1 Q_{12} U_2^T + U_2 Q_{21} U_1^T) + \dots + \sigma_{11} U_1 Q_{11} U_1^T$$

$$= \sigma_{11} V_1 + \sigma_{12} V_2 + \dots + \sigma_{11} V_k$$

oder

$$D(\underline{l}) = \sum_{i=1}^k \tau_i V_i \quad \text{mit } k = l(l+1)/2 ,$$

was direkt der Form des Modells F entspricht.

(2) Der Bezug des VCC-Modells zum multivariaten GM-Modell wurde bereits in Abschnitt 2.2.1 angedeutet und die Möglichkeit der Darstellung der Gewichtskoeffizientenmatrix Q_{11} der einzelnen Epochen mit Hilfe der Varianz-Kovarianzkomponenten aufgezeigt (vgl. Gl. (2.2.1-11)). Koch (1980) leitet auch die Kovarianzmatrix Σ zwischen den Epochen mit Varianz-Kovarianzkomponenten durch eine Zerlegung in Dispersionsparameter τ_i und die zugehörigen Strukturmatrizen ab:

$$D(\text{vec} \underline{l}) = \Sigma \otimes Q_{11} = \sum_{i=1}^k \tau_i W_i \otimes Q_{11} = \sum_{i=1}^k \tau_i (W_i \otimes Q_{11}) = \sum_{i=1}^k \tau_i V_i$$

mit $k = p(p+1)/2$ und $V_i = W_i \otimes Q_{11}$. Damit läßt sich auch das multivariate GM-Modell ohne weiteres als VCC-Modell definieren.

c) Anwendung

Zur Anwendung kam das VCC-Modell bisher überwiegend bei wissenschaftlichen Untersuchungen. Es ermöglicht neben der Bestimmung der Genauigkeitsstruktur geodätischer oder photogrammetrischer Beobachtungen, d.h. die Schätzung von Gewichtsverhältnissen verschiedener Beobachtungsgruppen (Ebner (1978), Förstner (1979), Koch (1981)), auch die Approximation von Kovarianzmatrizen (Pukelsheim und Styan (1979), Förstner und Schroth (1982)). In neueren Untersuchungen zur Suche grober Datenfehler hat die VCC-Schätzung ebenfalls Eingang gefunden (Li (1983)). In der Praxis wird die VCC-Schätzung vor allem in der geodätischen Nezzausgleichung angewandt. So werden dort bereits in einigen Programmen streckenabhängige Meßfehler bei EDM-Geräten oder Gewichtsverhältnisse zwischen Richtungs- und Streckenmessungen bestimmt.

d) Schätzung und Diskussion

(1) Die Schätzung der VCC erfolgt wie die Schätzung der unbekannt Parameter des Funktionalmodells aus den Beobachtungen \underline{l} . In Analogie zur Schätzung der Varianz der Gewichtseinheit wird die quadratische Form der Beobachtungen verwendet. Um eine beste quadratische erwartungstreue Schätzung¹⁾ der VCC zu erhalten, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Die lineare Funktion $q^T \tau$ ist erwartungstreu quadratisch schätzbar, falls eine symmetrische Matrix M existiert, so daß

$$E(\underline{l}^T M \underline{l}) = q^T \tau$$

mit $o(q) = k \times 1$, $o(\tau) = k \times 1$ und $k = l(l+1)/2$.

Damit ist $\underline{l}^T M \underline{l}$ ein erwartungstreuer quadratischer Schätzer von $q^T \tau$. Für den Erwartungswert der quadratischen Form (2. Moment) gilt (vgl. Koch (1980), S. 125):

¹⁾ quadratisch, da aus quadratischer Form abgeleitet

$$E(\underline{1}^T M \underline{1}) = \text{sp}(MC_{11}) + E(\underline{1})^T M E(\underline{1}) = \text{sp}(MC_{11}) + x^T A^T M A x .$$

2. Die Varianz der quadratischen Form sei minimal:

$$V(\underline{1}^T M \underline{1}) = \min.$$

Für die Varianz der quadratischen Form (4. Moment) gilt (vgl. Koch (1980), S. 126):

$$V(\underline{1}^T M \underline{1}) = 2\text{sp}(MC_{11}MC_{11}) + 4E(\underline{1})^T M C_{11} M E(\underline{1}) = 2\text{sp}(MC_{11}MC_{11}) + 4x^T A^T M C_{11} M A x .$$

Diese Darstellung der Varianz der quadratischen Form setzt voraus, daß der Zufallsvektor $\underline{1}$ (quasi-) normalverteilt ist. Es wird dabei angenommen, daß

- 1.) die 3. Momente gleich Null sind: $E(\underline{1}_i, \underline{1}_j, \underline{1}_k) = 0$
- 2.) die 4. Momente als Funktion der 2. Momente darstellbar sind:

$$E(\underline{1}_i, \underline{1}_j, \underline{1}_k, \underline{1}_m) = \sigma_{ij}\sigma_{km} + \sigma_{ik}\sigma_{jm} + \sigma_{jk}\sigma_{im} .$$

Fordert man zusätzlich eine Translations-Invarianz der quadratischen Form, d.h. eine von den unbekannt Parametern x unabhängige Schätzung der VCC, dann ist es notwendig und hinreichend, wenn

$$MA = 0$$

gilt. Damit ergibt sich für die beste invariante quadratische erwartungstreue Schätzung (vgl. Grafarend und d'Hone (1978)):

1. Die quadratische Form $\underline{1}^T M \underline{1}$ ist ein invarianter quadratischer erwartungstreuer Schätzer für $q^T \tau$, wenn gilt:

$$M = M^T, \quad MA = 0 \quad \text{und} \quad \text{sp}(MV_i) = q_i \quad \text{mit } i = 1, \dots, k .$$

2. Die quadratische Form $\underline{1}^T M \underline{1}$ ist zusätzlich noch ein bester Schätzer für $q^T \tau$, wenn

$$V(\underline{1}^T M \underline{1}) = 2\text{sp}(MC_{11}MC_{11}) = \min.$$

Geht man von guten Näherungen für die VCC aus, d.h. die Komponenten τ_i werden gleich eins angenommen, dann kann $(C_{11})_i = V_i$ gesetzt werden und es gilt:

$$C_{11} = \sum_{i=1}^k V_i .$$

Damit ergibt sich eine von den Näherungswerten abhängige lokal beste invariante quadratische erwartungstreue Schätzung der VCC. Diese Schätzung führt nach Koch (1980, S. 210) auf folgendes Gleichungssystem:

$$S \hat{\underline{\tau}} = \underline{u} \tag{2.2.2-2}$$

wobei gilt

$$S = (s_{ij}) \quad \text{mit} \quad s_{ij} = \text{sp}(WV_i WV_j)$$

$$\underline{u} = (\underline{u}_i) \quad \text{mit} \quad \underline{u}_i = \underline{1}^T WV_i W \underline{1}$$

und

$$W = C_{11}^{-1} D = C_{11}^{-1} C_{\hat{\underline{\tau}} \hat{\underline{\tau}}}^{-1} C_{11}^{-1} = C_{11}^{-1} (I_n - A(A^T C_{11}^{-1} A)^{-1} A^T C_{11}^{-1})$$

mit $C_{11} = \sum V_i$ an der Näherungsstelle. Diese Schätzung baut direkt auf dem Verfahren nach Helmert (1907) auf (vgl. Kelm (1978), Grafarend, Kleusberg und Schaffrin (1980)) und soll im folgenden als "Helmert-Verfahren" bezeichnet werden.

Ist die Matrix S in Gl. (2.2.2-2) regulär, können die VCC eindeutig bestimmt werden. Um die VCC unabhängig von den Näherungswerten zu erhalten, ist die Schätzung iterativ durchzuführen. Dieses Schätzverfahren gestattet es, zur Beurteilung die Varianzen der Schätzwerte (4. Momente) zu bestimmen.

(2) Ein Verfahren mit getrennter Schätzung der VCC wurde von Förstner (1979) vorgestellt. Es besitzt nach Schaffrin (1983) im Konvergenzpunkt dieselben statistischen Eigenschaften wie das Helmert-Verfahren. Das Gleichungssystem zur Lösung der VCC weist Diagonalgestalt auf:

$$\bar{S}_{\hat{\tau}} = \underline{\omega} \quad (2.2.2-3)$$

wobei gilt

$$\bar{S} = \text{diag} (\bar{s}_i) \quad \text{mit} \quad \bar{s}_i = \text{sp}(WV_i) = \text{sp}(C_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}^{-1} V_i C_{11}^{-1})$$

$$\underline{\omega} = (\underline{\omega}_i) \quad \text{mit} \quad \underline{\omega}_i = \hat{\varepsilon}^T C_{11}^{-1} V_i C_{11}^{-1} \hat{\varepsilon} = \underline{1}^T W V_i W \underline{1} \quad .$$

Dieses Verfahren besitzt zwar eine niedrigere Konvergenzgeschwindigkeit als das Helmert-Verfahren, ist aber numerisch nicht so aufwendig, da selbst im Falle einer voll besetzten Kovarianzmatrix der Beobachtungen das Gleichungssystem lediglich Diagonalgestalt aufweist und die Bestimmung der Matrix \bar{S} weniger Multiplikationen als die der Matrix S erfordert. Nach Persson (1980) ist die Schätzung nach dem von Förstner vorgeschlagenen Verfahren im Konvergenzpunkt identisch mit dem MINQUE-Verfahren zur Schätzung von Varianzkomponenten (vgl. Rao (1973)).

Einen deutlichen numerischen Vorteil gewinnt das Verfahren nach Förstner im Fall unkorrelierter Beobachtungen. Hier ist zur Bestimmung der \bar{s}_i lediglich die Berechnung der Hauptdiagonalen der $C_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}$ -Matrix notwendig, wogegen beim Helmert-Verfahren alle Elemente der $C_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}$ -Matrix berechnet werden müssen.

Möchte man jedoch die Streuungen und die Korrelationen zwischen den geschätzten VCC, sprich die 4. Momente, bestimmen, so müssen dennoch alle Elemente der $C_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}$ -Matrix berechnet werden. In diesem Fall ist der Vorteil des Verfahrens eingeschränkt. Man kann nach Persson (1980) zwar approximierte Streuungen berechnen, und sie sind auch in Modellen mit geringen Korrelationen zwischen den geschätzten VCC ausreichend, aber die Größe der Korrelationskoeffizienten bleibt auf jeden Fall unbekannt, wenn man auf die Berechnung der vollen $C_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}$ -Matrix verzichten will, d.h. nur die Matrix \bar{S} bestimmen will.

(3) Das VCC-Modell schließt mit seiner am höchsten entwickelten Struktur die Vorstellung der Ausgleichungsmodelle ab. Der nächste Abschnitt gibt noch einmal einen Überblick über die genannten Modelle und die wichtigsten Zusammenhänge.

2.3 Übersicht

Der Abschnitt 2 dieses Kapitels stellt einen in sich geschlossenen Themenbereich dar. Es sollen deshalb in einer Übersicht die Zusammenhänge und besonderen Problembereiche der Modelldefinitionen noch einmal hervorgehoben werden, womit eine Abrundung des Komplexes der Ausgleichungsmodelle gegeben ist.

(1) Die bisher vorgestellten mathematischen Modelle sind in Abbildung 2.1 zusammengefaßt. Es wurden zwei weitere Modelle in die Übersicht miteinbezogen, um die Modellentwicklung in der Mathematik und der Ausgleichsrechnung geschlossen darstellen zu können. Die Beziehungen zwischen den Modellen, wie sie im Abschnitt 2 aufgezeigt wurden, sind durch Verbindungslinien gekennzeichnet. Die durchgezogene vertikale Linie stellt die Trennung zwischen mathematischen Modellen, bei denen das stochastische Modell als bekannt angenommen werden muß (linke Seite) und Modellen, die eine Schätzung von unbekanntem Parametern auch im stochastischen Teil zulassen (rechte Seite), dar.

Am Anfang der Entwicklung stand gewissermaßen ein triviales Modell: Man beobachtet wiederholt bei einem Experiment ein Ereignis und ist lediglich an einem unbekanntem Parameter, dem Mittelwert der Beobachtungen, interessiert. Dieses sehr einfache Modell ist unter der Bezeichnung "Modell des allgemeinen arithmetischen Mittels" bekannt (Mohl (1967)). Daraus ergab sich das univariate GM-Modell mit seinen im Abschnitt 2.1 dargestellten Erweiterungen unter Vorgabe von vollständigen a priori Informationen über das stochastische Modell. Aus mangelnder Kenntnis über diese notwendigen Informationen entwickelte sich das komplexe Modell der Varianz-Kovarianzkomponenten. In der Ausgleichsrechnung ging man dabei den Weg über das GM-Modell, bzw. über das gemischte Modell, weil diese Modelle bereits anwendungstechnisch ausgereift waren. Im Gegensatz hierzu ging die mathematische Statistik, vor allem vor dem Hintergrund biologischer Analysen, den Weg über die Varianzanalyse mit zufälligen Effekten (analysis of variance method, Henderon's Methods 1-3). Das Modell der Varianzanalyse setzt sich in Analogie zum GM-Modell aus einem oder mehreren unbekanntem Mittelwerten und einem in additive Anteile zerlegten Fehlervektor zusammen (vgl. Henderson (1953), Searle (1971)). Das VCC-Modell bildet letztendlich die Synthese der beiden Entwicklungswege in der mathematischen Statistik (Pukelsheim (1979)) und der Ausgleichsrechnung.

(2) Ein wesentlicher Gesichtspunkt bei der Modellbildung im konkreten Anwendungsfall ist die Frage, ob man die unbekanntem Parameter stochastisch oder nicht stochastisch ansetzt, insbesondere wenn die mathematischen oder physikalischen Gesetzmäßigkeiten zwischen den Parametern und den Beobachtungen nicht hinreichend bekannt sind. Man muß sich zuerst Klarheit über die Wirkungsweise der Parameter verschaffen. Entscheidende Faktoren hierbei sind die Zusammenhänge der Beobachtungsdaten, die Art und Weise wie sie gewonnen wurden und aus welchem Milieu sie stammen, wobei es sich im wesentlichen um nicht quantifizierbare Größen handelt. Möchte man Schlußfolgerungen aus den Daten über die Qualitätsniveaus dieser Faktoren ziehen, dann sollte man die Parameter als feste Größen behandeln; formuliert man die Parameter als stochastische Größen, so möchte man Folgerungen über die zu Grunde liegende Verteilung, sprich Streuung, der Qualitätsstufen eines Faktors erhalten, von dem man annimmt, daß er im Datenmaterial enthalten ist. Eine ausführliche Diskussion dieses Themas führt in das Gebiet der Varianzanalyse, wobei hier nur auf die Arbeiten von Searle (1971) und Press (1972) verwiesen werden soll. Dermanis (1979) diskutiert die Frage der Modelle mit festen oder stochastischen Parametern im Hilbertraum und geht dabei auf verschiedene Lösungsvarianten ein.

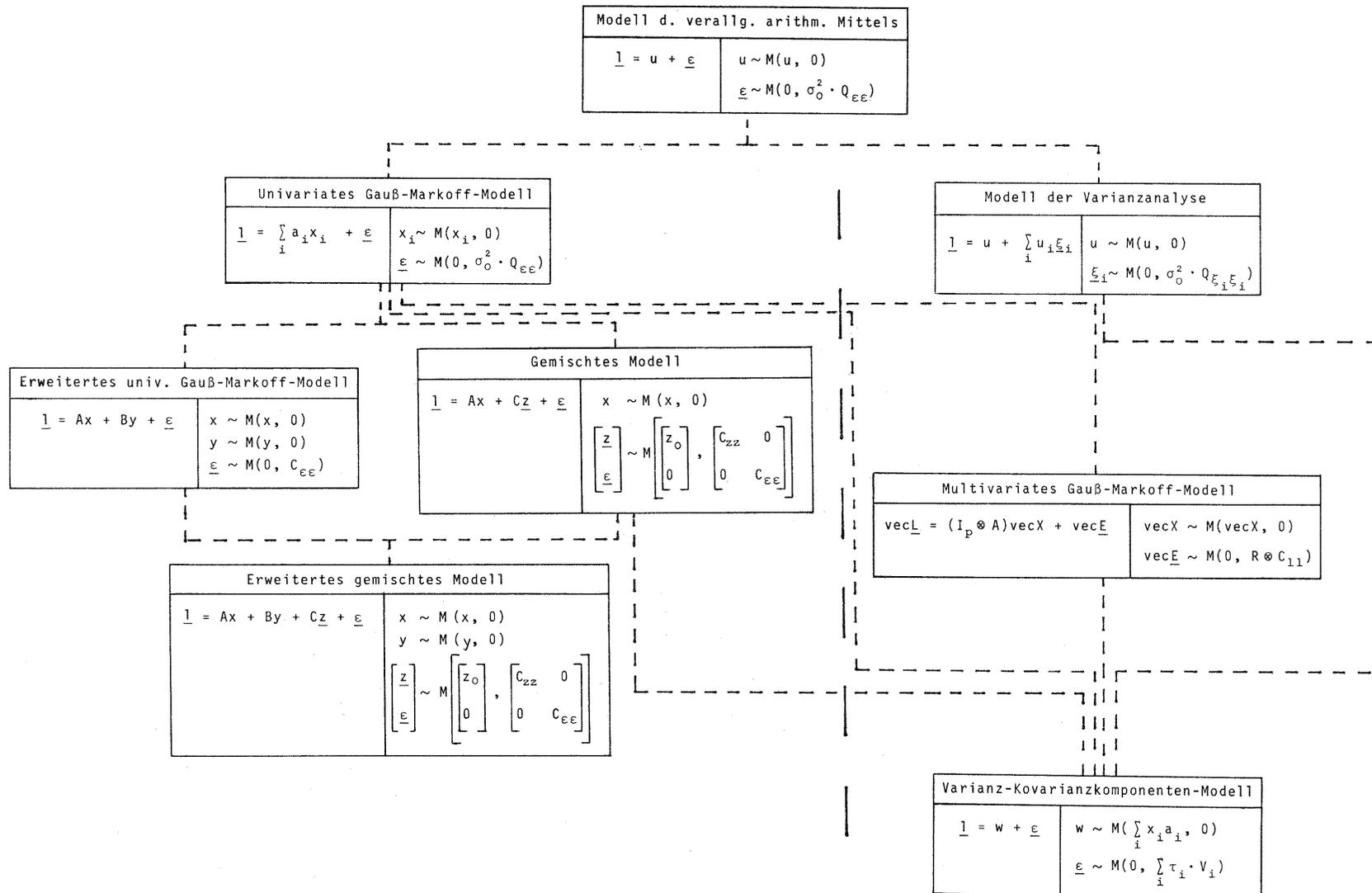


Abb. 2.1: Modellübersicht mit Trennung der Modelle mit bekannten und unbekanntem Parametern im stochastischen Teil (vertikale Trennlinie) und den Modellbeziehungen untereinander (gestrichelte Verbindungslinien)

Im Hinblick auf die zusätzlichen unbekannt Parameter spricht Ebner (1973) ebenfalls diese Problematik an, wobei er die möglichen Eigenschaften (konstant, fest, stochastisch) der Parameter rein formal diskutiert und unter dem Gesichtspunkt der photogrammetrischen Blockausgleichung auf den jeweiligen Ansatz eingeht. Beim Ansatz der zusätzlichen Parameter als stochastische Unbekannte wird das Verständnis sicherlich erleichtert, wenn man die Parameter ebenfalls als Beobachtungen betrachtet, denen eine Verteilung zugrunde liegt.

(3) Ein weiterer Problembereich bei der Modellbildung ist der Einfluß von Modellfehlern auf die Schätzergebnisse. Hierzu sind in Tabelle 2.1 die in den vorangegangenen Abschnitten diskutierten Modellfehlertypen und ihre Wirkungsweise zusammengefaßt und die entsprechenden Fundstellen angegeben. Soweit möglich wird auch die Richtung, d.h. das Vorzeichen des Einflusses auf die geschätzten Größen angegeben. Lediglich bei der Schätzung der unbekannt Parameter kann keine Angabe über die Richtung der Verzerrung gemacht werden, da diese von den vernachlässigten Parametern abhängig ist.

Einfluß auf Fehler	FUNKTIONALTEIL			STOCHASTISCHER TEIL
	zu wenige Parameter	zu viele Parameter	falsche Parametergruppe	falsche Gewichtskoeffizientenmatrix
Schätzung der Parameter x	verzerrt	unverzerrt	verzerrt	unverzerrt
Einflußgröße $\bar{\sigma}^2$	Gl. (2.1.2-7)	Gl. (2.1.2-13)	Gl.(2.1.2-15)	Gl.(2.1.3-9)
Dispersion der geschätzten Parameter ¹⁾	zu optimistisch $sp(\bar{C}_{\hat{x}\hat{x}}) < sp(C_{\hat{x}\hat{x}})$ ²⁾	zu pessimistisch $sp(\bar{C}_{\hat{x}\hat{x}}) > sp(C_{\hat{x}\hat{x}})$ ²⁾	zu optimist. oder zu pessimist.	$\lambda_i(\nabla Q_{11}) \leq 0, \forall i$: zu ³⁾ pessimistisch $\lambda_i(\nabla Q_{11}) \geq 0, \forall i$: zu optimistisch
Einflußgröße $\nabla C_{\hat{x}\hat{x}}$	Gl.(2.1.2-9)	Gl.(2.1.2-9)	Gl.(2.1.2-16)	—————
Schätzung der Varianz der Gewichtseinheit	verzerrt (zu pessimistisch)	unverzerrt	unverzerrt oder zu pessimist.	verzerrt $\lambda_i(\nabla Q_{11}) \leq 0, \forall i$: zu ³⁾ pessimistisch $\lambda_i(\nabla Q_{11}) \geq 0, \forall i$: zu optimistisch
Einflußgröße $\nabla \sigma_0^2$	Gl.(2.1.2-10)	Gl.(2.1.2-14)	Gl.(2.1.2-17)	—————

Tabelle 2.1: Einfluß von Modellfehlern

1) theoretische Genauigkeit: $C_{\hat{x}\hat{x}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{x}\hat{x}}$

2) $\bar{C}_{\hat{x}\hat{x}}$: fehlerhafte Kovarianzmatrix der geschätzten Parameter

3) $\lambda_i(\nabla Q_{11})$: Eigenwerte der Fehlermatrix ∇Q_{11} , mit $\nabla Q_{11} \neq 0$, d.h.

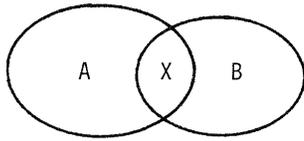
mindestens ein Eigenwert ist ungleich Null (s. Anhang A1)

Eine systematische Gliederung der Fehlermöglichkeiten bei der Modellbildung erlaubt auch die Darstellung der Parameterräume als Mengen mit Hilfe von Venn-Diagrammen (Abbildung 2.2). Eine Trennung zwischen stochastischen und festen Parametern ist hierbei nicht notwendig. Für die Darstellung werden folgende Parameterräume definiert:

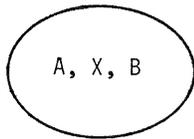
Parameterraum A: Menge der Parametervektoren, welche die Realität beschreiben
(streng erfüllen)

Parameterraum B: Menge der Parametervektoren, welche die Realität modellieren
(approximieren)

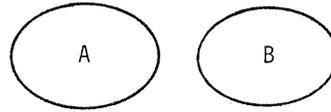
Parameterraum X: Schnittmenge von A und B, d.h. gemeinsamer Unterraum von A und B



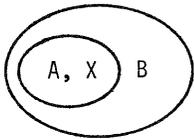
2.2a: $X = A \cap B$



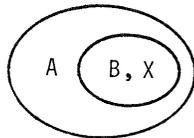
2.2b: $X = A = B$



2.2c: $X = \emptyset$



2.2d: $X = A$



2.2e: $X = B$

Abb. 2.2: Fehlermöglichkeiten bei der Modellbildung

In dem allgemeinen Fall, daß X eine echte Schnittmenge von A und B ist, lassen sich weitere Spezialfälle ableiten (vgl. Abbildung 2.2):

- a) $X = A \cap B$ oder $A \setminus X = Y$ und $B \setminus X = Z$ mit $Z \cap Y = \emptyset$ (vgl. Abb. 2.2a)

Das Modell entspricht nur teilweise der Realität (vgl. Tabelle 2.1); es wird zum Beispiel eine unrichtige Gruppe von zusätzlichen Parametern Y angesetzt.

- b) $X = A = B$ (vgl. Abb. 2.2b)

Das Modell entspricht vollkommen der Realität; dies ist der Idealfall, der aber nicht erreichbar ist.

- c) $X = \emptyset$ (vgl. Abb. 2.2c)

In diesem Fall hat das Modell nichts mit der Realität gemeinsam; dies würde zum Beispiel für eine Schätzung von Lagekoordinaten aus Höhenbeobachtungen zutreffen.

- d) $X = A$ (vgl. Abb. 2.2d)

Das Modell enthält zu viele Parameter (vgl. Tabelle 2.1); dies führt auf eine Überparameterisierung und birgt damit die Gefahr einer numerischen Instabilität des Gleichungssystems bei der Schätzung.

- e) $X = B$ (vgl. Abb. 2.2e)

Das Modell enthält zu wenige Parameter (vgl. Tabelle 2.1).

Der Fall a) ist sicherlich in der Praxis am häufigsten existent. Hier tritt nun die Frage auf, wie sich die brauchbaren und die unbrauchbaren Parametergruppen trennen lassen, bzw. welcher alternative Parametersatz die Realität besser approximiert. Auf das Beispiel der Bündelblockausgleichung mit zusätzlichen Parametern angewandt bedeutet das, welcher der mathematischen Ansätze

von zusätzlichen Parametern für ein vorliegendes Beobachtungsmaterial am realistischsten ist. Man muß sogar noch einen Schritt weitergehen und nach dem realistischeren Modelltyp fragen, was auf die Trennbarkeit verschiedener Modelltypen führt, z.B. die Trennung zwischen den Modellen B und C.

Das Problem der Trennbarkeit wurde von Förstner (1983b) auf der Grundlage der statistischen Testtheorie behandelt. Förstner stellte dabei fest, daß für die Trennbarkeit von Alternativhypothesen die Korrelationskoeffizienten der Testgrößen ausschlaggebend sind. Für den Fall, daß die zur Auswahl stehenden Modelle als lineare mehrdimensionale Hypothesen gegeben sind, gibt er ein Verfahren an, mit dem der gemeinsame Bereich X der Hypothesen und die Trennbarkeit der nicht gemeinsamen Bereiche $Y = A \setminus X$ und $Z = B \setminus X$ bestimmt werden kann.

(4) Diese Übersicht wies neben ihrer zusammenfassenden Funktion auf einige Problemstellen bei der Modellbildung hin. Abschließend sollen nochmals die wesentlichen Gesichtspunkte des Abschnitts 2 hervorgehoben werden:

- a) Alle vorgestellten Modelle werden im Modellraum ohne Berücksichtigung der Schätzung miteinander verglichen. Die Ineinanderüberführung der Modelle durch Substitution von Modellparametern ist lediglich entlang der in Abbildung 2.1 gekennzeichneten Verbindungslinien möglich.
- b) Im speziellen Fall des gemischten Modells lassen sich für die unbekannt stochastischen Parameter zusätzliche Beobachtungen mit den Beobachtungswerten Null und der zugehörigen Dispersion (vgl. Abschnitt 2.1.3) formulieren. Dies bietet die Möglichkeit, die einfache Struktur des GM-Modells beizubehalten und hat darüberhinaus auch eindeutige organisatorische und numerische Vorteile bei der Schätzung.
- c) Der theoretische Einfluß von Modellfehlern auf die Ergebnisse der Schätzung läßt sich angeben. Vergleiche hierzu die Übersicht der Modellfehler und der Fundstellen ihrer Einflüsse in Tabelle 2.1.
- d) Mit den Gleichungen (2.1.2-8) und (2.1.3-10) sind Bedingungen angegeben, unter denen Modellfehler keinen Einfluß auf die Schätzung der unbekannt Parameter haben, mit Ausnahme des Falls einer unrichtigen Parametergruppe. Diese Bedingungen gelten außerdem auch für die Auswirkung von Ansätzen mit zu vielen oder zu wenigen Parametern auf die theoretische Genauigkeit der geschätzten Parameter.

3. Zur Wahl der Kovarianzstruktur

3.1 Einführung

Im vorangegangenen Abschnitt 2 dieses Kapitels wurde das VCC-Modell als das am höchsten entwickelte Modell vorgestellt, da es die Schätzung der unbekannt Parameter im funktionalen und im stochastischen Teil des mathematischen Modells gestattet. Somit lassen sich auch Informationen über das stochastische Verhalten der Beobachtungen direkt aus dem Datenmaterial gewinnen. Dabei ist aber in der Regel ein hoher numerischer Aufwand erforderlich. Dieser kann wesentlich reduziert werden, wenn man Strukturen im stochastischen Modell berücksichtigt, wie zum Beispiel bei der elektrooptischen Entfernungsmessung einen konstanten und einen streckenabhängigen

Varianzanteil. Die physikalisch oder auch rein analytisch begründete Strukturierung vereinfacht und ermöglicht vor allem in bestimmten Fällen erst die Schätzung der Unbekannten im stochastischen Modell (vgl. Abschnitt 2.2.1). Denn selbst wenn das stochastische Modell wirklich so kompliziert sein sollte, daß man stark differenzierte Kovarianzmatrizen benötigt, so gestattet häufig schon der geringe Datenumfang keine Offenlegung bzw. zuverlässige Schätzung detaillierter Strukturen. Deshalb ist es notwendig, sich von Fall zu Fall mit Hilfe von Experimenten Kenntnis über die auftretende Kovarianzstruktur zu verschaffen (vgl. hierzu Abschnitt 3.3). Die Strukturen von Kovarianzmatrizen lassen sich am geeignetsten durch Funktionen beschreiben, worauf die im folgenden Abschnitt diskutierten Verfahren aufbauen werden.

3.1.1 Strukturierung von Kovarianzmatrizen

a) Das Primärfehlerkonzept

Ein auf vorgegebenen Informationen oder Annahmen über physikalische Zusammenhänge aufbauendes Verfahren zur Strukturierung von Kovarianzmatrizen ist das Primärfehlerkonzept von Pelzer (1974). Dieses Konzept versucht die Ursachen von Korrelationen und ihre Auswirkung auf die Kovarianzmatrix der Beobachtungen mit Hilfe einer Zerlegung der "wahren" Beobachtungsfehler in einen individuellen Fehleranteil und einen durch physikalische Größen verursachten gemeinsamen Fehleranteil zu berücksichtigen. Somit läßt sich eine beliebige Kovarianzmatrix zerlegen in

$$C_{xx} = \text{diag}(\sigma_j^2) + \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 c_j^{(i)} c_j^{(i)T} .$$

Der Diagonalanteil beinhaltet die Varianzen der Primärfehler, die nur auf eine stochastische Variable \underline{x}_j wirken. Die Elemente $c_j^{(i)}$ stellen kontinuierliche Funktionen der Korrelationen verursachenden physikalischen Einflüsse dar. In der Regel wird die Anzahl m der Summanden eher klein sein, da die funktionale Erfassung, z.B. von meteorologischen Einflüssen, zwar relativ komplexe Strukturen beinhaltet, sich aber auf wenige physikalische Ursachenbereiche beschränken kann. Durch die Konstruktion des Primärfehlerkonzepts ist die positive Definitheit der Kovarianzmatrix garantiert.

Beispiele für Primärfehler in der Photogrammetrie könnten die durch das optische System verursachten Verzeichnungen, die Refraktion, der Filmverzug oder das mechanische System des Filmandrucks sein, sofern man diese physikalischen Einflußgrößen als Funktionen von stochastischen Parametern betrachtet (vgl. Abschnitt I.2). Voraussetzung dafür ist eine detaillierte Kenntnis über die wirksamen physikalischen Einflüsse, wie sie aber bis jetzt nicht vorliegt.

b) Konstruktiv definierbare Prozesse

Ein weiteres Verfahren, Strukturen von Kovarianzmatrizen zu modellieren, ist die funktionale Konstruktion von stochastischen Prozessen, z.B. über Differenzgleichungen. Aus dem Konstruktionsprinzip lassen sich die Parameter der Verteilungsfunktion berechnen. Analog zum Primärfehlerkonzept wird die Kovarianzmatrix mit Hilfe von Funktionen beschrieben, wobei es sich bei den konstruktiv definierbaren Prozessen um diskrete lineare Funktionen handelt, z.B. für den autoregressiven Prozeß 1. Ordnung in der Form $\underline{x} = D^{-1} \underline{n}$ (vgl. Gl. (A3-1b)). Dabei weist die Funktion im Gegensatz zum Primärfehlerkonzept sehr einfache Strukturen auf. Die additive Zerlegung erfolgt hier bereits in der zugrundeliegenden Funktion, woraus sich der wesentliche Vorteil der konstruktiv definierbaren Prozesse ergibt. Denn damit können die Korrelationen zwischen den stochasti-

schen Variablen in dem Funktionalmodell integriert werden, was einer einfacheren Anwendung eines derartigen Modells entspricht. Aus diesem Grund wird auf die konstruktiv definierbaren stochastischen Prozesse im Abschnitt 3.2 besonders eingegangen.

c) Die Kovarianzfunktion

Oftmals werden bei der Modelldefinition für die Struktur der Kovarianzmatrix analytische Funktionen (Kovarianzfunktionen) mit der Eigenschaft der positiven Definitheit vorgegeben oder an diskreten Stützstellen geschätzte Funktionswerte durch analytische Funktionen approximiert (vgl. z.B. Kraus (1972)). Damit erfolgt im Gegensatz zu den zuerst genannten Verfahren weder eine Zerlegung der vorgegebenen bzw. diskretisierten Funktion noch können komplexe physikalische Ursachen für Korrelationen additiv modelliert werden. Der Schätzung der Varianzen und Kovarianzen werden zeit- oder ortsabhängige stochastische Prozesse zugrunde gelegt, womit sie sich als Funktion der Zeit- oder Ortsdifferenzen ergibt (vgl. Koch (1980), S. 228). Auf Kovarianzfunktionen aufbauende Strukturen mit Eigenschaften der Homogenität (Ortsunabhängigkeit, Translationsinvarianz), Isotropie (Richtungsunabhängigkeit) und Ergodizität (vgl. Fahrmeir/Kaufmann/Ost (1981), S. 35) sind in Lauer und Wrobel (1972) beschrieben. Eine vom Koordinatensystem unabhängige Struktur mit den Eigenschaften der Isotropie und Homogenität ist die Taylor-Karman-Struktur, die sich aus einem mehrdimensionalen stochastischen Prozeß ergibt (vgl. Grafarend und Schaffrin (1979)).

Auf das mathematische Modell der Aerotriangulation angewandt ist die Taylor-Karman-Struktur wenig plausibel. Die Eigenschaft der Homogenität ist sinnvollerweise nur für die stochastischen Beziehungen zwischen den Bildern eines Fluges anzunehmen. Aber im photogrammetrischen Einzelbild kann weder Homogenität noch Isotropie vorausgesetzt werden (vgl. Schilcher (1980), S. 147 und Ellenbeck (1981), S. 13).

Um auf die Wahl der Kovarianzstruktur auf der Basis stochastischer Prozesse näher eingehen zu können, ist es notwendig, diese zu definieren.

3.1.2 Stochastische Prozesse

Unter stochastischen Prozessen versteht man die Menge von Zufallsvariablen x_t , die durch einen Parameter t gekennzeichnet sind. Dabei durchläuft der Parameter t den Parameterraum T und bezieht sich entweder auf die Zeit oder den Ort. Der Parameterraum T ist eine Folge von Zeit- oder Stützpunkten bei diskretem Parameter t . Bei kontinuierlichem Parameter t repräsentiert T eine Folge von Zeit- oder Stützpunktintervallen. Formal ist der stochastische Prozeß wie folgt definiert (vgl. Fahrmeir/Kaufmann/Ost (1981)):

Definition II.3-1:

Ein stochastischer Prozeß ist eine Menge $X = \{x_t, t \in T\}$ von Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, M) mit dem gemeinsamen Wertebereich I .

Dabei bedeutet:

I = Zustandsraum des stochastischen Prozesses ($I = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, n\}$ oder $I = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, endlich oder abzählbar unendlich)

Ω = Grund- oder Stichprobenraum

\mathcal{A} = Sigma-Algebra

M = Menge von endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen

Charakteristisch für stochastische Prozesse ist die Abhängigkeit der Zufallsvariablen x_t untereinander.

Eine besondere Rolle innerhalb der stochastischen Prozesse spielen die bei der Zeitreihenanalyse angewandten konstruktiv definierbaren Prozesse mit der Eigenschaft der Stationarität, was einer Invarianz gegenüber Zeitverschiebungen entspricht (vgl. Abschnitt 3.2).

Eine ausführliche Zusammenstellung über die Anwendung stochastischer Prozesse in der Geodäsie gibt Grafarend (1976) an. Neuere Arbeiten über die Interpolation von digitalen Geländemodellen oder zur Beschreibung der Geländeoberfläche ziehen konstruktiv definierte Prozesse in den Modellansatz mit ein (Ebner (1979), Förstner (1983a)). Im Bereich der Photogrammetrie finden stochastische Prozesse in Form von Kovarianzfunktionen u.a. ihre Anwendung bei der statistischen Analyse zweidimensionaler Vektorfelder (Kraus (1972), Seeber (1972), Ellenbeck (1976)). Konstruktiv definierte Prozesse werden auch bei der Entzerrung von Scanneraufnahmen in der digitalen Bildverarbeitung angewandt (Höbner (1978)) und zur Beschreibung der Genauigkeitsstruktur im Bildverbund von Förstner (1982b), Schroth (1982) und Schaffrin (1983) vorgeschlagen.

3.1.3 Übersicht

Aus den im Abschnitt 3.1.1 angesprochenen Möglichkeiten zur Strukturierung des stochastischen Modells wird im folgenden speziell der konstruktiv definierbare Prozeß im Vordergrund stehen. Denn das Konzept der konstruktiven Prozesse kommt auch den Vorstellungen in der Aerotriangulation über die zeitliche Variation systematischer Bildfehler, wie sie in empirischen Untersuchungen aufgezeigt wurden (vgl. Abschnitt I.2), sehr nahe. Die durch zusätzliche Parameter beschriebenen systematischen Bildfehler lassen sich durch einen stationären Prozeß konstruktiv modellieren. Vor diesem Hintergrund ist die gesamte Modelldefinition, wie sie im Abschnitt 3.2 beschrieben wird, zu sehen. Als Grundlage für die konstruktiven Prozesse wird das autoregressive Modell gewählt, welches in der Zeitreihenanalyse auf Grund seiner einfachen Struktur zu der wichtigsten Klasse von Prozessen gehört. Das autoregressive Modell wird aus dem allgemeineren autoregressiven moving average-Prozeß entwickelt.

Auf das mathematische Modell der Aerotriangulation bezogen sind die stochastischen Prozesse für die Beschreibung zeitlicher Veränderungen geeignet, aber für die Beschreibung der Genauigkeitsstruktur im Einzelbild wenig praktikabel (vgl. Bemerkung S. 51). Hier ist der Ansatz des Primärfehlerkonzepts sinnvoll. Für die hierzu notwendigen empirischen Voruntersuchungen wird im Abschnitt 3.3 die theoretische Grundlage im Sinne einer Analyse von Kovarianzmatrizen angegeben, wobei besonders auf das Verfahren der principal components-Analyse näher eingegangen wird.

3.2 Konstruktiv definierbare stochastische Prozesse

3.2.1 Autoregressiver moving average - Prozeß

Die Modelle der autoregressiven moving average-Prozesse (ARMA) gehören zur Gruppe der Markoff-Prozesse. Mit Hilfe dieser Prozesse lassen sich Zeitreihen modellieren. Zeitreihen treten überall auf, wo sich Beobachtungen oder Messungen in zeitlichem Abstand wiederholen. Dabei ist es unabhängig, ob es sich um kontinuierliche Beobachtungen, z.B. in Form einer analogen Aufzeichnung, oder um diskrete Beobachtungen, wie sie in der Praxis am häufigsten vorkommen,

handelt. Denn selbst bei kontinuierlicher Aufzeichnung können zur digitalen Weiterverarbeitung nur Werte zu diskreten Zeitintervallen benützt werden, so daß im folgenden nur eine diskrete Betrachtungsweise in Frage kommt. Nach Anderson (1971) lassen sich Zeitreihen wie folgt definieren:

Definition II.3-2: Zeitreihenmodell

$\underline{z}^{(t)} = \underline{f}^{(t)} + \underline{x}^{(t)}$	$\underline{f}^{(t)} \sim M(\underline{f}^{(t)}, 0)$
	$\underline{x}^{(t)} \sim M(0, C_{xx})$
$\underline{z}^{(t)} \sim M(\underline{f}^{(t)}, C_{xx})$	

Hierbei bedeutet:

$\underline{z}^{(t)}$ = Vektor der Beobachtungen zum Zeitpunkt t
(mit $t=1, 2, 3, \dots, p$)

$\underline{f}^{(t)}$ = Vektor des Funktionalmodells

$\underline{x}^{(t)}$ = Vektor des stochastischen Modells

Den funktionalen Teil $\underline{f}^{(t)}$ des Modells bezeichnet man als Trend, der bei Zeitreihen häufig durch das arithmetische Mittel oder durch den Übergang auf Differenzen der Beobachtungen (z.B. erste Differenzen $\hat{=}$ Neigungen) realisiert wird. Der stochastische Teil $\underline{x}^{(t)}$ repräsentiert den eigentlichen stochastischen Prozeß. Damit ergibt sich der stochastische Prozeß aus den um den Trend reduzierten Beobachtungen.

Die Modellierung dieses in der Zeitreihe enthaltenen stochastischen Prozesses mit einem ARMA-Prozeß geht von folgendem Erzeugungsmechanismus aus (vgl. Fahrmeir/Kaufmann/Ost (1981)):

$$\underline{x}^{(t+1)} = \text{zur Zeit } t \text{ "erwarteter Wert von } \underline{x}^{(t+1)} \text{"} + \text{Störung } \underline{\varepsilon}^{(t)}$$

Dabei ist die "Erwartung" eine gewichtete Summe von $\underline{x}^{(t)}$ und vorhergehenden Werten und die Störung $\underline{\varepsilon}^{(t)}$ ein moving average - Prozeß (Prozeß der gleitenden Mittel). Damit ergibt sich der ARMA-Prozeß wie folgt:

Definition II.3-3: Autoregressiver moving average-Prozeß (ARMA(k,r)-Prozeß)

$\underline{x}^{(t)} = \sum_{i=1}^k A^{(i)} \underline{x}^{(t-i)} + \sum_{i=0}^r B^{(i)} \underline{\varepsilon}^{(t-i)}$

Hierbei bedeutet:

$\underline{x}^{(t)}, \underline{x}^{(t-i)}$ = Vektor der n Folgen von korrelierten Zufallsvariablen zum Zeitpunkt t, bzw. t-i,
mit $t = k+1, \dots, p$ ($o(\underline{x}^{(t)}) = n \times 1$)

$\underline{\varepsilon}^{(t-i)}$ = Vektor der n Folgen von korrelierten Zufallsvariablen zum Zeitpunkt t-i
($o(\underline{\varepsilon}^{(t)}) = n \times 1$)

$A^{(i)}, B^{(i)}$ = Matrizen der i-ten Prozeßkoeffizienten ($o(A^{(i)}) = o(B^{(i)}) = n \times n$)

k, r = Ordnung des Prozesses

Die erste Summation stellt den rekursiven, die zweite Summation den nicht-rekursiven Anteil des ARMA-Prozesses dar. Geht man mit $A^{(i)} = (\text{diag}(a_j))^{(i)}$ und $B^{(i)} = (\text{diag}(b_j))^{(i)}$ von dem vektorwertigen Prozeß der Definition II.3-3 auf die j-te Folge über, so erhält man

$$\underline{x}_j^{(t)} = \sum_{i=1}^k a_j^{(i)} \underline{x}_j^{(t-i)} + \sum_{i=0}^r b_j^{(i)} \underline{\varepsilon}_j^{(t-i)}, \tag{3.2.1-1}$$

bzw. wenn man den Index j vernachlässigt und die hochgestellten Klammerausdrücke als Indizes verwendet die übersichtlichere, aber gleichwertige Darstellung

$$\underline{x}_t = \sum_{i=1}^k a_i \underline{x}_{t-i} + \sum_{i=0}^r b_{t-i} \varepsilon_i; \quad a_k \neq 0, \quad b_0 = 1, \quad b_r \neq 0 \quad . \tag{3.2.1-2}$$

Handelt es sich bei dem moving average-Anteil um eine Folge von unkorrelierten Zufallsvariablen ε_t ($b_0=1, b_r=0$ für $r \geq 1$) mit

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{und} \quad D(\varepsilon_t) = \sigma^2,$$

d.h. einen reinen Zufallsprozeß (weißes Rauschen), dann ergibt sich aus Gleichung (3.2.1-2) der autoregressive Prozeß der Ordnung k.

3.2.2 Autoregressiver Prozeß

(1) Stellt der nicht-rekursive Anteil des ARMA-Prozesses ein weißes Rauschen dar, so ergibt sich der autoregressive Prozeß (AR) aus Gleichung (3.2.1-2) wie folgt:

Definition II.3-4: Autoregressiver Prozeß (AR(k)-Prozeß)

$\underline{x}_t = \sum_{i=1}^k a_i \underline{x}_{t-i} + \varepsilon_t$	$a_i \sim M(a_i, 0)$
	$\underline{\varepsilon} \sim M(0, \sigma^2 I)$
	$\underline{x} \sim M(0, C_{xx})$

mit $a_k \neq 0$. Die Bedeutung der Variablen ist mit Definition II.3-3 identisch. Voraussetzung für das Modell der AR-Prozesse ist die Reduktion der Zufallsvariablen um den Trendanteil (Forderung: $E(\underline{x}_t) = 0$), um die Eigenschaft der Stationarität zu erfüllen.

(2) Für den stochastischen Teil des Modells (Def. II.3-4) soll exemplarisch für einen AR-Prozeß 1. Ordnung, wie er auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit Verwendung finden wird, die Kovarianzmatrix C_{xx} der Zufallsvariablen \underline{x}_t angegeben werden, die sich aus der Kovarianzmatrix $C_{\varepsilon\varepsilon} = \sigma^2 I$ und dem Startwert $\sigma^2/(1-a^2)$ nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt (Ableitung siehe Anhang A2 und A3):

$$C_{xx} = \frac{\sigma^2}{1-a^2} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & \cdot & \cdot & a^{p-1} \\ a & 1 & a & \cdot & \cdot & a^{p-2} \\ a^2 & a & 1 & \cdot & \cdot & a^{p-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{p-1} & a^{p-2} & a^{p-3} & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \frac{\sigma^2}{1-a^2} T, \quad (3.2.2-1)$$

mit $\text{ord}(C_{xx}) = p \times p$, $a = a_1$ und $|a| < 1$. Die exponentiell abfallende Kovarianzfunktion der Matrix C_{xx} lautet (vgl. Abb. 3.1):

$$C(x_i, x_j) = \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^{|i-j|}. \quad (3.2.2-2)$$

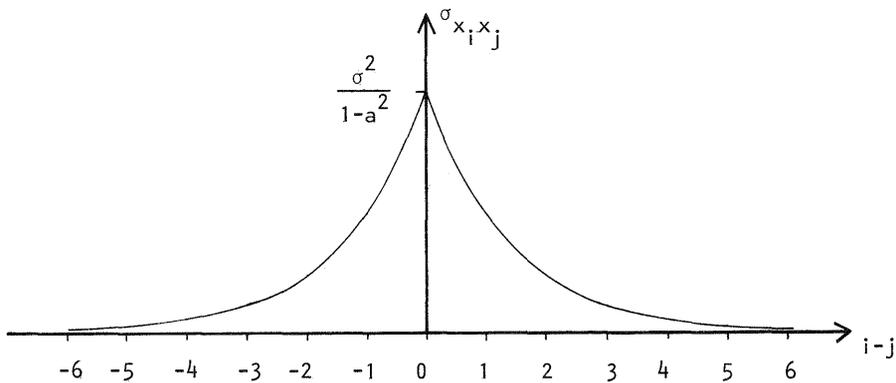


Abb. 3.1: Kovarianzfunktion der Zufallsvariablen des AR(1)-Prozesses ($a=0.5$)

Die Kovarianzmatrix C_{xx} weist immer Töplitzstruktur auf, was für ihre weitere Verarbeitung von Vorteil ist.

An diesem Beispiel zeigt sich deutlich, wie einfach sich die Struktur der Matrix C_{xx} funktional aus einem AR(1)-Prozeß ableiten läßt. Aus dieser funktionalen Behandlung ergibt sich auch die Bevorzugung der konstruktiv definierten stochastischen Prozesse gegenüber den Prozessen, die durch ihre Kovarianzfunktion charakterisiert sind. Die Integration eines konstruktiven Prozesses in ein übergeordnetes mathematisches Modell erleichtert die Schätzung, da sie sich im wesentlichen auf das Funktionalmodell beschränken kann und im stochastischen Modell lediglich unbekannte Varianzen berücksichtigen muß.

Das Modell des AR-Prozesses gestattet neben der Erfassung der Kovarianzstruktur im Funktionalteil auch die Schätzung der in der Regel unbekanntenen Prozeßkoeffizienten a_i .

(3) Schätzung im Modell der autoregressiven Prozesse

Das Modell der autoregressiven Prozesse mit unbekanntenen Prozeßkoeffizienten ist in die Klasse der Gauß-Helmert-Modelle einzuordnen, da die Rekursionsformel in Def. II.3-4 Bedingungsgleichungen mit unbekanntenen Parametern a_i darstellt. Auf eine Beschreibung der Schätzung unter der strengen Betrachtung im Gauß-Helmert-Modell wird hier verzichtet, da eine ausführliche Dar-

stellung bei Bopp, Felgendreher und Krauß (1981) zu finden ist, in der die Parameterschätzung für den autoregressiven Prozeß mit moving average-Anteil (ARMA-Prozeß) behandelt wird, worin als Spezialfall der reine AR-Prozeß enthalten ist.

Zu einer weniger strengen Betrachtung und damit auch zu einem einfacheren numerischen Verfahren gelangt man, wenn die Beobachtungen zum Zeitpunkt t als stochastische und die Beobachtungen zum Zeitpunkt $t-i$ als feste Größen aufgefaßt werden, ähnlich wie dies zum Beispiel bei den Modellen der Polynomausgleichung üblicherweise praktiziert wird. Unter dieser Einschränkung ergibt sich für den AR-Prozeß mit unbekanntem Prozeßkoeffizienten das wesentlich einfachere Gauß-Markoff-Modell:

$$\underline{x} = Z\underline{a} + \underline{\varepsilon} \quad \text{mit } \underline{a} \sim M(\underline{a}, 0), \quad \underline{\varepsilon} \sim M(0, \sigma^2 I) \quad . \quad (3.2.2-3)$$

Die Vektoren und Matrizen sind dabei wie folgt definiert:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p \end{bmatrix}, \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_k \end{bmatrix}, \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_p \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} x_k & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_1 \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ x_{p-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{p-k} \end{bmatrix} .$$

Die Schätzung der unbekanntem Prozeßkoeffizienten im GM-Modell ergibt sich nach Gl. (2.1.1-4) zu

$$\hat{\underline{a}} = (Z^T Z)^{-1} Z^T \underline{x} \quad . \quad (3.2.2-4)$$

Die Schätzung der Prozeßfehler $\underline{\varepsilon}$ und deren Varianz σ^2 lautet nach Gl. (2.1.1-6) und Gl. (2.1.1-8):

$$\hat{\underline{\varepsilon}} = \underline{x} - Z\hat{\underline{a}} \quad \text{bzw. skalar} \quad \hat{\varepsilon}_t = x_t - \sum_{i=1}^k \hat{a}_i x_{t-i} \quad (3.2.2-5)$$

mit $t = k+1, \dots, p$ und

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\underline{\varepsilon}}^T \hat{\underline{\varepsilon}}}{p-2k} \quad \text{bzw. skalar} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{p-2k} \sum_{t=k+1}^p \hat{\varepsilon}_t^2 \quad . \quad (3.2.2-6)$$

Innerhalb des Modells (3.2.2-3) handelt es sich um eine beste lineare erwartungstreue Schätzung. Zieht man aber die Vereinfachungen dieses Modells in Betracht, so weist die Schätzung unter schwachen Voraussetzungen Konsistenz und asymptotische Effizienz als Eigenschaften auf (vgl. Anderson (1971, S. 188) und Fahrmeir/Kaufmann/Ost (1981, S. 241)).

Eine in der Praxis sehr häufig angewandte weitere Vereinfachung der Schätzung führt auf die mit der oben gezeigten asymptotisch äquivalenten Schätzung mit Hilfe der Yule-Walker-Gleichung (vgl. Box/Jenkins (1976), S. 55):

$$\hat{\underline{a}} = K^{-1} \underline{\rho} \quad (3.2.2-7)$$

mit $\underline{\hat{a}} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{a}_k \end{bmatrix}$, $\underline{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_k \end{bmatrix}$ und $K = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdot & \cdot & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdot & \cdot & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdot & \cdot & \rho_{k-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$.

Dabei bedeuten ρ_i die aus der Zeitreihe mit geschätzten Kovarianzen berechneten Autokorrelationskoeffizienten:

$$\rho_i = \frac{\hat{C}(x_t, x_{t+i})}{C(x_t, x_t)} = \frac{\frac{1}{p-i} \sum_{t=1}^{p-i} x_t x_{t+i}}{\frac{1}{p} \sum_{t=1}^p x_t^2} \quad (3.2.2-8)$$

mit dem Korrelationsabstand i und der Anzahl p der Zeitpunkte.

Die weitere Vereinfachung bzw. Abweichung bei der Schätzung mit den Yule-Walker-Gleichungen gegenüber der strengeren Lösung der Schätzung nach Gl. (3.2.2-4) besteht in der homogenen Struktur der Matrix K und des Vektors $\underline{\rho}$, die nicht mit den differenzierten Quadratsummen in den Matrizenprodukten $Z^T Z$ und $Z^T \underline{x}$ identisch ist; z.B. lautet für den Korrelationskoeffizient ρ_2 die zugehörige Kovarianz

$$\hat{C}(x_t, x_{t+2}) = \frac{1}{p-2} \sum_{t=1}^{p-2} x_t x_{t+2} .$$

Das entsprechende Element der Matrix $Z^T Z$ lautet

$$(Z^T Z)_{13} = \sum_{t=k-2}^{p-3} x_t x_{t+2} ,$$

bzw. des Vektors $Z^T \underline{x}$

$$(Z^T \underline{x})_2 = \sum_{t=k-1}^{p-2} x_t x_{t+2} .$$

Die Identität der Haupt- und Nebendiagonalelemente der Matrix $(Z^T Z)$ ist nicht gegeben. Aber für genügend große Zeitreihen wird eine asymptotische Äquivalenz zur Schätzung nach Gl. (3.2.2-4) erreicht (Fuller (1976), S. 334). Eine ausführliche Gegenüberstellung verschiedener Schätzverfahren ist in Kay und Marple (1981, S. 1391ff) angegeben.

(4) Beurteilungskriterien

Bei einer Zeitreihenanalyse mit AR-Prozessen ist neben der Möglichkeit, die Prozeßkoeffizienten zu schätzen, auch die Beurteilung der geschätzten Parameter von Interesse. Fragen nach der Stationarität, Ordnung des Prozesses und Signifikanz der geschätzten Prozeßkoeffizienten sind für die Beurteilung maßgebend.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Stationarität ist u.a. in Box/Jenkins (1976, S. 53f) angegeben. Danach lautet zum Beispiel für den AR(1)-Prozeß die Stationaritätsbedingung:

$$|a_1| < 1 \quad . \quad (3.2.2-9)$$

Signifikanztests für die Prozeßkoeffizienten, bzw. Hypothesentests zur Überprüfung der Prozeßordnung, sind in Anderson (1971) angegeben. Allerdings erfüllen die Tests keine streng allgemeingültigen Kriterien, da sie sich auf ausreichend große Zeitreihen und auf approximierte Verteilungsfunktionen stützen. Strenge statistische Testverfahren zu dieser Problemstellung sind dem Verfasser nicht bekannt.

3.2.3 Wertung und Bezüge

Die vorangegangenen Abschnitte sollten einen Einblick in die stochastischen Prozesse geben und auf ihre Eignung zur Strukturmodellierung von Kovarianzmatrizen durch funktionale Konstruktion hinweisen. Die Beschränkung auf die konstruktiven stochastischen Prozesse ist eng mit der Zielsetzung verbunden, zeitliche Veränderungen unbekannter Parameter durch eine einfache Formulierung in das mathematische Modell zu integrieren.

Bei der Anwendung konstruktiver Prozesse treten Probleme auf, die zum einen auf eine möglichst gute Trendbereinigung zur Erfüllung der Stationaritätseigenschaft und zum anderen auf die Wahl des dem Datenmaterial entsprechenden Prozeßtyps zurückzuführen sind. Ob sich in der Anwendung eine Zeitfolge stochastischer Parameter zum Beispiel besser durch einen reinen AR-Prozeß oder durch einen ARMA-Prozeß modellieren läßt, kann nur durch empirische Untersuchungen festgestellt werden, wofür sich die konstruktiven Prozesse durch die Möglichkeit der Schätzung ihrer Prozeßkoeffizienten sehr gut eignen. In den Problembereich der Festlegung des Prozeßtyps fällt auch die Entscheidung, ob die Prozeßkoeffizienten als feste oder stochastische Parameter behandelt werden. Die Theorie zu den autoregressiven Modellen mit stochastischen Koeffizienten, den RCA-Modellen (random coefficient autoregressive models), ist ausführlich bei Nicholls/Quinn (1982) behandelt. Die in dieser Arbeit vorgenommene Einschränkung auf die reinen autoregressiven Prozesse mit festen Prozeßkoeffizienten beruht im wesentlichen auf deren einfachem Aufbau und auf Ergebnissen, die im Zusammenhang mit empirischen Untersuchungen über das zeitliche Verhalten zusätzlicher Parameter in der Aero-triangulation festgestellt wurden (vgl. Kapitel IV).

Das Problem der Trendbereinigung ist unter Einhaltung der Stationaritätsbedingung bei der Schätzung mit den Yule-Walker-Gleichungen (Gl. (3.2.2-7)) bzw. der Schätzung im GM-Modell (Gl. (3.2.2-4)) nicht so schwerwiegend, da es sich hier um Näherungslösungen handelt, die gegenüber Modellabweichungen weniger empfindlich sind. Dagegen ist diesbezüglich die strenge Schätzung im nichtlinearen Fall des Gauß-Helmert-Modells, vor allem im Grenzbereich der Stationarität, kritisch und weist, wie eigene Untersuchungen ergaben, bei unzureichender Trendbereinigung nur schwache Konvergenz auf.

Abschließend sei an dieser Stelle nochmals auf die Veröffentlichung von Kay und Marple (1981) hingewiesen, in der eine umfangreiche Zusammenfassung über den technischen Entwicklungsstand auf dem Gebiet der diskreten Zeitreihenanalyse dargestellt ist.

Die im Abschnitt 3.2 dieses Kapitels ausgeführten Grundlagen über die autoregressiven Modelle bilden die Voraussetzungen für die Definition des speziell für die Anforderungen in der Aero-triangulation entwickelten kombinierten Modells.

3.3 Analyse von Kovarianzmatrizen

Plausibilitätsüberlegungen und Erfahrungswerte sind in der Anwendung oftmals die Grundlagen zur Beschreibung des stochastischen Modells. Die Variation der Bilddeformationen in der Aerotriangulation legt zum Beispiel ein zeitabhängiges Verhalten, wie es im vorangegangenen Abschnitt 3.2 dargelegt wurde, nahe und kann auch durch empirische Untersuchungen auf der Basis der Schätzung von Prozeßkoeffizienten analysiert werden. Aber häufig besteht Unkenntnis über die komplexen physikalischen Zusammenhänge, welche die Korrelationen zwischen Beobachtungen verursachen. Deshalb sollen in diesem Abschnitt verschiedene Verfahren zur Approximation und Analyse gegebener Kovarianzmatrizen vorgestellt werden, wobei kein Anspruch auf eine vollständige Darlegung aller Verfahren erhoben wird. Wesentliche Gesichtspunkte beim Vergleich dieser Verfahren sind die Eindeutigkeit der Lösung, der numerische Aufwand, Vorgabe bestimmter Annahmen und die Interpretierbarkeit des Ergebnisses. Eine ausführliche mathematische Beschreibung wird nur für das Verfahren der principal components-Analyse (PC) gegeben, auf welches bei den empirischen Untersuchungen dieser Arbeit zurückgegriffen wird. Bei den übrigen Verfahren werden die entsprechenden Literaturstellen angegeben. Dieser Abschnitt soll somit keine tiefgehende Diskussion des Themenbereichs der Analyse von Kovarianzmatrizen bilden, sondern lediglich die Entscheidungsgründe und Grundlagen für das Verfahren der PC-Analyse offenlegen.

3.3.1 Vergleich verschiedener Analyseverfahren

Analyseverfahren von Kovarianzmatrizen versuchen das Korrelationsverhalten von Zufallsvariablen (Beobachtungen) durch eine minimale Anzahl von nicht direkt beobachtbaren Parametern oder im Hintergrund stehenden Zufallsvariablen, auch als Faktoren oder Effekte bezeichnet, zu beschreiben. Die Verfahren lassen sich in zwei Gruppen unterteilen. Die erste Gruppe geht davon aus, daß keine Informationen über die Faktoren vorhanden sind. Dies entspricht im allgemeinen dem am Anfang von Untersuchungen gegebenen Kenntnisstand über die stochastischen Beziehungen der Beobachtungen. Die zweite Gruppe ermöglicht eine Eingabe-Antwort-Analyse, d.h. vorgegebene Strukturen, mit denen die zu analysierende Kovarianzmatrix approximiert wird, werden mit Hilfe geeigneter Testverfahren überprüft. Die Anwendung dieser Gruppe von Verfahren ist nur sinnvoll, wenn bereits aus Analysen der ersten Gruppe oder aus bekannten Zusammenhängen Vorinformationen über Faktoren oder durch diese hervorgerufenen Strukturen existieren, bzw. plausibel angenommen werden können.

Die in diesem Abschnitt diskutierten Analyseverfahren basieren auf den Darlegungen von Förstner und Schroth (1982) und sind in Tabelle 3.1 zusammengefaßt. Dabei ist die Faktorenanalyse und die PC-Analyse der ersten Gruppe, die Varianzkomponenten-Analyse und das Analyseverfahren nach Ebner der zweiten Gruppe zuzurechnen. Die Tabelle beinhaltet zu jedem Verfahren die vorgegebenen Informationen, die frei wählbaren bzw. zu schätzenden Parameter und das Analysemodell, in dem die Schätzung der unbekannt Parameter erfolgt.

a) Faktorenanalyse

Die Faktorenanalyse ist das flexibelste aller vorgestellten Verfahren. Es fordert keine Vorinformationen und gestattet die Schätzung der Diagonalelemente d_i und die Bestimmung der orthogonalen Vektoren $c^{(k)} = e^{(k)} \sqrt{\lambda_k^{-1}}$. Eine Beschreibung der Schätzung im Modell der Faktorenanalyse,

1) λ = Vektor der Eigenwerte

ohne die hier praktizierte Einschränkung auf orthogonale Faktoren ist in Press (1972, S. 307ff) gegeben. Die Schätzung hat allerdings keine eindeutige Lösung, was die Interpretation der resultierenden Faktoren und deren Struktur oftmals fragwürdig macht. Die approximierende Matrix ist in der Regel positiv definit.

Verfahren	vorgegebene Informationen	freie Parameter	Analysemodell	Bemerkungen
Faktorenanalyse	—	$e^{(\kappa)}, \lambda_{\kappa}, d_i, k$	$C_{11} = \text{diag}(d_i) + \sum_{\kappa} e^{(\kappa)} e^{(\kappa)T}$	$e^{(\kappa)}$.. orthogonale Vektoren
Principal Components Analyse	—	$e^{(\kappa)}, \lambda_{\kappa}, k$	$C_{11} = \sum_{\kappa} e^{(\kappa)} e^{(\kappa)T}$	$e^{(\kappa)}$.. orthogonale Vektoren
Varianzkomponenten-Analyse	v_{κ}	τ_{κ}, k	$C_{11} = \sum_{\kappa} \tau_{\kappa} v_{\kappa}$	—
Analyse nach Ebner	c_{ij}, g_{κ}	$\sigma_o^2, t_{\kappa\kappa'}, k$	$C_{11} = \sigma_o^2((c_{ij}) + \sum_{\kappa, \kappa'} g^{(\kappa)} g^{(\kappa')T} t_{\kappa\kappa'})$	—

Tabelle 3.1: Analyseverfahren von Kovarianzmatrizen (nach Förstner und Schroth (1982))
 $(o(C_{11}) = n \times n; \kappa, \kappa' = 1, \dots, k; i, j = 1, \dots, n)$

b) Principal Components-Analyse

Die PC-Analyse erfordert ebenfalls keine Vorinformationen und beruht im wesentlichen auf einer einfachen Eigenwertzerlegung der Kovarianzmatrix mit einer eindeutigen Lösung. Die Approximation verwendet nur die dominierenden Eigenwerte λ_{κ} und die zugehörigen Eigenvektoren $e^{(\kappa)}$. Der größte Eigenwert entspricht dabei der Varianz der ersten Komponente, usw.. Die approximierende Matrix ist singulär, aber positiv semidefinit. Es besteht die Möglichkeit, den einzelnen Komponenten physikalische Effekte zuzuordnen. Eine Beschreibung des Analyseverfahrens ist im folgenden Abschnitt 3.3.2 angegeben.

c) Varianzkomponenten-Analyse

Die Approximation mit Hilfe der Varianzkomponenten-Schätzung setzt Informationen über die Struktur- oder Basismatrizen v_{κ} voraus. Die LS-Schätzung der Varianzkomponenten τ_{κ} ist in Pukelsheim und Styan (1979) angegeben. Die approximierende Matrix ist nicht notwendigerweise positiv definit. Die Einführung einer speziellen Jordan-Algebra für die Basismatrizen garantiert aber die positive Definitheit und macht auch die Berechnung der 4. Momente zur Schätzung der Varianzkomponenten überflüssig. Eine ausführliche Diskussion verschiedener Basismatrizen unter Berücksichtigung der Jordan-Algebra ist in Förstner und Schroth (1982) zu finden.

d) Analyseverfahren nach Ebner

Das Analyseverfahren nach Ebner (1975), aufbauend auf der Theorie der inneren Genauigkeit nach Meissl, zerlegt die zu approximierende Matrix in eine gewählte Kovarianzmatrix $\sigma_o^2(c_{ij})$ und einen Anteil, der die gewichteten Effekte von Filterparametern, d.h. systematische Effekte, beinhaltet. Aus Vorinformationen ist die Matrix (c_{ij}) und die Struktur der Filterparameter zu entnehmen. Die Schätzung der unbekanntenen Gewichte $t_{\kappa\kappa'}$ erfolgt analog zum Analyseverfahren der Varianzkomponenten-Schätzung. Die getroffenen Annahmen lassen sich nach der Analyse mit statistischen Tests auf Signifikanz überprüfen, so daß mit diesem Verfahren ein eindeutiges und klares Hilfsmittel für die Kovarianzanalyse gegeben ist (vgl. Förstner und Schroth (1982)).

Die Entscheidung für eines der Analyseverfahren ist primär vom Stand der Vorinformationen abhängig, d.h. man muß die Auswahl innerhalb der beiden Gruppen treffen. Bei der ersten Gruppe ist die PC-Analyse dem zwar noch allgemeineren Verfahren der Faktorenanalyse nach operationellen Gesichtspunkten vorzuziehen, da bei letzterem durch die Einführung von Bedingungen zur Lösbarkeit die Interpretation der Faktoren erheblich erschwert wird und der numerische Aufwand über dem der PC-Analyse liegt.

Bei der zweiten Gruppe ist das Verfahren nach Ebner vorzuziehen. Denn es weist keine Schwierigkeiten mit der positiven Definitheit der approximierten Matrix auf und löst auch das Problem des Datumbezuges, da die Datumparameter direkt in der Konstruktion enthalten sind. Die Varianzkomponenten-Analyse dagegen besitzt durch die Anwendung der speziellen Jordan-Algebra einen komplizierten Aufbau der Basismatrizen. Die Integration physikalischer Effekte in die Basismatrizen bereitet erhebliche Schwierigkeiten und es ist nicht immer möglich, diese im System der Jordan-Algebra zu formulieren.

Da im Bereich der Aerotriangulation nur unzureichende Kenntnis über die Struktur der Kovarianzmatrix der Beobachtungen herrscht, ist der Einsatz der PC-Analyse für die ersten Untersuchungen auf diesem Gebiet aus o.g. Gründen als sinnvoll zu erachten.

3.3.2 Principal Components - Analyse

Die PC-Analyse basiert auf der Spektraldarstellung nach einer Eigenwertzerlegung von Kovarianzmatrizen. Sie erlaubt eine Beschreibung von rein mathematischen Strukturen bzw. Effekten, welche der Kovarianzmatrix zugrunde liegen. Deshalb nimmt man an, daß die Variation einzelner Effekte, z.B. bestimmte Typen von Bilddeformationen, sich im Sinne der Theorie der Elementarfehler (vgl. Pelzer (1980), S. 39) beschreiben lassen mit

$$\underline{l} = \sum_i e^{(i)} \underline{\varepsilon}_i \quad , \quad (3.3.2-1)$$

wobei sich der Beobachtungsvektor \underline{l} als Summe von festen Vektoren $e^{(i)}$, beeinflusst durch die Elementarfehler $\underline{\varepsilon}_i \sim N(0, \sigma_i^2)$, darstellen läßt. Die Summe der Einzeleffekte dieser Elementarfehler führt auf die "wahren" Fehler, die zum Beispiel von Bild zu Bild variierende Deformationen sein können. Aus Gl. (3.3.2-1) ergibt sich die Dispersion der Beobachtungen zu

$$D(\underline{l}) = \sum_i e^{(i)} e^{(i)T} \sigma_i^2 = \sum_i c^{(i)} c^{(i)T} \quad . \quad (3.3.2-2)$$

Setzt man $\lambda = \sigma_i^2$, dann ergibt sich analog zu Gl. (3.3.2-2) die Eigenwertzerlegung der Matrix C_{11} :

$$C_{11} = E \Lambda E^T = \sum_i \lambda_i e^{(i)} e^{(i)T} = \sum_i c^{(i)} c^{(i)T} \quad , \quad (3.3.2-3)$$

mit der Modellmatrix E und der Spektralmatrix Λ .

Die PC-Analyse ergibt bei einer gegebenen Kovarianzmatrix aus der Spektralzerlegung in dyadische Produkte gegenseitig orthogonale Vektoren $c^{(i)}$. Der Vektor λ ($\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$) enthält die Eigenwerte und die Modalmatrix E die zugehörigen Eigenvektoren.

Die eigentliche PC-Analyse ist damit abgeschlossen. Üblicherweise untersucht man das Eigenwertspektrum und versucht die Kovarianzmatrix durch wenige, aber dominierende Effekte zu approximieren. Man kann aber auch weitergehen und die den einzelnen Eigenwerten zugehörigen Effekte analysieren.

Jedes Element $c_j^{(i)}$ des Vektors $c^{(i)} = e^{(i)} \sqrt{\lambda_i}$ läßt sich als eine Variation der Beobachtung l_j interpretieren, d.h. es stellt die Streuung um den Erwartungswert der Beobachtung l_j dar. Auf das Beispiel der Bilddeformation angewandt ergibt sich aus der PC-Analyse für jede Bildkoordinate eine dem jeweiligen Effekt zugeordnete Streuung. Die graphische Darstellung der Streuungen bezogen auf die Bildpunkte in einem Vektordiagramm ermöglicht nun die Interpretation der einzelnen Effekte. Da es sich um eine rein mathematische Zerlegung der Kovarianzmatrix handelt, wird es nicht immer möglich sein, diese Effekte als physikalische Einflüsse zu interpretieren. Das Analyseverfahren erreicht seine Grenzen, wenn zwischen den Eigenwerten nur geringfügige Unterschiede im Betrag bestehen, d.h. keine dominierenden Effekte vorhanden sind. Es stellt aber eine Möglichkeit dar, erste Strukturanalysen mit relativ einfachen Hilfsmitteln vorzunehmen, auch in einem komplexen physikalischen Ablauf wie dem photogrammetrischen Aufnahmeprozeß.

Zusammenfassend bildet der Abschnitt 3 die theoretischen Voraussetzungen für den stochastischen Teil des kombinierten Modells. Bei einem sich aus mehreren Meßepochen zusammensetzenden mathematischen Modell, wie es zum Beispiel in der Aerotriangulation vorliegt, lassen sich Korrelationen zwischen den Epochen mit Hilfe der Zeitreihenanalyse untersuchen und über stochastische Prozesse modellieren. Strukturanalysen für die Kovarianzmatrizen in den einzelnen Meßepochen legen die Grundlage für die weitere Modellierung im Sinne des Primärfehlerkonzepts.

4. Das kombinierte Modell

Das kombinierte Modell stellt eine Synthese aus den im Abschnitt 2.1.3 und 2.1.4 definierten gemischten Modellen, den autoregressiven Modellen (Abschnitt 3.2) und gewissermaßen auch aus der multivariaten Betrachtungsweise des Modells E (Abschnitt 2.2.1) dar. Es läßt daher feste und stochastische unbekannte Parameter zu und erfaßt darüber hinaus die durch zeitliche Aufeinanderfolge von in sich abgeschlossenen Meßvorgängen (Meßepochen) entstandenen Korrelationen zwischen den stochastischen Parametern mit Hilfe eines stochastischen Prozesses. Den Hintergrund für diese Modellentwicklung bilden die unmittelbar aufeinanderfolgenden Aufnahmevorgänge zur Erzeugung eines Bildverbandes in der Aerotriangulation. Aber auch im Bereich der Deformationsüberwachung oder bei anderen sich zeitlich wiederholenden Meßvorgängen kann man sich den Einsatz dieses Modells, eventuell für den speziellen Fall in modifizierter Form, vorstellen.

An dieser Stelle soll auch auf das Modell von Ebner und Höbner (1978) aus dem Gebiet der Entzerrung von Scanneraufnahmen hingewiesen werden, bei dem ähnlich dem hier aufgezeigten Modell stochastische Prozesse zwischen Parametern der äußeren Orientierung angesetzt werden.

Um das kombinierte Modell auch für die Anwendung sinnvoll zu gestalten, müssen einige Einschränkungen und Abgrenzungen gegenüber anderen unter gleichen Voraussetzungen formal möglichen Modelldefinitionen vorgenommen werden. Dies widerspricht nicht den Zielsetzungen der Modellerweiterung im Sinne der möglichst optimalen Approximation an die physikalische Realität, denn diese Anpassung muß auch ökonomischen Gesichtspunkten, wie das Arbeiten im Modell mit den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln, Rechnung tragen.

Die wesentlichste Einschränkung ist die Verwendung des autoregressiven Prozesses erster Ordnung zur Modellierung der Korrelationen zwischen den Epochen. Die Entscheidung für den AR-Prozeß ist in den Abschnitten 3.1 und 3.2 ausführlich dargelegt worden. Die Beschränkung auf einen Prozeß erster Ordnung ist mit bis jetzt vorliegenden empirischen Untersuchungen über das zeitliche

Verhalten zusätzlicher Parameter in der Aerotriangulation mit Hilfe der AR-Prozesse zu rechtfertigen (vgl. Kapitel IV). Danach erwiesen sich die Prozeßkoeffizienten a_i für $i > 1$ als nicht signifikant. Ein weiterer Grund ist die umfangreichere Struktur eines Prozesses höherer Ordnung, wodurch die Praktikabilität des Modells aber nicht wesentlich beeinflußt wäre, da die Töplitzstrukturen erhalten bleiben würden.

Schaffrin (1983) schlägt in Bezug auf die Berücksichtigung von Korrelationen zwischen photogrammetrischen Reseauaufnahmen, wie sie von Förstner und Schroth (1982) untersucht wurden, vor, für jede Reseaukoordinate getrennt einen stochastischen Prozeß anzusetzen. Im Gegensatz hierzu soll beim kombinierten Modell lediglich ein Prozeß für alle stochastischen Parameter Verwendung finden, da zur Zeit für einen allgemeineren Ansatz, eventuell sogar mit zusätzlichen Korrelationen zwischen den Zeitreihen, wie er bei der Kalmanfilterung angewandt wird, nicht genügend Informationen aus empirischen Untersuchungen zur Verfügung stehen.

Unter diesen Einschränkungen wird im kombinierten Modell für alle unbekanntes stochastischen Parameter ein identisches Zeitverhalten zugrunde gelegt, welches sich durch einen AR(1)-Prozeß beschreiben läßt, d.h. die Prozeßkoeffizienten sind für jede Zeitreihe eines Parameters gleich.

Das kombinierte Modell wird im folgenden analog zum erweiterten gemischten Modell in zwei Versionen dargestellt. Zuerst werden in der Form des Modells D1 alle Zufallseigenschaften im stochastischen Modell integriert, was auf eine komplex strukturierte Kovarianzmatrix der Beobachtungen führt. Im nächsten Schritt werden die konstruktiven Eigenschaften des AR-Prozesses zur Modelldefinition mit Schwerpunkt im Funktionalteil herangezogen, wodurch die Form des Modells D2 erreicht wird. Die Identität der Versionen wird im Modellraum gezeigt. Die Schätzungseigenschaften und die Diskussion des Modells schließen diesen Abschnitt ab.

4.1 Modelldefinition

Das kombinierte Modell setzt sich aus einer festen unbekanntes Parametergruppe x und aus einer stochastischen unbekanntes Parametergruppe z zusammen. Die Parametergruppe z variiert um einen Mittelwert z_0 , der gleichzeitig den Trend eines AR(1)-Prozesses realisiert. Die Variation ist zum einen von den Korrelationen, die durch den AR(1)-Prozeß beschrieben werden, zwischen den um den Trend reduzierten lokalen Parametergruppen $\underline{t}^{(k)}$ pro Epoche, zum anderen von der Zufallseigenschaft des einzelnen Parameters $\underline{t}_i^{(k)}$ und der Korrelation zwischen den Parametern einer Epoche, repräsentiert durch die Kovarianzmatrix C_{ss} , abhängig. Die Matrix C_{ss} sei bekannt und konstant über alle Epochen, ebenso die Anzahl der Parameter $\underline{t}^{(k)}$.

4.1.1 Das kombinierte Modell mit erweitertem stochastischen Teil

Beim kombinierten Modell mit erweitertem stochastischen Teil in der Form des Modells D1 werden analog zu Gl. (2.1.4-7) die stochastischen Komponenten zusammengefaßt:

$$\underline{y} = \dot{B}\underline{t} + \underline{\varepsilon} \quad \text{und} \quad C_{yy} = C_{\varepsilon\varepsilon} + \dot{B}C_{zz}\dot{B}^T \quad (4.1.1-1)$$

Die Integration des AR(1)-Prozesses bestimmt die Struktur der Matrix \dot{B} , die sich schreiben läßt mit

$$\dot{B} = \text{diag}(B^{(k)})(D^{-1} \otimes I_q) \quad , \quad (4.1.1-2)$$

wobei gilt:

- \dot{B} = Koeffizientenmatrix der stochastischen unbekannt Parameter ($o(\dot{B}) = n \times pq$)
- $B^{(k)}$ = Koeffizientenmatrix zur Epoche k ($o(B^{(k)}) = n_k \times q$)
- $\text{diag}(B^{(k)})$ = Blockdiagonalmatrix mit den Matrizen $B^{(k)}$ auf der Hauptdiagonalen
- D = Koeffizientenmatrix des AR(1)-Prozesses, siehe Anhang A3 ($o(D) = p \times p$)
- n_k = Anzahl der Beobachtungen zur Epoche k
- p = Anzahl der Epochen
- q = Anzahl der Parameter $\underline{t}^{(k)}$ zur Epoche k (über alle Epochen gleich)

Das gesamte zeitabhängige Verhalten der stochastischen Parameter \underline{t} ist in der Kovarianzmatrix C_{zz} enthalten. In der multivariaten Darstellung mehrerer Zeitreihen mit gleichem stochastischen Verhalten zwischen den Epochen ergibt sich (vgl. Anhang A4):

$$C_{zz} = C_{\eta\eta} \otimes Q_{ss} = Q_{\eta\eta} \otimes C_{ss} \quad , \quad (4.1.1-3)$$

wobei C_{ss} die Kovarianzmatrix der stochastischen Parameter \underline{t} ohne deren zeitabhängigen Anteil darstellt. Die Matrix C_{ss} entspricht der Varianz σ^2 des univariaten Falls (vgl. Anhang A2, Gl. (A2-3)).

Somit läßt sich das kombinierte Modell in der Form des Modells D1 (Typ SFF) wie folgt definieren:

Definition II.4-1: Kombiniertes Modell (Modell G1)

$\underline{l} = Ax + Bz_o + \underline{\gamma}$	$x \sim M(x, 0)$
	$z_o \sim M(z_o, 0)$
	$\underline{\gamma} \sim M(0, C_{\gamma\gamma})$
$\underline{l} \sim M(Ax + Bz_o, C_{\gamma\gamma})$	

Hierbei bedeutet (über alle Epochen):

- \underline{l} = Zufallsvektor der n Beobachtungen ($o(\underline{l}) = n \times 1$; $n = n_1 + \dots + n_k + \dots + n_p$)
- A = Koeffizientenmatrix der festen unbekannt Parametergruppe ($o(A) = n \times u$, $r(A) = u$)
- B = Koeffizientenmatrix der unbekannt Parametergruppe der Erwartungswerte z_o ; setzt sich aus den Submatrizen $B^{(k)}$ zusammen ($o(B) = n \times q$, $r(B) = q$)
- x = Vektor der festen unbekannt Parametergruppe ($o(x) = u \times 1$)
- z_o = Vektor der unbekannt Erwartungswerte des Zufallsvektors \underline{z} ; entspricht dem Trend der Zeitreihe ($o(z_o) = q \times 1$)
- $\underline{\gamma}$ = Zufallsvektor der gesamten Zufallseigenschaften ($o(\underline{\gamma}) = n \times 1$)
- $C_{\gamma\gamma}$ = Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $\underline{\gamma}$ ($o(C_{\gamma\gamma}) = n \times n$, $r(C_{\gamma\gamma}) = n$)

Die Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit, d.h. die Korrelation der Parametergruppen $\underline{t}^{(k)}$ zwischen den Epochen, drückt sich in der Struktur der Kovarianzmatrix der Beobachtungen ($C_{11} = C_{\gamma\gamma}$) aus:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= C_{\varepsilon\varepsilon} + \dot{B}C_{zz}\dot{B}^T & (4.1.1-4) \\
&= C_{\varepsilon\varepsilon} + \text{diag}(B^{(k)}) \left(\frac{1}{1-a^2} T \otimes C_{ss} \right) (\text{diag}(B^{(k)}))^T \\
&= \begin{bmatrix} C_{\varepsilon\varepsilon}^{(1)} + \frac{1}{1-a^2} B^{(1)} C_{ss} B^{(1)T} & \frac{a}{1-a^2} B^{(1)} C_{ss} B^{(2)T} & \dots & \dots & \frac{a^{p-1}}{1-a^2} B^{(1)} C_{ss} B^{(p)T} \\ & C_{\varepsilon\varepsilon}^{(2)} + \frac{1}{1-a^2} B^{(2)} C_{ss} B^{(2)T} & \dots & \dots & \frac{a^{p-2}}{1-a^2} B^{(2)} C_{ss} B^{(p)T} \\ & & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & C_{\varepsilon\varepsilon}^{(p)} + \frac{1}{1-a^2} B^{(p)} C_{ss} B^{(p)T} \end{bmatrix} \\
&\text{symmetrisch}
\end{aligned}$$

oder allgemein für die Epochen k und k' :

$$C(\underline{1}^{(k)}, \underline{1}^{(k)}) = C_{\varepsilon\varepsilon}^{(k)} + \frac{1}{1-a^2} B^{(k)} C_{ss} B^{(k)T}$$

und

$$C(\underline{1}^{(k)}, \underline{1}^{(k')}) = \frac{1}{1-a^2} B^{(k)} C_{ss} B^{(k')T} a^{|k-k'|} \quad .$$

Dabei bedeutet:

$C_{\varepsilon\varepsilon}^{(k)}$ = Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $\underline{\varepsilon}$ der Beobachtungsfehler zur Epoche k ($\text{o}(C_{\varepsilon\varepsilon}^{(k)}) = n_k \times n_k$)

C_{ss} = Kovarianzmatrix der stochastischen Parameter \underline{t} ohne zeitabhängigen Korrelationsanteil; konstant über alle Epochen ($\text{o}(C_{ss}) = q \times q$)

T = Töplitzmatrix (vgl. Gl. (3.2.2-1))

a = Prozeßkoeffizient des AR(1)-Prozesses

Damit wird der zeitabhängige Fehleranteil der stochastischen Parametergruppe \underline{t} durch den Koeffizienten $a^{|k-k'|} (1-a^2)^{-1}$ und der lokale Fehleranteil durch das Matrizenprodukt $B^{(k)} C_{ss} B^{(k')T}$ im stochastischen Modell beschrieben.

Geht man von einem gleichen Design und gleicher Meßgenauigkeit pro Epoche aus, d.h.

$$B^{(k)} = \bar{B} \quad \text{und} \quad C_{\varepsilon\varepsilon}^{(k)} = \bar{C}_{\varepsilon\varepsilon} \quad ,$$

so ergibt sich als Spezialisierung die Gleichung (4.1.1-4) in der Form

$$C_{11} = (I_p \otimes \bar{C}_{\varepsilon\varepsilon}) + \frac{1}{1-a^2} (T \otimes \bar{B} C_{ss} \bar{B}^T) \quad . \quad (4.1.1-6)$$

Das Modell G1 ist somit vom Aufbau her mit dem GM-Modell identisch, wobei allerdings der Kovarianzmatrix der Beobachtungen eine strenge Strukturierung zugrunde gelegt wird.

4.1.2 Das kombinierte Modell mit erweitertem Funktionalteil

In Analogie zum Modell D2 soll nun durch zusätzliche Beobachtungsgleichungen das stochastische Verhalten der Parameter \underline{t} ausgedrückt werden, womit sich wiederum die Struktur des GM-Modells ergibt:

Definition II.4-2: Kombiniertes Modell (Modell G2)

$\underline{1} = Ax + Bz_o + \text{diag}(B^{(k)})t + \underline{\varepsilon}$	$x \sim M(x, 0)$
$\underline{0} = (D \otimes I_q)t + \underline{\eta}$	$z_o \sim M(z_o, 0)$
	$t \sim M(t, 0)$
	$\begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{\eta} \end{bmatrix} \sim M \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{\varepsilon\varepsilon} & 0 \\ 0 & C_{zz} \end{bmatrix} \right)$
$\begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \sim M \left(\begin{bmatrix} Ax + Bz_o + \text{diag}(B^{(k)})t \\ (D \otimes I_q)t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{\varepsilon\varepsilon} & 0 \\ 0 & C_{zz} \end{bmatrix} \right)$	

Ergänzend zum Modell G1 bedeutet:

\underline{t} = Vektor der lokalen Parametergruppen, $\underline{t} = (t_i^{(k)})$, ($o(\underline{t}) = pq \times 1$)

$\underline{\varepsilon}$ = Zufallsvektor der Beobachtungsfehler ($o(\underline{\varepsilon}) = n \times 1$)

$\underline{\eta}$ = Konsistenzparameter der zusätzlichen Beobachtungsgleichungen ($o(\underline{\eta}) = pq \times 1$)

C_{zz} = Kovarianzmatrix der zusätzlichen Beobachtungsgleichungen ($o(C_{zz}) = pq \times pq$, $r(C_{zz}) = pq$)

Der AR(1)-Prozeß ist beim Modell G2 direkt in den zusätzlichen Beobachtungsgleichungen im Funktionalteil integriert. Dadurch ergibt sich für die Kovarianzmatrix C_{zz} der zusätzlichen Beobachtungsgleichungen die Gl. (4.1.1-3).

4.2 Modelläquivalenz und Schätzung

a) Modelläquivalenz

Die Identität der Modelle G1 und G2 kann im Modellraum durch Substitution nachgewiesen werden. Das Modell G2 läßt sich in das Modell G1 überführen, indem die Gleichungen der zusätzlichen Beobachtungen in die Gleichungen der Beobachtungen $\underline{1}$ eingesetzt werden:

$$\underline{1} = Ax + Bz_o - \text{diag}(B^{(k)})(D^{-1} \otimes I_q)\underline{\eta} + \underline{\varepsilon} \quad .$$

Mit $\underline{\eta} = -\underline{t}$, $\dot{B} = \text{diag}(B^{(k)})(D^{-1} \otimes I_q)$ und $\underline{\gamma} = \dot{B}\underline{t} + \underline{\varepsilon}$ ergibt sich das Modell G1:

$$\underline{1} = Ax + Bz_o + \underline{\gamma} \quad \text{und} \quad D(\underline{1}) = \dot{B}C_{zz}\dot{B}^T + C_{\varepsilon\varepsilon} \quad .$$

b) Schätzung

Die Schätzung in den Modellen G1 und G2 ist, wie im Abschnitt 2.1.4 gezeigt, identisch. Führt man eine gemeinsame Koeffizientenmatrix $G = [A \ B]$ und einen gemeinsamen Parametervektor $k^T = [x^T \ z_o^T]$ ein, so läßt sich das Modell G2 wie folgt schreiben:

$$\begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & \text{diag}(B^{(k)}) \\ 0 & D \otimes I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{k} \\ \underline{t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{\eta} \end{bmatrix}, \quad D \begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\varepsilon\varepsilon} & 0 \\ 0 & C_{zz} \end{bmatrix}. \quad (4.2-1)$$

Analog zu den Gleichungen (2.1.4-9) und (2.1.4-10) erhält man die Schätzung der unbekannt Parameter mit

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{k}} \\ \hat{\underline{t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^T & 0 \\ \text{diag}(B^{(k)})^T & D^T \otimes I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} & 0 \\ 0 & C_{zz}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{0} \end{bmatrix}, \quad (4.2-2)$$

wobei für die Normalgleichungsmatrix N gilt:

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^T C_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} G & G^T C_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} \text{diag}(B^{(k)}) \\ \text{diag}(B^{(k)})^T C_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} G & \text{diag}(B^{(k)})^T C_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} \text{diag}(B^{(k)}) + (D \otimes I_q)^T C_{zz}^{-1} (D \otimes I_q) \end{bmatrix}.$$

Die Submatrix N_{22} läßt sich mit $C_{zz} = Q_{\eta\eta} \otimes C_{ss}$ schreiben als

$$N_{22} = \text{diag}(B^{(k)})^T C_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} \text{diag}(B^{(k)}) + (D^T Q_{\eta\eta}^{-1} D \otimes C_{ss}^{-1}). \quad (4.2-3)$$

Explizit ergibt sich für die Schätzung

$$\begin{aligned} \hat{\underline{k}} &= (G^T (C_{\varepsilon\varepsilon} + \dot{B} C_{zz} \dot{B}^T)^{-1} G)^{-1} G^T (C_{\varepsilon\varepsilon} + \dot{B} C_{zz} \dot{B}^T)^{-1} \underline{1} \\ \hat{\underline{t}} &= \frac{1}{1-a^2} (T \otimes C_{ss}) \text{diag}(B^{(k)})^T (C_{\varepsilon\varepsilon} + \dot{B} C_{zz} \dot{B}^T)^{-1} (\underline{1} - G \hat{\underline{k}}) \end{aligned} \quad (4.2-4)$$

mit $\dot{B} C_{zz} \dot{B}^T = \text{diag}(B^{(k)}) \left(\frac{1}{1-a^2} T \otimes C_{ss} \right) \text{diag}(B^{(k)})^T$ und $\frac{1}{1-a^2} (T \otimes C_{ss}) = (D^T Q_{\eta\eta}^{-1} D \otimes C_{ss}^{-1})^{-1}$.

Die Dispersion der unbekannt festen Parameter lautet:

$$D(\hat{\underline{k}}) = (G^T (C_{\varepsilon\varepsilon} + \dot{B} C_{zz} \dot{B}^T) G)^{-1}, \quad (4.2-5)$$

wobei eine explizite Darstellung für die Parameter $\hat{\underline{x}}$ und $\hat{\underline{z}}_0$ analog zur Gleichung (2.1.2-2) erfolgt. Für die Dispersion der geschätzten stochastischen Parameter $\hat{\underline{t}}$ ergibt sich nach Gl. (2.1.3-4):

$$D(\hat{\underline{t}}) = C_{t_Y} C_{\gamma\gamma}^{-1} C_{t_Y}^T - C_{t_Y} C_{\gamma\gamma}^{-1} G (G^T C_{\gamma\gamma}^{-1} G)^{-1} G^T C_{\gamma\gamma}^{-1} C_{t_Y}^T, \quad (4.2-6)$$

mit $C_{\gamma\gamma} = C_{\varepsilon\varepsilon} + \dot{B} C_{zz} \dot{B}^T$ und $C_{t_Y} = \frac{1}{1-a^2} (T \otimes C_{ss}) \text{diag}(B^{(k)})^T$.

Die Schätzung des Fehlervektors $\underline{\varepsilon}$ lautet:

$$\hat{\underline{\varepsilon}} = \underline{1} - G \hat{\underline{k}} - \text{diag}(B^{(k)}) \hat{\underline{t}} = C_{\varepsilon\varepsilon} (\dot{B} C_{zz} \dot{B}^T)^{-1} \text{diag}(B^{(k)}) \hat{\underline{t}}, \quad (4.2-7)$$

und dessen Dispersion

$$D(\hat{\underline{\epsilon}}) = C_{11} - [A \ B \ \text{diag}(B^{(k)})] \begin{bmatrix} C_{\hat{x}\hat{x}} & C_{\hat{x}\hat{z}_0} & 0 \\ & C_{\hat{z}_0\hat{z}_0} & 0 \\ \text{sym.} & & C_{\hat{t}\hat{t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T \\ B^T \\ \text{diag}(B^{(k)})^T \end{bmatrix}. \quad (4.2-8)$$

Die geschätzte Varianz der Gewichtseinheit lautet:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(\underline{1} - G\hat{k})^T Q_{11}^{-1} (\underline{1} - G\hat{k})}{n - u - q}. \quad (4.2-9)$$

c) Erweiterung der Schätzung auf Parameter des stochastischen Modells

(1) Das Modell G2 gestattet bei Vorgabe der Kovarianzmatrix C_{zz} eine zusätzliche Schätzung des Prozeßkoeffizienten a im Funktionalmodell. Dies führt auf eine nicht-lineare Funktion bei den zusätzlichen Beobachtungsgleichungen, d.h. es muß eine Linearisierung bis zu Gliedern 1. Ordnung vorgenommen werden und der Schätzalgorithmus von Näherungswerten für die Unbekannten aus iterativ ablaufen. Da der Prozeßkoeffizient auch im stochastischen Modell in der Matrix $Q_{\eta\eta}$ auftritt, erfolgt mit jeder Iteration eine Anpassung der Kovarianzmatrix C_{zz} . Die Schätzung des Prozeßkoeffizienten im Modell G1 ist nur über die VCC-Schätzung möglich, wobei aber der numerische Aufwand unverhältnismäßig hoch gegenüber der Schätzung im Modell G2 ist.

(2) Neben der Schätzung des Koeffizienten a läßt sich im Modell G2 auch verhältnismäßig einfach die Kovarianzmatrix C_{ss} mit Hilfe des VCC-Modells schätzen. Besonders gering ist der numerische Aufwand, wenn es sich bei den lokalen Parametersätzen $\underline{t}^{(k)}$ um gegenseitig orthogonale Parameter handelt, d.h. die Matrix C_{ss} ergibt sich als Diagonalmatrix und wenn die Matrix $C_{\epsilon\epsilon}$ ebenfalls Diagonalstruktur aufweist. Wendet man dann das Schätzverfahren nach Förstner an (vgl. G1. (2.2.2-3)), so ergeben sich die Varianzkomponenten für einzelne Beobachtungsgruppen direkt aus den einzelnen Anteilen an der Varianz der Gewichtseinheit:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\hat{\epsilon}_1^2 p_1 + \hat{\epsilon}_2^2 p_2 + \dots + \hat{\epsilon}_n^2 p_n}{r_1 + r_2 + \dots + r_n} \\ &= \frac{\hat{\sigma}_1^2 \sum_i r_{i1} + \hat{\sigma}_2^2 \sum_i r_{i2} + \dots + \hat{\sigma}_n^2 \sum_i r_{in}}{\sum_i r_{i1} + \sum_i r_{i2} + \dots + \sum_i r_{in}}, \end{aligned} \quad (4.2-10)$$

wobei n die Gruppenanzahl bedeutet. Für die einzelne Beobachtungsgruppe j gilt dann nach Förstner (1979):

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{\sum_i \hat{\epsilon}_{ij}^2 p_{ij}}{\sum_i r_{ij}} \quad \text{mit} \quad r_{ij} = 1 - p_{ij} \hat{g}_{ij}. \quad (4.2-11)$$

Dabei bedeutet:

$\hat{\epsilon}_{ij}$ = i -te Verbesserung der Gruppe j
 r_{ij} = i -ter Redundanzanteil der Gruppe j

p_{ij} = i-tes a priori Gewicht der Gruppe j ($p_{ij} = q_{ij}^{-1}$, da Gewichtsmatrix als Diagonalmatrix angesetzt wird)

\hat{q}_{ij} = i-ter a posteriori Gewichtskoeffizient der Gruppe j

Die Gleichung (4.2-11) ergibt sich mit $V_j=I$ und $\sigma_j^2=1$ als Näherungswert direkt aus Gleichung (2.2.2-3), denn

$$\underline{\omega}_j = \underline{\hat{\epsilon}}^T C_{11}^{-1} V_j C_{11}^{-1} \underline{\hat{\epsilon}} = \sum_i \underline{\hat{\epsilon}}_i^2 p_{ij}$$

und

$$\bar{s}_j = \text{sp}(C_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}} C_{11}^{-1} V_j C_{11}^{-1}) = \sum_i r_{ij} p_{ij} \quad .$$

Mit Gl. (4.2-11) lassen sich iterativ die Varianzkomponenten von Beobachtungsgruppen schätzen, vorausgesetzt die Kovarianzmatrix der Beobachtungen ist eine Diagonalmatrix. Man kann somit die Varianzen der stochastischen Parameter \underline{t}_i ($i=1, \dots, q$) zusätzlich zu ihrem zeitabhängigen Korrelationsanteil (Prozeßkoeffizient a) mit vertretbarem Aufwand im Modell G2 schätzen, wobei der stochastische Teil folgende Struktur aufweisen muß:

$$D \begin{bmatrix} \underline{\epsilon} \\ \underline{\eta} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \text{diag}(\sigma_j^2) \quad . \quad (4.2-12)$$

Die Überlegenheit des Modells G2 mit seinem erweiterten Funktionalteil gegenüber dem Modell G1 wird besonders bei der Parameterschätzung sehr deutlich. Die Integration des stochastischen Prozesses im Funktionalteil vereinfacht die Schätzung der Parameter des stochastischen Modells erheblich, worauf in der folgenden Modelldiskussion nochmals eingegangen wird.

4.3 Modelldiskussion

(1) Das kombinierte Modell in seinen äquivalenten Darstellungsformen G1 und G2 basiert auf der Zerlegung des stochastischen Modells in einen lokalen Anteil und einen Korrelationsanteil zwischen verschiedenen Meßepochen. Diese Zerlegung gestattet es, den Korrelationsanteil durch autoregressive Prozesse zu beschreiben, die wiederum durch ihre Eigenschaft der funktionalen Konstruierbarkeit der Korrelationen eine Erweiterung des Funktionalmodells in der Form des Modells G2 ermöglichen. Mit der Einführung der zusätzlichen Beobachtungsgleichungen ergeben sich die beim Modell G2 bereits erwähnten Vorteile für die Schätzung. Darüber hinaus weist der Normalgleichungsanteil, der, durch die zusätzlichen Beobachtungsgleichungen bedingt, zur Submatrix N_{22} (vgl. Gl. (4.2-3)) hinzuaddiert werden muß, eine sehr einfache Struktur auf, vorausgesetzt die Dispersion im Modell G2 besitzt Diagonalgestalt. Denn in diesem Fall muß lediglich auf die Hauptdiagonale und zwei Nebendiagonalen ein Anteil addiert werden (vgl. Abbildung 4.1a), der sich aus dem Produkt $(D^T Q_{\eta\eta}^{-1} D \otimes C_{ss}^{-1})$ ergibt. Das bedeutet für die Anwendung des Modells, daß die Berücksichtigung der Korrelationen zwischen den Epochen ohne großen numerischen Aufwand in bestehende Lösungsalgorithmen integriert werden kann.

Erweitert man die Schätzung um die Bestimmung des Prozeßkoeffizienten a im Modell G2, so wird die Linearität der zusätzlichen Beobachtungsgleichungen zerstört. Somit müssen zur Lösung des Normalgleichungssystems (Gl. (4.2-2)) für jede Iteration die rechten Seiten bezüglich der zusätzlichen Beobachtungsgleichungen neu aufgebaut werden. Die Schätzung der Varianzkomponenten

für Beobachtungsgruppen von orthogonalen Parametern nach Gl. (4.2-11) erfordert ein ausreichend großes Verhältnis zwischen Anzahl der Epochen und der Anzahl der Gruppen, um ein hinreichendes Konvergenzverhalten zu erlangen und eine zuverlässige Schätzung zu garantieren. Sie ist im Modell G2 einfacher zu handhaben, da die Strukturmatrizen V_j als Einheitsmatrizen angenommen werden können, wenn die Kovarianzmatrizen $C_{\epsilon\epsilon}$ und C_{ss} Diagonalgestalt aufweisen. Im Modell G1 dagegen ist die Schätzung der Varianzen der stochastischen Parameter aufwendiger, da die Strukturmatrizen wesentlich komplizierter aufgebaut sein müssen (vgl. Gl. (4.1.1-4)).

(2) Geht man im Sinne einer Erweiterung des stochastischen Modells von Korrelationen zwischen den Zeitreihen aus, d.h. die Kovarianzmatrix C_{ss} sei, wie im Falle nicht-orthogonaler Parameter, voll belegt, so ergibt sich der Normalgleichungsanteil in der Form einer Bandmatrix mit einer Bandbreite von $2q$. Die Steigerung des numerischen Aufwands ist in diesem Fall überwiegend von der Dimension der zu invertierenden Matrix C_{ss} abhängig.

Ist zusätzlich noch eine voll besetzte Kovarianzmatrix $C_{\epsilon\epsilon}^{(k)}$ pro Epoche zu berücksichtigen, so verliert das Modell G2 an numerischen Vorteilen gegenüber dem Modell G1, da umfangreiche Inversionen notwendig und eventuelle Bandstrukturen zerstört werden.

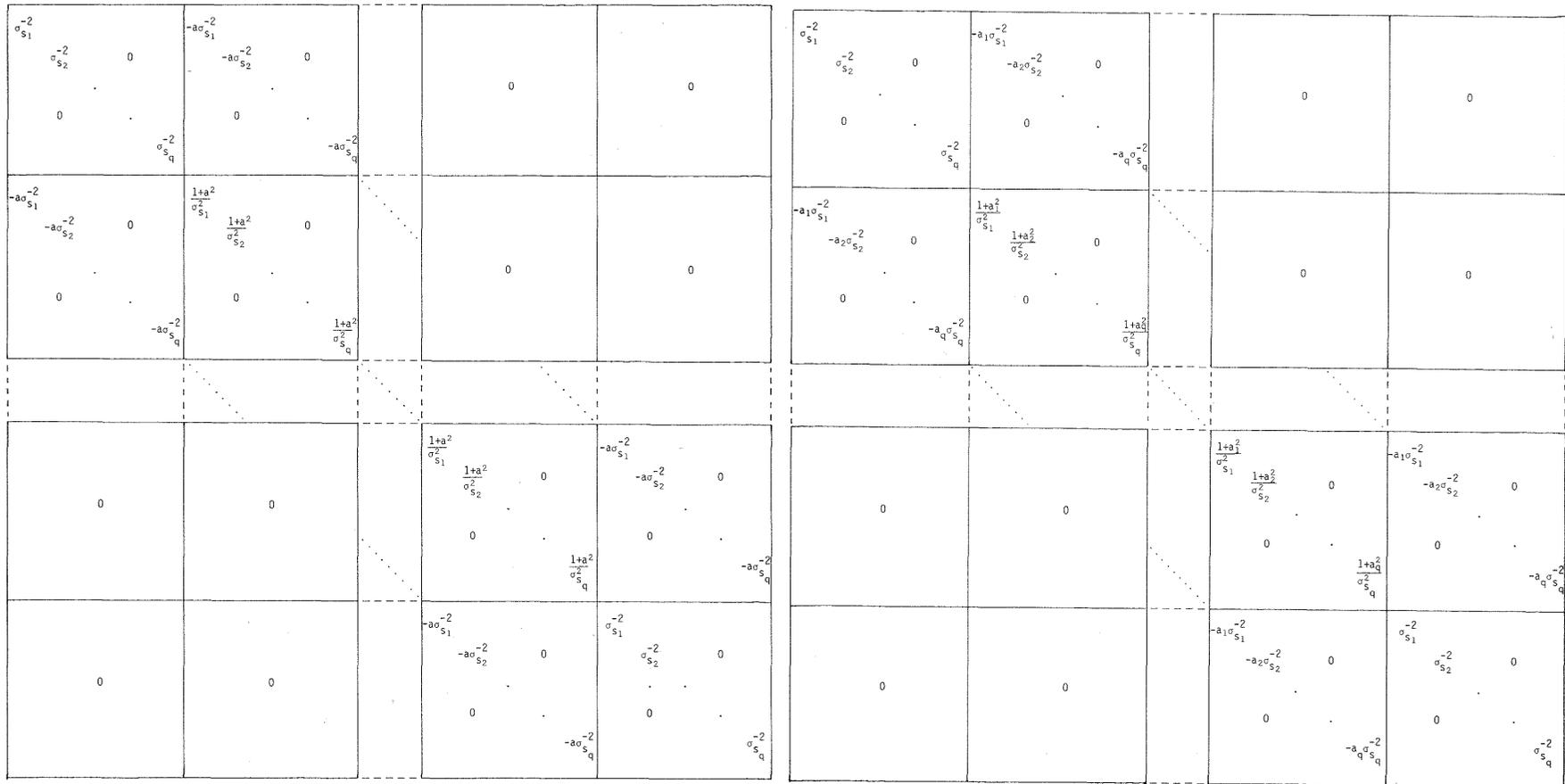
Weist die Kovarianzmatrix $C_{\epsilon\epsilon}$ komplizierte Strukturen auf, dann ist eine zusätzliche Erweiterung des Funktionalmodells nicht mehr sinnvoll. Das Modell G2 stellt gewissermaßen den Grenzbereich des Funktionalmodells dar. Weitere Verfeinerungen sollten nur noch im stochastischen Modell vorgenommen werden, indem man die Kovarianzmatrix $C_{\epsilon\epsilon}$ durch das Primärfehlerkonzept oder durch Kovarianzfunktionen beschreibt. Ohne den numerischen Aufwand weiter zu steigern, lassen sich hier alle Arten von Korrelationen berücksichtigen.

(3) Eine der wesentlichen Einschränkungen beim kombinierten Modell ist die Annahme eines für alle stochastischen Parameter identischen AR(1)-Prozesses. Diese Einschränkung läßt sich ohne zusätzlichen numerischen Aufwand für die Schätzung aufheben, wenn man das Modell G2 verwendet. Zwar wird die Struktur des Kroneckerproduktes beim Ansatz unterschiedlicher AR(1)-Prozesse pro stochastischem Parameter zerstört, aber die Struktur des Normalgleichungsanteils bleibt vollständig erhalten, sofern es sich bei der Kovarianzmatrix C_{zz} um eine Diagonalmatrix handelt. Lediglich die Prozeßkoeffizienten sind den einzelnen Parametern zugeordnet (vgl. Abbildung 4.1b). Bei Berücksichtigung von Korrelationen erhält man für die Matrix C_{zz} eine Blockdiagonalstruktur.

Eine Erweiterung des Modells auf Prozesse höherer Ordnung ist ebenfalls ohne hohen zusätzlichen Aufwand möglich. Lediglich die Bandbreite der Matrix $D_{\eta\eta}^{TQ^{-1}D}$ erweitert sich mit Steigerung der Prozeßordnung. Die zur Definition des kombinierten Modells eingeführten Einschränkungen sind insofern nicht bindend, stellen aber zur Einführung und Erläuterung des Modells eine wesentliche Erleichterung dar. Inwieweit diese Einschränkungen aufzuheben sind, hängt jeweils von dem gegebenen Einsatz des Modells ab und bleibt somit dem Anwender überlassen.

5. Zusammenfassung

Das Kapitel II legt die Grundlagen für die Modellentwicklung der Aerotriangulation im Sinne einer Modellerweiterung bzw. Verfeinerung des funktionalen und stochastischen Teils des bisherigen mathematischen Modells fest. Die allgemeine Darstellungsweise, insbesondere im Abschnitt 2, hebt das Kapitel aber aus dem Bereich einer Spezialanwendung hervor und macht es auch für Gebiete



a) gemeinsamer AR(1)-Prozeß für alle Parameter

b) den einzelnen Parametern zugeordnete AR(1)-Prozesse

Abb. 4.1: Normalgleichungsanteil bedingt durch die Korrelationen zwischen den Epochen

außerhalb der Photogrammetrie zugänglich. Eine weitere Zielsetzung dieses Kapitels ist die Schaffung mathematischer Grundlagen für empirische Untersuchungen, speziell im Bereich des stochastischen Modells der Aerotriangulation. Zusammenfassend sollen deshalb die für den weiteren Ablauf der Arbeit wesentlichen Gesichtspunkte aufgeführt werden.

Der Abschnitt 2 weist neben seiner Übersichtsfunktion im Zusammenhang mit der formalen Beschreibung der Wirkungsweise von Modellfehlern insbesondere auf die Auswahlkriterien zusätzlicher Parametergruppen hin. Damit lassen sich auch Aussagen über Versuchs- und Meßanordnungen für künftige empirische Untersuchungen treffen.

Ein weiterer Gesichtspunkt ist die mit dem multivariaten GM-Modell eingeführte Trennung des stochastischen Modells in einen Korrelationsanteil zwischen verschiedenen Meßepochen und einen Anteil innerhalb der einzelnen Epochen. Diese Trennung ist der Situation in der Aerotriangulation angepaßt und ist folglich als Baustein in das am Schluß der in diesem Kapitel aufgezeigten Modellentwicklung stehende kombinierte Modell integriert.

Der Abschnitt 3 über die Wahl von Kovarianzstrukturen beschäftigt sich ausschließlich mit dem stochastischen Modell und dessen Strukturierung. Hier sind insbesondere im Zusammenhang mit der Aerotriangulation die Zeitreihenmodelle hervorzuheben, da sie recht plausibel der Aufnahmefolge der Luftbilder zugrunde gelegt werden können. Die stochastischen Prozesse zur Beschreibung der Zeitreihen gestatten durch ihren konstruktiven Aufbau die Integration im Funktionalmodell, was für ihre numerische Behandlung ein nicht zu unterschätzender Vorteil ist.

Für die Analyse empirisch bestimmter Kovarianzmatrizen werden verschiedene Verfahren diskutiert, wobei sich bei geringen Vorinformationen die principal components-Analyse als das geeignetste Verfahren erweist. Dies entspricht dem Kenntnisstand über das stochastische Modell der Aerotriangulation, so daß ein wirksames Instrument für empirische Untersuchungen zur Verfügung steht.

Der Abschnitt 4 stellt die Verbindung zwischen den vorangegangenen Abschnitten dar und schließt mit dem kombinierten Modell als einer Synthese der zuvor definierten Modelle das Kapitel ab. Womit für die Aerotriangulation zwar ein numerisch aufwendiges, aber die bisherigen Modelle überragendes mathematisches Modell zur Verfügung gestellt wird, welches sowohl im funktionalen als auch im stochastischen Bereich den neuesten Entwicklungen Rechnung trägt. Sein wesentlicher Vorteil besteht in der einfachen Struktur und der Möglichkeit, in bestehende Lösungsalgorithmen zur Blockausgleichung mit Selbstkalibrierung integrierbar zu sein.

Nach der Einführung der mathematischen Modelle mit ihren Erweiterungen und Spezialisierungen soll im folgenden Kapitel der direkte Bezug zur Aerotriangulation hergestellt werden. Ein Grundriß der Entwicklung des mathematischen Modells in der Aerotriangulation wird einen Einblick in die bisher erzielten Genauigkeitssteigerungen durch Modellerweiterungen geben. Die Einführung des kombinierten Modells bildet als konsequente Weiterentwicklung den Schwerpunkt des Kapitels.

III. ERWEITERTES MATHEMATISCHES MODELL DER AEROTRIANGULATION

Das mathematische Modell der Aerotriangulation hat mit seinen im Laufe der Zeit entwickelten Verfeinerungen einen hohen praktischen Standard erreicht und theoretische Entwicklungen zumindest eingeleitet. Die Modellvorstellung der perspektiven Projektion, wie sie mathematisch streng in der Bündelblockausgleichung und auch indirekt bei der Blockausgleichung nach der Methode der unabhängigen photogrammetrischen Modelle zugrunde liegt, ermöglicht eine präzise photogrammetrische Punktbestimmung. Auf dem bis jetzt am weitesten entwickelten Niveau der Anwendung, wie es zum Beispiel in der Katasterphotogrammetrie vorliegt, reichen die bei der Bündelblockausgleichung inzwischen gebräuchlichen mathematischen Ansätze mit Berücksichtigung systematischer Bilddeformationen aus. Dennoch bleiben die Ergebnisse empirischer Untersuchungen stets hinter den auf diesem Modellniveau gültigen theoretischen Erwartungen zurück, wie bereits in Kapitel I dargestellt wurde.

Um diese Differenz zu verringern und eine weitere Steigerung der Leistungsfähigkeit zu erreichen, wird nachfolgend für die Aerotriangulation ein erweitertes mathematisches Modell vorgeschlagen werden, welches speziell eine Verfeinerung des stochastischen Teils beinhaltet. Dieses auf allgemeinen Überlegungen und empirischen Untersuchungen basierende Modell soll die theoretische Grundlage für eine hochgenaue photogrammetrische Punktbestimmung liefern, wie sie zum Beispiel bei Deformationsanalysen gefordert wird. Vorrangig wird allerdings dieses Modell seine wesentliche Bedeutung zunächst in der Forschung und in allgemeinen theoretischen Untersuchungen, z.B. bei der Abschätzung und Beurteilung einfacherer Modelle, haben.

Das Kapitel III beinhaltet neben einem Abriß über die Entwicklung der analytischen Punktbestimmung im Bildverband nach der Bündelmethode die Konkretisierung des im Abschnitt II.4 vorgestellten kombinierten Modells in Bezug auf die Aerotriangulation. Neben der Diskussion und Wertung dieses Modells wird eine Abschätzung der theoretisch möglichen Genauigkeitssteigerung angegeben.

1. Modellentwicklung in der Aerotriangulation

1.1 Entwicklung des mathematischen Modells

a) Perspektive Projektion und a priori Korrekturen

Die analytische Punktbestimmung im Bildverband nach der Bündelmethode (und auch der Methode der unabhängigen Modelle) begann Mitte der 60er Jahre mit dem Aufkommen der elektronischen Rechenanlagen. Das mathematische Modell entsprach der einer idealisierten Meßkammer zugrundeliegenden perspektiven Projektion. Das bedeutet, die einen Bildpunkt beschreibenden Bildkoordinaten werden bei gegebener innerer Orientierung als Funktion der 3 Rotationsparameter, der 3 Translationsparameter und der 3 Geländekoordinaten des Objektpunktes dargestellt. Eine ausführliche Darstellung der formalen Zusammenhänge ist in den einschlägigen Photogrammetrie-Lehrbüchern, z.B. Schwidewsky/Ackermann, zu finden.

Der perspektiven Projektion im funktionalen Teil des mathematischen Modells stand ein sehr stark vereinfachtes stochastisches Modell gegenüber. Da über die stochastischen Zusammenhänge im Luftbild oder gar im Bildverband nur qualitative Informationen vorlagen, aber eine quantitative

Formulierung nicht möglich war, ging man von gleichgenauen und unkorrelierten Beobachtungen aus. Das mathematische Modell entsprach dem Gauß-Markoff-Modell (Modell A).

Durch die Einführung von sogenannten a priori Korrekturen versuchte man Einflüsse des photogrammetrischen Aufnahme- und Auswerteprozesses zu erfassen, um damit eine Verbesserung des Ergebnisses unter Beibehaltung des einfachen Modellansatzes zu erreichen, d.h. die Beobachtungen wurden auf ein vereinfachtes Rechenmodell reduziert. Diese "Fehler-" einflüsse, wie atmosphärische Refraktion, optische Verzeichnung des Linsensystems in der Aufnahmekammer, Unebenheit des Films, Erdkrümmung usw., werden vor der Ausgleichung an den Meßwerten korrigiert, was der Berücksichtigung eines konstanten Anteils in den Beobachtungen entspricht. Eine ausführliche Zusammenstellung über die a priori als bekannt angenommenen Fehlereinflüsse und deren Diskussion einschließlich reichhaltigen Literaturhinweisen ist in Haug (1980) und Schilcher (1980) zu finden.

Die a priori Korrekturen erfassen allerdings nur einen Teil der Fehlereinflüsse, die in der Literatur üblicherweise als systematische Bildfehler bezeichnet werden und im eigentlichen Sinn Modellanpassungsfehler darstellen, da es sich in der Regel nicht um konstante sondern variierende Einflüsse handelt (vgl. Kapitel I). Die verbleibende Restsystematik erzeugt starke Korrelationen zwischen den Bildkoordinaten, die durch das sehr vereinfachte stochastische Modell nicht kompensiert werden.

Parallel zur Einführung der a priori Korrekturen, die im eigentlichen Sinne eine Verfeinerung des Funktionalmodells darstellen, begann die Integration stochastischer Variablen über zusätzliche Beobachtungsgleichungen in das mathematische Modell, aufbauend auf der Arbeit von H. H. Schmid und E. Schmid (1965). Das zunächst aus rein operationellen Gründen für die Behandlung von stochastischen Paßpunktkoordinaten eingeführte Modell der Form D2 gestattet es nun, zusätzliche Unbekannte als stochastische Größen zu behandeln und deren Kovarianzmatrix zu berücksichtigen (vgl. Definition II.2-7). Allerdings beschränkte sich diese Erweiterung des stochastischen Modells nur auf die Diagonalelemente der Kovarianzmatrizen der Bild- und Paßpunktkoordinaten (vgl. Brown (1974), Ackermann, Ebner und Klein (1972)).

Ein wesentlicher Fortschritt in der Genauigkeitssteigerung konnte durch die Simultanbehandlung der photogrammetrischen Aufnahmen in einem Block erzielt werden (vgl. z.B. Ackermann (1966 und 1968)). Diese Steigerung steht dabei nicht im Zusammenhang mit einer Verfeinerung des mathematischen Modells, sondern beruht ausschließlich auf der gleichzeitigen Behandlung der Bild- bzw. Modellkoordinaten in einem geschlossenen LS-Algorithmus, d.h. in der konsequenten Anwendung des Modells.

b) Zusätzliche Parameter zur Selbstkalibrierung

(1) Anfang der 70er Jahre versuchte man durch Erweiterung des Funktionalmodells die nach den a priori Korrekturen verbleibenden systematischen Bildfehler zu kompensieren. Einen umfassenden Überblick über die einzelnen Verfahren gibt Schilcher (1980). Hier soll ausschließlich auf das in der Anwendung erfolgreichste Verfahren der simultanen Selbstkalibrierung mit zusätzlichen Parametern eingegangen werden. Kubik (1971) und Bauer/Müller (1972) zeigten erstmals die Wirksamkeit der zusätzlichen Parameter, wobei die Idee bereits auf eine prinzipielle Studie von Schmid (1954) zurückgeht. Danach wurde eine Vielzahl unterschiedlicher Parameteransätze entwickelt. Zu einem vorläufigen Abschluß dieses Entwicklungsprozesses kam es auf dem ISP-Kongress 1980 in Hamburg (vgl. Kilpelä (1981)). Hier soll nur, stellvertretend für die zwei Hauptrichtungen der Entwicklung, der Parametersatz von Brown (1975) und Ebner (1977) genannt werden. Brown versucht mit seinem Ansatz die systematischen Bildfehler von ihren physikalischen Ursachen

her zu beschreiben und nimmt dabei bewußt Korrelationen zwischen den Parametern in Kauf. Ebner dagegen argumentiert rein mathematisch und operationell, indem er einen heuristischen und bezüglich eines bestimmten Punktschemas im Bild orthogonalen Parametersatz wählt.

Obwohl für die Parameter der Selbstkalibrierung zusätzliche Beobachtungswerte im Sinne des Modells D2 eingeführt und sie damit formal als stochastische Größen, wie sie bereits Ebner (1977) theoretisch definierte, behandelt wurden, beschränkte man sich in der Regel bis heute in der Praxis bei der Vorgabe der stochastischen Information lediglich auf die Auswahlmöglichkeit der Parameter über die Gewichtungsvorgabe, d.h. die Parameter werden als feste Unbekannte (Gewicht $\rightarrow 0$) oder als Konstante mit dem Wert Null (Gewicht $\rightarrow \infty$) behandelt.

Eine Ausnahme hierbei bilden die im Zusammenhang mit der Working Group III/1 der ISP angestellten Untersuchungen der Universitäten Aalborg und Helsinki, bei denen die zusätzlichen Parameter blockinvariant mit unterschiedlichen Gewichten angesetzt wurden (vgl. Kilpelä, Heikkilä und Inkilä (1981)). Das heißt, die zusätzlichen Parameter wurden als stochastische Unbekannte mit Erwartungswert Null angesetzt. Dies widerspricht aber der bisherigen Kenntnis über die systematischen Bildfehler, wonach diese im Mittel von Null abweichen, sobald sie sich beim blockinvarianten Ansatz als signifikant erweisen. Bei einem schwach bestimmten Bildverband wirkt sich die Gewichtung zwar positiv aus, da die numerische Instabilität des Normalgleichungssystems dadurch kompensiert wird, aber eine Erfassung der systematischen Effekte ist damit nicht immer gewährleistet.

Aber generell läßt sich für das stochastische Modell der Aerotriangulation sagen, daß es im Zusammenhang mit den zusätzlichen Parametern keine wirkliche Erweiterung erfahren hat und diese in der Anwendung nur als feste Unbekannte im Sinne des erweiterten GM-Modells (Modell B) behandelt werden.

Etwas zur gleichen Zeit ging man dazu über, die Kovarianzmatrix der Beobachtungen als Diagonalmatrix mit unterschiedlichen Varianzen für die Beobachtungen einzuführen. Häufig wurden Varianzen für einzelne Beobachtungsgruppen entsprechend der zu erwartenden Genauigkeit der Auswertung vorgegeben. Eine Erweiterung des stochastischen Modells unter Berücksichtigung von Korrelationen erfolgte aufgrund mangelnder quantitativer Kenntnis und numerischer Schwierigkeiten nicht. Die gesamte Modellentwicklung konzentrierte sich auf das Funktionalmodell der Aerotriangulation, da dies die größeren Fortschritte versprach und für die Anwendung am einfachsten zu realisieren war.

(2) Unter diesem Gesichtspunkt ist auch der Vorschlag von Moniwa (1976, 1981) zu sehen, die zusätzlichen Parameter nicht nur streifen- oder blockinvariant anzusetzen, wie es in der Anwendung der Bündelblockausgleichung eigentlich bis heute noch der Fall ist, sondern einen bildweisen Ansatz zu wählen. Im Hintergrund steht dabei der Einsatz nicht-metrischer Kameras in der Nahbereichsphotogrammetrie, bei denen ein bildweiser Ansatz von zusätzlichen Parametern zur Kalibrierung notwendig ist, um eine akzeptable Genauigkeit zu erreichen (vgl. Fraser (1982)). In der Aerotriangulation setzte sich dieser Ansatz nicht durch, da für größere Bildverbände ein hoher numerischer Aufwand erforderlich ist. Auch kann das Problem der Überparameterisierung auftreten, was zur numerischen Instabilität des Normalgleichungssystems führt, aber durch einen geeigneten orthogonalen Parametersatz mit Konditionsprüfung vermindert werden kann.

Immerhin ist die Erweiterung des Funktionalmodells durch den bildweisen Ansatz der zusätzlichen Parameter im Sinne der Erfassung der Variation der systematischen Bildfehler, wie sie von Klein (1980) und Schilcher (1980) beschrieben wurde, ein erster Schritt. Die Beibehaltung der zusätz-

lichen Parameter als feste Unbekannte kann aber nur einen Teil der im Grunde genommen als stochastische Größen zu interpretierenden Bildfehlereinflüsse kompensieren.

c) Variation der systematischen Bildfehler

Die im Kapitel I dargelegte, aus empirischen Untersuchungen gewonnene Erkenntnis der Variation der systematischen Bildfehler wurde von Schroth (1982) mit Hilfe von Zeitreihen analysiert. Förstner (1982b) stellte darauf aufbauend ein mathematisches Modell für die Aerotriangulation vor, bei dem die Variation durch einen stochastischen Prozeß modelliert wird. Aus diesen Erkenntnissen und heuristischen Überlegungen leitet sich das im Abschnitt 2 dieses Kapitels beschriebene erweiterte mathematische Modell der Aerotriangulation als konsequente Weiterentwicklung der Modellbildung ab.

Die Abbildung 1.1 zeigt übersichtlich die Entwicklung des mathematischen Modells bezogen auf die Methode der Bündelblockausgleichung. Auf dem Gebiet der Nahbereichsphotogrammetrie ging die Entwicklung des stochastischen Modells bis hin zu voll besetzten Kovarianzmatrizen für die Bild- und Paßpunktkoordinaten (vgl. Krauß (1983)), was hier nicht berücksichtigt wurde, da diese Ansätze auf wenige Bilder und damit für einen Bildverband, wie er in der Aerotriangulation vorliegt, vom operationellen Standpunkt aus als nicht geeignet betrachtet werden muß.

Im folgenden soll die mit der Entwicklung des mathematischen Modells verbundene Genauigkeitssteigerung aufgezeigt werden.

Mathematisches Modell	Zeitpunkt				
	1965	1970	1975	1980	1985
<u>Funktionalteil:</u>					
perspekt. Projektion	_____				
a priori Korrekturen	_____				
zusätzl. Parameter (blockinvariant)	_____				
zusätzl. Parameter (bildweise)	_____				
<u>stochast. Teil:</u>					
$C_{11} = \sigma_o^2 I$	_____				
$C_{11} = \text{diag}(\sigma_i^2)$	_____				

Abb. 1.1: Entwicklung des mathematischen Modells in der Aerotriangulation bezogen auf die Methode der Bündelblockausgleichung

1.2 Genauigkeitssteigerung durch Verfeinerung des Modellansatzes

Die Verfeinerung des mathematischen Modells der Aerotriangulation in Hinsicht auf die erreichbare Genauigkeit der photogrammetrischen Punktbestimmung gründet sich bis heute zum einen auf die von der Praxis gestellten Anforderungen und zum anderen auf die Diskrepanz zwischen theo-

retischer Erwartung und praktischen Resultaten von Blockausgleichungen. Die mit der Verfeinerung des Modellansatzes verbundene Genauigkeitssteigerung soll hier anhand vorangegangener Untersuchungen und Veröffentlichungen kurz zusammengefaßt werden.

(1) Die Berücksichtigung von a priori Korrekturen an den aus einer Rahmenmarkentransformation der Maschinenkoordinaten hervorgegangenen Bildkoordinaten und deren Auswirkung auf die Genauigkeit der Punktbestimmung wurde u.a. von Schilcher (1980) untersucht. Er erhielt aus seinen empirischen Untersuchungen mit dem Datenmaterial des Testfeldes Rheidt eine Genauigkeitssteigerung um den Faktor 1.0 bis 1.9 bei den quadratischen Mittelwerten der Differenzen zwischen geodätisch und photogrammetrisch bestimmten Lagekoordinaten (μ_{xy}) an Vergleichspunkten. Dabei berücksichtigte er die a priori Korrekturen für Verzeichnung, Refraktion und Erdkrümmung und verglich unterschiedliche Paßpunktanordnungen und Kammertypen. Für die optische Verzeichnung verwendete er die Daten aus der Laborkalibrierung und einen radialsymmetrischen Korrekturansatz wegen Refraktion und Erdkrümmung.

Den Einfluß einer Verfeinerung der a priori Korrekturen, wie die Berücksichtigung der Bildneigung auf die Korrektur wegen Erdkrümmung oder die Auswirkung des geodätischen Bezugssystems, untersuchte Haug (1980) am Datenmaterial des OEEPE-Versuchs Oberschwaben. Eine signifikante Genauigkeitssteigerung konnte allerdings nicht festgestellt werden. Die Definition des geodätischen Bezugssystems wird auch von Wang (1980) als unerheblich für die Genauigkeit der Punktbestimmung angegeben, vorausgesetzt es handelt sich um ein konformes System.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Genauigkeitssteigerung durch a priori Korrekturen für den Einzelfall nicht angegeben werden kann, da zu viele Faktoren, wie zum Beispiel der Wartungszustand der Kammer und die Änderung der Kammergeometrie während des Fluges, Einfluß nehmen. So gibt Ellenbeck (1981) an, daß geeignete Hypothesen zur physikalischen Beschreibung von Bildfehlern hinsichtlich einer a priori Korrektur kaum zu finden sind.

(2) Die Einführung von zusätzlichen Parametern als feste Größen in das mathematische Modell brachte nochmals eine erhebliche Genauigkeitssteigerung. Für die blockinvariante Korrektur der Systematik gibt Schilcher (1980) eine Genauigkeitssteigerung um den Faktor 1.2 bis 1.3 gegenüber der ausschließlich um a priori Korrekturen verbesserten Bildkoordinaten für seine empirischen Untersuchungen an, wobei er die Korrektur mit Hilfe des Testfeldes bestimmte. Klein (1980) bestätigte unabhängig davon diese Genauigkeitssteigerung mit Hilfe des blockinvarianten Ansatzes der Selbstkalibrierung bei seinen Untersuchungen des Testfeldes Appenweier, und auch die sehr umfangreichen Untersuchungen der ISP-Working Group III/1 führten im Mittel auf das gleiche Ergebnis (siehe Kilpelä (1981)).

Die Genauigkeitssteigerung im photogrammetrischen Block ist allerdings abhängig von der Geometrie des Blocks (Paßpunktanordnung, Überdeckung), von den tatsächlich vorhandenen Deformationen und auch vom Verfeinerungsgrad des verwendeten mathematischen Modells. So ist z.B. die Querüberdeckung beim blockinvarianten Ansatz zusätzlicher Parameter entscheidend für die Erfassung zylindrischer Deformationen des Luftbildes (vgl. Ackermann (1981)).

Die Verfeinerung des Modells durch einen streifenweisen Ansatz zusätzlicher Parameter bzw. der Korrektur der Systematik ergibt nach den Untersuchungen von Schilcher und Klein eine weitere Steigerung um den Faktor 1.3 gegenüber dem blockinvarianten Ansatz. Dies konnte allerdings von Kilpelä nicht bestätigt werden, da es in diesem Fall zu numerischen Instabilitäten des Normalgleichungssystems infolge Überparameterisierung bei den zur Verfügung stehenden Paßpunktanordnungen kam.

Eine weitergehende Verfeinerung durch eine bildweise Korrektur der Systematik ergibt bei den Untersuchungen von Schilcher eine Genauigkeitssteigerung um den Faktor 1.5 bis 1.7 gegenüber dem blockinvarianten Ansatz. Insgesamt erhielt er bei diesem Ansatz eine Steigerung um den Faktor 1.9 bis 2.0 gegenüber dem Ansatz ohne Korrektur der Systematik, womit sich deutlich die Effizienz des verfeinerten mathematischen Modells zeigt.

(3) Die Erweiterung des Funktionalmodells hat somit eine beachtliche Genauigkeitssteigerung erreicht, wobei Schilcher mit seinem zuletzt genannten Ansatz nahe an das Niveau des seinen Untersuchungen zugrundeliegenden Meßrauschens von $1.4 \mu\text{m}$ im Falle der Weitwinkelaufnahmen ($\hat{\sigma}_0 = 1.7 \mu\text{m}$) herangekommen ist.

Unter der Berücksichtigung der in diesem Fall erzielten Meßgenauigkeit bedeutet das aber, daß eine darüber hinausgehende Modellerweiterung, z.B. im stochastischen Teil, keine wesentliche Steigerung mehr bewirken würde. Desweiteren sind in der Anwendung die systematischen Bildfehler nicht so vollständig und exakt bestimmbar, da nicht für jedes Bild ein Testfeld, bzw. eine so hohe Punktdichte zur Bestimmung zusätzlicher Parameter zur Verfügung steht. Somit müssen die Ergebnisse von Schilcher als Idealfall betrachtet werden, der sich nur mit einem sehr weit entwickelten mathematischen Modell und unter bestimmten operationellen Voraussetzungen erreichen läßt.

Natürlich sind auch die gesamten hier genannten Angaben über die Genauigkeitssteigerung durch Berücksichtigung der a priori Korrekturen und der systematischen Bildfehler relativ zu sehen, da sie von dem im Einzelfall vorliegenden Datenmaterial abhängig sind. Aber dennoch können die Ergebnisse, da sie unabhängig voneinander ermittelt wurden, als Anhaltspunkte für die Leistungsfähigkeit der bis heute üblichen Modellansätze gelten.

Damit ist der Rückblick über die Modellentwicklung und den Leistungsstand der Aerotriangulation abgeschlossen. Der nächste Abschnitt stellt nun ein neues, sich aber konsequent an die Entwicklung anreihendes mathematisches Modell für die Aerotriangulation vor.

2. Das kombinierte Modell in der Aerotriangulation

Der folgende Abschnitt zeigt die Anwendung des in Kapitel II.4 besprochenen kombinierten Modells für die Aerotriangulation. Dabei steht die Konkretisierung des mathematischen Modells im Vordergrund. In der anschließenden Modelldiskussion wird besonders auf die Flexibilität des Modells und auf seine praktischen Einsatzbereiche hingewiesen. Eine Abschätzung der zu erwartenden Genauigkeitssteigerung gegenüber den herkömmlichen Modellen beendet den Abschnitt.

2.1 Umsetzung des kombinierten Modells

Der Ansatz des kombinierten Modells begründet sich neben den experimentell nachgewiesenen Variationen der systematischen Bildfehler (vgl. Jaud (1980), Klein (1980), Schilcher (1980)) auch auf das sehr erfolgreiche Verfahren zur hochgenauen photogrammetrischen Punktbestimmung beim US National Ocean Survey (NOS), (vgl. Slama (1978) und Lucas (1983)). Das beim NOS angewandte Verfahren benützt Reseauaufnahmen und korrigiert die gemessenen Bildkoordinaten eines Punktes um die

aus den umliegenden Reseaukreuzen abgeleiteten Bilddeformationen. Damit werden die lokalen Einflüsse systematischer Filmfehler beseitigt, und im praktischen Einsatz ergab sich die Genauigkeit der ausgeglichenen Bildkoordinaten mit 2 μm . Das Verfahren entspricht in seinem Konzept dem lokalen Ansatz von zusätzlichen Parametern pro Bild, wie er direkt im kombinierten Modell enthalten ist und im folgenden detailliert beschrieben wird.

Das kombinierte Modell in der Aerotriangulation baut sich analog zum Modell G2 (Def. II.4-2) auf, wobei es allerdings durch zusätzliche Beobachtungsgleichungen für die Paßpunktkoordinaten die erweiterte Form des Modells D2 (Def. II.2-7) annimmt, um auch deren stochastische Eigenschaften berücksichtigen zu können. Somit läßt sich das Modell wie folgt definieren:

Definition III.2-1: Kombiniertes Modell in der Aerotriangulation

$\underline{l}_B = A_T x_T + A_N x_N + A_P x_P + B z_o + \text{diag}(B^{(i)}) t + \underline{\varepsilon}_B$ $\underline{l}_P = I_k x_P + \underline{\varepsilon}_P$ $\underline{0} = (D \otimes I_q) t + \underline{\eta}$	$\begin{bmatrix} x_T \\ x_N \\ x_P \\ z_o \\ t \end{bmatrix} \sim M \left(\begin{bmatrix} x_T \\ x_N \\ x_P \\ z_o \\ t \end{bmatrix}, 0 \right)$
	$\begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_B \\ \underline{\varepsilon}_P \\ \underline{\eta} \end{bmatrix} \sim M \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{BB} & 0 & 0 \\ 0 & C_{PP} & 0 \\ 0 & 0 & C_{zz} \end{bmatrix} \right)$
$\begin{bmatrix} \underline{l}_B \\ \underline{l}_P \\ \underline{0} \end{bmatrix} \sim M \left(\begin{bmatrix} A_T x_T + A_N x_N + A_P x_P + B z_o + \text{diag}(B^{(i)}) t \\ I_k x_P \\ (D \otimes I_q) t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{BB} & 0 & 0 \\ 0 & C_{PP} & 0 \\ 0 & 0 & C_{zz} \end{bmatrix} \right)$	

Hierbei bedeutet:

- \underline{l}_B = Zufallsvektor der Bildkoordinaten ($o(\underline{l}_B) = n \times 1$)
- \underline{l}_P = Zufallsvektor der gegebenen Paßpunktkoordinaten ($o(\underline{l}_P) = k \times 1$)
- A_T = Koeffizientenmatrix der Transformationsparameter ($o(A_T) = n \times 6p$, $r(A_T) = 6p$)
- A_N = Koeffizientenmatrix der terrestrischen Neupunktkoordinaten ($o(A_N) = n \times u$, $r(A_N) = u$)
- A_P = Koeffizientenmatrix der terrestrischen Paßpunktkoordinaten ($o(A_P) = n \times k$, $r(A_P) = k$)
- B = Koeffizientenmatrix des blockinvarianten Teils der zusätzlichen Parameter
($o(B) = n \times q$, $r(B) = q$)
- $B^{(i)}$ = Koeffizientenmatrix des bildweisen Teils der zusätzlichen Parameter des Bildes i ,
Submatrix von B ($o(B^{(i)}) = n_i \times q$, $r(B^{(i)}) = q$)
- D = Koeffizientenmatrix des AR(1)-Prozesses ($o(D) = p \times p$, $r(D) = p$), siehe Anhang A3
- x_T = Vektor der Transformationsparameter ($o(x_T) = 6p \times 1$)
- x_N = Vektor der terrestrischen Neupunktkoordinaten ($o(x_N) = u \times 1$)
- x_P = Vektor der terrestrischen Paßpunktkoordinaten ($o(x_P) = k \times 1$)
- z_o = Vektor des blockinvarianten Anteils der zusätzlichen Parameter, Mittelwert über
gesamten Block ($o(z_o) = q \times 1$)
- t = Vektor des bildweisen Anteils der zusätzlichen Parameter ($o(t) = pq \times 1$)
- $\underline{\varepsilon}_B$ = Zufallsvektor der Beobachtungsfehler ($o(\underline{\varepsilon}_B) = n \times 1$)
- $\underline{\varepsilon}_P$ = Zufallsvektor der Paßpunktfehler ($o(\underline{\varepsilon}_P) = k \times 1$)

- \underline{n} = Konsistenzparameter der zusätzlichen Parameter ($o(\underline{n}) = pq \times 1$)
 C_{BB} = Kovarianzmatrix der Bildkoordinaten ($o(C_{BB}) = n \times n$, $r(C_{BB}) = n$)
 C_{PP} = Kovarianzmatrix der terrestrischen Paßpunktkoordinaten ($o(C_{PP}) = k \times k$, $r(C_{PP}) = k$)
 C_{zz} = Kovarianzmatrix der zusätzlichen Parameter ($o(C_{zz}) = pq \times pq$, $r(C_{zz}) = pq$)
 n = Anzahl der Bildkoordinaten
 n_i = Anzahl der Bildkoordinaten im Bild i
 p = Anzahl der Bilder im Block
 u = Anzahl der terrestrischen Neupunktkoordinaten
 k = Anzahl der terrestrischen Paßpunktkoordinaten
 q = Anzahl der zusätzlichen Parameter pro Bild (über alle Bilder konstant)

Die Koeffizientenmatrizen A_T , A_N und A_P beinhalten die linearisierten Beziehungen der perspektiven Projektion. Im einzelnen enthält die Matrix A_T die partiellen Differentiale der 6 Transformationsparameter pro Bild und die Matrizen A_N bzw. A_P die partiellen Differentiale der terrestrischen Koordinaten.

Für die zusätzlichen Parameter ist generell jeder Ansatz zugelassen, aber aus numerischen Gründen ist ein orthogonaler Ansatz, z.B. nach Ebner (1977) oder Grün (1978) vorzuziehen (siehe Abschnitt 2.2). Der Vektor z_o enthält den globalen Anteil der zusätzlichen Parameter, d.h. die Mittelwerte über den gesamten Block, wohingegen der Vektor t die über den Flug um die Mittelwerte streuenden Anteile der systematischen Bilddeformationen beinhaltet. Die Korrelation zwischen den Bildern wird durch die Korrelation zwischen den zusätzlichen Parametersätzen $t^{(i)}$ pro Bild ausgedrückt und ist in der dritten Gruppe von Beobachtungsgleichungen über den AR(1)-Prozeß modelliert.

Die Kovarianzmatrizen sind vorzugeben, wobei sich aber bei der Matrix $C_{zz} = 0_{nn} \otimes C_{ss}$ im Falle $C_{ss} = \text{diag}(\sigma_{s_i}^2)$ das Verfahren der VCC-Schätzung, wie im Abschnitt II.4.2 beschrieben, anbietet. Eine ausführliche Diskussion des kombinierten Modells in der Aerotriangulation, insbesondere auch unter dem numerischen Aspekt, schließt sich im folgenden Abschnitt an.

2.2 Modelldiskussion

2.2.1 Vergleich mit konventionellen Verfahren

Mit dem kombinierten Modell ist es erstmals gelungen, die mehrmals in der Literatur angesprochene Zerlegung des stochastischen Modells in einen Korrelationsanteil zwischen den Bildern und im einzelnen Bild auf sehr einfache und elegante Weise zu realisieren. Aber nicht nur die Erweiterung des herkömmlichen stochastischen Teils zeichnet das kombinierte Modell aus, sondern auch der sehr starke Ausbau des Funktionalteils durch den Ansatz bildweiser zusätzlicher Parameter. Natürlich bedeutet in der Regel eine Erweiterung des mathematischen Modells auch einen erhöhten numerischen Aufwand. Deshalb ist es in der Anwendung im einzelnen abzuschätzen, welcher Verfeinerungsgrad für die jeweilige Aufgabenstellung erforderlich oder zureichend ist.

Da das kombinierte Modell sehr allgemein gehalten ist und sich durch die Weiterentwicklung aus den bisherigen Modellansätzen zur Aerotriangulation ergibt, beinhaltet es auch alle vorangegangenen Formulierungen vom einfachsten Modell der reinen perspektiven Transformation bis hin zum blockinvarianten oder auch bildweisen Ansatz der zusätzlichen Parameter. Alle Modellformulierungen lassen sich durch geeignete Wahl der Dispersion und des Prozeßkoeffizienten reali-

sieren. Die Definition in der Form des Modells D2 bzw. G2 erleichtert, neben seinen numerischen Vorteilen, wesentlich die programmtechnische Realisierung und auch die Handhabbarkeit des Modells, da die Anzahl und die Eigenschaften der unbekannt Parameter über das stochastische Modell manipuliert werden können. So ließen sich auch aus rein operationellen Gründen noch weitere zusätzliche Beobachtungsgleichungen für den blockinvarianten Anteil der zusätzlichen Parameter anfügen, um über die Dispersion eine geeignete Auswahl treffen zu können.

Die Realisierung des kombinierten Modells läßt sich innerhalb bestehender Programme zur Bündelblockausgleichung, vorausgesetzt sie weisen einen Strukturaufbau in der Form des Modells D2 auf und lassen Gruppen von zusätzlichen Parametern zu, ohne Schwierigkeiten vollziehen. In diesem Fall ergibt sich für die Normalgleichungsmatrix eine geränderte Bandstruktur mit einer von der Anzahl der zusätzlichen Parameter abhängigen Randbreite. Bei einer Neukonzeption sollten allerdings alle bildweisen Parameter zusammengefaßt werden, da sich dadurch organisatorische und numerische Vorteile ergeben (vgl. Abschnitt 2.2.3).

2.2.2 Diskussion des stochastischen Modells

Obwohl das kombinierte Modell in seinem funktionalen Teil sehr weit entwickelt ist und auch im stochastischen Modell den Korrelationsanteil zwischen den Bildern mit Hilfe des AR(1)-Prozesses funktional erfaßt, stehen beim verbleibenden stochastischen Teil noch einige Fragen zur Diskussion an.

(1) Durch die Abspaltung des Korrelationsanteils zwischen den Bildern verbleibt für jedes Bild i eine separate Kovarianzmatrix $C_{BB}^{(i)}$ der beobachteten Maschinen- bzw. Bildkoordinaten, die bei gleicher Meßgenauigkeit pro Bild von ihrem Aufbau her als konstant über den Flug angenommen werden kann (vgl. Gl. (II.4.1.1-6)).

In der analytischen Photogrammetrie erfolgt beim Übergang von Maschinenkoordinaten auf Bildkoordinaten eine Datumstransformation. Diese wird in der Regel durch eine ebene Ähnlichkeitstransformation auf die kalibrierten Rahmenmarken vorgenommen, wobei sich die Kovarianzmatrix der Bildkoordinaten streng nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt. Die Datumstransformation der Beobachtungen hat aber beim Ansatz der ebenen Ähnlichkeitstransformation keine Auswirkung auf die Ergebnisse der Schätzung. Denn die Transformation mit den 6 Parametern der äußeren Orientierung bei der Bündelgleichung beinhaltet die 4 Parameter der ebenen Ähnlichkeitstransformation und nach Rao (1967, lemma 5; vgl. S. 45f) hat ein im stochastischen Modell enthaltener Teil des Funktionalmodells keinen Einfluß auf die Schätzung. Damit ist es unerheblich, ob man mit der Kovarianzmatrix der Maschinen- oder der Bildkoordinaten arbeitet, vorausgesetzt die Parameter der Datumstransformation sind auch im Modell der Ausgleichung enthalten.

Die Kovarianzmatrix $C_{BB}^{(i)}$ für das einzelne Bild i läßt sich nach ihren Entstehungsquellen in zwei Teile aufspalten. Der erste Teil ist bedingt durch Meßfehler, die beim Messen der Maschinenkoordinaten am Auswertegerät entstehen, z.B. Kalibrierungsfehler des Meßgerätes oder mangelhafte Punktidentifizierung. Der zweite Teil wird durch lokale Einflüsse im einzelnen Bild verursacht, die nicht durch die bildweisen zusätzlichen Parameter erfaßt werden können, wie z.B. unmodellierete örtliche Verzerrungen, die Korrelationen im lokalen, kurzwelligen Bereich (Wellenlänge < 5 cm) bewirken.

Diese Zweiteilung der Kovarianzmatrix $C_{BB}^{(i)}$ entspricht genau dem Aufbau des Primärfehlerkonzepts (vgl. Abschnitt II.3.1.1). Der Meßfehler der Bildkoordinaten läßt sich durch den Diagonalanteil erfassen, und die lokalen, kurzwelligen Deformationen können durch physikalische Einflußgrößen, wie z.B. Unebenheiten der Andruckplatte, Ungleichmäßigkeit des Andruckmechanismus oder klimati-

sche Einflüsse auf den Aufnahmeprozeß beschrieben werden. Damit bietet sich das Primärfehlerkonzept als geeignete Möglichkeit zur Strukturierung der Kovarianzmatrix $C_{BB}^{(i)}$ an.

Inwieweit allerdings die verbleibenden lokalen Bilddeformationen überhaupt noch auf die Ergebnisse der Schätzung Einfluß nehmen und welche physikalischen Einflußgrößen dabei maßgeblich sind, bleibt in empirischen Untersuchungen zu klären.

(2) Die Struktur der Kovarianzmatrix C_{zz} der bildweisen zusätzlichen Parameter wird neben dem Anteil $Q_{\eta\eta}$ aus dem AR(1)-Prozeß durch die Kovarianzmatrix C_{ss} des gewählten Parametersatzes bestimmt. Aus operationellen Gründen wird man von einem orthogonalen Parametersatz ausgehen, so daß sich die Kovarianzmatrix C_{ss} zumindest genähert als Diagonalmatrix ergibt, vorausgesetzt die Zeitreihen der Parameter sind weitgehend unkorreliert.

Die Kovarianzmatrix der Paßpunktkoordinaten ergibt sich aus den Informationen über deren terrestrische Bestimmung oder aus einer globalen Genauigkeitsaussage über das verwendete Festpunktfeld.

(3) Sollte sich anhand künftiger empirischer Untersuchungen herausstellen, daß die Kovarianzmatrix $C_{BB}^{(i)}$ der Bildkoordinaten signifikante Korrelationen aufweist und sich nicht als Diagonal- bzw. als Blockdiagonalmatrizen mit geringer Bandbreite ergeben, dann ist der Ansatz in der Form des Modells G2 nicht mehr von Vorteil. In diesem Fall sollte man, wie bereits in Abschnitt II.4.3 angegeben, aus numerischen Gründen die Struktur des Modells G1 vorziehen, um ohne zusätzlichen numerischen Aufwand eine weitergehende Verfeinerung des gesamten stochastischen Modells integrieren zu können.

Allerdings läßt der sehr detaillierte Funktionalteil des kombinierten Modells und die Berücksichtigung der Korrelationen zwischen den Bildern nicht mehr sehr viel Raum für weitergehende signifikante Korrelationen zwischen den Bildkoordinaten, und die verbleibenden Dispersionen werden sich somit durch ein weißes Rauschen, dessen Betrag durch die Meßgenauigkeit festgelegt wird, hinreichend beschreiben lassen.

2.2.3 Numerische Betrachtung

Die numerische Betrachtung des kombinierten Modells in der Aerotriangulation schließt sich an die Ausführungen des Abschnittes II.4.3 an. Die Bestimmung des Prozeßkoeffizienten und der Varianzkomponenten von Beobachtungsgruppen wurde dort bereits angesprochen und soll hier nicht weiter vertieft werden. Die Schwerpunkte dieses Abschnitts sind die numerische Stabilität und der Aufbau des Normalgleichungssystems, sowie eine Abschätzung des gesteigerten numerischen Aufwands beim Einsatz des kombinierten Modells.

(1) Die sich proportional zur Anzahl der Bilder im Block verhaltende Anzahl der zusätzlichen Parameter beeinflusst die numerische Stabilität des Normalgleichungssystems im kombinierten Modell. Der Gefahr einer Überparameterisierung wirkt innerhalb des Modells die Gewichtung der zusätzlichen Parameter entgegen. Die Redundanz des Systems wird durch die bildweisen zusätzlichen Parameter nicht beeinflusst, da diese als Beobachtungen mit zugehöriger Dispersion im Modell berücksichtigt werden. Allerdings kann eine fälschlicherweise angesetzte zu große Streuung der bildweisen Parameter das System destabilisieren.

Von seiten der Projektplanung ergeben sich weitere stabilisierende Faktoren. Eine hochgenaue Punktbestimmung mittels Aerotriangulation erfordert bereits bei den konventionellen Verfahren eine Querüberdeckung von 60% bzw. eine Kreuzbefliegung, so daß auch beim kombinierten Modell praktisch nur dieser Fall in Frage kommt. Desweiteren sollte eine hinreichende Anzahl von Punkten pro Bild ausgewertet werden, und zwar idealerweise in einer Anordnung, die eine genäherte Orthogonalität des gewählten Parametersatzes gewährleistet, um möglichst die einfache Diagonalstruktur im stochastischen Modell zu erhalten. Als Faustregel für die Anzahl der Beobachtungen pro Bild sollte gelten, daß diese mindestens um den Faktor 2 höher ist als die Anzahl der unbekannt Parameter pro Bild. Damit ist ein hinreichendes Verhältnis von Beobachtungen zu Unbekannten im gesamten Block und in den lokalen Bereichen gewährleistet. Ansonsten gelten die in der Aerotriangulation üblichen Projektparameter einschließlich der Paßpunktanordnung zur Erfassung der blockinvarianten Systematik.

(2) Üblicherweise handelt es sich bei der Blockausgleichung um Systeme mit einer großen Anzahl von Beobachtungen ($n > 10^3$) und Unbekannten. Deshalb baut man das Normalgleichungssystem besonders strukturiert auf, um mit Hilfe diverser Lösungsalgorithmen die Anzahl der Rechenoperationen zu reduzieren. Dabei ist die Art der Reduktion des Normalgleichungssystems und das Numerierungsschema der Bilder bzw. deren Sortieren nach Verknüpfungsbeziehungen von Bedeutung (Ackermann, Ebner und Klein (1970), Brown (1974), Grün (1976)). In der Regel ergibt sich für die teilreduzierte Normalgleichungsmatrix eine Blockdiagonalstruktur, bzw. beim blockinvarianten Ansatz zusätzlicher Parameter eine geränderte Bandmatrix in der reduzierten Matrix.

Auf das kombinierte Modell angewandt sollen nun drei Möglichkeiten des Normalgleichungsaufbaus angesprochen werden, denen allen eine Reduktion auf die Transformationsparameter der äußeren Orientierung zugrunde liegt. Dabei gewährleistet aber nur der erste Ansatz die Darstellung des kombinierten Modells mit Hilfe des Kroneckerproduktes. Die Abbildungen 2.2 bis 2.4 zeigen schematisch diesen Aufbau, wie er sich beispielhaft für den Bildverband nach Abbildung 2.1 ergibt. Dieser Block, der auch im Abschnitt IV.5 (vgl. Abbildung IV.5.1) für die Simulationsberechnungen Verwendung findet, besteht aus vier Streifen zu je 6 Bildern mit einer Längs- und Querüberdeckung von 60% und mit jeweils 25 Punkten pro Bild.

401	402	403	404	405	406
301	302	303	304	305	306
201	202	203	204	205	206
101	102	103	104	105	106

Abb. 2.1: Bildverband mit 24 Bildern, Längs- und Querüberdeckung 60%,
Angabe der Bildnummern

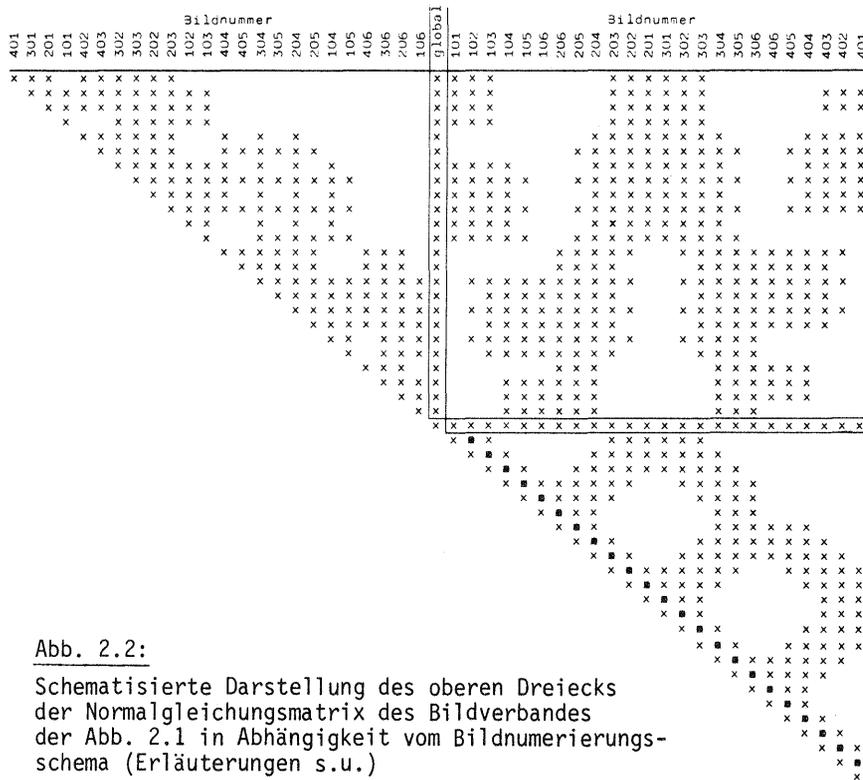


Abb. 2.2:

Schematisierte Darstellung des oberen Dreiecks der Normalgleichungsmatrix des Bildverbandes der Abb. 2.1 in Abhängigkeit vom Bildnumerierungs-schemata (Erläuterungen s.u.)

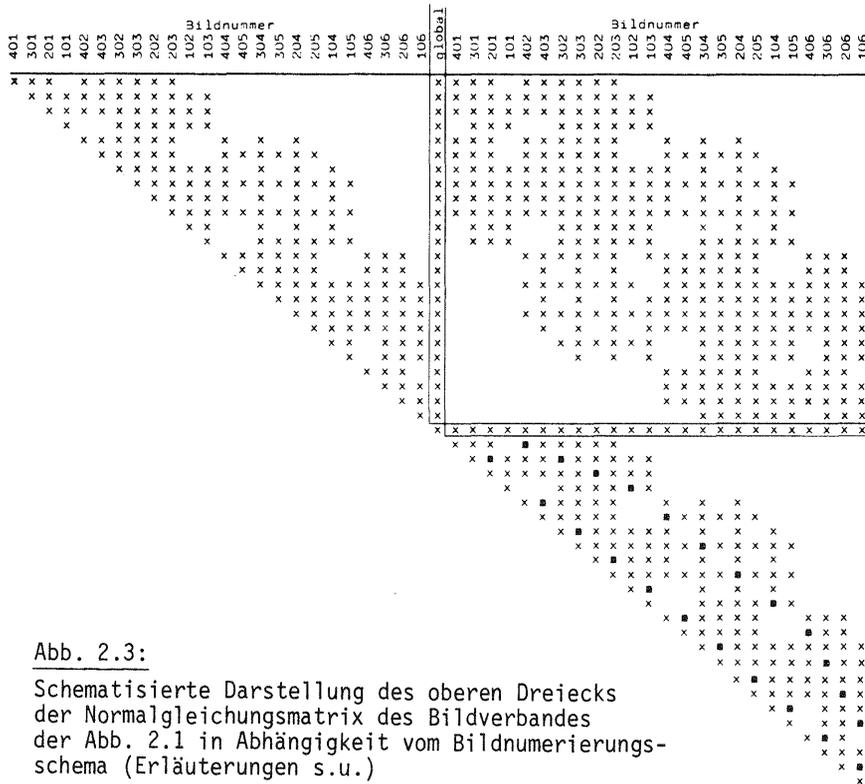


Abb. 2.3:

Schematisierte Darstellung des oberen Dreiecks der Normalgleichungsmatrix des Bildverbandes der Abb. 2.1 in Abhängigkeit vom Bildnumerierungs-schemata (Erläuterungen s.u.)

Erläuterungen zu Abbildungen 2.2 und 2.3:

x = 6x6 Submatrizen

⊗ = 6x6 Submatrizen mit durch die Korrelation zwischen den Bildern verursachtem additivem Normalgleichungsanteil auf der Diagonalen der Submatrix (ohne Hauptdiagonalanteil)

ten Ansatz zusätzlicher Parameter (Modell B) und zum anderen für das kombinierte Modell, abgeschätzt. Als Grundlage dienen folgende Beziehungen (vgl. Klein und Förstner (1981), S. 99):

$$\text{Aufstellung des Normalgleichungssystems: } N_A = n(vu_m)^2/2$$

$$\text{Lösung des Normalgleichungssystems : } N_L = ub^2/2 + ubd + 2ub + ud$$

Hierbei bedeutet:

n = Anzahl der beobachteten Bildkoordinaten

v = durchschnittliche Verknüpfungszahl (Mehrfachmessung) der Punkte

u = Anzahl der unbekannt Parameter, Ordnung des Systems

u_m = Anzahl der unbekannt Parameter pro Bild

b, d = Band- bzw. Randbreite

Die Summe $N_A + N_L$ gibt eine Abschätzung des numerischen Aufwands im jeweiligen Modell an. Für den vorliegenden Bündelblock mit 25 Punkten pro Bild und doppelter Überdeckung ergibt sich die durchschnittliche Verknüpfungszahl zu 7, d.h. jeder Punkt erscheint durchschnittlich in 7 Bildern. Beim kombinierten Modell sind die Strukturierungsfälle der Abbildungen 2.2 und 2.3 vom numerischen Aufwand gesehen nahezu identisch, so daß nur 2 Fälle aufgeführt werden:

1. blockinvarianter Ansatz der zusätzlichen Parameter

$$\begin{array}{rcl} u = 150 & b = 78 & N_A = 1.06 \cdot 10^6 \\ u_m = 6 & d = 6 & N_L = 0.55 \cdot 10^6 \\ \hline & & N_A + N_L = 1.61 \cdot 10^6 \end{array}$$

2. blockinvarianter und bildweiser Ansatz der zusätzlichen Parameter

a) Fall der Abbildungen 2.2 und 2.3

$$\begin{array}{rcl} u = 294 & b = 78 & N_A = 4.23 \cdot 10^6 \\ u_m = 12 & d = 150 & N_L = 4.42 \cdot 10^6 \\ \hline & & N_A + N_L = 8.65 \cdot 10^6 \end{array}$$

b) Fall der Abbildung 2.4

$$\begin{array}{rcl} u = 294 & b = 156 & N_A = 4.23 \cdot 10^6 \\ u_m = 12 & d = 6 & N_L = 3.95 \cdot 10^6 \\ \hline & & N_A + N_L = 8.18 \cdot 10^6 \end{array}$$

Aus der Abschätzung der Anzahl der Rechenoperationen ergibt sich für das vorliegende Beispiel des kombinierten Modells eine Steigerung um den Faktor 5.4 bzw. 5.1 gegenüber dem konventionellen Modell mit blockinvariantem Ansatz. Die im Abschnitt IV.5.2.1 durchgeführten Simulationsberechnungen bestätigen mit einem Steigerungsfaktor von 4.3 der realen Rechenzeit (CPU) diese Abschätzung.

Allgemein läßt sich zur Steigerung des numerischen Aufwands gegenüber dem konventionellen Modell sagen, daß die Aufstellung des Normalgleichungssystems sich quadratisch mit dem Verhältnis Transformationsparameter zur Summe aller Parameter pro Bild erhöht. Für die Lösung des Normalgleichungssystems geht die Steigerung mit der 3. Potenz dieses Verhältnisses. Damit kann der nume-

rische Aufwand des kombinierten Modells im Einzelfall abgeschätzt und im Zusammenhang mit der Genauigkeitsabschätzung (vgl. Abschnitt 2.3) eine Aussage getroffen werden, ob der erhöhte numerische Einsatz im jeweiligen Anwendungsfall gerechtfertigt ist.

2.2.4 Anwendungsbereiche

Der Anwendungsbereich des kombinierten Modells liegt generell in der hochpräzisen photogrammetrischen Punktbestimmung. Der Einsatz muß damit nicht unbedingt auf die Punktbestimmung mit Hilfe der Aerotriangulation beschränkt sein, sondern kann auch in Bereichen der Nahbereichsphotogrammetrie liegen, in denen besonders hohe Genauigkeiten gefordert und neuerdings bereits aufwendige, Luftbildkamern adäquate Aufnahmesysteme verwendet werden (siehe z.B. Brown (1982, 1984)).

Wesentlich für den Einsatz des kombinierten Modells ist allerdings die Beachtung aller für die photogrammetrische Präzisionsauswertung und Punktbestimmung notwendigen Maßnahmen in Bezug auf höchste Genauigkeit und Zuverlässigkeit des Ergebnisses. Der Rauschpegel der Messung muß so niedrig wie möglich gehalten werden ($\sigma < 1 \mu\text{m}$), um einen wirksamen Einsatz des Modells zu gewährleisten.

Der vorrangige Anwendungsbereich des kombinierten Modells wird aber in der Forschung liegen. Denn mit Hilfe dieses Modells ist es erstmals gelungen, ein übergeordnetes mathematisches Modell zu präsentieren, auf dessen Grundlage einfachere Modellansätze quantitativ und qualitativ beurteilt werden können. Weiterhin bildet es auch die Basis für künftige wissenschaftliche Untersuchungen im Bereich des stochastischen Modells der Aerotriangulation.

Damit ist der Anwendungsbereich eindeutig abgegrenzt. Inwieweit mit vorgegebenen Informationen über das Korrelationsverhalten zwischen den Bildern und die Streuung der zusätzlichen Parameter gearbeitet werden kann, oder ob diese von Fall zu Fall aus dem Datenmaterial bestimmt werden müssen, ist mit Hilfe empirischer Untersuchungen (siehe Abschnitte IV.4 und IV.6) zu klären. Zumindest läßt sich eine Abschätzung der zu erwartenden Genauigkeitssteigerungen beim Ansatz des kombinierten Modells angeben, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

2.3 Abschätzung der zu erwartenden Genauigkeitssteigerung

Nachstehend wird eine theoretische Abschätzung der zu erwartenden Genauigkeitssteigerung gegenüber den konventionellen mathematischen Modellen gegeben werden. Zumindest soll eine obere Grenze der Genauigkeitssteigerung als Funktion der globalen Systematik, der Varianz der zusätzlichen Parameter, des Korrelationsanteils zwischen den Bildern und des Bildrauschens im Einzelfall bestimmbar sein. Die Abschätzung basiert auf dem Vergleich unterschiedlicher stochastischer Modelle und damit auf der Eigenwertzerlegung von Kovarianzmatrizen, weshalb diese vor der eigentlichen Ableitung der Funktion abgehandelt wird.

2.3.1 Abschätzung mit Hilfe des allgemeinen Eigenwertproblems

(1) Zwei sich im stochastischen Teil voneinander unterscheidende mathematische Modelle lassen sich mit Hilfe des allgemeinen Eigenwertproblems qualitativ beurteilen (vgl. Bouloucos, Karaididis und Molenaar (1984)). Dabei muß das übergeordnete Modell das einfachere Modell beinhalten

(vgl. Gl. (2.3.1-7)). Über das Fehlerfortpflanzungsgesetz, basierend auf dem übergeordneten Modell, werden die Kovarianzmatrizen $C_{\hat{x}\hat{x}}$ der geschätzten Parameter \hat{x} für die verschiedenen Modellansätze berechnet:

$$C_{\hat{x}\hat{x}} = (A^T C^{-1} A)^{-1} A^T C^{-1} \bar{C}_{11} C^{-1} A (A^T C^{-1} A)^{-1} \quad (2.3.1-1)$$

Für das einfache stochastische Modell (C_{11}) wird in Gleichung (2.3.1-1) $C=C_{11}$ bzw. für das übergeordnete Modell (\bar{C}_{11}) $C=\bar{C}_{11}$ gesetzt. Der Vergleich der beiden aus Gleichung (2.3.1-1) abgeleiteten Kovarianzmatrizen erfolgt mit dem allgemeinen Eigenwertproblem und dessen charakteristischer Gleichung:

$$|\bar{C}_{\hat{x}\hat{x}} - \lambda C_{\hat{x}\hat{x}}| = 0 \quad (2.3.1-2)$$

Dabei bedeutet:

$C_{\hat{x}\hat{x}}$ = Kovarianzmatrix der geschätzten Parameter bezogen auf das einfache Modell

$\bar{C}_{\hat{x}\hat{x}}$ = Kovarianzmatrix der geschätzten Parameter bezogen auf das übergeordnete (erweiterte) Modell

λ = Vektor der Eigenwerte

Ein Maß für die Genauigkeitssteigerung stellt das Verhältnis von maximalem zu minimalem Eigenwert (Konditionszahl) dar:

$$k = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (2.3.1-3)$$

Da aber ein einfacher Zusammenhang für die Lösung des Eigenwertproblems der Kovarianzmatrizen $\bar{C}_{\hat{x}\hat{x}}$ und $C_{\hat{x}\hat{x}}$ nicht gegeben ist, geht man zweckmäßigerweise auf den direkten Vergleich der stochastischen Modelle über, die Bestandteile der Kovarianzmatrizen der geschätzten Parameter sind. Damit reduziert sich das Problem auf die Lösung der charakteristischen Gleichung

$$|\bar{C}_{11} - \lambda C_{11}| = 0 \quad (2.3.1-4)$$

Dies hat zur Folge, daß die Konditionszahl k nur noch eine Abschätzung eines oberen Grenzwertes für die Genauigkeitssteigerung darstellt, daß aber die stochastischen Modelle direkt verglichen werden können.

Betrachtet man die Transformation $I_n y = Ax$ mit $o(A)=n \times u$, so ist der Rangraum von A im Rangraum von I_n enthalten:

$$R(I_n) \supseteq R(A) \quad ,$$

und damit gilt für die Rayleigh-Quotienten $\lambda(Ax) \leq \lambda(y)$:

$$\frac{x^T C_{\hat{x}\hat{x}} x}{x^T \bar{C}_{\hat{x}\hat{x}} x} = \frac{x^T \bar{C}_{11}^{-1} x}{x^T C_{11}^{-1} x} = \frac{x^T A^T \bar{C}_{11}^{-1} A x}{x^T A^T C_{11}^{-1} A x} \leq \frac{y^T \bar{C}_{11}^{-1} y}{y^T C_{11}^{-1} y} = \frac{y^T C_{11} y}{y^T \bar{C}_{11} y} \quad (2.3.1-5)$$

(vgl. Zurmühl (1964)). Womit gezeigt ist, daß die Konditionszahl k , bestimmt aus Gl. (2.3.1-4), einen oberen Grenzwert darstellt, da die Extremaleigenschaften des Rayleigh-Quotienten mit den maximalen und minimalen Eigenwerten zusammenfallen.

(2) Um möglichst das gesamte Spektrum der diversen Modellansätze in der Aerotriangulation abzudecken, sind die Extremfälle der verschiedenen stochastischen Modelle miteinander zu vergleichen. Deshalb wird die Kovarianzmatrix der Beobachtungen des Ausgangsmodells als Diagonalmatrix mit identischer Varianz definiert:

$$C_{11} = \sigma_{\varepsilon}^2 I_n, \quad (2.3.1-6)$$

σ_{ε} entspricht dem Bildrauschen. Für das erweiterte Modell wird der stochastische Teil des kombinierten Modells nach Gleichung (II.4.1.1-6) angesetzt, welcher die einfacheren Modellansätze beinhaltet. Dabei gelten folgende Einschränkungen:

- die Koeffizientenmatrizen $B^{(i)}$ sind für jedes Bild identisch ($B^{(i)} = \bar{B}$)
- die Kovarianzmatrizen $C_{BB}^{(i)}$ sind für jedes Bild identisch und werden durch Einheitsmatrizen beschrieben ($C_{BB} = \sigma_{\varepsilon}^2 I_n$)
- die Kovarianzmatrix der zusätzlichen Parameter ist eine Diagonalmatrix ($C_{ss} = \text{diag}(\sigma_{s_i}^2)$).

Damit ergibt sich die Kovarianzmatrix der Beobachtungen im erweiterten Modell mit:

$$\bar{C}_{11} = \sigma_{\varepsilon}^2 I_n + \frac{1}{1-a^2} (T \otimes \bar{B} C_{ss} \bar{B}^T) \quad (2.3.1-7)$$

Unter der Verwendung der Gewichtskoeffizientenmatrizen Q_{11} bzw. \bar{Q}_{11} geht das allgemeine Eigenwertproblem auf die einfache Eigenwertzerlegung über:

$$|\bar{Q}_{11} - \lambda I_n| = 0, \quad (2.3.1-8)$$

d.h. es müssen nur noch die maximalen und minimalen Eigenwerte von \bar{Q}_{11} bestimmt werden.

(3) Die additive Zerlegung der Matrix \bar{Q}_{11} in Einheitsmatrix und Restterm gestattet gleichfalls eine additive Zerlegung der Eigenwerte der beiden Summanden, d.h. zu den maximalen und minimalen Eigenwerten des Restterms muß noch der Wert 1 addiert werden (vgl. Zurmühl (1964), S. 163). Das Kroneckerprodukt beim Restterm läßt es zu, daß sich die extremalen Eigenwerte dieses Produkts als die Produkte der maximalen und minimalen Eigenwerte der Matrizen T und $\bar{B} C_{ss} \bar{B}^T$ ergeben. Denn es gilt:

$$\text{sp}(T \otimes \bar{B} C_{ss} \bar{B}^T) = \text{sp}(T) \cdot \text{sp}(\bar{B} C_{ss} \bar{B}^T) = \sum_{i=1}^p \lambda_i(T) \cdot \sum_{i=1}^q \lambda_i(\bar{B} C_{ss} \bar{B}^T) = \sum_{i=1}^{pq} \lambda_i(T \otimes \bar{B} C_{ss} \bar{B}^T)$$

Damit sind nur noch die extremalen Eigenwerte der Matrizen T und $\bar{B} C_{ss} \bar{B}^T$ zu bestimmen.

(4) Da die Matrix C_{ss} als Diagonalmatrix angenommen wurde, sind die Eigenwerte ungleich Null des Produktes $\bar{B} C_{ss} \bar{B}^T$ identisch mit den Elementen der Matrix C_{ss} , falls es sich bei der Matrix \bar{B} um eine normierte Matrix handelt, so daß alle Spaltenvektoren die Länge 1 erhalten. Dies ist bei einem orthonormierten Parametersatz der Fall. Da das Produkt $\bar{B} C_{ss} \bar{B}^T$ einen Rangdefekt von $n_1 - q$ aufweist und eine positiv semidefinite Matrix darstellt, ist der minimale Eigenwert mit Null anzunehmen. Der maximale Eigenwert ist identisch mit der maximalen Varianz der zusätzlichen Parameter.

Die extremalen Eigenwerte der Töplitzmatrix T werden im folgenden Abschnitt bestimmt.

2.3.2 Eigenwertzerlegung von Töplitzmatrizen

Die in diesem Abschnitt zu behandelnde Eigenwertzerlegung beschränkt sich auf endliche Töplitzmatrizen. Nach Grenander/Szegö (1958, S. 69ff) lassen sich die Eigenwerte von endlichen Töplitzmatrizen aus unendlichen Laurent-Reihen entwickeln.

Die Funktion $f(x)$, welche über ihre Fourierkoeffizienten die Töplitzmatrix T beschreibt, sei ein reziprokes trigonometrisches Polynom 1. Ordnung:

$$f(x) = \frac{1-a^2}{1-2a \cos x + a^2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a^{|j|} e^{ijx}, \quad 0 < a < 1. \quad (2.3.2-1)$$

Damit ergibt sich die charakteristische Gleichung zu

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & a & a^2 & \cdot & \cdot & \cdot & a^{p-1} \\ & 1-\lambda & a & \cdot & \cdot & \cdot & a^{p-2} \\ & & 1-\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & a^{p-3} \\ & & & \cdot & & & \cdot \\ & & & & \cdot & & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ \text{sym.} & & & & & & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (2.3.2-2)$$

Aus dieser charakteristischen Gleichung erhält man nach Grenander/Szegö (1958) genähert die Eigenwerte mit

$$\lambda_i \approx f\left(\pi + \frac{i(p-1)+\gamma}{p+1}\right) = f(x) \quad (2.3.2-3)$$

mit $i=1, \dots, p$ und $\gamma \rightarrow 0$ für $p \rightarrow \infty$.

Die Eigenwerte ergeben sich also direkt aus der Funktion $f(x)$ der Gleichung (2.3.2-1). Die extremalen Eigenwerte liegen im Intervall zwischen 0 und π , da es sich um eine trigonometrische Funktion handelt. Damit lauten die maximalen und die minimalen Eigenwerte der Töplitzmatrix T :

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}^{(T)} &= \frac{1-a^2}{1-2a \cos(0) + a^2} = \frac{1+a}{1-a} \\ \lambda_{\min}^{(T)} &= \frac{1-a^2}{1-2a \cos(\pi) + a^2} = \frac{1-a}{1+a} \end{aligned} \quad (2.3.2-4)$$

Mit Hilfe dieser und den im vorangegangenen Abschnitt angegebenen Eigenwerte läßt sich nun eine allgemeine Funktion für die Konditionszahl k der Gleichung (2.3.1-3) angeben.

2.3.3 Eine Funktion zur Abschätzung der mittleren Genauigkeitssteigerung

Aufbauend auf den Kenntnissen der vorangegangenen Abschnitte ergeben sich die maximalen und minimalen Eigenwerte aus der charakteristischen Gleichung (2.3.1-8) zu

$$\lambda_{\min} = 1$$

$$\lambda_{\max} = 1 + \frac{1}{\sigma_{\epsilon}^2} \frac{1}{1-a^2} \frac{1+a}{1-a} \max_i(\sigma_{s_i}^2) \quad . \quad (2.3.3-1)$$

Man erhält damit als obersten Grenzwert für die Genauigkeitssteigerung zwischen den Ansätzen mit den stochastischen Modellen (2.3.1-6) und (2.3.1-7):

$$k \leq 1 + \frac{\max_i(\sigma_{s_i}^2)}{\sigma_{\epsilon}^2(1-a)^2} \quad . \quad (2.3.3-2)$$

Um eine realistischere Abschätzung der Genauigkeitssteigerung zu erreichen, ist es sinnvoll, auf die mittleren Eigenwerte überzugehen. Damit wird in Gleichung (2.3.3-1) der Faktor aus der Töplitzmatrix zu eins, und für die Varianz der zusätzlichen Parameter ist ein über die gesamte Bildfläche gemittelter Wert anzusetzen, der sich auf die im Abschnitt 2.3.1 genannte Normierung bezieht. Um auch den mittleren Einfluß der blockinvarianten Systematik mit einbeziehen zu können, ist dieser quadratisch zu der mittleren Varianz der zusätzlichen Parameter zu addieren. Somit gibt die Funktion

$$k \leq \sqrt{1 + \sigma_{\epsilon}^{-2} (\bar{z}_o^2 + \frac{1}{1-a^2} \bar{\sigma}_s^2)} \quad (2.3.3-3)$$

einen Faktor der mittleren Genauigkeitssteigerung an, der aber nach Gleichung (2.3.1-5) immer noch eine obere Grenze darstellt.

Dabei bedeutet:

σ_{ϵ}^2 = Varianz des Bildrauschens

$\bar{\sigma}_s^2$ = über die Bildfläche gemittelte Varianz der zusätzlichen Parameter

\bar{z}_o = mittlerer Wert der blockinvarianten Systematik

a = Prozeßkoeffizient des AR(1)-Prozesses

Mit der Gleichung (2.3.3-3) lassen sich somit Abschätzungen für eine mittlere Genauigkeitssteigerung zwischen den in der Aero triangulation üblichen Modellansätzen zur Bündelblockausgleichung angeben, was anhand eines Beispiels demonstriert werden soll.

Beispiel: Genauigkeitssteigerung zwischen Modell mit blockinvariantem Parametersatz und kombiniertem Modell

gegeben : $\sigma_{\epsilon} = 1 \mu\text{m}$, $\bar{\sigma}_s = 1 \mu\text{m}$, $a = 0.5$, $\bar{z}_o = 0$

Faktor : $k \leq 1.53$

Das Beispiel bezieht sich auf Daten, die aus empirischen Untersuchungen (vgl. Abschnitt IV.4) ermittelt wurden. Aus Simulationsberechnungen ergab sich für diesen Fall eine konkrete Genauigkeitssteigerung um den Faktor 1.32 (vgl. Abschnitt IV.5.2.1).

Da die Funktion (2.3.3-3) eine obere Grenze darstellt, kann sie im Einzelfall bei der Entscheidungsfindung über den Verfeinerungsgrad des zu verwendenden mathematischen Modells mit herangezogen werden, indem eine Abwägung zwischen zusätzlichem Aufwand und erreichbarer Genauigkeit möglich ist. Sie bleibt aber immer eine Abschätzung, da sie stark vom Kenntnisstand des Anwenders über die zu erwartende Systematik des auszuwertenden Datenmaterials abhängig ist.

3. Zusammenfassung

Das im Kapitel III vorgestellte kombinierte Modell für die Aerotriangulation schließt in seiner Konzeption an die vorangegangene Modellentwicklung der Bündelblockausgleichung an. Die eigentliche Erweiterung gegenüber den bisher bekannten Verfahren liegt im stochastischen Teil des mathematischen Modells. Der Ansatz der zusätzlichen Parameter als stochastische Größen trägt den neuesten empirischen Untersuchungen über das stochastische Verhalten von Bildkoordinaten bzw. der systematischen Bilddeformationen Rechnung. Die Zerlegung des stochastischen Modells in einen Anteil bezogen auf das Einzelbild und einen Anteil basierend auf den Beziehungen zwischen den Bildern kommt der Aufnahme- und Auswertesituation sehr nahe. Korrelationen zwischen den Bildern rühren sicherlich zu einem hohen Prozentsatz nur vom Aufnahme- bzw. vom Entwicklungsprozeß her, sofern man Einflüsse von seiten des Auswerteprozesses ausschließt, was bei einem gut kalibrierten Gerät und einer Auswertung in klimatisierten Räumen erwartet werden kann und die man somit eher in der Hand hat. Deshalb stellt die Beschreibung dieser Korrelationen bei der zeitlichen Aufeinanderfolge der Aufnahmen mit Hilfe des aus der Zeitreihenanalyse stammenden autoregressiven Prozesses ein geeignetes Instrument dar.

Die in Definition III.2-1 realisierte Verlagerung der stochastischen Eigenschaften in das Funktionalmodell ist für den operationellen Einsatz von Bedeutung. Diese Form der Modelldefinition garantiert einen übersichtlichen Aufbau des Normalgleichungssystems, minimalen numerischen Aufwand und die Anpassungsfähigkeit an bestehende Programmsysteme. Die Grenzen dieses Ansatzes ergeben sich eindeutig im Fall einer sich als notwendig erweisenden komplizierten Strukturierung der Kovarianzmatrix der Bildkoordinaten. In diesem Fall sollte das Funktionalmodell von den stochastischen Einflüssen freigehalten werden und das Hauptgewicht auf eine einwandfreie Strukturierung des stochastischen Modells gelegt werden (vgl. Modell G1).

Der hohe numerische Aufwand, den das kombinierte Modell erfordert, rechtfertigt seinen Einsatz hauptsächlich in Bereichen der hochgenauen photogrammetrischen Punktbestimmung. Das Modell eignet sich besonders aber auch für wissenschaftliche Untersuchungen, um einfachere Modelle zu beurteilen. Durch die Möglichkeit der Schätzung des Prozeßkoeffizienten a und der Varianzen der zusätzlichen Parameter mit Hilfe der Varianz-Kovarianzkomponenten-Schätzung kann das stochastische Verhalten im Bildverband anhand empirischer Untersuchungen weiter analysiert werden. Diese Untersuchungen sind für den Einsatz des Modells von großer Wichtigkeit, da auch weiterhin einige wesentliche Probleme und offene Fragen zum stochastischen Modell der Aerotriangulation anstehen:

1. Einer der zu klärenden Gesichtspunkte ist das Korrelationsverhalten zwischen den Bildern. Es müssen Analysen bezüglich der Prozeßordnung, des Korrelationsbetrages und des Einflusses der Korrelation auf die Schätzung durchgeführt werden. Grundlegende Informationen darüber und über das Analyseverfahren liegen im Kapitel IV bereits vor.
2. Ein weiterer Problempunkt ist die Variation der systematischen Fehler. Hier ist anhand empirischer Untersuchungen zu klären, inwieweit für bestimmte Parameteransätze allgemeingültige Aussagen getroffen werden können, oder ob objektabhängige Schätzungen in der Blockausgleichung mit der VCC-Schätzung durchgeführt werden müssen. In diesem Zusammenhang ist auch zu klären, mit welcher Präzision die allgemeingültigen Aussagen über die Dispersion getroffen werden müssen, ohne die Ergebnisse der Schätzung negativ zu beeinflussen. Dies läßt sich mit Hilfe von Simulationsberechnungen, wie sie im Abschnitt IV.5.2.3 beschrieben sind, abklären.

3. Auch auf dem Gebiet der unterschiedlichen Parameteransätze zur Erfassung der systematischen Bildfehler sind noch wesentliche Fragen zu klären. Für das kombinierte Modell wäre ein orthogonaler Ansatz von großem Vorteil. Aber die bisher in der Anwendung befindlichen orthogonalen Parametersätze erheben lediglich den Anspruch einer genäherten Orthogonalität bezüglich eines bestimmten Punktschemas im Bild. Dieses Schema läßt sich in der Anwendung häufig nicht streng realisieren oder es fallen Bildpunkte für die Auswertung aus. Auch werden bestimmte Parametertypen durch die Paßpunktanordnung und Überdeckungsverhältnisse stark beeinflusst. Dies alles führt zu Korrelationen zwischen den Parametern. Hier könnte das von Sarjakoski (1984) vorgeschlagene Verfahren, welches auf einer Orthogonalisierung mit Hilfe der Eigenwertzerlegung beruht und keine zweite Lösung des Gleichungssystems erfordert, die Richtung künftiger Anwendungen weisen.
4. Desweiteren bleibt der ganze Komplex des stochastischen Verhaltens der Bildkoordinaten zu klären, nachdem die bildweisen systematischen Einflüsse und die Korrelationen zwischen den Bildern erfaßt sind. Zuerst sollte mit dem einfachsten Ansatz, der unkorrelierte und gleichgenaue Bildkoordinaten unterstellt, überprüft werden, inwieweit sich die aus der Schätzung ergebenden Streuungen noch vom Meßrauschen abheben. Sollten sich hier signifikante Abweichungen ergeben, so ist mit geeigneten empirischen Untersuchungen nach den physikalischen Ursachen zu forschen, um mit einem möglichst einfachen und effektiven Ansatz, der aber auch durchaus phänomenologisch heuristischen Überlegungen entspringen kann, basierend auf dem Primärfehlerkonzept, die Kovarianzmatrix der Bildkoordinaten zu modellieren.

Natürlich können im Rahmen dieser Arbeit nicht alle aufgeführten Gesichtspunkte geklärt werden, aber es sollen doch Mittel und Wege zur Lösung der noch anstehenden Probleme angegeben werden. So lassen sich einige der hier aufgezeigten Aspekte zumindest ansatzweise mit den im folgenden Kapitel beschriebenen empirischen Untersuchungen zum stochastischen Verhalten von Bildkoordinaten und mit verschiedenen Simulationsberechnungen beantworten.

Zusammenfassend stellt das kombinierte Modell einen weiteren Schritt in der Modellentwicklung für die Aerotriangulation dar. Es umfaßt von seiner Konzeption aus gesehen einen wesentlichen Teil des in der bisherigen Modellentwicklung vernachlässigten stochastischen Modells. Inwieweit es die theoretischen Erwartungen erfüllt, kann nur mit Hilfe künftiger empirischer Untersuchungen geklärt werden.

IV. EMPIRISCHE UNTERSUCHUNGEN UND SIMULATIONSANALYSEN

1. Einleitung

Den Untersuchungen dieses Kapitels liegen zwei unterschiedliche Aspekte zugrunde: Zum einen liefern die Untersuchungsergebnisse rückwirkend die Motivation für das in Kapitel III beschriebene kombinierte Modell in der Aerotriangulation, und zum anderen werden mit Hilfe von Simulationsuntersuchungen unterschiedliche Modellansätze bezüglich der erreichbaren Genauigkeit verglichen und Aussagen über a priori Modellannahmen getroffen.

(1) Der erste Teil steht vollständig unter dem Gesichtspunkt, Informationen über das stochastische Verhalten von Bildkoordinaten zu erhalten und insbesondere Strukturen oder physikalische Zusammenhänge in diesem Bereich offenzulegen. Um aufwendige Tests zu vermeiden, wurde unter Verzicht auf eine vollständige Erfassung des stochastischen Verhaltens Bildmaterial von Befliegungen mit Reseaukammern für die empirischen Untersuchungen verwendet. Man kann dabei davon ausgehen, daß die abgebildeten Reseaukreuze bei den Aufnahmen einen wesentlichen Teil des Fehlerbudgets repräsentieren. Denn Ellenbeck (1981) stellte bei seinen empirischen Untersuchungen fest, daß die systematischen Bildfehler nur wenig von äußeren Einflüssen, sondern überwiegend von Einflüssen im Bereich der Kammer, Kassetten und der Verarbeitung des Films im Labor abhängen. Dieser Anteil wird aber mit dem Reseau erfaßt. Außerdem sind auch die sehr erfolgreichen Anwendungen von Reseuaufnahmen, wie sie von Slama (1978) und Lucas (1983) beschrieben werden, eine Bestätigung für diese Aussage.

(2) Ein Überblick soll die einzelnen Untersuchungsabschnitte dieses Kapitels charakterisieren. Der auf die Beschreibung des verwendeten Datenmaterials folgende Abschnitt stellt das Schätzverfahren und die Analyseergebnisse von Kovarianzmatrizen der Bildkoordinaten vor. Im Zusammenhang mit dem Korrelationsverhalten zwischen den Bildern werden Ergebnisse der Zeitreihenanalyse mit autoregressiven Prozessen gezeigt. Mit Hilfe von auf diesen empirischen Untersuchungen basierenden Simulationen von Bildkoordinaten eines photogrammetrischen Blocks wird die Effektivität des kombinierten Modells analysiert. Im letzten Abschnitt werden die Konsequenzen aus diesen Untersuchungen und den theoretischen Betrachtungen des Kapitels II über die Auswirkungen von Modellfehlern auf künftige Versuchsplanungen zur möglichst vollständigen Erfassung des stochastischen Verhaltens von Bildkoordinaten diskutiert.

Alle Berechnungen, die im Zusammenhang mit den empirischen Untersuchungen stehen, wurden an den Rechenanlagen CYBER 174 und CDC 6600 des Rechenzentrums der Universität Stuttgart durchgeführt. Die Simulationsberechnungen erfolgten an dem Minicomputer HARRIS H 100 des Instituts für Photogrammetrie der Universität Stuttgart.

2. Gewinnung des Datenmaterials der empirischen Untersuchungen

2.1 Befliegungen

Die für die empirischen Untersuchungen notwendigen Reseuaufnahmen wurden aus den Befliegungen der Testfelder Oberschwaben (vgl. Belzner (1973)) und Rheidt (vgl. Kupfer (1976)) entnommen.

Bei der Auswahl der Aufnahmen wurde insbesondere darauf geachtet, daß es sich um unmittelbar aufeinanderfolgende Bilder auf dem Film handelt, um die Korrelationsanalyse zwischen den Bildern nicht durch Lücken in der Aufnahmefolge zu beeinträchtigen. Die Aufnahmen zu Beginn und am Ende der einzelnen Flüge wurden nicht verwendet.

Für die Auswertung ist das Originalfilmmaterial (Negative) herangezogen worden, soweit es zur Verfügung stand. Um den Einfluß des Kopiervorgangs zu erfassen, wurden von einem Flug Kontaktkopien erstellt und diese zusätzlich in zwei Durchgängen von verschiedenen Beobachtern unabhängig voneinander ausgewertet. Zur Identifizierung der einzelnen Flüge bei der Beschreibung der Untersuchungen gelten folgende Bezeichnungen:

- OZ76 : Testfeld Oberschwaben, ZEISS-Kammer, 76 Aufnahmen (Lücken in der fortlaufenden Bildnumerierung konnten nicht geklärt werden, da Originalfilmmaterial nicht zur Verfügung stand; Längsüberdeckung von 90% ist allerdings immer eingehalten)
- RZ53 : Testfeld Rheidt, ZEISS-Kammer, 53 Aufnahmen
- RZK41 : 41 Kopien von RZ53; wurden von zwei verschiedenen Operateuren ausgewertet (Fälle a und b)
- RZ72 : Testfeld Rheidt, ZEISS-Kammer, 72 Aufnahmen
- RW53 : Testfeld Rheidt, WILD-Kammer, 53 Aufnahmen
- RW71 : Testfeld Rheidt, WILD-Kammer, 71 Aufnahmen

Dabei steht der erste Buchstabe für das Testfeld, der zweite für den Kammerhersteller. Die Ziffer am Schluß gibt die Anzahl der aufeinanderfolgenden Aufnahmen an. Eine detaillierte Beschreibung der einzelnen Flüge ist in Tabelle 2.1 aufgeführt.

Flugnummer	OZ76	RZ53	RZK41	RZ72	RW53	RW71
Flugtag	08.04.69	13.05.74	↑	13.05.74	13.05.74	13.05.74
Flugzeug	Aero Commander	Aero Commander		Aero Commander	Aero Commander	Aero Commander
Überdeckung	90%	90%		90%	90%	90%
Bildmaßstab	1:28 000	1:11 000		1:5 500	1:10 500	1:5 250
Meßkammer	Zeiss RMK AR 15/23 Nr.21196	Zeiss RMK AR 15/23 Nr.21197	wie RZ53	Zeiss RMK AR 15/23 Nr.21197	Wild RC 8 Nr.107	Wild RC 8 Nr.107
Objektiv	Pleogon AR	Pleogon AR Nr. 98222	↓	Pleogon AR Nr. 98222	Aviogon Nr.15 UAg R 10	Aviogon Nr.15 UAg R 10
Brennweite	152.03 mm	152.01 mm		152.01 mm	152.15 mm	152.15 mm
Filter	B (gelb)	D (simult.)		D (simult.)	D (simult.)	D (simult.)
ausgewertetes Material	Agfa Gevaert Glasdiapositiv (Kopie)	Kodak Double X Film, negativ (Original)	Agfa Gevaert N33p Film, pos. (Kopie)	Kodak Double X Film, negativ (Original)	Kodak Double X Film, negativ (Original)	Kodak Double X Film, negativ (Original)
Bildnummern	307 - 395	15 - 67	15 - 55	68 - 139	5171 - 5223	5224 - 5295
Aufnahmeobjekt	Oberschwaben	Rheidt	Rheidt	Rheidt	Rheidt	Rheidt

Tabelle 2.1: Technische Daten zu den untersuchten Bildflügen mit Reseaumeßkammern

2.2 Messung des Bildmaterials

Die Auswertung des Bildmaterials erfolgte ausschließlich monoskopisch am Stereokomparator ZEISS PSK 2 des Instituts für Photogrammetrie der Universität Stuttgart und am Monokomparator ZEISS PK 1 der Internationalen Schule für Photogrammetrie-Operateure (IPO) Stuttgart. Angelernte Studenten führten die Auswertung selbständig im Rahmen von Studien- oder Diplomarbeiten durch (siehe Lang (1978), Moser und Stützel (1982), Straub (1982) und Wand (1982)). Im einzelnen wurden in zwei voneinander unabhängigen Durchgängen jeweils die 4 Rahmenmarken und 25 Reseaukreuze (5x5 Schema, Abstand 5 cm) gemessen. Die Streuungen der Mittelwerte aus Doppelmessungen variieren dabei zwischen 0.7 μm und 2.0 μm . Die Streuungen der einzelnen Komparatormessungen (σ_x , σ_y) sind in Tabelle 2.2 getrennt nach Rahmenmarken und Reseaukreuzen aufgeführt.

Flugnummer	Auswerter	Auswertegerät	Einstellgenauigkeit					
			Rahmenmarken			Reseaukreuze		
			Anzahl n	σ_x [μm]	σ_y [μm]	Anzahl n	σ_x [μm]	σ_y [μm]
OZ76	A	PSK 2	304	2.3	2.6	1900	2.1	2.8
RZ53	B	PK 1	212	1.4	1.4	1325	1.3	1.4
RZK41 a	C	PK 1	164	1.8	1.8	1025	1.6	2.0
b	B	PK 1	164	2.0	2.3	1025	2.0	2.3
RZ72	D	PK 1	288	1.1	1.4	1800	1.1	1.4
RW53	C	PK 1	212	1.7	1.7	1325	1.6	1.8
RW71	E	PK 1	284	1.3	1.5	1775	1.0	1.2

Tabelle 2.2: Streuung der Einzelmessung von Reseaukreuzen und Rahmenmarken am Mono- bzw. Stereokomparator (aus Doppelmessungen abgeleitet)

Dabei fällt besonders der Genauigkeitsunterschied zwischen den Messungen am PSK 2 und PK 1 auf, der deutlich zu Gunsten der Präzision des Monokomparators ausfällt. Die Einstellgenauigkeit bei den Rahmenmarken und den Reseaukreuzen kann jeweils als gleichwertig betrachtet werden, mit Ausnahme des Fluges RW71. Ein signifikanter Unterschied der Einstellgenauigkeit ist einheitlich zwischen den x- und y-Koordinaten festzustellen. Der Genauigkeitsunterschied zwischen Originalfilmmaterial und Kopie (RZ53 \leftrightarrow RZK41) ist eindeutig auf die schlechtere Bildqualität der Kopie zurückzuführen.

Bemerkenswert ist folgender Aspekt, der sich bei der Analyse der Einstellgenauigkeit in Bezug auf die Lage im Bild ergab. Berechnet man die Streuungen einzelner Reseaukoordinaten über alle Bilder eines Fluges aus den Doppelmessungen, so ergibt sich eine lineare Zeitabhängigkeit für die Beträge der Streuungen (vgl. Straub (1982)). Die unterschiedlichen Zeitabstände zwischen 1. und 2. Messung für die einzelnen Punkte sind durch das Meßschema in Hin- und Rückmessung bedingt. Welche physikalischen Einflüsse dieses zeitabhängige Verhalten (Zeitdifferenzen zwischen 20 sec und 20 min) der Einstellgenauigkeit (Unterschiede bis zum Faktor 2) verursachen, konnte nicht geklärt werden, steht aber offensichtlich mit der zeitlichen Veränderung des Gerätes bzw. des Bildmaterials während der Messung in Zusammenhang.

Insgesamt kann die erreichte Einstellgenauigkeit als gut bezeichnet werden, insbesondere wenn man die Ergebnisse beim Originalfilmmaterial betrachtet. Damit ist die für die Untersuchungen des stochastischen Verhaltens von Bildkoordinaten erforderliche hohe Meßgenauigkeit eingehalten. Für die anschließenden Berechnungen wurden ausschließlich die gemittelten Koordinaten verwendet.

3. Schätzung und Analyse von Kovarianzmatrizen

Der photogrammetrische Aufnahme- und Auswerteprozess setzt sich aus einer Vielzahl einzelner physikalischer Vorgänge zusammen. Ein wesentlicher Teil dieser physikalischen Zusammenhänge wird in der Aerotriangulation durch die funktionalen Beziehungen, wie perspektive Projektion, a priori Korrekturen usw. beschrieben. Dennoch herrscht noch weitgehende Unklarheit über die nicht im Funktionalmodell erfaßten physikalischen Ursachen und deren Auswirkung auf das stochastische Verhalten von Bildkoordinaten. Deshalb ist es zur Beschreibung des stochastischen Modells der Aerotriangulation sinnvoll, sich einen Einblick in die physikalischen Zusammenhänge zu verschaffen. Erste Untersuchungen zu diesem Themenbereich sollen hier dargestellt werden. Die hierzu notwendige Theorie zur Schätzung von Kovarianzmatrizen der Bildkoordinaten ist in Förstner und Schroth (1982) ausführlich dargelegt worden und soll deshalb nur zusammenfassend, bzw. ergänzend, präsentiert werden. Das zur Analyse der geschätzten Kovarianzmatrizen verwendete Verfahren der principal components-Analyse (PC-Analyse) ist im Abschnitt II.3.3.2 beschrieben. Aus den im Abschnitt II.3.3.1 genannten Gründen wurde bewußt das Verfahren der PC-Analyse gewählt, da bei anderen Verfahren, z. B. der Analyse mit Hilfe der Varianzkomponentenschätzung, Strukturen vorgegeben werden müssen, über deren Existenz keine Kenntnisse vorliegen sondern erst in empirischen Untersuchungen nachgewiesen werden müssen. Somit wird sich dieser Abschnitt im wesentlichen mit den Ergebnissen der Kovarianzanalyse der Reseaubefliegungen und den Schlußfolgerungen für künftige Untersuchungen beschäftigen.

3.1 Theorie zur Schätzung von Kovarianzmatrizen aus Reseaufnahmen

Die unmittelbar aufeinanderfolgenden Reseaufnahmen des zur Verfügung stehenden Datenmaterials lassen sich als Wiederholungsmessungen eines zu verschiedenen zeitlichen Epochen beobachteten geodätischen Netzes interpretieren (siehe Abbildung 3.1). Somit ist der Einsatz des vollständigen multivariaten Gauß-Markoff-Modells (Modell E) zur Schätzung der Kovarianzmatrix der beobachteten Reseaufnahmen sinnvoll (vgl. Abschnitt II.2.2.1).

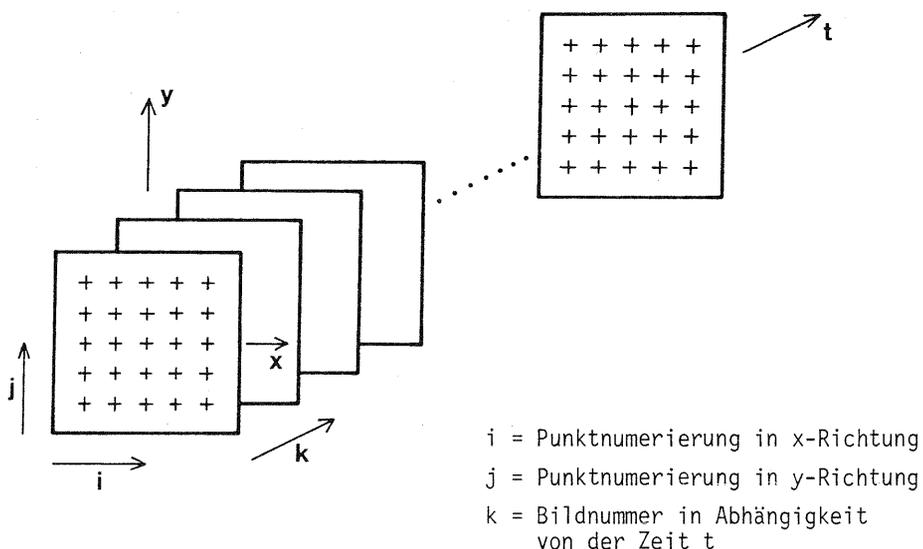


Abb. 3.1: Modell für die Reseaufnahmen

3.1.1 Erweitertes multivariates Gauß-Markoff-Modell

In Erweiterung zum Modell E (vgl. Def. II.2-10) erfordert die multivariate Betrachtung der Reseauaufnahmen eine Erfassung der Kalibrierungsdaten der verwendeten Reseauplatten. Da aber die Kalibrierung nur auf den zeitunabhängigen Teil der systematischen Bildfehler von Einfluß ist, werden die Kalibrierungsdaten als zusätzliche Unbekannte im Funktionalteil des mathematischen Modells behandelt, die sich als Mittelwerte der Bildkoordinaten über den gesamten Flug darstellen lassen. Somit kann für die Analyse der Reseauaufnahmen ein erweitertes multivariates Gauß-Markoff-Modell wie folgt definiert werden:

Definition IV.3-1: Erweitertes multivariates Gauß-Markoff-Modell

$\text{vecL} = (I_p \otimes A)\text{vecX} + (B \otimes I_n)\text{vecZ} + \text{vecE}$	$\text{vecX} \sim M(\text{vecX}, 0)$
	$\text{vecZ} \sim M(\text{vecZ}, 0)$
	$\text{vecE} \sim M(0, R \otimes C_{11})$
$\text{vecL} \sim M((I_p \otimes A)\text{vecX} + (B \otimes I_n)\text{vecZ}, R \otimes C_{11})$	

Hierbei bedeutet:

- vecL = Zufallsvektor aller beobachteten Reseaukoordinaten der p Bilder ($o(\text{vecL}) = np \times 1$)
- A = Koeffizientenmatrix der unbekannt Parameter einer Epoche ($o(A) = n \times u$, $r(A) = u$),
für alle Epochen gleich
- B = Koeffizientenmatrix der unbekannt Mittelwerte, entspricht einem zu einer Matrix verallgemeinerten "Eins"-Vektor ($o(B) = p \times 1$)
- vecX = Vektor der unbekannt Parameter ($o(\text{vecX}) = u \times 1$)
- vecZ = Vektor der unbekannt Mittelwerte ($o(\text{vecZ}) = n \times 1$)
- vecE = Zufallsvektor der Beobachtungsfehler ($o(\text{vecE}) = np \times 1$)
- R = Korrelationsmatrix zwischen den Epochen ($o(R) = p \times p$, $r(R) = p$)
- C_{11} = Kovarianzmatrix der Beobachtungen innerhalb einer Epoche ($o(C_{11}) = n \times n$, $r(C_{11}) = n$),
für alle Epochen gleich

Da es zur Bestimmung von Korrelationen verursachenden physikalischen Zusammenhängen im photogrammetrischen Einzelbild notwendig ist, das Funktionalmodell möglichst einfach zu halten, wurden für die empirischen Untersuchungen in der Regel lediglich 3-Parametertransformationen zur Datumsfestlegung im einzelnen Bild durchgeführt. Mit Hilfe des erweiterten multivariaten GM-Modells läßt sich nun in Analogie zu Gleichung (II.2.2.1-10) die Kovarianzmatrix der Beobachtungen im Einzelbild schätzen.

3.1.2 Schätzverfahren

Die Schätzung der Kovarianzmatrix der Bildkoordinaten im Einzelbild basiert auf der Schätzung der Kovarianzmatrix der Verbesserungen ($\hat{\underline{V}} = -\hat{\underline{E}}$) des erweiterten multivariaten GM-Modells. Die Verbesserungen ergeben sich aus

$$\hat{\underline{V}} = -D_A L D_B^T \quad (3.1.1-1)$$

mit den Projektionsmatrizen

$$D_A = I_n - A(A^T C_{11}^{-1} A)^{-1} A^T C_{11}^{-1}, \quad o(D_A) = n \times n, \quad r(D_A) = n - r(A)$$

$$D_B = I_p - B(B^T R^{-1} B)^{-1} B^T R^{-1}, \quad o(D_B) = p \times p, \quad r(D_B) = p - r(B)$$

(Beweis siehe Anhang A5). Die zugehörige Kovarianzmatrix lautet:

$$D(\text{vec} \hat{V}) = D_B R D_B^T \otimes D_A C_{11} D_A^T = R_{vv} \otimes C_{vv}. \quad (3.1.1-2)$$

In dem speziellen Modell der Definition IV.3-1 wird die Quadratsumme der Verbesserungen minimal (LS-Schätzung). Eine notwendige Bedingung hierfür ist im Anhang A6 aufgeführt. Falls die globale Systematik nicht durch den Mittelwert beschrieben werden kann, ist die Schätzung nach Gleichung (3.1.1-1) keine LS-Schätzung (Schaffrin (1982)).

Analog zu Gleichung (II.2.2.1-10) ergibt sich die um den Korrelationsanteil zwischen den Bildern reduzierte Kovarianzmatrix der Verbesserungen zu

$$\hat{C}_{vv} = \frac{\hat{V} R^{-1} \hat{V}^T}{p-1} \quad \text{mit} \quad r(\hat{C}_{vv}) = n-u \quad (3.1.1-3)$$

(vgl. Förstner und Schroth (1982, S. 49)). Die geschätzte Kovarianzmatrix \hat{C}_{vv} ist Wishart-verteilt mit $n-u$ Freiheitsgraden. Mit einer bekannten Korrelationsmatrix R zwischen den Bildern ist die Schätzung der Kovarianzmatrix der Verbesserungen im Einzelbild möglich, die aber einen Rangdefekt von u aufweist (vgl. hierzu Abschnitt II.2.2.1(2)). Um eine positiv definite Kovarianzmatrix der Bildkoordinaten im Einzelbild zu bekommen, wird bei Förstner und Schroth (1982, S. 51) folgende Beziehung eingeführt:

$$\hat{C}_{11} = \hat{C}_{vv} + A(A^T \hat{C}_{11}^{-1} A)^{-1} A^T. \quad (3.1.1-4)$$

Gleichung (3.1.1-4) ist nur eine Lösung für die Schätzung der Kovarianzmatrix der Bildkoordinaten. Sie paßt sich aber von ihrer Konstruktion so weit wie möglich an die Kovarianzmatrix der Verbesserungen und damit an das Datenmaterial an. Die Schätzung muß iterativ erfolgen, da die unbekannte Matrix \hat{C}_{11} auf beiden Seiten der Gleichung (3.1.1-4) auftritt. Zu Beginn des Iterationsprozesses wird \hat{C}_{11} mit einer Einheitsmatrix gleichgesetzt. Die Schätzung verläuft in Abfolge der Gleichungen (3.1.1-1), (3.1.1-3) und (3.1.1-4). Bei den empirischen Untersuchungen erwies sich eine Iteration als ausreichend für die Schätzung der Matrix \hat{C}_{11} . Da über das Korrelationsverhalten zwischen den Bildern zum Zeitpunkt dieser Untersuchungen keine Informationen vorlagen, wurde die Korrelationsmatrix R als Einheitsmatrix behandelt.

3.2 Analyse der geschätzten Kovarianzmatrizen

Die nach Gleichung (3.1.1-4) geschätzten Kovarianzmatrizen der Bildkoordinaten der Reseaukreuze wurden für alle gemessenen Bildreihen mit Hilfe der principal components-Analyse (PC-Analyse) untersucht. Die im Abschnitt II.3.3.2 beschriebene PC-Analyse basiert auf einer Eigenwertzerlegung der geschätzten Kovarianzmatrizen. Als Ergebnis der Analyse erhält man das Eigenwertspektrum und den Eigenwerten zugeordnete Strukturtypen, die sich in Form von Vektordiagrammen (siehe z.B. Abb. 3.3) darstellen lassen. Die einzelnen Vektoren repräsentieren die Streuung für

den Struktur- bzw. Deformationstyp in dem gemessenen Bildpunkt. Somit gibt die Vorstellung eines Pulsierens des gesamten Deformationstyps einen Eindruck von dessen Variationsverhalten in der untersuchten Bildreihe. Da die PC-Analyse einer rein mathematischen Zerlegung der Kovarianzmatrix entspricht, ist eine physikalische Interpretation der variierenden Deformationstypen nicht gewährleistet.

3.2.1 Ergebnisse der Analyse

Die dem mathematischen Modell der Definition IV.3-1 zugrundeliegenden funktionalen Beziehungen sind in Tabelle 3.1 für alle Flüge dargestellt. Vor der Berechnung der Verbesserungen zur Schätzung der Kovarianzmatrix wurden die gemittelten Maschinenkoordinaten reduziert. In der Regel erfolgte lediglich eine Reduktion auf den Schwerpunkt der gemessenen Koordinaten (System A), um vorhandene Deformationseffekte nicht durch Vortransformationen zu eliminieren oder zu verfälschen. Um den Einfluß des Übergangs von Maschinen- auf Bildkoordinaten erfassen zu können, wurde parallel zur Transformation ins System A auch eine Rahmenmarkentransformation mit Hilfe der ebenen Ähnlichkeitstransformation durchgeführt (System B).

Der überwiegende Teil der Untersuchungen beschränkte sich im Funktionalteil des Modells auf eine 3-Parametertransformation (Translationen x_o , y_o , Drehung κ), um möglichst wenig Zwang auf die Schätzung auszuüben. Die übrigen Transformationen wurden zur Untersuchung spezieller Einflüsse durchgeführt und werden bei den einzelnen Ergebnissen diskutiert.

In den Fällen der Bildreihen RZK41a, b wurden nur 9 Reseaukreuze (3×3 Schema, Abstand 10 cm) zur Analyse herangezogen, da hier die Anzahl der Epochen ($p=41$) nicht zur Schätzung einer Kovarianzmatrix der Dimension 50 ausreicht ($p < n$). In den Fällen RZ53 und RW53 wurden zur Kontrolle der Analyse mit 25 Punkten ebenfalls 9 Reseaukreuze verwendet, da eine zuverlässige Schätzung bei nur 3 redundanten Aufnahmen nicht gewährleistet ist.

Funktionalteil	OZ76	RZ53		RZK41a	RZK41b	RZ72	RW53		RW71
	(25)	(25)	(9)	(9)	(9)	(25)	(25)	(9)	(25)
3-Parametertransformation (x_o , y_o , κ), System A	X	X	X	X	X	X	X	X	X
3-Parametertransformation (x_o , y_o , κ), System B	—	X	X	X	X	X	X	X	X
4-Parametertransformation (x_o , y_o , κ , m), System A	X	X	—	X	X	—	X	—	—
4-Parametertransformation (x_o , y_o , κ , ϕ), System A	X	—	—	—	—	—	—	—	—
4-Parametertransformation (x_o , y_o , κ , ω), System A	X	—	—	—	—	—	—	—	—
6-Parametertransformation (x_o , y_o , κ , m , ϕ , ω), System A	—	—	—	—	—	X	—	—	X
18-Parametertransformation (äußere Orientierung und 12 Parameter nach Ebner), System A	—	—	—	—	—	X	—	—	X

Tabelle 3.1: Verwendete Funktionalanteile bei der Bestimmung der Verbesserungen (mit Angabe der Punktzahl pro Bild)

Als generelles Ergebnis der PC-Analyse aller geschätzten Kovarianzmatrizen ergab sich ein sehr rasch abfallendes Eigenwertspektrum, was sich in der Interpretierbarkeit der Vektordiagramme bestätigte. In der Regel konnten lediglich die ersten 4 bis 5 Effekte interpretiert werden. Exemplarisch zeigen die Abbildung 3.2 das Eigenwertspektrum des Fluges OZ76 nach einer 3-Parametertransformation im System A und die Abbildungen 3.3 a) bis e) die zugehörigen ersten 5 Deformationseffekte.

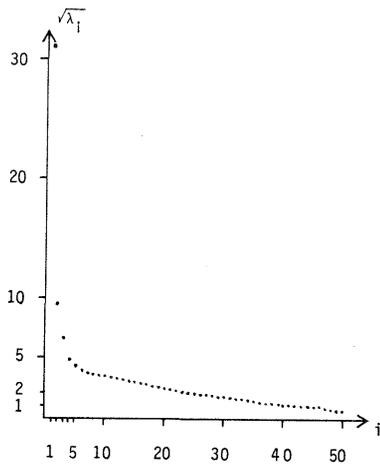


Abb. 3.2:
Eigenwertspektrum der geschätzten
Kovarianzmatrix $\hat{\underline{C}}_{11}$ (Flug OZ76,
3-Parametertransformation, System A)

Im folgenden wird eine Zusammenfassung der wesentlichen Einzelergebnisse der PC-Analyse gegeben und anhand repräsentativer Vektordiagramme erläutert.

a) Einfluß der Maßstabsvariation

Alle untersuchten Bildreihen weisen als ersten und damit dominierenden Deformationseffekt eine Variation des Maßstabes auf (siehe Abb. 3.3a). Hierbei treten in den Randbereichen der Bilder Streuungen bis zu $10 \mu\text{m}$ auf. Dieser Effekt ist auch bei allen Eigenwertspektren sichtbar, da der erste Eigenwert sich um ein Vielfaches von dem zweitgrößten abhebt (siehe Abb. 3.2). Als Nachweis, daß es sich bei diesem Haupteffekt um eine Variation des Maßstabes handelt, wurde beim Flug OZ76 eine 4-Parametertransformation mit dem Maßstab als zusätzliche Unbekannte im System A gerechnet. Es ergab sich eine Verschiebung der Haupteffekte, d.h. der 2. Effekt rückte an die erste Stelle, usw.. Das Eigenwertspektrum reduzierte sich um den Einfluß des 1. Effektes bei der 3-Parametertransformation:

$$\begin{aligned} \text{3-Parametertransformation : } \sum_i \lambda_i^{(3)} &= 1370 \mu\text{m}^2 \\ \text{4-Parametertransformation : } \sum_i \lambda_i^{(4)} &= 395 \mu\text{m}^2 \\ \hline \Delta &= 975 \mu\text{m}^2 \iff \lambda_1^{(3)} = 981 \mu\text{m}^2 \end{aligned}$$

Um den Einfluß der Rahmenmarkentransformation auf die Variation des Maßstabes zu untersuchen, wurde die PC-Analyse auch im System B durchgeführt. Als erster Deformationseffekt ergab sich wiederum eine Maßstabsvariation, aber der Betrag der Variation ging deutlich zurück. Dies soll am Beispiel des Fluges RW71 veranschaulicht werden.

Der maximale Betrag der Streuung geht von $10 \mu\text{m}$ auf $2 \mu\text{m}$ (vgl. Abb. 3.4a und 3.4b) und die Summe der Eigenwerte von $1001 \mu\text{m}^2$ auf $186 \mu\text{m}^2$ zurück. Daß die Maßstabsvariation dennoch dominiert, läßt

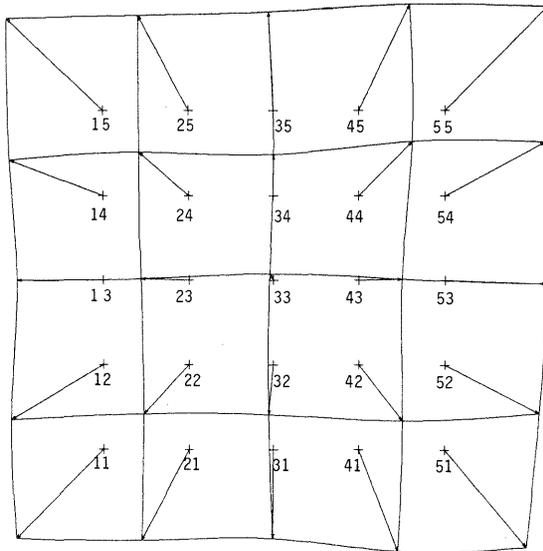


Abb. 3.3:

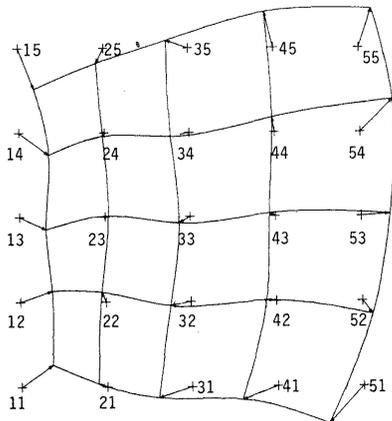
Strukturanalyse der \hat{C}_{11} -Matrix;

Flug OZ76, System A,

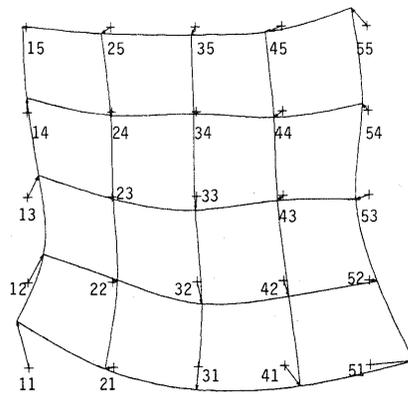
3-Parametertransformation

Vektormaßstab $\longleftarrow 2 \mu\text{m}$ Flugrichtung \Longrightarrow

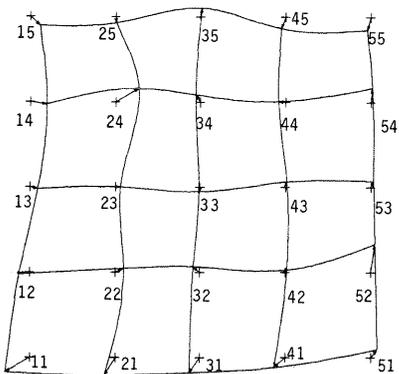
a) 1. Effekt



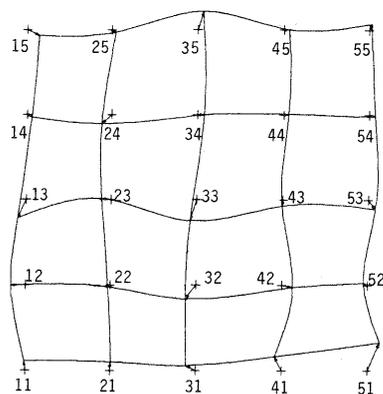
b) 2. Effekt



c) 3. Effekt



d) 4. Effekt



e) 5. Effekt

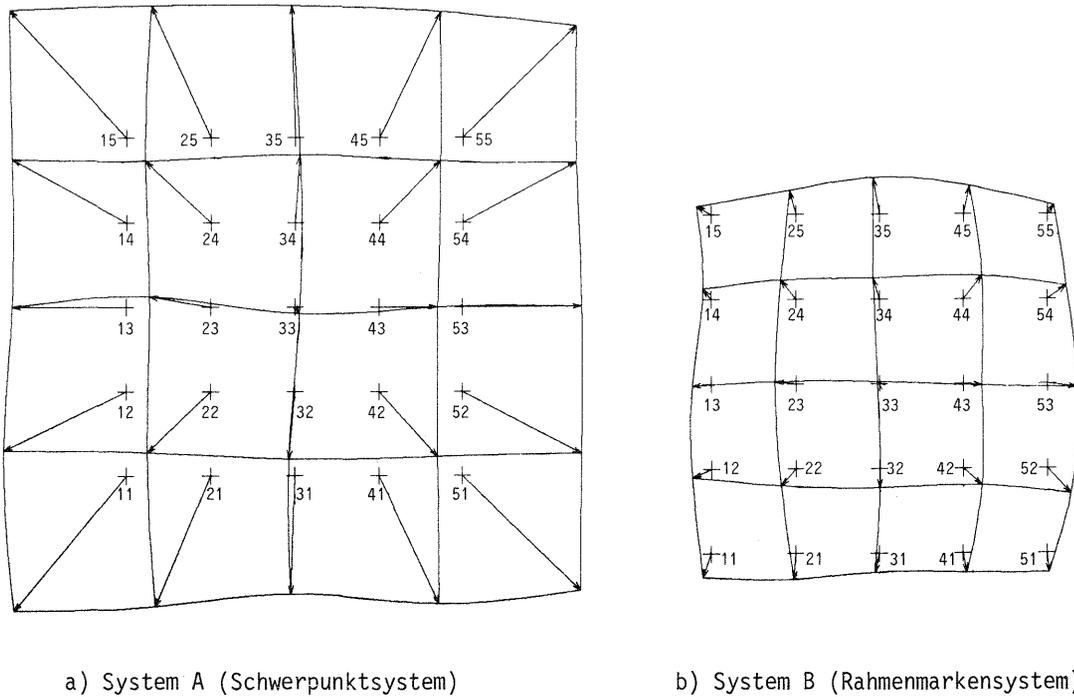


Abb. 3.4: Strukturanalyse der \hat{C}_{11} -Matrix; Flug RW71, 3-Parametertransformation, 1. Effekt (Maßstab)

Vektormaßstab $\longleftarrow 2 \mu\text{m}$ Flugrichtung \Longrightarrow

sich am Eigenwertspektrum zeigen. Subtrahiert man jeweils den ersten Eigenwert von der Gesamtsumme aller Eigenwerte, so ergeben sich nahezu identische Differenzbeträge:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{System A : } \sum_i \lambda_i & = & 1001 \mu\text{m}^2 \\
 -\lambda_1 & = & 843 \mu\text{m}^2 \\
 \hline
 \Delta & = & 158 \mu\text{m}^2
 \end{array}
 \quad \longleftrightarrow \quad
 \begin{array}{rcl}
 \text{System B : } \sum_i \lambda_i & = & 186 \mu\text{m}^2 \\
 -\lambda_1 & = & 30 \mu\text{m}^2 \\
 \hline
 \Delta & = & 156 \mu\text{m}^2
 \end{array}$$

Eine der Ursachen für den verbleibenden stark dominierenden Effekt der Maßstabsvariation, obwohl der Mittelwert über den gesamten Flug bereits im Funktionalmodell erfaßt worden ist, ist sicherlich in der zeitlichen Änderung der atmosphärischen Bedingungen im Auswerterraum zu sehen. Da die Auswertung sich über mehrere Tage erstreckte und der Raum nicht klimatisiert war, sind Änderungen, insbesondere der relativen Luftfeuchtigkeit, durchaus gegeben.

Die Maßstabsvariation hat allerdings keine Auswirkung auf die Blockausgleichung, da der Maßstab im Funktionalmodell bildweise mit den Parametern der äußeren Orientierung erfaßt wird (vgl. 4-Parametertransformation).

b) Einfluß der Kammermechanik

Die PC-Analyse ergab bei allen Bildreihen für die zweiten bzw. dritten Deformationseffekte eine Variation, die durch die Drehungen ϕ bzw. ω der äußeren Orientierung genähert beschrieben werden können (vgl. Abbildung 3.5). Als Nachweis, daß diese Deformationstypen den wesentlichen Anteil der 2. und 3. Effekte darstellen, wurden für den Flug OZ76 im System A (Schwerpunktsystem)

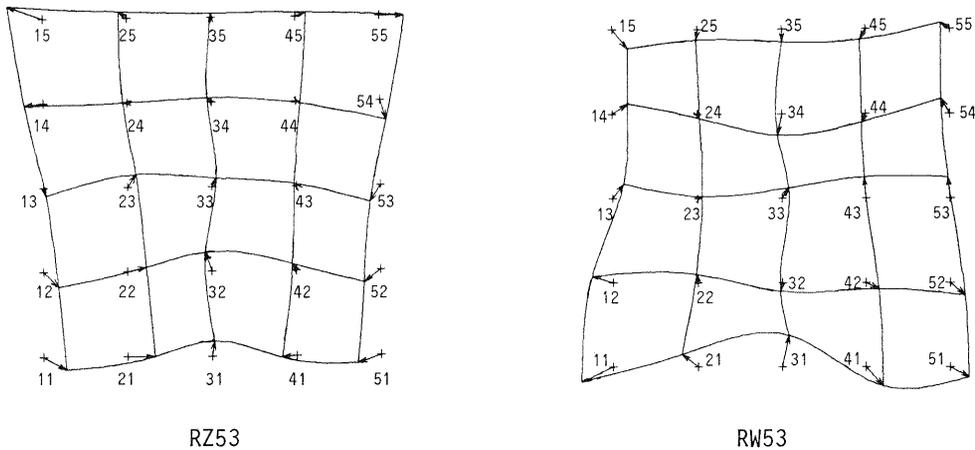


Abb. 3.5: Strukturanalyse der \hat{C}_{11} -Matrix, 2. Effekte der Flüge RZ53 und RW53, die auf Einflüsse der Kammermechanik deuten; 3-Parametertransformation im System A

Vektormaßstab \longleftarrow $2 \mu\text{m}$ Flugrichtung \Longrightarrow

4-Parametertransformation gerechnet, die neben den 3 Parametern der Verschiebung und Kantung noch die Drehung ϕ bzw. ω berücksichtigten (siehe Reustlen (1981)). Bei der anschließenden Analyse der Kovarianzmatrizen erschienen die Deformationstypen nicht mehr, und an ihre Stelle rückten die direkt folgenden Effekte nach. Lediglich der 3. Effekt (hier als ω -Drehung interpretiert) konnte nicht vollständig erfaßt werden, da er durch starke Durchbiegungen überlagert war. Dies läßt sich auch mit Hilfe der Eigenwertspektren zeigen (vgl. Tabelle 3.2).

Transformationsparameter	$\text{sp}(\hat{C}_{11})$ [μm^2]	1. Eigenwert [μm^2]		2. Eigenwert [μm^2]		3. Eigenwert [μm^2]	
			Typ		Typ		Typ
x_o, y_o, κ	1352	968	m	87	ρ	42	ω
x_o, y_o, κ, ϕ	1285	967	m	51	ω	23	—
x_o, y_o, κ, ω	1335	967	m	86	ρ	41	—

Tabelle 3.2: Eigenwertspektren des Fluges OZ76 bei unterschiedlichen Transformationen im System A

Bei der Transformation (x_o, y_o, κ, ϕ) reduziert sich die Summe der Eigenwerte um $67 \mu\text{m}^2$, was genähert dem 2. Eigenwert der Transformation (x_o, y_o, κ) entspricht. Die Transformation $(x_o, y_o, \kappa, \omega)$ erfaßt allerdings nur einen Teil der Variation, da sich die Summe der Eigenwerte nur um $17 \mu\text{m}^2$ reduziert, der 3. Eigenwert aber den Betrag von $42 \mu\text{m}^2$ aufweist.

Die Ursache für diese Deformationstypen kann im Andruckmechanismus der verwendeten Kammern liegen. Sowohl bei der Kammer der Firma ZEISS als auch der Firma WILD erfolgte der Andruck des Films an den Kammerrahmen über den gleichen Mechanismus. Die Kraft, welche auf die Druckplatte mit der Ansaugvorrichtung wirkt, greift lediglich an einem Aufpunkt (Kugel). Dies kann zur Folge haben, daß im Moment der Belichtung die Andruckplatte nicht gleichmäßig am Rahmen anliegt und von Aufnahme zu Aufnahme eine Variation des Betrages der dadurch entstandenen Drehungen um den

Aufpunkt eintritt. Bei neueren Kamern hat man allerdings den Andruckmechanismus geändert, z.B. erfolgt bei der Kammer WILD RC 10 die Kraftübertragung gleichzeitig durch vier in den Ecken angebrachte Magnetspulen, so daß hier eine Variation der Drehwinkel ϕ bzw. ω nicht mehr wahrscheinlich ist.

Für das mathematische Modell hat dieser Einfluß der Kammermechanik keine Bedeutung, da die Drehungen ρ und ω in den Parametern der äußeren Orientierung der einzelnen Bilder bereits enthalten sind.

c) Einfluß der Rahmenmarkentransformation

Die Transformation der gemessenen Maschinenkoordinaten auf die Rahmenmarken mit Hilfe der ebenen Ähnlichkeitstransformation (System B) sollte deren Einfluß auf die Variation der Deformationen aufzeigen. Im wesentlichen konnte nur eine direkte Auswirkung auf die Maßstabsvariation beobachtet werden (siehe Abschnitt a)). Auf die folgenden Deformationstypen hat die Rahmenmarkentransformation keinen wesentlichen Einfluß (vgl. Abbildungen 3.6 und 3.7). Lediglich bei der Kammer der Firma WILD konnten, bedingt durch die Anordnung der Rahmenmarken in den Bildecken, geringfügige Veränderungen in den Eckbereichen festgestellt werden.

d) Einfluß des Kopiervorgangs

Die Untersuchungen der Bildreihe RZK41 ergaben im Vergleich mit dem Flug RZ53 sehr ähnliche Deformationstypen. Lediglich die Beträge der Variation sind um den Faktor 2 größer, was sich wiederum am Eigenwertspektrum verdeutlichen läßt. Betrachtet man die Summe der Eigenwerte für die Bildreihen RZK41a,b und RZ53 und reduziert sie jeweils um den Einfluß der Maßstabsvariation (1. Effekt), so erhält man folgende Beträge:

Bildreihe	$\sum_{i=2}^n \lambda_i$
RZ53	52 μm^2
RZK41a	135 μm^2
RZK41b	118 μm^2

Für die Steigerung der Variationsbeträge ist neben den Einflüssen des Kopiervorgangs auch die verminderte Einstellgenauigkeit in den Kontaktkopien verantwortlich (vgl. Tabelle 2.2).

Zwischen den beiden Auswertern der Bildreihe RZK41 ergaben sich keine signifikanten Unterschiede bei der Analyse. Die Deformationstypen weisen sehr gute Übereinstimmung auf.

Um die Auswirkungen des Kopiervorgangs auf das Bildmaterial näher zu untersuchen, wurden die Messungen des Originalfilmmaterials des Fluges RZ53 als Bezugssystem für die 3-Parametertransformation der Bildreihe RZK41 verwendet. Bei der Kovarianzanalyse ergab sich neben dem Effekt der Maßstabsvariation als unmittelbar folgender Haupteffekt eine Variation vom Typ einer Affinität (vgl. Abbildung 3.8). Alle weiteren Effekte sind nicht mehr interpretierbar und weisen auch keine signifikanten Variationen auf.

Das bedeutet, daß der Kopiervorgang im wesentlichen eine affine Verzerrung des Bildmaterials verursacht, die in diesem Beispiel eine Streuung von bis zu 5 μm aufweist. Die im Abschnitt b) gezeigten Neigungseffekte können somit nicht auf den Einfluß des Kopierens zurückgeführt werden.

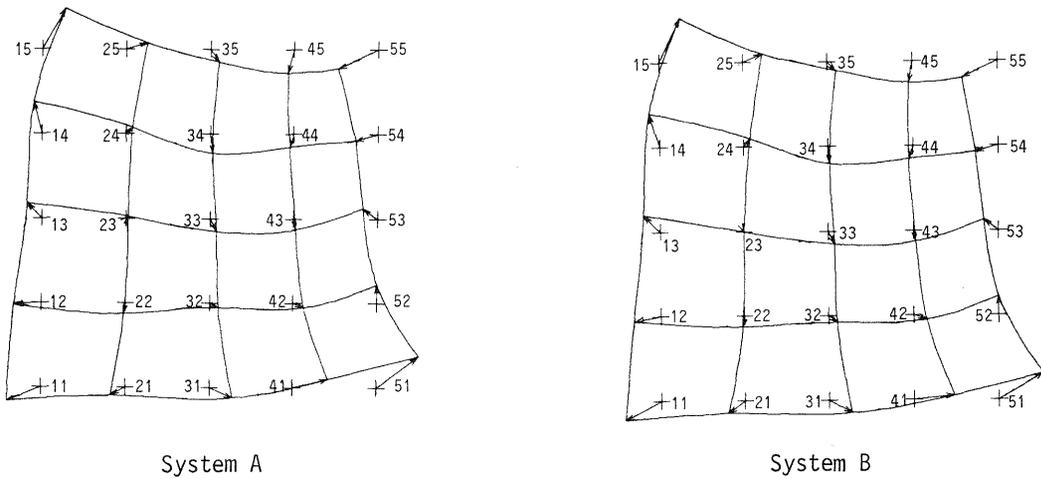


Abb. 3.6: Strukturanalyse der \hat{C}_{11} -Matrix des Fluges RZ72, 2. Effekt;
 3-Parametertransformation im System A und B
 Vektormaßstab $\longleftarrow 2 \mu\text{m}$ Flugrichtung \Longrightarrow

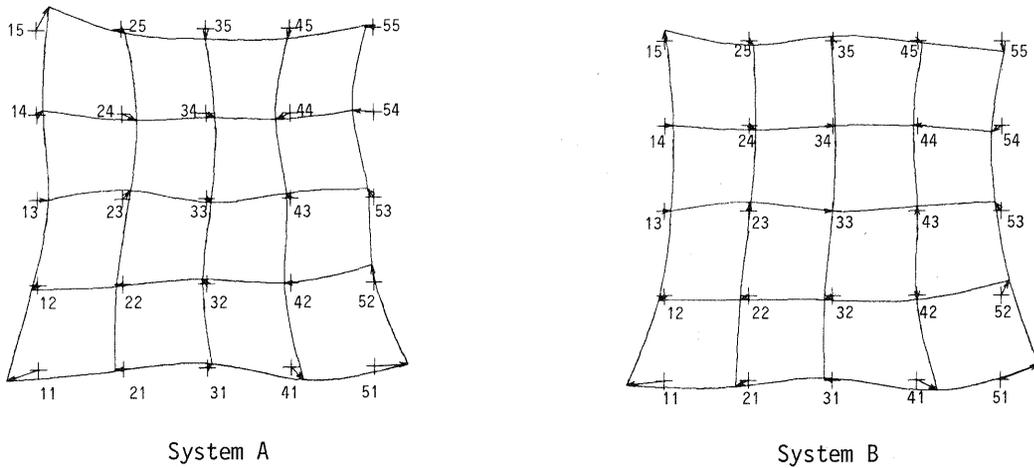


Abb. 3.7: Strukturanalyse der \hat{C}_{11} -Matrix des Fluges RW71, 3. Effekt;
 3-Parametertransformation im System A und B
 Vektormaßstab $\longleftarrow 2 \mu\text{m}$ Flugrichtung \Longrightarrow

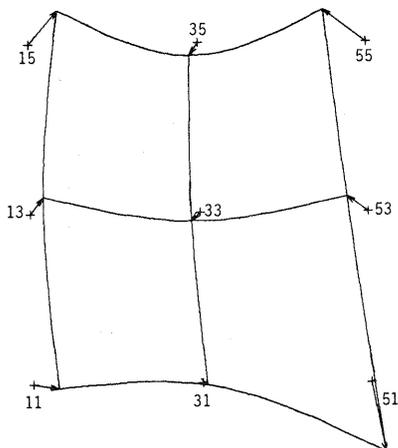


Abb. 3.8:
 Strukturanalyse der \hat{C}_{11} -Matrix beim Vergleich Original-Kopie, 2. Effekt;
 3-Parametertransformation im System A
 (Original = Soll)
 Vektormaßstab $\longleftarrow 2 \mu\text{m}$
 Flugrichtung \Longrightarrow

e) Einfluß eines erweiterten Funktionalmodells

Die bis hierhin gezeigten Untersuchungen beschränken sich in der Regel auf einen sehr einfachen Funktionalteil im Modell der Definition IV.3-1. Um aber auch Schätzungen der Kovarianzmatrix C_{11} zu erhalten, die der Realität angepaßt sind, wurden die gemessenen Reseaukoordinaten mit Hilfe der 6 Parameter der äußeren Orientierung auf ihre Sollkoordinaten transformiert. In einer weiteren Verfeinerungsstufe wurde dann noch der Einfluß einer 18-Parametertransformation analysiert, wobei neben den 6 Parametern der äußeren Orientierung die 12 zusätzlichen Parameter nach Ebner in einer modifizierten Form verwendet wurden (siehe Abschnitt 4).

(1) Die Analyse der aus den Verbesserungen der 6-Parametertransformation geschätzten Kovarianzmatrix \hat{C}_{11} ergab Einzeleffekte, deren Interpretation nicht mehr visuell möglich ist (siehe Abbildung 3.9), da lokale Deformationen den Gesamteindruck stören. Dennoch sind die Beträge der Variation signifikant. Die maximalen Verbesserungen nach der Transformation und der Reduktion um globale Systematik betragen beim Flug RZ72 $6.8 \mu\text{m}$ und beim Flug RW71 $9.2 \mu\text{m}$.

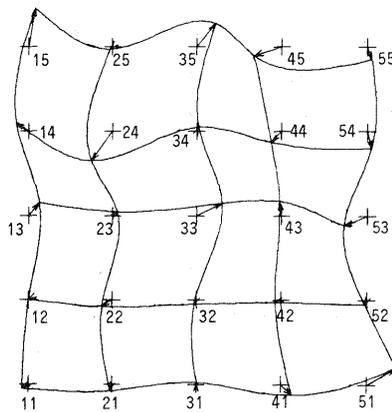


Abb. 3.9:

Strukturanalyse der \hat{C}_{11} -Matrix
des Fluges RZ72, 1. Effekt;
6-Parametertransformation
im System A

Vektormaßstab $\longleftarrow 2 \mu\text{m}$

Flugrichtung \Longrightarrow

(2) Die aus der Analyse der nach der 18-Parametertransformation geschätzten Kovarianzmatrix \hat{C}_{11} erhaltenen Effekte weisen keine Strukturierung mehr auf. Auch die lokalen Deformationen sind weitgehend erfaßt (vgl. Abbildung 3.10). Die nach der Transformation und der Reduktion der globalen Systematik verbleibenden maximalen Verbesserungen sind in Tabelle 3.3 zusammengefaßt. Diese Verbesserungen nehmen Beträge an, die nicht unbegründet vernachlässigt werden dürfen. Eine Signifikanzprüfung der geschätzten Kovarianzmatrix \hat{C}_{11} soll dies bestätigen.

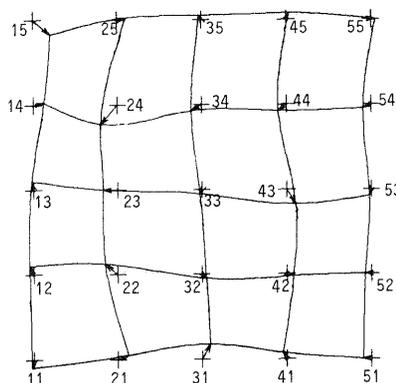


Abb. 3.10:

Strukturanalyse der \hat{C}_{11} -Matrix
des Fluges RW71, 1. Effekt;
18-Parametertransformation
im System A

Vektormaßstab $\longleftarrow 2 \mu\text{m}$

Flugrichtung \Longrightarrow

Flug	OZ76	RZ53	RZK41a	RZK41b	RZ72	RW53	RW71
max. Verbesserung [μm]	8.4	4.1	5.1	5.1	4.7	5.6	5.7

Tabelle 3.3: Maximale Verbesserungen (Betrag) nach 18-Parametertransformation und Reduktion der globalen Systematik

Mit Hilfe eines statistischen Tests (Fisher-Test) läßt sich überprüfen, ob trotz des stark erweiterten Funktionalmodells mit dem bildweisen Ansatz von 18 unbekanntem Parametern und der globalen Reduktion der Systematik noch signifikante Restfehler verbleiben. Dazu werden die aus den Doppelmessungen abgeleiteten Beobachtungsgenauigkeiten (Streuungen der Mittelwerte) über die x- und y-Koordinaten gemittelt (a priori Genauigkeit):

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2}{2} \quad (3.2.1-1)$$

Der Freiheitsgrad für diese Bestimmung der mittleren Beobachtungsgenauigkeit ergibt sich aus dem Produkt der gemessenen Koordinaten pro Bild und der Anzahl der ausgewerteten Bilder. Eine Schätzung der Beobachtungsgenauigkeit nach der Ausgleichung (a posteriori Genauigkeit) erhält man aus:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\text{sp}(\hat{C}_{VV})}{n-u} \quad (3.2.1-2)$$

wobei n gleich der Anzahl der Beobachtungen und u gleich der Anzahl der Unbekannten pro Bild ist und die Matrix \hat{C}_{VV} sich aus der Gleichung (3.1.1-3) ergibt. Der Freiheitsgrad für die Schätzung von σ_0 entspricht $(n-u) \cdot p$. Die Ergebnisse der Tests für die einzelnen Bildreihen sind in Tabelle 3.4 zusammengefaßt. Für die Bildreihen RZK41a,b ist ein Test nicht möglich, da bei Verwendung von 9 Reseaukreuzen keine Überbestimmung vorliegt und somit eine Schätzung der a posteriori Genauigkeit nicht mehr durchführbar ist. Es verbleiben in jedem Fall bei dem stark verfeinerten Funktionalmodell mit 18 unbekanntem Parametern pro Bild signifikante Restfehler gegenüber dem Meßrauschen.

Flug	$\hat{\sigma}_0^2$ [μm ²]	f ₁	$\hat{\sigma}_1^2$ [μm ²]	f ₂	Testgröße $T = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_1^2}$	Kritischer Wert F(f ₁ , f ₂ ; 0.01)	Signifikant T > F
OZ76	5.23	2432	3.58	3800	1.46	1.09	ja
RZ53	1.82	1696	0.91	2650	1.82	1.11	ja
RZ72	1.55	2304	0.74	3600	2.10	1.09	ja
RW53	3.21	1696	1.42	2650	2.26	1.11	ja
RW71	2.80	2272	0.58	3550	4.81	1.09	ja

Tabelle 3.4: Test auf Signifikanz der Modellabweichung

Nullhypothese: $\hat{\sigma}_0^2 = \hat{\sigma}_1^2$, Alternativhypothese: $\hat{\sigma}_0^2 > \hat{\sigma}_1^2$

Signifikanzniveau: 99%

3.2.2 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

(1) Die PC-Analyse der geschätzten Kovarianzmatrizen der Beobachtungen gibt ein geschlossenes Erscheinungsbild über alle untersuchten Reseaubefliegungen wieder. Die dominierenden Variations-effekte sind sich in ihrer Form sehr ähnlich. Die Analyse bringt an interpretierbaren Einflüssen auf die Kovarianzmatrizen im wesentlichen physikalische Faktoren (z.B. Maßstab, Drehungen, Affinität) zum Vorschein, die durch bildweisen Ansatz im Funktionalteil des mathematischen Modells der Aerotriangulation bereits erfaßt werden, bzw. sehr einfach erfaßt werden können. Dies bestätigt auch die Ergebnisse von Schilcher (1980), der durch die bildweise Erfassung der Systematik in den Bereich des Meßrauschens vorgedrungen ist.

Aus diesen Erkenntnissen der empirischen Analyse ergibt sich als Schlußfolgerung, in einem erweiterten mathematischen Modell die systematischen Deformationen als um einen globalen Mittelwert variierende Größen, d.h. als stochastische Parameter mit einem Erwartungswert ungleich Null, zu definieren, wie es im kombinierten Modell (vgl. Abschnitt III.2) vorgesehen ist.

(2) Obwohl die bildweise Erfassung der Systematik einen sehr hohen Verfeinerungsgrad des Funktionalmodells darstellt, zeigen die Ergebnisse der 18-Parametertransformation, daß die verbleibenden \hat{C}_{11} -Matrizen sich signifikant vom Meßrauschen abheben. Zusätzlich schloß man bei den Untersuchungen Korrelationen zwischen den Bildern aus. Das bedeutet, eine Modellierung der Kovarianzmatrix der gemessenen Koordinaten allein durch das Meßrauschen ist nicht hinreichend. Welchen Einfluß allerdings die nach der Erfassung der Systematik durch 18 bildweise Parameter verbleibenden Kovarianzmatrizen der Beobachtungen auf die Schätzung unbekannter Parameter in der Aerotriangulation haben und welche Strukturen ihnen zugrunde liegen, konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht geklärt werden. Für künftige Untersuchungen können hier noch interessante Aspekte liegen, besonders auch im Hinblick auf die Einbeziehung der Korrelation zwischen den Bildern, die entscheiden wird, ob zur Modellierung der Kovarianzmatrix der Beobachtungen ein weißes oder korreliertes (farbiges) Rauschen angebracht ist.

Für künftige Untersuchungen im Bereich der Strukturanalyse der Kovarianzmatrizen sollten folgende Punkte beachtet werden:

- Verwendung neuerer Meßkammern, da sich im Bereich der Kammermechanik teilweise Änderungen vollzogen haben.
- Verwendung ausreichend großer Bildreihen, um eine statistisch gesicherte Schätzung der Kovarianzmatrix für 25 Punkte gewährleisten zu können ($p > 75$).
- Messung in klimatisierten Räumen, um atmosphärische Einflüsse bei der Auswertung auszuschließen.
- Korrelationen zwischen den Bildern berücksichtigen. Die dadurch verursachten Änderungen der geschätzten Kovarianzmatrizen können mit dem allgemeinen Eigenwertproblem und den daraus abgeleiteten Konditionszahlen analysiert werden.
- Messung und Berechnung lokaler Ausschnitte im Bild, um kurzweilige Einflüsse zu analysieren (z.B. Reseauraster im 1 cm - Abstand).

Unter Beachtung dieser Gesichtspunkte lassen sich eventuell für einzelne Kammertypen bestimmte Charakteristika ableiten, auf der die Strukturierung der Kovarianzmatrix der gemessenen Koordinaten aufbauen kann.

4. Zeitreihenanalyse systematischer Bilddeformationen

(1) Ein für das stochastische Verhalten von Bildkoordinaten wichtiger Gesichtspunkt ist neben dem Korrelationsverhalten im Bild die Beziehung zwischen den Bildern. Das im vorangegangenen Abschnitt 3.1 dargestellte multivariate Modell gestattet unter Vorgabe der Kovarianzmatrix C_{11} auch die Schätzung der Korrelationsmatrix R (vgl. Abschnitt II.2.2.1). Dabei tritt aber wiederum das Problem auf, die Korrelationsmatrix zu interpretieren und zugrundeliegende Strukturen zu definieren, was in diesem Fall noch schwieriger ist. Um diese Problemstellung zu umgehen, bietet sich das Verfahren der Zeitreihenanalyse zur Bestimmung der Korrelation zwischen den Bildern an. Die in regelmäßigen zeitlichen Abständen erfolgenden Aufnahmen legen die Vorstellung einer Zeitreihe nahe.

Das Korrelationsverhalten der Bildkoordinaten zwischen den Bildern wird von den Korrelationen zwischen den von Bild zu Bild variierenden systematischen Deformationen verursacht. Mit Hilfe eines (orthogonalen) Parametersatzes, der die Deformationen pro Bild beschreibt, ergibt sich über die gesamte Bildreihe für jeden einzelnen Parameter eine Zeitreihe, d.h. die Parameter werden als zeitabhängige stochastische Variable interpretiert, aus denen sich u.a. die Autokorrelationsfunktionen ableiten lassen. Damit erhält man eine zum Abschnitt 3 inverse Fragestellung. Dort wurde nach bestimmten systematischen Deformationsformen gesucht, während hier ein konkreter Deformationstyp vorgegeben wird und sein stochastisches Verhalten analysiert werden soll.

(2) Die Zielsetzung dieses Abschnitts ist es, neben der Gewinnung dieser Zeitreihen die Ergebnisse der Analyse zu beschreiben. Repräsentative Beispiele zeigen das zeitliche Verhalten der einzelnen Deformationstypen, die durch den Parametersatz von Ebner (1977) beschrieben werden. Die Interpretation der Zeitreihen als autoregressive Prozesse und deren Analyse beinhalten die wesentlichen Erkenntnisse dieser empirischen Untersuchungen.

4.1 Gewinnung der Zeitreihen

Der Zeitreihenanalyse systematischer Bilddeformationen liegt das im Abschnitt 2 beschriebene Datenmaterial der Reseaubefliegungen zugrunde. Um das zeitliche Verhalten systematischer Bilddeformationen zu erfassen, wurde der Parametersatz von Ebner (siehe Abbildung 4.1) modifiziert,

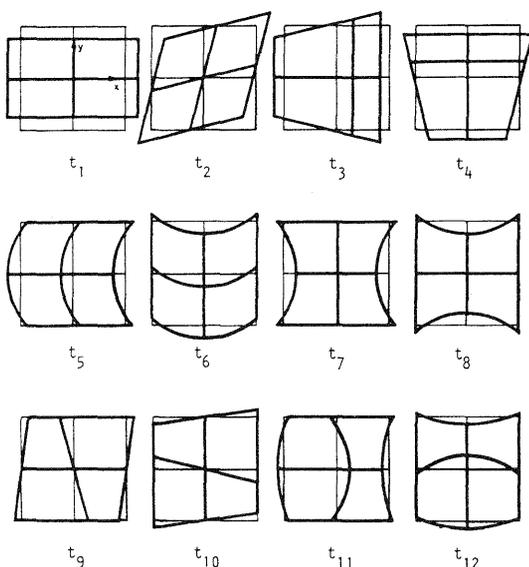


Abb. 4.1:

Zusätzliche Parameter zur Selbstkalibrierung nach Ebner (1977)

d.h. auf das gemessene 5x5 Punkteschema der Reseaukreuze orthogonalisiert. Da in diesem Untersuchungsabschnitt das stochastische Verhalten der systematischen Bilddeformationen im Vordergrund stand und keine physikalischen Ursachen erforscht werden sollten, wurde dieser rein mathematisch argumentierende Ansatz gewählt. Analog zum Abschnitt 3.2.1 wurde für jedes Bild eines Fluges eine überbestimmte 18-Parametertransformation gerechnet, um die Einflüsse der äußeren Orientierung zur Gewährleistung einer realitätsbezogenen Untersuchung zu eliminieren.

Formal lauten die Transformationsbeziehungen:

$$\begin{aligned} dx_i = & x_o + x_i m - y_i \kappa + x_i y_i \omega - \sqrt{\frac{10}{7}} (x_i^2 - \frac{b^2}{2}) \phi + x_i t_1 + y_i t_2 - \sqrt{\frac{10}{7}} (x_i^2 - \frac{b^2}{2}) t_3 + x_i y_i t_4 \\ & + (y_i^2 - \frac{b^2}{2}) t_5 + x_i (y_i^2 - \frac{b^2}{2}) t_7 + y_i (x_i^2 - \frac{b^2}{2}) t_9 + (x_i^2 - \frac{b^2}{2}) (y_i^2 - \frac{b^2}{2}) t_{11} \end{aligned} \quad (4.1-1)$$

$$\begin{aligned} dy_i = & y_o + y_i m + x_i \kappa + \sqrt{\frac{10}{7}} (y_i^2 - \frac{b^2}{2}) \omega - x_i y_i \phi - y_i t_1 + x_i t_2 + x_i y_i t_3 - \sqrt{\frac{10}{7}} (y_i^2 - \frac{b^2}{2}) t_4 \\ & + (x_i^2 - \frac{b^2}{2}) t_6 + y_i (x_i^2 - \frac{b^2}{2}) t_8 + x_i (y_i^2 - \frac{b^2}{2}) t_{10} + (x_i^2 - \frac{b^2}{2}) (y_i^2 - \frac{b^2}{2}) t_{12} . \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet:

- x_i, y_i = gemessene Koordinaten des Punktes i
- dx_i, dy_i = Differenzen zwischen gemessenen und Sollkoordinaten des Punktes i
- x_o, y_o, m = Parameter der äußeren Orientierung
- κ, ω, ϕ
- $t_1 - t_{12}$ = zusätzliche Parameter nach Ebner (modifiziert)
- b = Basis ($b = 100\,000 \mu\text{m}$)

Dieser Parametersatz (Gl. (4.1-1)) ist orthogonal für das 5x5 Punkteschema, d.h. Korrelationen zwischen den Zeitreihen der einzelnen Parameter sind theoretisch nicht zu erwarten. Die in den folgenden Abschnitten angegebenen Werte für die geschätzten Parameter und deren Streuungen sind alle auf die Basis b normiert, z.B. ist der Wert des Parameters t_3 mit b^2 multipliziert. Sie beziehen sich damit auf die Dimension μm . Die hohe Redundanz von 32 pro Transformation gewährt die statistische Sicherheit der geschätzten Parameter.

Aus den Ausgleichungen mit dem funktionalen Ansatz der 18-Parametertransformation ergibt sich für jeden einzelnen Parametertyp eine Zeitreihe über den Flug. Zur Analyse werden allerdings die 3 Parameter x_o, y_o, κ nicht herangezogen, da sie zur Festlegung des Koordinatensystems (Datum) notwendig sind und keine Aussagekraft besitzen.

4.2 Ergebnisse der Zeitreihenanalyse

4.2.1 Zeitreihen der Parameter

Vor der Beschreibung der eigentlichen Analyse der Zeitreihen soll ein allgemeiner Eindruck von dem zeitlichen Verhalten der geschätzten Parameter vermittelt werden. In Tabelle 4.1 sind die Mittelwerte über die Zeitreihen und die Streuungen um das Mittel für jeden Flug zusammengestellt. Mit Hilfe einiger repräsentativer Beispiele sollen die wesentlichen Merkmale der Zeitreihen beschrieben werden, wobei das zeitabhängige Verhalten der zusätzlichen Parameter im Vordergrund steht.

(1) Die Vielfalt der einzelnen Zeitreihen zeichnet sich deutlich in der Tabelle 4.1 ab. Die Mittelwerte der zusätzlichen Parameter weichen zu ca. 30% signifikant von Null ab (siehe Abbildungen 4.2 und 4.3). Damit ist nachgewiesen, daß die Erwartungswerte der zusätzlichen Parameter im mathematischen Modell der Aerotriangulation nicht mit Null angenommen werden dürfen.

Die Streuungen um den Mittelwert einer Zeitreihe weisen teilweise beachtliche Beträge auf (siehe Abbildungen 4.3, 4.4 und 4.5), unabhängig vom Betrag des Mittelwertes. Aber es sind auch Zeitreihen vertreten, deren Mittelwerte nur unwesentlich von Null abweichen und nur geringfügig variieren (siehe Abbildung 4.6). Diese Parameter können für den betreffenden Flug als nicht signifikant bezeichnet werden.

Besonders charakteristisch für alle Zeitreihen sind die hochfrequenten Schwankungen. Sie deuten auf einen stochastischen Prozeß niedriger Ordnung hin.

Parameter	OZ76		RZ53		RZK41a		RZK41b		RZ72		RW53		RW71		
	Mittel	σ	Mittel	σ	Mittel	σ	Mittel	σ	Mittel	σ	Mittel	σ	Mittel	σ	
äußere	m	44.4	6.2	-15.1	10.8	21.9	7.5	-13.7	10.2	-12.9	7.6	107.7	5.7	67.4	5.8
	ω	-0.4	1.2	-5.6	0.8	-5.0	1.0	-5.7	1.0	-5.4	1.0	0.1	0.9	-0.3	0.7
	ϕ	-3.1	2.3	-4.5	0.9	-5.2	1.2	-5.2	1.1	-5.8	1.3	-3.6	0.6	-2.8	0.6
zusätzliche	t_1	-0.7	0.8	-4.2	0.7	-3.3	1.0	-4.8	1.4	-5.3	0.7	0.8	0.6	4.1	0.6
	t_2	-2.1	1.0	-2.6	0.5	-1.7	0.9	-2.3	1.0	-2.1	0.5	1.5	0.6	1.8	0.5
	t_3	1.8	0.9	1.2	0.6	1.7	0.7	1.7	0.8	2.1	0.5	-0.5	0.6	-0.1	0.6
	t_4	-0.7	1.1	-0.6	0.8	-0.1	0.8	-0.1	0.8	-0.9	0.9	0.2	0.6	0.2	0.6
	t_5	-4.1	1.7	-3.0	1.0	-4.7	1.0	-5.2	1.0	-3.6	1.0	-2.2	1.0	-1.9	1.0
	t_6	0.3	2.1	0.6	1.1	-0.0	1.7	-0.1	2.0	0.6	1.3	1.4	0.8	2.9	1.0
	t_7	-14.8	2.3	-13.5	1.5	-12.3	1.4	-12.3	1.9	-14.9	1.7	-1.2	1.4	-1.2	1.8
	t_8	-1.6	2.1	0.7	1.6	0.4	2.6	0.2	2.4	-0.4	1.7	-1.0	1.7	-3.2	1.7
	t_9	-1.6	1.5	-2.3	1.0	-2.8	1.4	-3.1	1.4	-2.8	0.9	0.2	1.2	0.6	1.2
	t_{10}	-0.9	1.5	-1.9	0.9	-2.1	1.2	-1.8	1.1	-1.7	1.0	1.6	1.4	1.4	1.0
	t_{11}	-6.0	2.6	-3.4	1.5	-3.0	2.0	-3.1	2.1	-4.4	1.6	-2.2	1.7	-2.4	2.0
	t_{12}	-3.4	2.8	-0.5	1.7	-0.5	2.0	0.1	2.6	-0.2	1.6	1.7	2.5	1.2	2.1

Tabelle 4.1: Arithmetische Mittel und Streuungen der Parameter in μm aus den Zeitreihen aller Flüge (Werte sind normiert auf die Basis $b = 100\,000\ \mu\text{m}$)

(2) Wie schon im Abschnitt 3 zu sehen war, weist der Maßstabsparameter m die größten Mittelwerte und Variationen für alle Bildreihen auf (siehe Abbildungen 4.7 und 4.8). Bei den Zeitreihen des Maßstabes erfaßt das arithmetische Mittel den Trend nicht vollständig, denn es sind deutlich periodische Schwankungen im niederfrequenten Bereich zu erkennen, die eventuell im Zusammenhang mit atmosphärischen Einflüssen bei der Messung zu sehen sind (vgl. Abbildung 4.8).

(3) In der Tabelle 4.1 fällt auch die relativ gute Übereinstimmung der Mittelwerte und Streuungen bezogen auf den gleichen Meßkammertyp auf ($RZ53 \leftrightarrow RZ72$ und $RW53 \leftrightarrow RW71$). Dies ist möglicherweise auf die identischen Aufnahmebedingungen zurückzuführen, da die Flüge unmittelbar nacheinander erfolgten und die Aufnahmen mit den gleichen Kassetten durchgeführt wurden. Auch die Ergebnisse der Auswertung der Kontaktkopien und zwischen den beiden Auswertern sind hochgradig mit denen des Originalfilmmaterials korreliert.

Besonders charakteristisch ist der Mittelwert des Parameters t_7 bei den Zeitreihen der Meßkammern von ZEISS. Dessen Betrag erweist sich konstant über alle Flüge, obwohl zwei verschiedene Meßkammern, allerdings aus der gleichen Serie (siehe Kammer Nr. in Tabelle 2.1), verwendet wurden (vgl. Abbildungen 4.3, 4.9 und 4.10). Auch die übrigen Parameter ergeben eine gute Übereinstimmung zwischen den beiden Kammern von ZEISS.

Die starke Variation der Parameter um den Mittelwert legt nahe, die Zeitreihen als stochastische Prozesse zu interpretieren und auf dieser Basis eine Analyse durchzuführen.

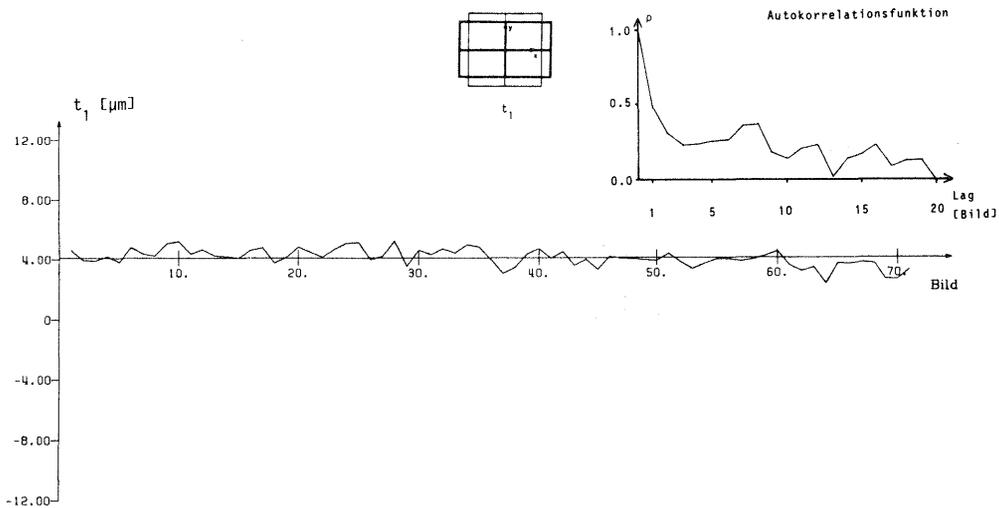


Abb. 4.2: Variation des Parameters t_1 beim Flug RW71

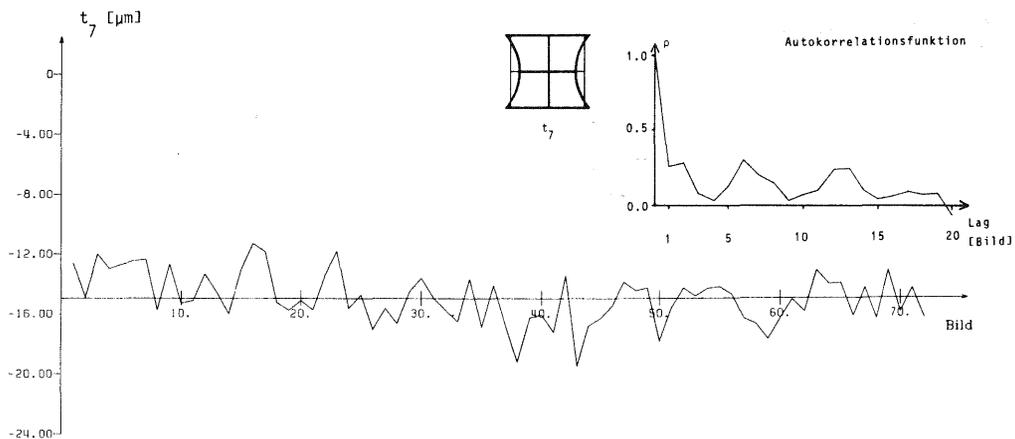


Abb. 4.3: Variation des Parameters t_7 beim Flug RZ72

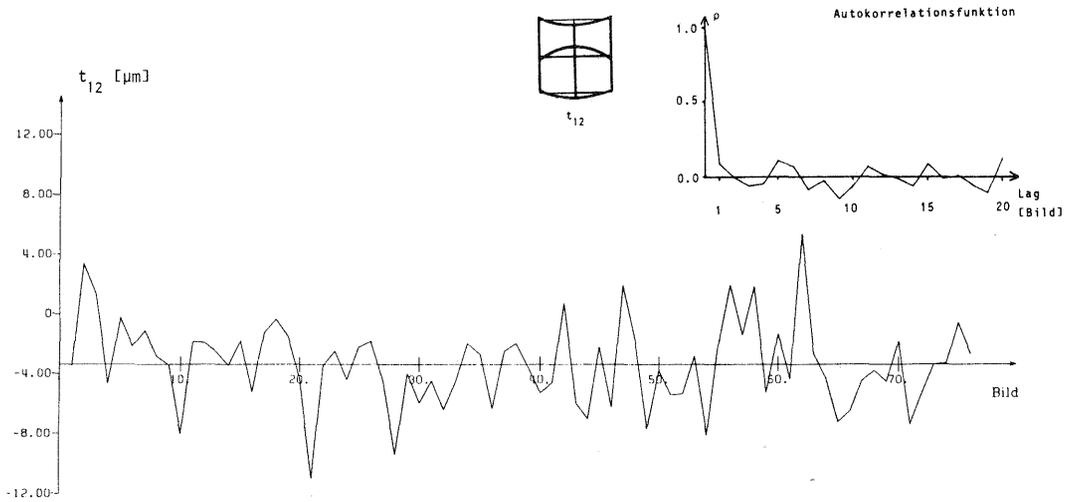


Abb. 4.4: Variation des Parameters t_{12} beim Flug OZ76

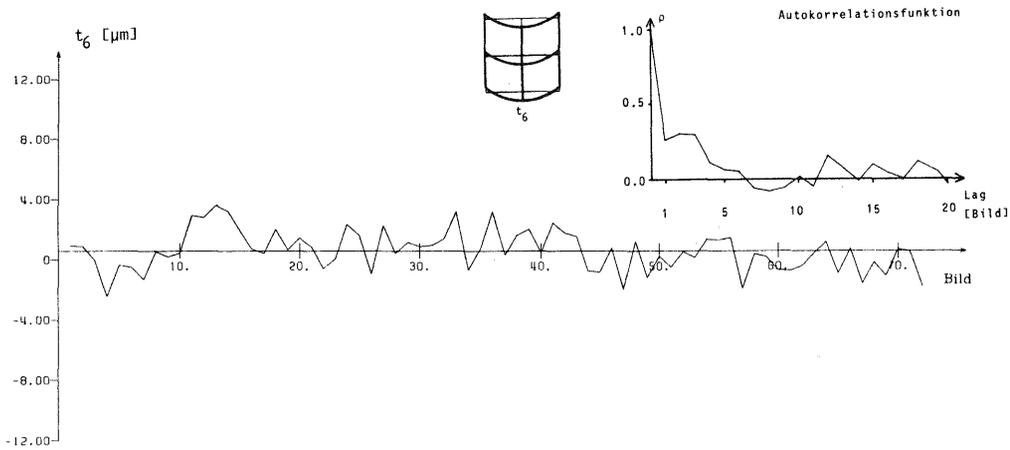


Abb. 4.5: Variation des Parameters t_6 beim Flug RZ72

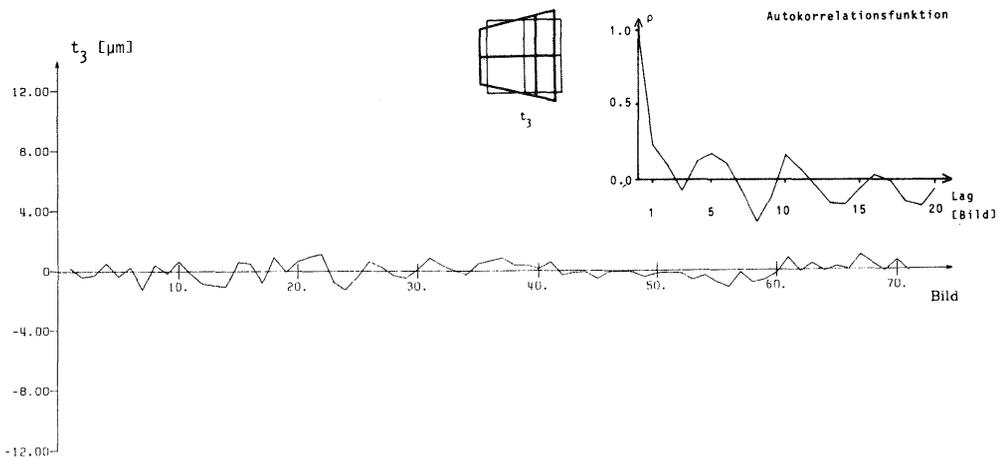


Abb. 4.6: Variation des Parameters t_3 beim Flug RW71

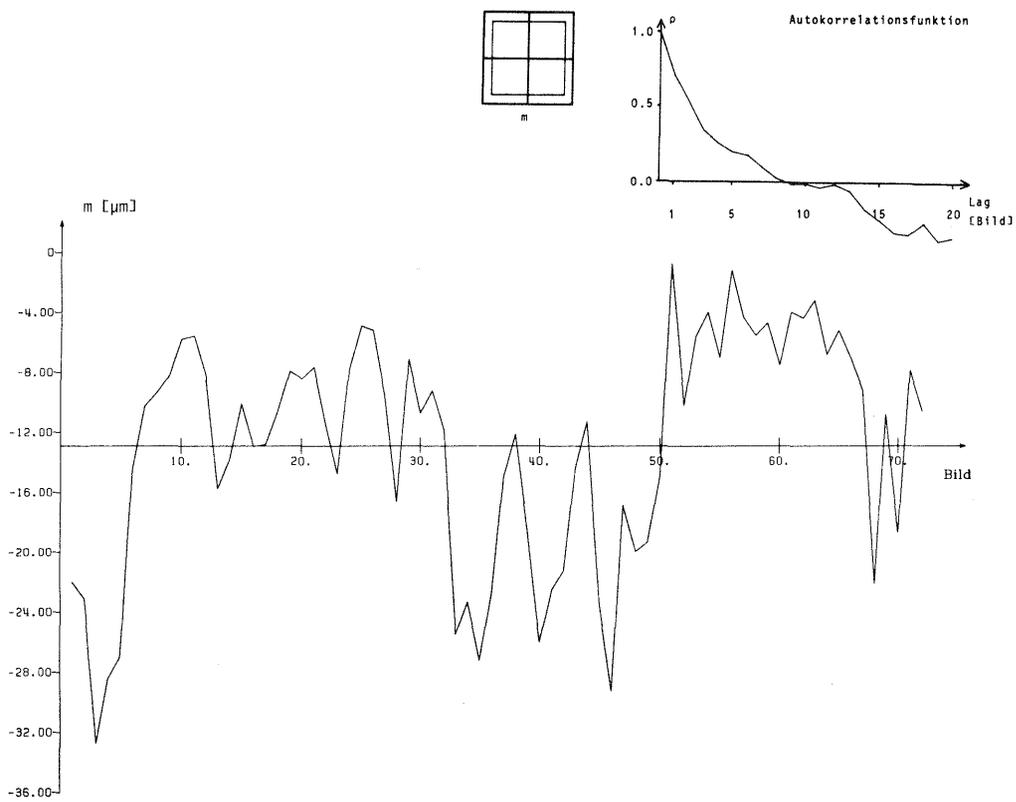


Abb. 4.7: Variation des Parameters m beim Flug RZ72

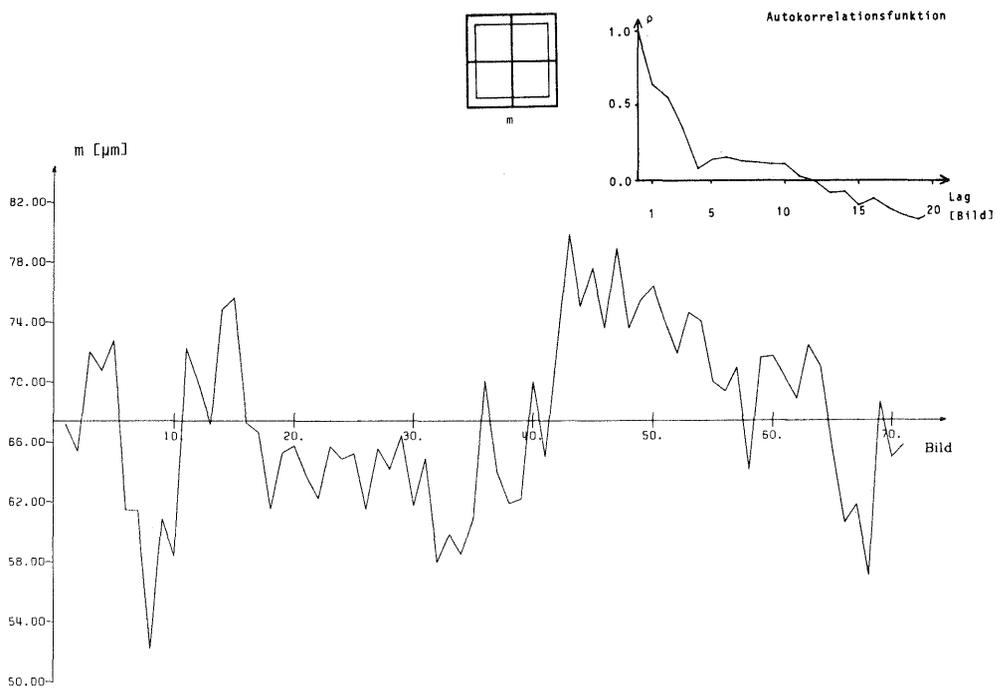


Abb. 4.8: Variation des Parameters m beim Flug RW71

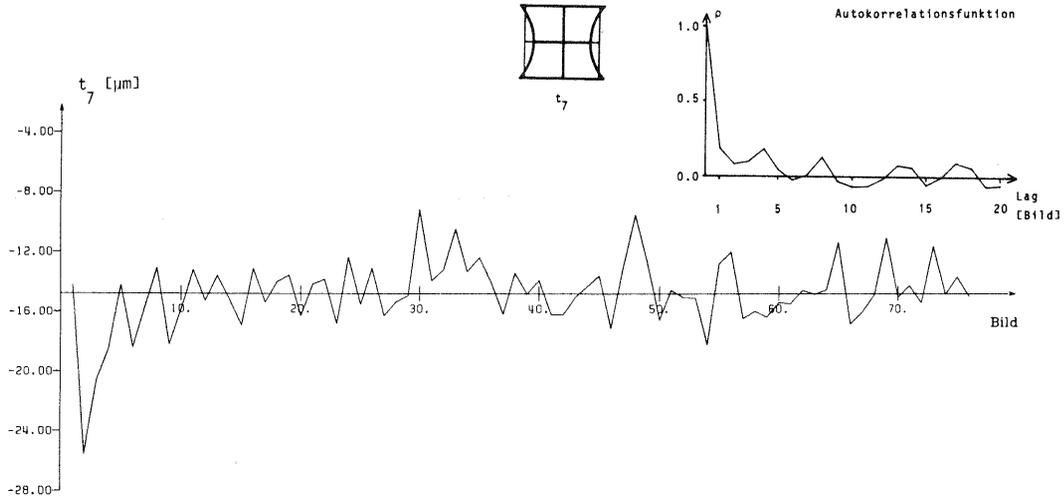


Abb. 4.9: Variation des Parameters t_7 beim Flug OZ76

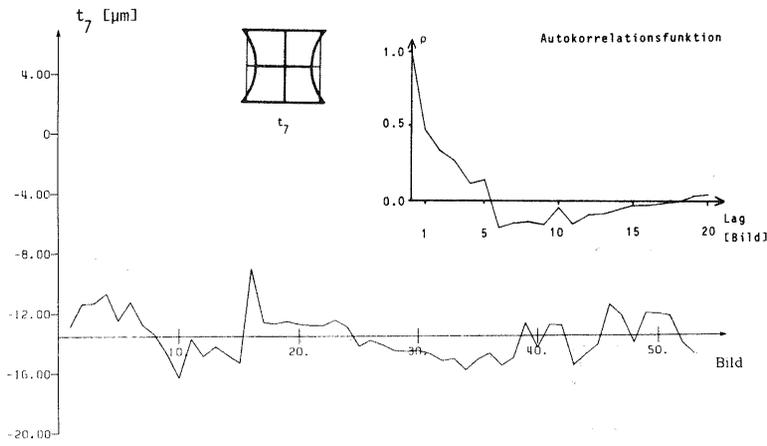


Abb. 4.10: Variation des Parameters t_7 beim Flug RZ53

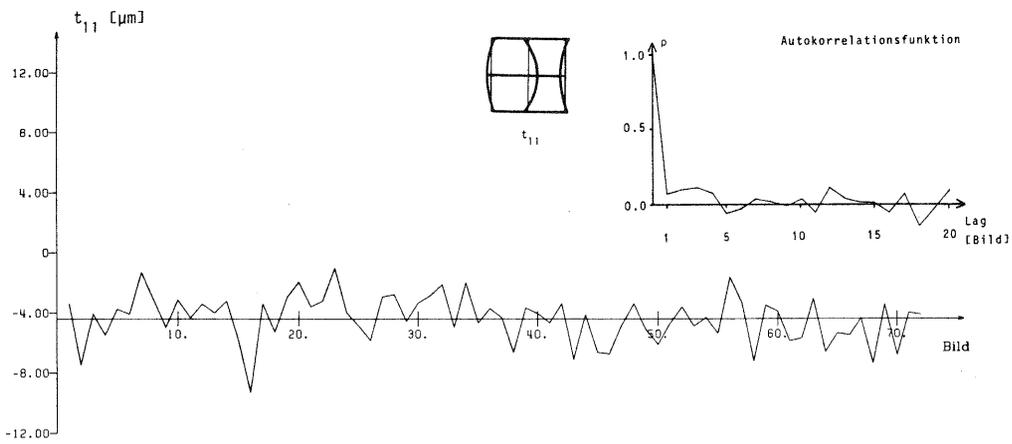


Abb. 4.11: Variation des Parameters t_{11} beim Flug RZ72

4.2.2 Autoregressive Analyse

Die Entscheidung, die Zeitreihenanalyse mit Hilfe autoregressiver Prozesse durchzuführen, beruht im wesentlichen auf der charakteristischen Form der Autokorrelationsfunktion (ACF). Die ACF ergibt sich aus den über den Korrelationsabstand (Lag) aufgetragenen Autokorrelationskoeffizienten der Gleichung (II.3.2.2-8). Die berechneten Korrelationskoeffizienten können durch die für einen AR(1)-Prozeß charakteristische Exponentialfunktion $\exp(-c \cdot \text{Lag})$ approximiert werden. Ebenso deuten die hochfrequenten Schwankungen der Parameterwerte innerhalb der Zeitreihen auf kurze Korrelationsweiten und damit auf einen Prozeß 1. Ordnung hin.

Bei der autoregressiven Analyse wurden für jede Zeitreihe mit Hilfe der Yule-Walker-Gleichungen (Gl. (II.3.2.2-7)) die Prozeßkoeffizienten a_i bis zum Prozeß 3. Ordnung geschätzt. Als Beispiel sind die Ergebnisse der Bildreihe RZ72 in Tabelle 4.2 aufgeführt. Die geschätzten Prozeßkoeffizienten und die aus den geschätzten Prozeßfehlern $\hat{\epsilon}$ ermittelten Varianzen (siehe Gl. (II.3.2.2-5) und Gl. (II.3.2.2-6)) weisen darauf hin, daß die Zeitreihen durch einen AR-Prozeß 1. Ordnung hinreichend erfaßt werden. Die Stationaritätsbedingung ($a_1 < 1$) wurde von den um den Mittelwert (Trend) reduzierten Zeitreihen erfüllt.

Parameter	arithmet. Mittel [µm]	Varianz [µm ²]	Prozeßkoeffizienten					
			1. Ordnung a_1	2. Ordnung a_1 a_2		3. Ordnung a_1 a_2 a_3		
m	-12.9	58.04	0.705	0.665	0.056	0.670	0.115	-0.088
ω	-5.4	1.00	0.222	0.193	0.130	0.164	0.087	0.223
φ	-5.8	1.77	0.295	0.163	0.448	0.131	0.436	0.071
t ₁	-5.3	0.43	0.159	0.138	0.129	0.141	0.132	-0.020
t ₂	-2.1	0.28	0.054	0.044	0.151	0.069	0.158	-0.155
t ₃	2.1	0.25	-0.016	-0.013	0.186	-0.017	0.186	0.020
t ₄	-0.9	0.84	0.210	0.189	0.100	0.170	0.062	0.199
t ₅	-3.6	1.10	0.324	0.297	0.138	0.258	0.096	0.154
t ₆	0.6	1.78	0.263	0.198	0.248	0.153	0.212	0.181
t ₇	-14.9	2.84	0.258	0.197	0.235	0.207	0.243	-0.039
t ₈	-0.4	2.84	-0.290	-0.270	0.068	-0.273	0.077	0.032
t ₉	-2.8	0.79	0.059	0.059	-0.009	0.059	-0.008	-0.008
t ₁₀	-1.7	1.02	-0.022	-0.020	0.096	-0.023	0.097	0.030
t ₁₁	-4.4	2.46	0.007	0.006	0.104	-0.006	0.103	0.113
t ₁₂	-0.2	2.44	-0.130	-0.134	-0.032	-0.136	-0.042	-0.075

Tabelle 4.2: Ergebnisse der Zeitreihenanalyse mit Hilfe des autoregressiven Prozesses des Fluges RZ72

Beim AR(1)-Prozeß ist der Prozeßkoeffizient mit dem Korrelationskoeffizient identisch, was sich direkt aus den Yule-Walker-Gleichungen ergibt. Deshalb soll die in Abbildung 4.12 gezeigte Häufigkeitsverteilung der Prozeßkoeffizienten einen Einblick in das Korrelationsverhalten zwischen den Bildern geben. Zusätzlich ist aus Tabelle 4.2 und exemplarisch auch aus der Abbildung 4.11 ersichtlich, daß die Mehrzahl der Korrelationen zwischen zwei benachbarten Bildern zwischen 10 und 30% liegen. Die maximale Korrelation der Zeitreihen der Parameter t_1 bis t_{12} liegt bei 48% (vgl. ACF in Abbildung 4.2), ohne Berücksichtigung der Kontaktkopien. Zieht man die Kontaktkopien zur Untersuchung mit heran, so stellt man fest, daß die Korrelationen hier signifikant höher ausfallen und die maximale Korrelation bei 69% für den Parameter t_1 liegt.

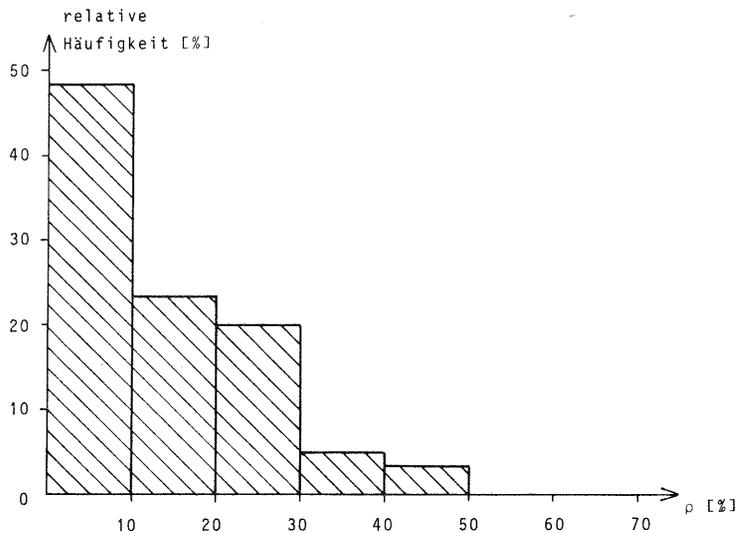


Abb. 4.12: Häufigkeitsverteilung der aus den Zeitreihen der zusätzlichen Parameter geschätzten Prozeßkoeffizienten a_1 (ohne die Bildreihen RZK41a,b)

Wie stark das Korrelationsverhalten der zusätzlichen Parameter sich zwischen den Zeitreihen unterscheidet, ist aus den Autokorrelationsfunktionen der Abbildungen 4.4 und 4.11 für niedere Korrelationen und den Abbildungen 4.2 und 4.10 für hohe Korrelationen ersichtlich. Die signifikanten Korrelationen reichen in der Regel nicht über einen Abstand von 2 bis 3 Bildern hinaus.

4.3 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

(1) Die Ergebnisse der Zeitreihenanalyse der zusätzlichen Parameter bestätigen die im Abschnitt 3 getroffene Schlußfolgerung über die stochastischen Eigenschaften der systematischen Bilddeformationen. Die starke Variation der zusätzlichen Parameter von Bild zu Bild beweist, daß diese als stochastische Variablen im mathematischen Modell der Aerotriangulation angesetzt werden müssen. Die Erwartungswerte der zusätzlichen Parameter können nicht zu Null angenommen werden, d.h. sie sind im Funktionalmodell als unbekannte Parameter zu definieren. Als Trend erwies sich das arithmetische Mittel über die gesamte Bildreihe als ausreichend.

Bei der Analyse der Zeitreihen konnten keine signifikanten Effekte, die durch das An- und Abschalten der Meßkammer beim Wechsel des Flugstreifens (Bildmaterial Rheidt) bedingt sein könnten, festgestellt werden.

Das Korrelationsverhalten der zusätzlichen Parameter zwischen den Epochen ist bei den untersuchten Flügen relativ niedrig ausgefallen. Inwieweit physikalische Einflüsse, die sich nicht mit dem Reseau erfassen lassen, das Korrelationsverhalten zwischen den Bildern verstärken würden, bleibt offen. Bei künftigen Untersuchungen ist besonders die Häufigkeit der hier nur vereinzelt aufgetretenen hohen Korrelationsbeträge über 60% zu klären und ihre Auswirkungen auf die Korrelation der Bildkoordinaten zwischen den Bildern zu analysieren. Von Bedeutung ist neben der Untersuchung der Auswirkungen von maximalen Korrelationen auch eine Abschätzung der Annahme einer mittleren Korrelation zwischen den Epochen auf die Ergebnisse der Aerotriangulation. Für diese Analysen sollte aber genügend Datenmaterial von Befliegungen jüngeren Datums benützt werden.

Vielleicht ist es sogar bei einer ausreichenden Anzahl von Befliegungen möglich, ein charakteristisches Verhalten systematischer Bilddeformationen bezüglich eines bestimmten Meßkammertyps abzuleiten, da sich bereits bei den hier durchgeführten Untersuchungen deutliche Übereinstimmungen zwischen Kammern des gleichen Typs ergaben, allerdings nur bezogen auf den Mittelwert und die Streuung der Deformation.

(2) Die in diesem und dem vorangegangenen Abschnitt gewonnenen Erkenntnisse über das stochastische Verhalten der Bildkoordinaten und seiner Ursachen sind, soweit es der jetzige Stand der empirischen Untersuchungen zuläßt, in dem kombinierten Modell für die Aerotriangulation integriert worden (vgl. Abschnitt III.2). Dabei ist die Behandlung der zusätzlichen Parameter als stochastische Größen mit einem blockinvarianten Anteil (Erwartungswert) der wesentliche Bestandteil des Modells. Die Zusammenfassung des Korrelationsverhaltens zwischen den Epochen durch einen für alle zusätzlichen Parameter gemeinsamen autoregressiven Prozeß erster Ordnung beruht einmal auf der damit verbundenen einfachen Handhabung der Korrelationen zwischen den Bildern. Aber entscheidend für diese Einschränkung ist doch die noch unzureichende Kenntnis über das Korrelationsverhalten zwischen den Bildern. Als im wesentlichen gesicherte Kenntnis kann aus diesen Untersuchungen dagegen der Prozeßtyp und seine Ordnung betrachtet werden. Ob für die zusätzlichen Parameter jeweils ein eigener Prozeß angesetzt werden muß oder ob ein gemeinsamer Prozeß ausreicht, ist in künftigen Analysen zu klären, die dann auch das gesamte Fehlerspektrum über das Reseau hinaus erfassen sollten.

Damit sind die Ergebnisse der empirischen Untersuchungen mit dem Reseaubildmaterial abgeschlossen. Sie bilden eine Basis für viel umfassendere Versuche auf dem Gebiet des stochastischen Verhaltens von Bildkoordinaten und können als richtungsweisend für weitere Analysen betrachtet werden. Inwieweit sich das auf den empirischen Untersuchungen aufbauende erweiterte mathematische Modell der Aerotriangulation bewährt und ob es die in es gesetzten Erwartungen erfüllt, soll im nächsten Abschnitt mit Hilfe von Computersimulationen behandelt werden.

5. Simulationen mit verschiedenen Modellansätzen

Das im Abschnitt III.2 vorgestellte kombinierte Modell für die Aerotriangulation soll mit Hilfe von Simulationen auf seine Wirksamkeit untersucht werden. Dazu werden mittels unterschiedlich simulierter Bildkoordinaten eines photogrammetrischen Blocks verschiedene mathematische Modelle der Aerotriangulation zu Vergleichszwecken herangezogen. Außerdem wird der Einfluß unterschiedlicher Korrelationsbeträge zwischen den Bildern analysiert und die Auswirkungen von unrichtigen Gewichts- bzw. Korrelationsannahmen auf die Ergebnisse der Ausgleichung beurteilt.

5.1 Grundlagen der Simulationsberechnungen

5.1.1 Simulierter photogrammetrischer Block

Als Grundlage für die gesamte Untersuchung diene ein photogrammetrischer Block, wie er bei der praktischen Punktbestimmung durch Aerotriangulation üblich ist (vgl. Abbildung 5.1). Der Block besteht aus 4 Streifen zu je 6 Bildern mit einer Längs- und Querüberdeckung von jeweils 60%. Pro Bild wurden die Koordinaten von 25 Bildpunkten (5×5 Schema) im Maßstab 1 : 10 000 fehlerfrei simu-

liert. Unter der Voraussetzung von ebenem Gelände, strenger Einhaltung des Normalfalls und der Überdeckung ergeben sich die Koordinaten der Bildpunkte im Gelände unmittelbar aus dem Bildmaßstab und lassen sich somit direkt als Vergleichspunkte verwenden. Die Paßpunktverteilung richtet sich streng nach den Angaben für die theoretisch optimal erreichbaren Genauigkeiten bei Bündelblöcken. Am Blockrand, aus Gründen der geometrischen Stabilität um eine Basislänge nach innen versetzt, sind Vollpaßpunkte im Abstand von 1.5 Basislängen angeordnet. Zwei zusätzliche Höhenpaßpunkte stützen die Blockmitte ab. Für die Auswertung mit Hilfe der Vergleichspunkte sind nur die Punkte im Innenbereich des Blocks (schraffierte Fläche in Abb. 5.1) verwendet worden, um den Genauigkeitsabfall zum Blockrand hin zu umgehen (1- bzw. 2-fach bestimmte Punkte). Das Schema der Bildnumerierung ist aus Abbildung III.2.1 übernommen.

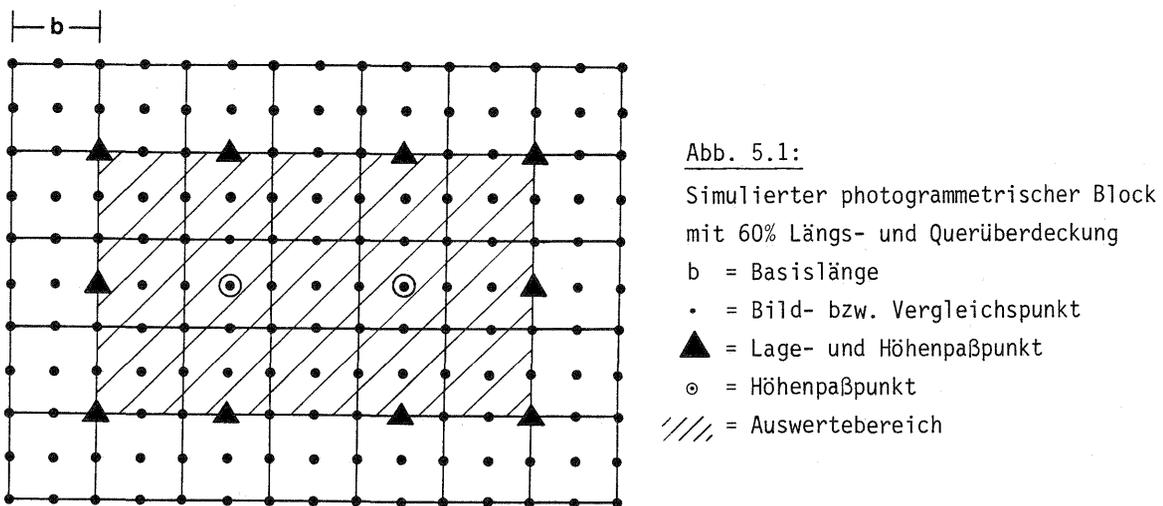


Abb. 5.1:

Simulierter photogrammetrischer Block mit 60% Längs- und Querüberdeckung

b = Basislänge

• = Bild- bzw. Vergleichspunkt

▲ = Lage- und Höhenpaßpunkt

⊙ = Höhenpaßpunkt

//// = Auswertebereich

Die Koordinaten der Paßpunkte und der Vergleichspunkte wurden als fehlerfrei angenommen, und für die Bildkoordinaten wurden unterschiedliche Fehlereinflüsse generiert. Die Grundlagen für die verschiedenen Simulationen der Bildkoordinatenfehler werden im folgenden Abschnitt beschrieben.

5.1.2 Simulationsmodelle und Generierungsparameter

Die Simulation der an den fehlerfrei generierten Bildkoordinaten anzubringenden Fehlereinflüsse erfolgte in 5 Stufen (Simulationsmodelle). Bei der niedrigsten Stufe (Modell SA) erzeugte man lediglich mit einem Zufallsgenerator ein weißes Rauschen mit $\sigma_{\epsilon} = 1 \mu\text{m}$, was der zu erwartenden Meßgenauigkeit an einem Präzisionskomparator entspricht. Diese Stufe bildete die Grundlage für alle weiteren Simulationsmodelle. In den nächsten Stufen wurden global für den gesamten Block bzw. bildweise systematische Bilddeformationen sowohl getrennt als auch gemeinsam generiert (Modelle SB, SC, SD). Als höchste und der Realität am weitesten angepaßte Stufe wurden bei der Generierung, basierend auf dem Modell SD, mit Hilfe eines AR(1)-Prozesses Korrelationen zwischen den lokalen Bilddeformationen integriert.

Die Tabelle 5.1 gibt einen Überblick über die Simulationsmodelle und deren Konstruktion. Als Grundlage für die Generierung der systematischen Bilddeformationen wurden die Ergebnisse der Zeitreihenanalyse (vgl. Abschnitt 4) herangezogen. Die Auswahl der Parametertypen richtete sich

Typ	zufäll. Fehler $\sigma_{\epsilon}^2 = 1 \mu\text{m}$	systematische Fehler		Korrelation (AR(1)-Prozeß) $a = 0.7$
		blockinvariant	bildweise $E(\underline{z})=\underline{0}, D(\underline{z})=C_{zz}$	
SA	X	—	—	—
SB	X	X	—	—
SC	X	—	X	—
SD	X	X	X	—
SE	X	X	X	X

Tabelle 5.1: Aufbau der Simulationsmodelle S_i ($i=A, \dots, E$)

nach ihren maximalen Mittelwerten und Streuungen. So wurden 6 im Datenmaterial der untersuchten Bildreihen dominierende Deformationseffekte für die Simulationen verwendet, deren Werte in Tabelle 5.2 zusammengestellt sind. Die Generierung der systematischen Deformationen erfolgte mit dem modifizierten Parametersatz von Ebner (vgl. Gleichung (4.1-1)).

Parameter	t_5	t_6	t_7	t_8	t_{11}	t_{12}
Mittelwert [μm]	-4.1	2.9	-14.9	-3.2	-6.0	-3.4
Varianz [μm^2]	2.89	4.41	5.29	4.41	6.76	7.84

Tabelle 5.2: Generierungsparameter für die systematischen Fehler (normiert auf die Basis $b = 10^5 \mu\text{m}$)

Um statistisch signifikante Aussagen über die Ergebnisse der sich anschließenden Berechnungen zu erhalten, wurde jedes Simulationsmodell 10-fach mit unabhängigen Datensätzen generiert. Insgesamt ergaben sich somit 50 photogrammetrische Blöcke, deren gegenseitige Unabhängigkeit wesentliche Voraussetzung für die sich anschließende Analyse mit den verschiedenen mathematischen Modellen ist.

5.1.3 Berechnungsmodelle

Die zur Auswertung der simulierten photogrammetrischen Blöcke verwendeten mathematischen Modelle (Berechnungsmodelle) beinhalten sowohl die herkömmlichen Ansätze als auch in Analogie zu den Simulationsmodellen Ansätze mit unterschiedlichen Methoden zur Erfassung der systematischen Deformationen. Die Tabelle 5.3 gibt einen Überblick über die Berechnungsmodelle und einige statistische Angaben, wie z.B. die Redundanz der Systeme. Die Informationen für das stochastische Modell, wie Meßgenauigkeit, Varianz der zusätzlichen Parameter und Korrelation zwischen den Parametern, sind den Simulationsmodellen entnommen. Dasselbe gilt für die Auswahl der Parametertypen im Funktionalteil.

Die Berechnungsmodelle RA und RB decken den Stand der bisherigen, in der Praxis verwendeten Modellentwicklung ab. Neben dem gebräuchlichsten Modell RB mit blockinvarianten zusätzlichen Parametern wurde auch eine Version der um den Mittelwert gleich Null streuenden Parameter hinzugezogen (Modell RC), wobei die Kovarianzmatrix C_{zz} direkt der Kovarianzmatrix C_{ss} der zusätzlichen

Typ	Mathematisches Modell		Anzahl		Redundanz
	funktional	stochastisch	Beobachtungen	Unbekannte	
RA	PP	$\underline{C}_{11} = \sigma_{\underline{\epsilon}}^2 \underline{I}$	1200	591	609
RB	PP, BAP	$\underline{C}_{11} = \sigma_{\underline{\epsilon}}^2 \underline{I}$	1200	597	603
RC	PP, IAP	$\underline{C}_{11} = \sigma_{\underline{\epsilon}}^2 \underline{I}, \underline{C}_{zz} = \text{diag}$	1344	735	609
RD	PP, BAP, IAP	$\underline{C}_{11} = \sigma_{\underline{\epsilon}}^2 \underline{I}, \underline{C}_{zz} = \text{diag}$	1344	741	603
RE	PP, BAP, IAP, CORR	$\underline{C}_{11} = \sigma_{\underline{\epsilon}}^2 \underline{I}, \underline{C}_{zz} = \text{diag}, a=0.7$	1344	741	603

Tabelle 5.3: Aufbau der Berechnungsmodelle Ri (i=A, ..., E)

- PP = perspektive Projektion
 BAP = blockinvariante zusätzliche Parameter
 IAP = bildweise zusätzliche Parameter
 CORR = Korrelation zwischen den Bildern (AR(1)-Prozeß)

Parameter entspricht. Das Berechnungsmodell RD stellt eine darüberhinausgehende Weiterentwicklung dar, da die zusätzlichen Parameter hier als um einen unbekanntem Erwartungswert variierende Größen behandelt werden. Für die Kovarianzmatrix \underline{C}_{zz} gilt dasselbe wie im Modell RC. Das Berechnungsmodell RE entspricht genau dem kombinierten Modell der Definition III.2-1. Die Korrelation zwischen den Bildern ist im Funktionalmodell berücksichtigt, und da ein orthogonaler Parametersatz verwendet wurde, entspricht die Kovarianzmatrix $\underline{C}_{zz} = \underline{Q}_{nn} \otimes \underline{C}_{ss}$ einer Diagonalmatrix.

Eine Untersuchung von Berechnungsmodellen mit gewichteten blockinvarianten oder festen bildweisen Parametern kam nicht in Frage. Ein stochastischer Ansatz der blockinvarianten Parameter widerspricht der Erkenntnis aus den empirischen Untersuchungen und ist nur unter dem Gesichtspunkt der numerischen Stabilisierung interessant. Ein Ansatz mit festen bildweisen Parametern birgt die Gefahr einer Überparameterisierung in sich.

Um alle hier vorgestellten Berechnungsmodelle realisieren zu können, wurde vom Verfasser das Programmsystem zur Bündelausgleichung mit Selbstkalibrierung PAT-B des Instituts für Photogrammetrie der Universität Stuttgart erweitert, so daß die stochastischen Eigenschaften der zusätzlichen Parameter vollständig berücksichtigt werden konnten. Der AR(1)-Prozeß zur Erfassung der Korrelation zwischen den Bildern wurde durch die Addition eines Normalgleichungsanteils (vgl. Gl. (II.4.2-3)) nach dem in Abbildung III.2.2 gezeigten Verfahren integriert. Die Rechenzeiten für die einzelnen Berechnungsmodelle an dem Minicomputer HARRIS H 100 sind für jeweils einen Block in Tabelle 5.4 aufgeführt, um einen Eindruck von der Steigerung des numerischen Aufwands im Verhältnis zur Verfeinerung des mathematischen Modells zu vermitteln.

Berechnungsmodell	RA	RB	RC	RD	RE
Rechenzeit (CPU-Time) in sec.	115	205	650	780	785

Tabelle 5.4: Rechenzeiten für einen simulierten Block an der Rechanlage HARRIS H 100 (1 Iteration)

5.2 Ergebnisse der Simulationsanalysen

5.2.1 Vergleich unterschiedlicher Simulations- und Berechnungsmodelle

Die 5 Simulationsmodelle der photogrammetrischen Blöcke wurden mit den verschiedenen Berechnungsmodellen analysiert. Damit ist es möglich, die Wirksamkeit der einzelnen mathematischen Modelle anhand unterschiedlicher Fehlereinflüsse auf das Datenmaterial zu überprüfen. Insgesamt wurden 15 Kombinationen zwischen den Simulations- und Berechnungsmodellen ausgewertet. Die Korrelation zwischen den Bildern wurde zu 70% angenommen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.5 zusammengestellt. Als Vergleichskriterien galten die quadratischen Mittelwerte der Verbesserungen an den Vergleichspunkten (Lage: μ_x, μ_y, μ_{xy} ; Höhe: μ_z), die Beträge der maximalen Verbesserungen (Lage: ϵ_x, ϵ_y ; Höhe: ϵ_z) und die geschätzte Streuung der Gewichtseinheit $\hat{\sigma}_0$ und zwar jeweils über 10 unabhängige Blöcke quadratisch bzw. einfach gemittelt.

Die Ergebnisse der Analyse können wie folgt zusammengefaßt werden:

(1) Vergleicht man die Werte auf der Hauptdiagonalen der Tabelle 5.5, d.h. bei identischen Simulations- und Berechnungsmodellen, so ist eine signifikante Übereinstimmung der Ergebnisse zu erkennen. Die quadratischen Mittelwerte der Verbesserungen an den Vergleichspunkten variieren in der Lage zwischen 0.58 μm und 0.66 μm , in der Höhe zwischen 1.17 μm und 1.31 μm . Damit sind sie auch mit den von Ebner, Krack und Schubert (1977) abgeleiteten theoretischen Genauigkeiten für Bündelblöcke identisch ($\mu_{xy} \approx 0.6 \mu\text{m}$, $\mu_z \approx 1.2 \mu\text{m}$). Die geschätzte Streuung der Gewichtseinheit $\hat{\sigma}_0$ variiert zwischen 0.99 μm und 1.01 μm und ist somit identisch mit der Streuung des generierten Meßrauschens von 1 μm . Die Ergebnisse bestätigen die Übereinstimmung der mathematischen Modelle, d.h. die simulierten Fehlereinflüsse werden in allen Fällen vollständig erfaßt.

	SA				SB				SC				SD				SE			
RA	RA/SA				RA/SB				RA/SC				RA/SD				RA/SE			
	0.56	0.61	1.23	0.59	1.28	1.76	8.36	1.54	0.73	0.84	1.63	0.79	1.31	1.84	8.51	1.60	1.46	1.83	8.53	1.66
	1.48	1.50	3.48	1.01	3.71	4.76	15.33	2.76	2.09	2.09	4.16	1.34	3.56	5.19	15.64	2.86	3.59	4.95	15.30	3.04
RB		RB/SB				RB/SC				RB/SD				RB/SE						
		0.57	0.58	1.17	0.58	0.72	0.85	1.63	0.79	0.75	0.80	1.64	0.78	0.96	0.87	1.65	0.92			
		1.56	1.55	3.17	1.00	2.09	2.12	4.17	1.33	1.98	2.14	4.21	1.33	2.37	2.29	4.21	1.53			
RC			RC/SC				RC/SD				RC/SE									
			0.61	0.66	1.27	0.64	0.73	0.94	2.62	0.84	0.82	0.89	2.52	0.85						
			1.74	1.74	3.57	0.99	2.11	2.48	5.39	1.57	2.28	2.17	5.02	1.64						
RD				RD/SD				RD/SE												
				0.61	0.67	1.31	0.64	0.70	0.68	1.30	0.69									
				1.55	1.71	3.51	1.00	1.79	1.75	3.30	1.06									
RE	Beispiel				μ : Quadratischer Mittelwert der Verbesserungen der Vergleichspunkte; $\mu_{xy} = \sqrt{(\mu_x^2 + \mu_y^2)/2}$ ϵ : Maximale Verbesserung der Vergleichspunkte $\hat{\sigma}_0$: Geschätzte Streuung der Gewichtseinheit												RE/SE			
	μ_x	μ_y	μ_z	μ_{xy}	0.67	0.65	1.30	0.66												
	ϵ_x	ϵ_y	ϵ_z	$\hat{\sigma}_0$	1.73	1.71	3.37	1.01												

Tabelle 5.5: Ergebnisse der Bündelblockausgleichungen (in μm); Mittelwerte über 10 unabhängige Berechnungen, Prozeßkoeffizient $a = 0.7$

(2) Betrachtet man die Genauigkeiten des einfachen Modells RA und des Modells RB mit den blockinvarianten zusätzlichen Parametern, so stellt man eine Steigerung in der Lage (μ_{xy}) um den Faktor 1.8 bis 2.7 und in der Höhe (μ_z) um den Faktor 5.2 bis 7.2 fest (vgl. Tabelle 5.6). Ähnliche Verhältnisse gelten für die maximalen Verbesserungen. Die Werte für die Genauigkeitssteigerung stimmen mit den aus empirischen Untersuchungen erhaltenen Faktoren im wesentlichen überein (vgl. Abschnitt III.1.2). Bei einem Vergleich der Faktoren der Genauigkeitssteigerung ist interessant, daß diese mit zunehmender Komplexität des Simulationsmodells signifikant abnehmen. Dies beruht auf einer unzureichenden Erfassung bei der Überlagerung unterschiedlicher, nicht globaler Fehlereinflüsse durch das mathematische Modell RB. Die Kombinationen RASC und RBSC sind bei diesem Vergleich ausgenommen (siehe (3)).

	RASB	RBSB	Faktor	RASD	RBSD	Faktor	RASE	RBSE	Faktor
μ_x	1.28	0.57	2.25	1.31	0.75	1.75	1.46	0.96	1.52
μ_y	1.76	0.58	3.03	1.84	0.80	2.30	1.83	0.87	2.10
μ_{xy}	1.54	0.58	2.66	1.60	0.78	2.05	1.66	0.92	1.80
μ_z	8.36	1.17	7.15	8.51	1.64	5.19	8.53	1.65	5.17
ϵ_x	3.71	1.56	2.38	3.56	1.98	1.80	3.59	2.37	1.51
ϵ_y	4.76	1.55	3.07	5.19	2.14	2.43	4.95	2.29	2.16
ϵ_z	15.33	3.17	4.84	15.64	4.21	3.71	15.30	4.21	3.63

Tabelle 5.6: Genauigkeitssteigerung durch Einführung von blockinvarianten zusätzlichen Parametern

(3) Das Simulationsmodell SC bestätigt die erwarteten Eigenschaften des Berechnungsmodells RB mit den blockinvarianten zusätzlichen Parametern: Die simulierten lokalen systematischen Fehler werden nicht erfaßt, was sich aus der hohen Übereinstimmung der Kombinationen RASC und RBSC ergibt (maximale Abweichung: $\Delta\epsilon_y = 0.03 \mu\text{m}$). Diese Eigenschaft bleibt auch bei der Überlagerung von globalen und lokalen systematischen Fehlern (Modell SD) erhalten. Hier erfaßt das Berechnungsmodell RB ebenfalls nur den blockinvarianten Anteil, denn die Ergebnisse der Kombination RBSD sind mit denen der Fälle RASC und RBSC nahezu identisch (maximale Abweichung: $\Delta\epsilon_x = 0.11 \mu\text{m}$).

(4) Das Berechnungsmodell RC erfaßt neben den lokalen auch Teile der globalen systematischen Fehler. Dies läßt sich an den Kombinationen RASB und RCSD zeigen. Geht man davon aus, daß das Modell RC nur die lokalen Fehlereinflüsse erfaßt, so müßten die Ergebnisse der beiden Kombinationen identisch sein. Der Fall RCSD ist aber in der Lage um den Faktor 1.8 (μ_{xy} : 1.54 \rightarrow 0.84) und in der Höhe um den Faktor 3.2 (μ_z : 8.36 \rightarrow 2.62) signifikant genauer. Dies läßt sich nur auf die Bestimmung eines Teils der hier bei diesen Simulationen doch stark dominierenden globalen Systematik zurückführen.

(5) Ein weiteres Ergebnis der Simulationsuntersuchungen ist der signifikante Genauigkeitsanstieg vom mathematischen Modell RB mit festen zum Modell RD mit stochastischen zusätzlichen Parametern. Die Faktoren der Genauigkeitssteigerung sind in Tabelle 5.7 zusammengestellt und sie variieren zwischen 1.2 und 1.4. Interessant dabei ist der deutliche Anstieg der Faktoren

mit der Verfeinerung des Simulationsmodells. Dies entspricht dem reziproken Verhalten des Genauigkeitsanstiegs vom Berechnungsmodell RA zum Modell RB.

(6) Eine weitere Verfeinerung des mathematischen Modells in Form der Erfassung der Korrelation zwischen den Bildern bewirkt lediglich eine Genauigkeitssteigerung von 5% (in der Lage) gegenüber dem bereits hochentwickelten Berechnungsmodell RD (vgl. Tabelle 5.7). Dieser Betrag ist nicht signifikant. Aber es ist zumindest eine Tendenz ersichtlich. Betrachtet man nämlich die geschätzte Varianz der Gewichtseinheit im Fall RDSE ($\hat{\sigma}_0^2 = 1.13 \mu\text{m}^2$), so weicht diese doch signifikant von der des generierten Meßrauschens ($\sigma_0^2 = 1 \mu\text{m}^2$) ab. Das bedeutet, daß eine Verbesserung durch die Integration des AR(1)-Prozesses durchaus realistisch (vgl. Abschnitt 5.2.2) erscheint.

	RBSD	RSDS	Faktor	RBSE	RDSE	Faktor	RDSE	RESE	Faktor
μ_x	0.75	0.61	1.23	0.96	0.70	1.37	0.70	0.67	1.04
μ_y	0.80	0.67	1.19	0.87	0.68	1.28	0.68	0.65	1.05
μ_{xy}	0.78	0.64	1.22	0.92	0.69	1.33	0.69	0.66	1.05
μ_z	1.64	1.31	1.25	1.65	1.30	1.27	1.30	1.30	1.00
ϵ_x	1.98	1.55	1.28	2.37	1.79	1.32	1.79	1.73	1.03
ϵ_y	2.14	1.71	1.25	2.29	1.75	1.31	1.75	1.71	1.02
ϵ_z	4.21	3.51	1.20	4.21	3.30	1.28	3.30	3.37	0.98

Tabelle 5.7: Genauigkeitssteigerung beim Übergang von festen auf stochastische zusätzliche Parameter mit Erwartungswert ungleich Null und bei Berücksichtigung von Korrelationen zwischen den Parametern

(7) Als Schlußfolgerung ergeben sich aus dem Vergleich der unterschiedlichen Simulations- und Berechnungsmodelle im Mittel folgende Genauigkeitssteigerungen für die verwendeten mathematischen Modelle (vgl. auch Tabelle 5.9), bezogen auf das einfache Modell der perspektiven Projektion ohne zusätzliche Parameter (RA):

- Lagegenauigkeit (μ_{xy})
RA : RB : RC : RD : RE = 1.0 : 1.9 : 2.0 : 2.7 : 2.8
- Höhengenaugigkeit (μ_z)
RA : RB : RC : RD : RE = 1.0 : 5.3 : 3.4 : 6.9 : 7.0

Das relativ niedrigere Genauigkeitsniveau des Modells RC (lokale zusätzliche Parameter) gegenüber dem Modell RB (globale zus. Parameter) ist hier auf den dominierenden Effekt der globalen systematischen Bilddeformationen gegenüber ihren Streuungen zurückzuführen und insofern nicht zu verallgemeinern.

Für die Effizienz der Modelle RD (globale und lokale zus. Parameter) und RE (globale und lokale zus. Parameter, Korrelation zwischen den Bildern) ist in jedem Fall das Verhältnis von der Streuung der zusätzlichen Parameter zum Meßrauschen verantwortlich, wie es auch direkt in der Funktion zur Abschätzung der Genauigkeitssteigerung (vgl. Gl. (III.2.3.3-3)) enthalten ist.

Natürlich beziehen sich die hier diskutierten Ergebnisse ausschließlich auf einen einzigen photogrammetrischen Block mit einer bestimmten Paßpunktverteilung und lassen sich somit nicht unbedingt verallgemeinern. Auch wurde der Einfluß der Paßpunkte völlig außerachtgelassen. Aber da die simulierten Fehleranteile aus empirischen Untersuchungen stammen und die Blockkonfiguration durchaus realistischen Anordnungen zur genauen photogrammetrischen Punktbestimmung entspricht, können die Ergebnisse durchaus als realistische Anhaltspunkte über die Auswirkung einer Verfeinerung des mathematischen Modells der Aerotriangulation gesehen werden. Nach der bisherigen Erfahrung dürfte die Tendenz der Aussagen repräsentativ sein.

5.2.2 Vergleich unterschiedlichen Korrelationsverhaltens zwischen den Bildern

Im vorangegangenen Abschnitt beschränkte sich die Untersuchung der Berechnungsmodelle auf den Korrelationsbetrag von 70% zwischen den Bildern. Um speziell den Einfluß des Korrelationsverhaltens näher zu analysieren, wurden zusätzlich photogrammetrische Blöcke mit den Korrelationen 50%, 80% und 90% im Modell SE simuliert. Die Ergebnisse, jeweils über 10 Blöcke gemittelt, sind in der Tabelle 5.8 zusammengefaßt. Die Faktoren der Genauigkeitssteigerung sind bezogen auf das Berechnungsmodell RA in Tabelle 5.9 dargestellt, wobei auf eine Präsentation des Modells RC

Modell	a = 0.5				a = 0.7				a = 0.8				a = 0.9			
RA	1.44	1.96	9.63	1.72	1.46	1.83	8.53	1.66	1.61	2.12	10.10	1.88	1.60	2.09	9.78	1.86
	4.31	5.09	17.73	3.23	3.59	4.95	15.30	3.04	4.60	5.32	18.39	3.53	4.15	5.17	18.47	3.65
RB	0.83	0.83	1.65	0.83	0.96	0.87	1.65	0.92	0.96	0.91	1.81	0.93	1.00	0.98	2.10	0.99
	2.10	2.14	4.33	1.42	2.37	2.29	4.21	1.53	2.45	2.27	4.71	1.59	2.30	2.48	5.13	1.73
RC	0.79	0.92	2.91	0.86	0.82	0.89	2.52	0.85	0.84	0.97	3.01	0.91	0.80	1.00	2.85	0.91
	2.20	2.33	6.26	1.71	2.28	2.17	5.02	1.64	2.31	2.44	6.41	1.83	2.22	2.52	6.14	1.93
RD	0.63	0.65	1.38	0.64	0.70	0.68	1.30	0.69	0.67	0.68	1.40	0.67	0.66	0.72	1.47	0.69
	1.65	1.64	3.75	1.02	1.79	1.75	3.30	1.06	1.75	1.70	3.79	1.07	1.69	1.82	3.70	1.13
RE	0.61	0.64	1.37	0.63	0.67	0.65	1.30	0.66	0.62	0.64	1.36	0.63	0.63	0.67	1.40	0.65
	1.61	1.63	3.71	1.00	1.73	1.71	3.37	1.01	1.57	1.64	3.64	1.01	1.60	1.71	3.56	1.03

Tabelle 5.8: Auswirkungen unterschiedlicher Korrelationen zwischen den Bildern (Erläuterungen siehe Tabelle 5.5; Werte in μm , a = Prozeß- bzw. Korrelationskoeffizient)

Modelle	a = 0.5				a = 0.7				a = 0.8				a = 0.9			
	RA	RB	RD	RE												
μ_x	1.00	1.73	2.29	2.36	1.00	1.52	2.09	2.18	1.00	1.68	2.40	2.60	1.00	1.60	2.42	2.54
μ_y	1.00	2.36	3.02	3.06	1.00	2.10	2.69	2.82	1.00	2.33	3.12	3.31	1.00	2.13	2.90	3.12
μ_{xy}	1.00	2.07	2.69	2.73	1.00	1.80	2.41	2.52	1.00	2.02	2.81	2.98	1.00	1.88	2.70	2.86
μ_z	1.00	5.84	6.98	7.03	1.00	5.17	6.56	6.56	1.00	5.58	7.21	7.43	1.00	4.66	6.65	6.99
ϵ_x	1.00	2.05	2.61	2.68	1.00	1.51	2.01	2.08	1.00	1.88	2.63	2.93	1.00	1.80	2.46	2.59
ϵ_y	1.00	2.38	3.10	3.12	1.00	2.16	2.83	2.89	1.00	2.34	3.13	3.24	1.00	2.08	2.84	3.02
ϵ_z	1.00	4.09	4.73	4.78	1.00	3.63	4.64	4.54	1.00	3.90	4.85	5.05	1.00	3.60	4.99	5.19

Tabelle 5.9: Faktoren der Genauigkeitssteigerung mit Verfeinerungsgrad des mathematischen Modells in Abhängigkeit von der Korrelation zwischen den Bildern (a = Prozeß- bzw. Korrelationskoeffizient)

verzichtet wurde, da es keine wesentliche Steigerung zum Modell RB bringt und im Modell RD direkt enthalten ist. Der Korrelationsbetrag von 90% stellt den Grenzfall für das Modell RE dar, da eine noch höhere Korrelation zur numerischen Instabilität des Normalgleichungssystems geführt hat.

(1) Die Abhängigkeit der erreichten Genauigkeit vom Korrelationsgrad ist nicht sehr ausgeprägt. Analysiert man die Ergebnisse der einzelnen Berechnungsmodelle, so ergibt sich lediglich bei den einfacheren Modellen RA und RB eine sichtbare Verminderung der Genauigkeit mit zunehmendem Betrag der Korrelation. Dieser Einfluß nimmt aber mit steigendem Niveau der Berechnungsmodelle ab. Eine Begründung für die geringe Auswirkung des Korrelationsgrades ist sicherlich in der relativ niedrigen Gesamtwirkung der Korrelation zwischen den Bildern zu sehen.

(2) Die Berücksichtigung der Korrelation zwischen den Bildern im mathematischen Modell ergibt in der Tendenz eine höhere Genauigkeit, auch wenn die einzelnen Beträge nicht signifikant sind. In Tabelle 5.9 ist lediglich im Fall der 70%-igen Korrelation das Modell RD dem Modell RE bei der maximalen Verbesserung ε_z überlegen. In allen übrigen Fällen weist das Berechnungsmodell RE den höchsten Steigerungsfaktor auf.

5.2.3 Einfluß unrichtiger Gewichts- und Korrelationsannahmen

Für die Anwendung des kombinierten Modells (Modell RE) ist die Auswirkung unrichtiger Gewichts- und Korrelationsannahmen bei den zusätzlichen Parametern von Bedeutung. Man kann nicht immer davon ausgehen, daß die Varianz der zusätzlichen Parameter sich aus dem Datenmaterial bestimmen läßt. Denn bei zu kleinen photogrammetrischen Blöcken ist eine Konvergenz der VCC-Schätzung nicht gewährleistet; außerdem ist hierzu ein hoher zusätzlicher numerischer Aufwand erforderlich. Die Vorgabe einer a priori Information über das stochastische Verhalten der Parameter wäre deshalb für den praktischen Einsatz des Modells realistisch, womit gleichzeitig die Fragestellung einer hinreichenden Approximation verbunden ist.

Die Schätzung des Prozeßkoeffizienten a ist nicht sehr aufwendig. Aber in Anbetracht der geringen Auswirkung der Korrelation zwischen den Bildern auf die Ergebnisse der Ausgleichung ist die Frage nach einem aus empirischen Untersuchungen abgeleiteten mittleren Korrelationsverhalten und dessen Repräsentativität gerechtfertigt.

Aus diesen Gründen wurde der mit einer Korrelation von 50% mit dem Simulationsmodell SE generierte Block mit dem Modell RE unter Vorgabe unrichtiger a priori Informationen über die Streuung der zusätzlichen Parameter und den Betrag des Prozeßkoeffizienten a ausgeglichen. Der Prozeßkoeffizient variierte dabei zwischen 0.3 und 0.7. Die Gewichte der zusätzlichen Parameter wurden um den Faktor 2 zu klein oder zu groß vorgegeben. Die Ergebnisse der Berechnungen sind, jeweils über 10 Blöcke gemittelt, in Tabelle 5.10 dargestellt.

Der Einfluß einer unrichtigen Korrelationsannahme ist bei dieser speziellen Untersuchung als unwesentlich zu bezeichnen. Die Ergebnisse sind im Bereich der Korrelation von 30 bis 70% praktisch identisch. Dies bestätigt die in den vorangegangenen Untersuchungen festgestellte geringe Auswirkung der Korrelation zwischen den Bildern. Gleichfalls kann eine unrichtige Gewichtsannahme bis zum Faktor 2 in diesem Beispiel vernachlässigt werden. Lediglich die Schätzung der Varianz der Gewichtseinheit ist hiervon direkt beeinflußt, was auch der theoretischen Erwartung entspricht. Selbst die Kombinationen aus den beiden unrichtigen Vorgaben führen nur auf eine unwesentliche Abweichung der Ergebnisse von den Sollwerten.

Gewichts- faktor Prozeß- koeffizient	0.5				1.0				2.0			
	0.3	0.62	0.65	1.40	0.63	0.62	0.64	1.38	0.63	0.63	0.65	1.37
1.63		1.65	3.72	0.96	1.63	1.63	3.72	1.01	1.64	1.65	3.72	1.07
0.5	0.61	0.65	1.39	0.63	0.61	0.64	1.37	0.63	0.63	0.65	1.36	0.64
	1.61	1.65	3.71	0.96	1.61	1.63	3.71	1.00	1.63	1.65	3.71	1.06
0.7	0.61	0.64	1.39	0.63	0.61	0.64	1.37	0.63	0.62	0.64	1.36	0.63
	1.60	1.64	3.70	0.96	1.59	1.63	3.70	1.00	1.63	1.66	3.70	1.06

Tabelle 5.10: Auswirkung unrichtiger Gewichts- und Korrelationsannahmen auf die Ergebnisse des kombinierten Modells (Erläuterungen siehe Tabelle 5.5; Werte in μm)

Eine Verallgemeinerung dieser speziellen Untersuchung ist sicherlich nicht grundsätzlich gegeben, aber das Beispiel zeigt doch eine gewisse Unempfindlichkeit des kombinierten Modells in Bezug auf die für die Berechnungen notwendigen a priori Informationen.

5.3 Zusammenfassung

Die Simulationsanalyse verschiedener mathematischer Modelle der Aerotriangulation bestätigt die Ergebnisse vorangegangener theoretischer und empirischer Untersuchungen über die Auswirkung systematischer Bilddeformationen. Die Einschränkung auf eine spezielle Blockkonfiguration läßt die Ergebnisse nur bedingt verallgemeinern. Da aber der verwendete photogrammetrische Block von seiner Anordnung her den Anforderungen an eine hochgenaue photogrammetrische Punktbestimmung genügt und in früheren Untersuchungen eine Invarianz der Genauigkeitsverhältnisse im Block bezüglich der Blockgröße nachgewiesen wurde, können die erzielten Resultate doch als Anhaltswerte für die Beurteilung der mathematischen Modelle herangezogen werden. Auch die Ableitung der Simulationsparameter aus den Untersuchungen des Reseaubildmaterials stellt nur insofern eine Einschränkung der Bewertung dar, als daß die Analyseergebnisse aufgrund der eingeschränkten Erfassung des Fehlerbudgets durch das Reseau eine untere Schranke bilden.

Wie zu erwarten war, erreichte der Übergang vom mathematischen Modell mit festen zusätzlichen Parametern zum kombinierten Modell mit stochastischen zusätzlichen Parametern nicht die spektakuläre Genauigkeitssteigerung wie sie erstmals bei der Einführung der zusätzlichen Parameter auftrat. Für das kombinierte Modell ergab sich im Vergleich zum Modell mit den festen Parametern eine Steigerung in der Lage um den Faktor 1.5 und in der Höhe um den Faktor 1.3. Im Gegensatz hierzu brachte die Einführung der festen Parameter gegenüber dem einfachsten Modell mit ausschließlicher Berücksichtigung der perspektiven Projektion eine Steigerung in der Lage um den Faktor 1.9 und in der Höhe um den Faktor 5.3. Entscheidend für die erreichbare Steigerung des Genauigkeitsniveaus ist das Verhältnis von Meßgenauigkeit zur Streuung der zusätzlichen Parameter. Die hohe Genauigkeit neuer Meßgeräte, wie Monokomparatoren und analytischer Auswertegeräte, garantiert dabei eine signifikante Genauigkeitssteigerung beim Einsatz des kombinierten Modells.

Die Berücksichtigung der Korrelation zwischen den Bildern wirkt sich nur wenig auf die Ergebnisse aus. Aber der sehr niedrige zusätzliche numerische Aufwand bei der Integration des autoregressiven Prozesses rechtfertigt, auch einen nur geringfügig besseren Wirkungsgrad des Modells zu akzeptieren.

Die relativ niedrige Sensibilität des kombinierten Modells gegenüber unrichtigen a priori Annahmen über die Korrelation und die Genauigkeitsverhältnisse zwischen den zusätzlichen Parametern berechtigt zu der Hoffnung, für praktische Anwendungen Erfahrungswerte aus empirischen Untersuchungen vorgeben zu können. Damit würde sich eine Schätzung der Varianzen der zusätzlichen Parameter umgehen lassen.

Da die Ergebnisse der Simulationen nur den theoretischen Aspekt des Genauigkeitsniveaus erfassen können, ist es unbedingt notwendig, auf geeignetes Datenmaterial aus empirischen Tests zurückzugreifen. Deshalb sollen im folgenden Abschnitt Vorschläge für künftige Versuchsanordnungen unterbreitet werden.

6. Empfehlungen und Vorschläge für künftige Versuche

Die im Kapitel IV beschriebenen empirischen und theoretischen Untersuchungen eröffnen weitere Fragen und Problembereiche im stochastischen Teil des mathematischen Modells der Aero triangulation. Deshalb sollen abschließend Vorschläge und Empfehlungen für künftige Versuche vorgestellt werden, von denen ein weiterer Einblick in das stochastische Verhalten der Bildkoordinaten erwartet werden kann.

Der Charakter der hierzu notwendigen statistischen Analyse bedingt sehr umfangreiche Wiederholungsmessungen. Der Aufwand sollte dabei aber im Verhältnis zum Informationsgewinn aus den Versuchen durch geeignete Voruntersuchungen und Analysen soweit wie möglich beschränkt werden. Deshalb ist es vor einer endgültigen Testfeldbefliegung anzustreben, Simulationen zur Optimierung der Versuchsanordnung durchzuführen und die Untersuchungen gerichtet mit möglichst einfachen Hilfsmitteln zu gestalten. Somit ist eine Gliederung der Versuche in verschiedene Phasen mit unterschiedlichem Aufwand zweckmäßig:

- Voruntersuchungen mittels empirischen Versuchen, basierend auf Reseaubefliegungen, und Simulationsanalysen zur Optimierung der Versuchsanordnung einer Testfeldbefliegung (Phase 1).
- Durchführung der eigentlichen Testfeldbefliegung zur Erfassung sämtlicher Einflüsse auf den photogrammetrischen Aufnahme- und Auswerteprozess (Phase 2).

6.1 Voruntersuchungen und Simulationsanalysen

Die Voruntersuchungen dienen der Absicherung der mit dem Reseaubildmaterial erzielten Ergebnisse (siehe Abschnitte 3 und 4) und sollen vor allem auch Bildmaterial neuerer Reseaumeßkammern berücksichtigen. Die daran anschließenden Simulationsanalysen bauen auf den Ergebnissen dieser Untersuchungen auf.

6.1.1 Befliegungen mit Reseaumeßkammern

(1) Der Einsatz von Reseaumeßkammern bei den Vorversuchen hat die sich unmittelbar an die Untersuchungen im Abschnitt 4 anschließende Analyse des Zeitverhaltens der systematischen Bilddeformationen zum Ziel. Mit Hilfe der Zeitreihenanalyse sind der Typ des stochastischen Prozesses, die Prozeßordnung und die Prozeßkoeffizienten zu bestimmen. Dabei ist zu klären, ob für jeden Deformationstyp ein eigener Prozeß anzusetzen ist. Insbesondere sollte überprüft werden, inwieweit die Ergebnisse der Zeitreihenanalyse jeweils einem bestimmten Meßkammertyp zugeordnet werden können, um Anhaltswerte für die Variation der zusätzlichen Parameter bei deren Ansatz im mathematischen Modell zu erhalten.

Eine weitere Zielsetzung ist die Strukturanalyse der Kovarianzmatrix der Bildkoordinaten, nachdem die blockinvarianten und bildweisen systematischen Bilddeformationen durch zusätzliche Parameter bereits erfaßt sind. Die Ergebnisse dieser Analyse können, im Falle einer physikalisch sinnvollen Interpretierbarkeit, für die Beschreibung der Korrelationen im Bild mit Hilfe des Primärfehlerkonzepts (vgl. Abschnitt II.3.1.1) herangezogen bzw. bei Verwendung des VCC-Modells für die Definition der Strukturmatrizen eingesetzt werden. Die Untersuchung darf sich dabei nicht nur auf ein grobes Raster im Bild beschränken, wie es im Abschnitt 3 dargestellt ist, sondern muß vor allem auch die lokalen und kurzperiodischen Deformationen erfassen. Für den lokalen Bereich kommen mehrere Analyseverfahren in Betracht. Die von Schuh (1981) vorgeschlagene Spektralanalyse von Restverbesserungen im Meßbild ist eine Möglichkeit, unterstellt aber den Deformationen eine Periodizität. Daneben sind auch Analysen mit 2-dimensionalen autoregressiven Prozessen oder die Schätzung von Kovarianzfunktionen durchaus denkbar.

Damit ist die Möglichkeit gegeben, die im kombinierten Modell nicht näher spezifizierte Kovarianzmatrix $C_{BB}^{(i)}$ der Bildkoordinaten im Einzelbild mathematisch zu beschreiben.

(2) Die Gewinnung des für die Untersuchungen notwendigen Bildmaterials von Reseaumeßkammern ist verhältnismäßig leicht und kostengünstig zu realisieren. Eine Reseaumeßkammer muß lediglich bei einem konventionellen Bildflug installiert werden. Da ausschließlich die Einflüsse der Flugbedingungen für den Versuch maßgeblich sind, ist das Aufnahmeobjekt völlig unerheblich. Der Film könnte zum Beispiel beim Hin- oder Rückflug zu bzw. von einem Aufnahmegebiet belichtet werden.

Für den Versuch sollten die in den Abschnitten 3.2.2 und 4.3 ausgesprochenen Zielrichtungen und Empfehlungen, wie z.B. die Verwendung ausreichend großer Bildreihen oder Messung und Berechnung lokaler Bildausschnitte, beachtet werden.

Vor der eigentlichen Testfeldbefliegung sind die aus den Reseaubefliegungen ermittelten Ergebnisse als Grundlage für weitere Simulationsberechnungen für eine optimale Blockkonfiguration zu verwenden. Außerdem können analog zum Abschnitt 5 Vorhersagen über die zu erwartenden Genauigkeitssteigerungen getroffen und später mit den Aussagen aus der Testfeldbefliegung verglichen werden.

6.1.2 Simulationsanalysen

Um den Erfolg einer im Grunde sehr aufwendigen Testfeldbefliegung nicht zu beeinträchtigen, sind zuvor sorgfältige Simulationsuntersuchungen erforderlich. Es sind deshalb verschiedene Blockkonfigurationen bezüglich Flugrichtung, Überdeckungsverhältnissen und Punktanordnungen zu simulie-

ren und mit dem zu verwendenden mathematischen Modell zu analysieren. Diese Voruntersuchungen werden auf der Basis des kombinierten Modells näher erläutert.

(1) Mit Hilfe eines freien photogrammetrischen Blocks lassen sich Aussagen über die Bestimmbarkeit der bildweisen zusätzlichen Parameter, die Korrelation zwischen den Parametern und eine globale Aussage über die bei der verwendeten Blockkonfiguration zu erwartende Genauigkeit der ausgeglichenen Bildkoordinaten treffen. Dazu ist der simulierte Block ausschließlich mit zufälligen Fehlern zu überlagern und eine freie Ausgleichung mit dem kombinierten Modell zu rechnen. Die Bestimmbarkeit der bildweisen zusätzlichen Parameter ergibt sich aus deren zugehörigen Redundanzanteilen (siehe Förstner (1980)). Als für die Bestimmung ausreichend können Redundanzanteile $r_i > 0.5$ bezeichnet werden. Die Korrelationen zwischen den zusätzlichen Parametern ergeben sich direkt aus der inversen Normalgleichungsmatrix. Für die Abschätzung einer global erreichbaren Genauigkeit im Block kann die Varianzkomponentenschätzung im kombinierten Modell herangezogen werden (siehe Gleichungen (II.4.2-10) und (II.4.2-11)).

Aufgrund dieser Aussagen über Genauigkeitsverhalten, Korrelation und Bestimmbarkeit ist eine optimale Versuchsanordnung zu ermitteln. Die im Abschnitt II.2.3 angesprochene Theorie der Trennbarkeit bzw. Entscheidungsfähigkeit zwischen verschiedenen Modellen, in dem z.B. im Bereich der zusätzlichen Parameter unterschiedliche Ansätze miteinander verglichen werden, ist dabei mit zu berücksichtigen (vgl. Förstner (1983b), Li (1984)).

6.2 Testfeldebefliegungen

Um das gesamte Fehlerspektrum von der Definition des Aufnahmeobjektes bis hin zur Auswertegenauigkeit am Komparator beim photogrammetrischen Aufnahme- und Auswerteprozess zu erfassen, ist in der Phase 2 eine Testfeldebefliegung notwendig. Dabei ist der Einsatz einer Reseaumeßkammer zweckmäßig, um gleichzeitig eine Trennung des Fehlerbudgets zu ermöglichen und somit die Repräsentativität der vorangegangenen Untersuchungen des Reseaubildmaterials zu beurteilen. Im übrigen sind die Zielsetzungen einer Testfeldebefliegung mit den im Abschnitt 6.1.1 aufgeführten identisch.

(1) Das mathematische Modell zur Analyse der Testfeldebefliegung muß gewährleisten, daß auch Parameter des stochastischen Modells geschätzt werden können. Das bedeutet, der verwendete Ausgleichungsalgorithmus muß die VCC-Schätzung umfassen und die Schätzung der Prozeßkoeffizienten mehrerer stochastischer Prozesse gestatten. Diese Voraussetzungen erfüllt das kombinierte Modell (siehe Abschnitt II.4.3).

Mit den bei der Simulationsanalyse durchgeführten Untersuchungen zur Trennbarkeit verschiedener Modellansätze erübrigt sich auch das Problem der Orthogonalität zusätzlicher Parameter. Denn unter der vorgegebenen Blockkonfiguration sind dann die im Abschnitt II.2 abgeleiteten Bedingungen der Gleichungen (II.2.1.2-8) und (II.2.1.3-10) über die Auswirkung von Modellfehlern eingehalten.

(2) Das für eine Befliegung notwendige Testfeld sollte aus praktischen Gründen in einem ebenen Gelände liegen und eine Ausdehnung aufweisen, die eine ausreichende Anzahl von Aufnahmen pro Flugstreifen (abhängig vom Bildmaßstab) zuläßt. Eine Signalisierung im Gelände nach einem regelmäßigen Schema ist erforderlich, welches sich aus den Voruntersuchungen ergibt. Sollte aller-

dings ein operationelles Verfahren zur digitalen Punktübertragung (siehe z.B. Ackermann (1984a)) vorliegen und in einem analytischen Auswertesystem mit hoher Präzision integriert sein, so kann auf eine Signalisierung verzichtet werden.

Eine geodätische Bestimmung aller Geländepunkte ist wegen der erforderlichen Genauigkeit und der Vielzahl der Punkte kaum zu realisieren. Als Bezugssystem ist deshalb eine Befliegung mit einem im Verhältnis zur eigentlichen Testfeldbefliegung wesentlich größeren Bildmaßstab heranzuziehen.

Die Längsüberdeckung ist mit 90% anzusetzen, um ausreichend lange Zeitreihen zur Bestimmung des Korrelationsverhaltens zwischen den Bildern zu erhalten. Damit besteht auch die Möglichkeit, mehrere Blöcke aus dem Bildmaterial zusammenzustellen.

Die hier aufgeführten Empfehlungen für künftige empirische Untersuchungen stellen nur die Rahmenbedingungen auf. Eine detaillierte Versuchsplanung erfordert einen erheblichen Aufwand an numerischen Voruntersuchungen, wie sie im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich sind und auch außerhalb deren Konzeption und Zielsetzung stehen. Die vorgeschlagenen Versuche zur Analyse des stochastischen Verhaltens der Bildkoordinaten berechtigen aber zu der Vermutung, daß sie, ähnlich der Etablierung der zusätzlichen Parameter im Funktionalmodell Ende der 70er Jahre, zu einer generellen Definition des stochastischen Modells führen werden. Damit wäre, basierend auf dem kombinierten Modell, der bislang höchste Verfeinerungsgrad des mathematischen Modells der Aerotriangulation erreicht.

V. ZUSAMMENFASSUNG

Die in der analytischen Photogrammetrie eingesetzten mathematischen Modelle richteten sich in der Vergangenheit vorwiegend nach den Erfordernissen der praktischen Anwendung, ohne eine detaillierte Integration physikalischer Ursachen und Zusammenhänge in die Modellbildung anzustreben. Der erreichte Genauigkeitsstandard in der Aerotriangulation bestätigte diese Entwicklung. Bei der Modelldefinition herrschte aus diesen rein zweckmäßigen Gründen eine starke Diskrepanz zwischen Funktionalteil und stochastischem Teil. Erst die umfangreichen empirischen Untersuchungen von Stark (1973) und Schilcher (1980) versuchten den stochastischen Teil in die Modellentwicklung miteinzubeziehen. Aber eine umfassende mathematische Beschreibung des stochastischen Modells hat bis heute nicht stattgefunden. Deshalb wurde in der vorliegenden Arbeit erstmals der Versuch unternommen, eine exakte Definition des gesamten mathematischen Modells, insbesondere auch des stochastischen Teils, für die Aerotriangulation zu geben.

Die Grundlage für eine Definition des mathematischen Modells ist die Kenntnis der formalen Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Modellansätzen in der Ausgleichsrechnung und Statistik. Deshalb ist in Abschnitt II.2 allgemein und ohne auf physikalische Zusammenhänge oder Konkretisierungen näher einzugehen die Entwicklung und die Verbindung zwischen verschiedenen mathematischen Modellen dargelegt. Besonders eingehend werden die Auswirkungen von Modellfehlern auf die Ergebnisse der Schätzung diskutiert und mit den Gleichungen (II.2.1.2-8) und (II.2.1.3-10) Bedingungen angegeben, unter denen bei der Konkretisierung der Modelle eventuelle Modellfehler ohne Einfluß bleiben. Die Zusammenhänge der mathematischen Modelle lassen sich anschaulich durch eine Ineinanderüberführung im Modellraum zeigen, ohne daß man dazu auf die Schätzung übergehen muß.

Für die Definition des stochastischen Modells ist es notwendig, sich über Strukturierungsmöglichkeiten und Analysen von Kovarianzmatrizen Klarheit zu verschaffen. Der Abschnitt II.3 geht deshalb auf diese Problematik ein und stellt insbesondere die konstruktiv definierbaren stochastischen Prozesse vor, die sich für die Strukturierung des stochastischen Modells ausgezeichnet eignen.

Die Synthese der vorangegangenen Modelldefinitionen spiegelt sich im Abschnitt II.4, in dem das kombinierte Modell vorgestellt wird, wieder. Das kombinierte Modell stellt neben einem erweiterten Funktionalteil einen vollständig strukturierten stochastischen Teil vor, wie er sich bei Wiederholungsmessungen zu verschiedenen Epochen ergibt und der sich neben der Modellierung der Zeitabhängigkeit durch stochastische Prozesse bis hin zur Varianzkomponentenschätzung erstreckt.

Mit dem kombinierten Modell schließt das Kapitel II ab und bildet die Grundlage für ein erweitertes mathematisches Modell der Aerotriangulation zur hochgenauen Punktbestimmung, wie es im Kapitel III beschrieben wird. Damit ist die Konkretisierung bezüglich des funktionalen und des stochastischen Teils und die Diskussion des kombinierten Modells im Vergleich mit herkömmlichen Modellansätzen, des numerischen Aufwands und der Abschätzung des Genauigkeitsniveaus wesentlicher Bestandteil dieses Kapitels. Die wichtigsten Neuerungen gegenüber konventionellen Modellansätzen sind die Behandlung der zusätzlichen Parameter der Selbstkalibrierung als stochastische Größen, d.h. als um einen unbekanntem Erwartungswert von Bild zu Bild variierende Parameterwerte, und die Beschreibung der Korrelation zwischen den Bildern mit Hilfe autoregressiver Prozesse, welche das stochastische Verhalten der zusätzlichen Parameter zwischen den Bildern erfassen. Damit ist das stochastische Modell in zwei Teile zerlegt, nämlich in einen Korrelationsanteil zwi-

schen den Bildern, der durch die autoregressiven Prozesse beschrieben wird, und einen Korrelationsanteil im einzelnen Meßbild.

Die Grundlagen für die Definition und Konkretisierung des kombinierten Modells bilden die im Abschnitt IV.3 und IV.4 beschriebenen empirischen Untersuchungen mit Reseauaufnahmen der Testfelder Oberschwaben und Rheidt. Die Analysen aus den in verschiedenen Bildreihen geschätzten Kovarianzmatrizen der Bildkoordinaten der Reseaukreuze lassen eine deutliche Strukturierung erkennen. Als dominierende Deformationseffekte erweisen sich die Variation des Maßstabes, der Drehungen im Sinne von Kippen und Schwenken des Bildes und der Affinität. Beachtlich ist die Variation des Maßstabes von Bild zu Bild, die im Randbereich eine Streuung von 10 μm erreicht. Aber auch lokale, physikalisch oder geometrisch nicht näher interpretierbare Deformationen weisen deutliche Variationen auf. Selbst nach einer bildweisen Erfassung der systematischen Bildfehler mit den Parametern der äußeren Orientierung und den zusätzlichen Parametern der Selbstkalibrierung nach Ebner verursacht die Variation der lokalen Deformationen eine signifikante Abweichung von der Meßgenauigkeit.

Die Untersuchung der für die bildweise Erfassung der systematischen Bildfehler verwendeten Parameter mit Hilfe der Zeitreihenanalyse kommt darüber hinaus zu folgenden Ergebnissen:

- Die Parameter der Selbstkalibrierung sind nicht konstant über die gesamte Bildreihe, sondern variieren signifikant von Bild zu Bild.
- Das über die Bildreihe gebildete arithmetische Mittel der zusätzlichen Parameter ist ungleich Null, d.h. bei einer Behandlung der Parameter als stochastische Variable ist der Erwartungswert ungleich Null anzunehmen.
- Die Autokorrelationsfunktion der über die einzelnen Parametertypen gebildeten Zeitreihe entspricht genähert einer Exponentialfunktion vom Typ $\exp(-c \cdot \text{Lag})$, die für einen autoregressiven Prozeß erster Ordnung charakteristisch ist.
- Als Trend erweist sich für die Zeitreihenanalyse das arithmetische Mittel als ausreichend.
- Die Korrelationen zwischen den Parametern einer Zeitreihe, welche auch indirekt für die Korrelationen zwischen den einzelnen Meßbildern verantwortlich sind, liegen durchschnittlich zwischen 10 und 30%; sie erreichen einen Maximalbetrag von 69%.

Die Gesamtheit dieser Ergebnisse der Reseauuntersuchungen reflektiert sich im kombinierten Modell. Um einen Eindruck von der Effizienz dieses Modells gegenüber konventionellen Modellansätzen zu erlangen, sind im Abschnitt IV.5 detaillierte Untersuchungen mit Hilfe von Computersimulationen beschrieben. Die hierfür verwendeten Fakten über das stochastische Verhalten systematischer Bildfehler sind den empirischen Analysen entnommen. Als wesentliches Ergebnis ergibt sich eine Genauigkeitssteigerung vom Modellansatz mit blockinvarianten zusätzlichen Parametern zum kombinierten Modell um den Faktor 1.5 in der Lage und 1.3 in der Höhe. Die Berücksichtigung der Korrelation zwischen den Bildern im kombinierten Modell bringt lediglich eine geringfügige Genauigkeitssteigerung von 5% gegenüber einem unkorrelierten Ansatz. Auch erweisen sich die Ergebnisse der Blockausgleichung mit dem kombinierten Modellansatz als sehr unempfindlich gegenüber unrichtigen a priori Annahmen über das Korrelationsverhalten zwischen den Bildern. Selbst eine unrichtige Annahme über die Varianz der zusätzlichen Parameter um den Faktor 2 hat auf die erreichte Genauigkeit im Block keinen Einfluß.

Die Frage der Übertragbarkeit der Ergebnisse dieser Simulationsanalysen auf unterschiedliche Blockkonfigurationen und reale Befliegungen bleibt natürlich offen. Aber der Bezug zu den empi-

rischen Untersuchungen und realitätsbezogenen Voraussetzungen für die Simulationen läßt doch die Aussage zu, daß das kombinierte Modell, vorausgesetzt man ist bereit, den gegenüber konventionellen Ansätzen nicht unwesentlich höheren numerischen Aufwand zu akzeptieren, ein Genauigkeitsniveau erreichen läßt, welches dem Meßrauschen sicherlich sehr nahe kommen wird.

Die in dieser Arbeit beschriebenen Untersuchungen geben einen weitgehenden Einblick in das stochastische Verhalten der Bildkoordinaten, und das kombinierte Modell gestattet auch dessen Integration in seinem funktionalen und stochastischen Teil. Aber einige Fragen konnten damit noch nicht geklärt werden. Dazu gehört im wesentlichen die Struktur der nach der Zweiteilung des stochastischen Modells verbleibenden Kovarianzmatrizen der Einzelbilder. Hier ist in künftigen Untersuchungen zu klären, ob die Struktur einer Diagonalmatrix, die sich aus dem Meßrauschen und aus den durch den bildweisen Parameteransatz nicht erfaßten physikalischen Einflüssen zusammensetzt, ausreichend ist. Genügt die Diagonalstruktur den Erfordernissen nicht, so ist eine Strukturierung im Sinne des Primärfehlerkonzepts empfehlenswert. Die hierzu notwendige Kenntnis über die Korrelationen verursachenden Faktoren wird sich sicherlich nur aus umfangreichen Analysen und Detailuntersuchungen gewinnen lassen.

Weitere Problempunkte sind die geeignete Wahl des Parametersatzes für die Selbstkalibrierung und die Erfassung der Korrelation zwischen den Bildern mit einem repräsentativen oder mehreren individuellen stochastischen Prozessen. Eine entscheidende Einschränkung für die hier durchgeführten Untersuchungen und die damit verbundenen Ergebnisse ist aber die Verwendung des Reseaubildmaterials, das lediglich einen Teil des gesamten Fehlerbudgets des photogrammetrischen Aufnahmeprozesses erfaßt.

Um diese Probleme zu klären und die Repräsentativität der hier gewonnenen Ergebnisse zu überprüfen, müssen künftig weitere umfangreiche empirische Untersuchungen durchgeführt werden. Anhaltspunkte und Richtlinien für diese Untersuchungen sind im Abschnitt IV.6 zusammengestellt.

Insgesamt steht mit dem in dieser Arbeit aus Plausibilitätsüberlegungen und empirischen Untersuchungen abgeleiteten kombinierten Modell für die Aerotriangulation ein sowohl in funktionaler als auch in stochastischer Hinsicht sehr hoch entwickeltes mathematisches Modell zur Verfügung. Es erfüllt die von Ackermann (1984b) erhobenen Forderungen nach einem kompletten und realistischen mathematischen Modell und ist, bedingt durch seinen flexiblen Aufbau, gegenüber weitergehenden Erkenntnissen im stochastischen Bereich der Bildkoordinaten aufgeschlossen.

ANHANG

A0: Bezeichnungen, Symbole, Abkürzungen1. Bezeichnungen

a) Operatoren

$E(..)$	= Erwartungswert
$D(..)$	= Dispersion
$V(..)$	= Varianz
$C(..)$	= Kovarianz
$R(..)$	= Spalten- oder Rangraum
$o(..)$	= Ordnung bzw. Dimension einer Matrix oder eines Vektors
$r(..)$	= Rang
$sp(..)$	= Spur
$diag(..)$	= Diagonal- oder Subdiagonalmatrix
$vec(..)$	= Vektor, der sich durch Untereinanderschreiben der Spalten einer Matrix ergibt

b) Variablen, Vektoren, Matrizen

a, a_1	= Variable, Vektor, Element eines Vektors (nicht-stochastisch, fest)
$\underline{b}, \underline{b}_1$	= Variable, Vektor, Element eines Vektors (stochastisch)
$A, (a_{ij})$	= Matrix
a^T, A^T	= transponierter Vektor bzw. Matrix
$A^{(i)}, a^{(i)}$	= Variable, Vektor oder Matrix zur Epoche i (wenn aus dem Zusammenhang ersichtlich auch a_i)
A_{ij}	= Submatrix
C_{xx}	= Kovarianzmatrix (im Sinne einer Varianz-Kovarianzmatrix)
\hat{C}_{xx}	= geschätzte Kovarianzmatrix (stochastisch)
Q_{xx}	= Gewichtskoeffizienten- oder Kofaktorenmatrix
P_{xx}	= Gewichtsmatrix
I_q	= Einheitsmatrix ($o(I_q) = q \times q$)
C^{-1}	= inverse Matrix
C^+	= Pseudoinverse oder Moore-Penrose-Inverse
λ	= Vektor der Eigenwerte

2. Symbole

\otimes	= Kroneckersymbol
\sim	= Zufallsvariable hat die Verteilung
$\hat{\underline{\quad}}$	= Schätzung
$\underline{\quad}$	= stochastische Größe (Variable, Vektor, Matrix), charakterisiert durch Erwartungswert und Dispersion
\cap	= Durchschnitt zweier Mengen
\setminus	= ohne
\supset	= Teilmengenbeziehung

3. Abkürzungen

- ACF = Autokovarianzfunktion
 AR = autoregressiver (-Prozeß)
 ARMA = autoregressiver moving average (-Prozeß)
 BLU = beste lineare erwartungstreue (-Schätzung)
 GM = Gauß-Markoff (-Modell)
 LS = kleinste Quadrate (-Schätzung)
 ML = Maximum-Likelihood (-Schätzung)
 PC = principal components (-Analyse)
 VCC = Varianz-Kovarianzkomponenten (-Schätzung)

A1: Einfluß eines Modellfehlers im stochastischen Teil des mathematischen Modells auf die Schätzung der Varianz der Gewichtseinheit

Schätzung der Varianz der Gewichtseinheit nach dem Modell der bedingten Ausgleichung:

$$\text{Modell : } U\underline{\varepsilon} = \underline{w}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\underline{w}^T \underline{N}^{-1} \underline{w}}{n-u} \quad \text{mit } \underline{N}^{-1} = (UQ_{11}U^T)^{-1}$$

Einfluß eines Fehlers ∇Q_{11} in der Gewichtskoeffizientenmatrix:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\underline{w}^T \bar{\underline{N}}^{-1} \underline{w}}{n-u} \quad \text{mit } \bar{\underline{N}}^{-1} = (U(Q_{11} + \nabla Q_{11})U^T)^{-1}$$

dabei gilt

$$\bar{\underline{N}}^{-1} = \underline{N}^{-1} - \underline{N}^{-1} (U \nabla Q_{11} U^T)^+ \underline{N}^{-1} \quad .$$

$(U \nabla Q_{11} U^T)^+$ ist sehr groß gegen \underline{N}^{-1} , da ∇Q_{11} sehr klein; daraus folgt:

$$\bar{\underline{N}}^{-1} \approx \underline{N}^{-1} - \underline{N}^{-1} (U \nabla Q_{11} U^T) \underline{N}^{-1}$$

und damit

$$\hat{\sigma}_0^2 = \hat{\sigma}_0^2 - \frac{\underline{w}^T \underline{N}^{-1} (U \nabla Q_{11} U^T) \underline{N}^{-1} \underline{w}}{n-u} \quad .$$

Da es sich bei der Verzerrung um eine quadratische Form handelt, sind die Eigenwerte von ∇Q_{11} für die Verzerrungsrichtung entscheidend:

$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i \implies \hat{\sigma}_0^2 \text{ wird kleiner}$$

$$\lambda_i \leq 0 \quad \forall i \implies \hat{\sigma}_0^2 \text{ wird größer}$$

Falls diese Beziehungen der Eigenwerte nicht für alle i gelten, kann keine Aussage über die Verzerrungsrichtung gemacht werden.

A2: Ableitung der Varianz des AR(1)-Prozesses

Unter Berücksichtigung des Startwertes läßt sich der Prozeß aufteilen in:

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 &= v_1 & v_1 &\sim M(0, \sigma_v^2) \\ \underline{x}_t &= a\underline{x}_{t-1} + \underline{\varepsilon}_t, & \underline{\varepsilon}_t &\sim M(0, \sigma^2), \quad t \geq 2 \end{aligned} \quad (\text{A2-1})$$

Für großes t geht man davon aus, daß der Prozeß sich eingeschwungen hat und damit die Varianzen $\sigma_{x_t}^2$ und $\sigma_{x_{t-1}}$ als identisch angenommen werden können. Daraus ergibt sich mit dem auf Gl.(A2-1) angewandten Fehlerfortpflanzungsgesetz die Varianz des Prozesses zu

$$\sigma_{x_t}^2 = \frac{\sigma^2}{1-a^2}, \quad (\text{A2-2})$$

wobei σ^2 bekannt und aus der Stationaritätsbedingung $|a| < 1$ ist.

Um die Varianz $\sigma_{x_t}^2$ der Zufallsvariable \underline{x}_t über den gesamten Prozeß einschließlich des Startwertes konstant zu halten, muß der Prozeß mit $\sigma_v^2 = \sigma^2/(1-a^2)$ gestartet werden. Damit ergibt sich die Kovarianzmatrix des Vektors $\underline{\eta}^T = (v_1, \underline{\varepsilon}_2, \dots, \underline{\varepsilon}_p)$ zu:

$$C_{\eta\eta} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{1-a^2} & & & 0 \\ & \sigma^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A2-3})$$

(vgl. Fuller (1976, S. 328, Ebner et al. (1984))), und die Kovarianzmatrix $C_{\varepsilon\varepsilon}$ der Prozeßfehler zu

$$C_{\varepsilon\varepsilon} = \sigma^2 I, \quad o(C_{\varepsilon\varepsilon}) = (p-1) \times (p-1) \quad (\text{A2-4})$$

A3: Ableitung der Kovarianzmatrix der einen AR(1)-Prozeß beschreibenden Zufallsvariablen

Der AR(1)-Prozeß definiert folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 &= v_1 \\ -a\underline{x}_1 + \underline{x}_2 &= \underline{\varepsilon}_2 \\ &\vdots \\ -a\underline{x}_{p-1} + \underline{x}_p &= \underline{\varepsilon}_p \end{aligned} \quad (\text{A3-1})$$

oder in Matrixschreibweise

$$D\underline{x} = \underline{\eta} \quad (\text{A3-1a})$$

und nach \underline{x} aufgelöst

$$\underline{x} = D^{-1} \underline{\eta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a^2 & a & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{p-1} & a^{p-2} & a^{p-3} & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{\varepsilon}_2 \\ \underline{\varepsilon}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{\varepsilon}_p \end{bmatrix} \quad (\text{A3-1b})$$

mit $o(D)=p \times p$, $o(\underline{x})=o(\underline{\eta})=p \times 1$. Damit ergibt sich aus Gl. (A3-1a) mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$DC_{xx}D^T = C_{\eta\eta} \quad . \quad (\text{A3-2})$$

Durch links- und rechtsseitige Multiplikation mit D^{-1} bzw. $(D^T)^{-1}$ erhält man aus Gl. (A3-2)

$$C_{xx} = D^{-1}C_{\eta\eta}(D^T)^{-1} \quad . \quad (\text{A3-3})$$

Da $C_{\eta\eta}$ eine Diagonalmatrix ist (vgl. Gl. (A2-3)), läßt sich Gl. (A3-3) auch schreiben als

$$C_{xx} = (D^T C_{\eta\eta}^{-1} D)^{-1} \quad . \quad (\text{A3-3a})$$

Durch Ausmultiplizieren ergibt sich

$$D^T C_{\eta\eta}^{-1} D = \sigma^{-2} \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ -a & 1+a^2 & -a & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1+a^2 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1+a^2 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & -a & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{A3-4})$$

Die Tridiagonalmatrix der Gl. (A3-4) entspricht der Inversen der Töplitzmatrix (vgl. Press (1972)).

Somit erhält man die Kovarianzmatrix C_{xx} zu

$$C_{xx} = \frac{\sigma^2}{1-a^2} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & \cdot & \cdot & a^{p-2} & a^{p-1} \\ a & 1 & a & \cdot & \cdot & a^{p-3} & a^{p-2} \\ a^2 & a & 1 & \cdot & \cdot & a^{p-4} & a^{p-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{p-2} & a^{p-3} & a^{p-4} & \cdot & \cdot & 1 & a \\ a^{p-1} & a^{p-2} & a^{p-3} & \cdot & \cdot & a & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

A4: Multivariate Darstellung mehrerer Zeitreihen mit gleichem stochastischen Verhalten zwischen den Epochen

Bei q Zeitreihen lautet die Gl. (A3-1a):

$$(D \otimes I_q) \text{vec} \underline{X} = \text{vec} \underline{H} \quad (\text{A4-1})$$

mit $o(\text{vec} \underline{X}) = o(\text{vec} \underline{H}) = pq \times 1$. Mit einer Aufteilung in einen zeitabhängigen und einen lokalen, d.h. in der einzelnen Epoche begründeten Anteil, lassen sich die Kovarianzmatrizen $C(\text{vec} \underline{X})$ und $C(\text{vec} \underline{H})$ darstellen:

$$C(\text{vec} \underline{H}) = C_{\eta\eta} \otimes Q_{SS} \quad \text{und} \quad C(\text{vec} \underline{X}) = C_{xx} \otimes Q_{SS} \quad . \quad (\text{A4-2})$$

Mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz auf Gl. (A4-1) angewandt ergibt sich

$$(D \otimes I_q)(C_{xx} \otimes Q_{SS})(D \otimes I_q)^T = C_{\eta\eta} \otimes Q_{SS} \quad , \quad (\text{A4-3})$$

und damit

$$(C_{xx} \otimes Q_{SS}) = (D^T C_{\eta\eta}^{-1} D)^{-1} \otimes Q_{SS} \quad . \quad (\text{A4-4})$$

Die Matrix C_{xx} behält somit ihre Struktur, wie sie in Anhang A3 dargestellt ist, bei.

A5: Beweis der Gleichung (IV.3.1.1-1)

Gegeben: $\underline{L} \sim M(\underline{A}\underline{X} + \underline{Z}\underline{B}^T, R \otimes C_{11})$, $\underline{E} = -\underline{V}$

Beweis:

1. Substitution $\underline{W} = \underline{V} - \underline{Z}\underline{B}^T$

damit ist ein GM-Modell gegeben: $\underline{L} + \underline{W} = \underline{A}\underline{X}$, $D(\text{vec} \underline{L}) = R \otimes C_{11}$

LS-Schätzung: $\hat{\underline{W}} = -D_{\underline{A}} \underline{L}$, $D(\text{vec} \hat{\underline{W}}) = R \otimes D_{\underline{A}} C_{11} D_{\underline{A}}^T$

2. weiteres GM-Modell: $\hat{\underline{W}} - \underline{V} = -\underline{Y}\underline{B}^T$, $D(\text{vec} \hat{\underline{W}}) = R \otimes C_{\hat{\underline{W}}\hat{\underline{W}}}$

LS-Schätzung: $\text{vec} \hat{\underline{V}} = \text{vec} \hat{\underline{W}} - (B \otimes I_n) \text{vec} \underline{Z}$

$$\begin{aligned} &= (I_p \otimes I_n - (B \otimes I_n)) ((B^T \otimes I_n) (R^+ \otimes C_{\hat{\underline{W}}\hat{\underline{W}}}^+)^+ (B \otimes I_n)) + (B^T \otimes I_n) (R^+ \otimes C_{\hat{\underline{W}}\hat{\underline{W}}}^+)^+ \text{vec} \hat{\underline{W}} \\ &= (I_p \otimes I_n) \text{vec} \hat{\underline{W}} - B (B^T R^{-1} B)^{-1} B^T R^{-1} \otimes C_{\hat{\underline{W}}\hat{\underline{W}}}^+ \text{vec} \hat{\underline{W}} \\ &= \text{vec} \hat{\underline{W}} - \text{vec} (C_{\hat{\underline{W}}\hat{\underline{W}}}^+ R^{-1} B (B^T R^{-1} B)^{-1} B^T) \\ &= (I_p \otimes I_n - B (B^T R^{-1} B)^{-1} B^T R^{-1} \otimes I_n) \text{vec} \hat{\underline{W}} \\ &= (D_B \otimes I_n) \text{vec} \hat{\underline{W}} = \text{vec} \hat{\underline{W}} D_B^T \end{aligned}$$

3. Mit $\hat{\underline{W}} = -D_{\underline{A}} \underline{L}$ folgt $\hat{\underline{V}} = -D_{\underline{A}} \underline{L} D_B^T$

q.e.d

A6: Beweis, daß Gleichung (IV.3.1.1-1) eine LS-Schätzung repräsentiert

Gegeben: $\hat{\underline{v}} = -D_A L D_B^T$

Beweis:

Eine notwendige Bedingung für eine LS-Schätzung im GM-Modell ist:

$$A^T C_{11}^{-1} \hat{\underline{v}} = 0 \quad .$$

Auf das Modell der Def. IV.3-1 angewandt ergibt sich

$$\begin{bmatrix} (I_p \otimes A^T) \\ (B^T \otimes I_n) \end{bmatrix} (R^{-1} \otimes C_{11}^{-1}) \text{vec}(-D_A L D_B^T) = \text{vec} 0 \quad .$$

Ausmultipliziert und die Beziehung $(G \otimes H) \text{vec} F = \text{vec} H F G^T$ angewandt, erhält man

$$\begin{bmatrix} -\text{vec} A^T C_{11}^{-1} D_A L D_B^T R^{-1} \\ -\text{vec} C_{11}^{-1} D_A L D_B^T R^{-1} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{vec} A^T C_{11}^{-1} (I_n - A(A^T C_{11}^{-1} A)^{-1} A^T C_{11}^{-1}) L D_B^T R^{-1} \\ -\text{vec} C_{11}^{-1} D_A L (I_p - R^{-1} B (B^T R^{-1} B)^{-1} B^T) R^{-1} B \end{bmatrix} = 0$$

q.e.d

LITERATURVERZEICHNIS

Abkürzungen:

- | | |
|--|---|
| ACSM-ASP | American Congress on Surveying and Mapping - American Society of Photogrammetry |
| Ann. of Math. Stat. | The Annals of Mathematical Statistics |
| AVN | Allgemeine Vermessungs-Nachrichten |
| Boll. d. Geod. e Sc. Aff. | Bolletino di Geodesia e Scienze Affini |
| BuL | Bildmessung und Luftbildwesen |
| Canad. Surv. | The Canadian Surveyor |
| DGK | Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften |
| FIG | Fédération Internationale des Géomètres |
| Geow. Mitteilungen TU Wien | Geowissenschaftliche Mitteilungen der Studienrichtung Vermessungswesen der Technischen Universität Wien |
| IEEE | Institute of Electrical and Electronics Engineers |
| ISP(RS) | International Society for Photogrammetry (and Remote Sensing) |
| NaKaVerm | Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen des Instituts für Angewandte Geodäsie |
| OEEPE | Organisation Européenne d'Etudes Photogrammétriques |
| ÖZfVuPh | Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie |
| OSU Report | Report of the Ohio State University, Department of Geodetic Science |
| Wissenschaftl. Arb. Uni Hannover | Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover |
| ZfV | Zeitschrift für Vermessungswesen |
| Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. | Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete |
-
- | | |
|--|---|
| Ackermann, F. | Fehlertheoretische Untersuchungen über die Genauigkeit photogrammetrischer Streifen. DGK Reihe C, Heft 87, München 1965 |
| Ackermann, F. | On the Accuracy of Planimetric Block Triangulation. Photogrammetria, Vol. 21, 1966, S. 145-170 |
| Ackermann, F. | Gesetzmäßigkeit der absoluten Lagegenauigkeit von Blöcken. BuL 1968, S. 3-15 |
| Ackermann, F. | Blockadjustment with Additional Parameters. Photogrammetria, Vol. 36, 1981, S. 217-227 |
| Ackermann, F. | High Precision Digital Image Correlation. Schriftenreihe des Instituts für Photogrammetrie der Universität Stuttgart, Heft 9, Stuttgart 1984a |
| Ackermann, F. | Report on the Activities of Working Group III/1 during 1980-84. Proceedings of the ISPRS-Congress (Commission III), Rio de Janeiro 1984b |
| Ackermann, F., Ebner, H. und Klein, H. | Ein Programmpaket für die Aerotriangulation mit unabhängigen Modellen. BuL 1970, S. 218-224 |
| Ackermann, F., Ebner, H. und Klein, H. | Combined Block Adjustment of APR Data and Independent Photogrammetric Models. Canad. Surv. 1972, S. 384-396 |
| Ackermann, F. und Schneider, W. | Neue Ergebnisse zur Aerotriangulation mit Statoskop-Daten. BuL 1983, S. 21-37 |

- Anderson, T. W. The Statistical Analysis of Time Series. J. Wiley, New York 1971
- Baarda, W. Statistical Concepts in Geodesy. Netherlands Geodetic Commission, Vol. 2, No. 4, Delft 1967
- Baarda, W. Reliability and Precision of Networks. Proceedings of the VIIth Int. Course for Eng. Surveys of High Precision, Darmstadt 1976
- Bähr, H. G. Äquivalenzbeziehungen für die Auswertung geodätischer Messungen. DGK Reihe C, Heft 242, München 1978
- Bauer, H. und Müller, J. Height Accuracy of Blocks and Bundle Adjustment with Additional Parameters. Proceedings of ISP-Congress (Commission III), Ottawa 1972
- Belzner, H. The Planning, Establishing and Flying of the Test Field Oberschwaben. Official Publication of OEEPE, No. 8, Frankfurt 1973
- Bialas, V. Erdgestalt, Kosmologie und Weltanschauung. K. Wittwer Verlag, Stuttgart 1982
- Bopp, H. P., Felgendreher, N. und Krauß, H. Zur Parameterschätzung bei kontinuierlichen Messungen mit Hilfe der Ausgleichsrechnung. AVN 1981, S.403-411
- Box/Jenkins Time Series Analysis, Forecasting and Control. Holden-Day, San Francisco 1976
- Bouloucos, T., Karadaidis, D. und Molenaar, M. A Substitute Matrix for Photogrammetrically Determined Point Fields. Proceedings of the ISPRS-Congress (Commission III), Rio de Janeiro 1984
- Brown, D. C. et al. The Practical and Rigorous Adjustment of Large Photogrammetric Nets. Rome Air Development Center, Report No. 64-092, New York 1964
- Brown, D. C. Evolution, Application and Potential of the Bundle Method of Photogrammetric Triangulation. Presented paper at the ISP-Symposium (Commission III), Stuttgart 1974
- Brown, D. C. Bundle Adjustment with Strip- and Block-invariant Parameters. Proceedings of the ISP-Symposium (Commission III), DGK Reihe B, Heft 214, München 1975, S. 54-65
- Brown, D. C. STARS - A Turnkey System for Close Range Photogrammetry. Proceedings of the ISPRS-Symposium (Commission V), York 1982
- Brown, D. C. A Large Format, Microprocessor Controlled Film Camera Optimized for Industrial Photogrammetry. Proceedings of the ISPRS-Congress (Commission V), Rio de Janeiro 1984
- Buck, U Numerische Auswertung und statistische Analyse von ingenieurphotogrammetrischen Deformationsmessungen. Wissenschaftl. Arb. Uni Hannover Nr. 82, Hannover 1977
- Carusio, A. Robuste Ausgleichung. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Vol. 77, 1979, S. 293-297
- Dermanis, A. Adjustment of Geodetic Observations in the Presence of Signals. ZfV 1979, S. 505-518
- Ebner, H. Zusätzliche Parameter in Ausgleichungen. ZfV 1973, S. 385-391
- Ebner, H. Analysis of Covariance Matrices. Proceedings of ISP-Symposium (Commission III), DGK Reihe B, Heft 214, München 1975, S. 111-121
- Ebner, H. Blockausgleichung mit Selbstkalibrierung. DGK Reihe B, Heft 226, München 1977
- Ebner H. A posteriori Gewichtsschätzung bei der verallgemeinerten kleinsten Quadrate Ausgleichung. Geow. Mitteilungen TU Wien, Heft 13, Wien 1978, S. 73-84
- Ebner, H. Zwei neue Interpolationsverfahren und Beispiele für ihre Anwendung. BuL 1979, S. 15-27
- Ebner, H. und Höbner, R. The Use of Gauss Markov Processes in Digital Rectification of Remote Sensing Data. Proceedings of the ISP-Symposium (Commission III), Moskau 1978
- Ebner, H., Höbner, R. und Joos, D. Random Processes and their Application to Linear Prediction Problems. Manuscripta Geodaetica, Vol. 9, 1984, S. 21-43

- Ebner, H.,
Krack, K. und
Schubert, E. Genauigkeitsmodelle für die Bündelblockausgleichung. BuL 1977,
S. 141-148
- Ellenbeck, K. H. Untersuchung zum stochastischen Verhalten von Reseauaufnahmen.
Proceedings of ISP-Congress (Commission III), Helsinki 1976
- Ellenbeck, K. H. Untersuchung zur geometrischen Stabilität eines photogrammetrischen
Aufnahmesystems. DGK Reihe C, Heft 267, München 1981
- Fahrmeir/
Kaufmann/Ost Stochastische Prozesse. Hanser Verlag, München 1981
- Fisz, M. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Verlag
der Wissenschaften, Berlin 1962
- Förstner, W. Ein Verfahren zur Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten.
AVN 1979, S. 446-453
- Förstner, W. Zur Prüfung zusätzlicher Parameter in Ausgleichungen. ZfV 1980, S. 510-519
- Förstner, W. Results of Test I on Gross Error Detection of ISP WG III/1 and OEEPE.
Proceedings of ISPRS-Symposium (Commission III), Helsinki 1982a
- Förstner, W. Systematic Errors in Photogrammetric Point Determination. Proceedings
Survey Control Network (Aalborg), Schriftenreihe der Hochschule der
Bundeswehr, Heft 7, München 1982b
- Förstner, W. On the Morphological Quality of Digital Elevation Models. Proceedings
of the International Colloquium on Mathematical Aspects of Digital
Elevation Models (ISPRS WG III/3), Stockholm 1983a
- Förstner, W. Sensitivity and Discernability in Extended Gauß-Markov-Models.
DGK Reihe A, Heft 98, München 1983b, S. 79-104
- Förstner, W. und
Schroth, R. On the Estimation of Covariance Matrices for Photogrammetric Image
Coordinates. DGK Reihe B, Heft 258/VI, München 1982, S. 43-70
- Fraser, C. S. Film Unflatness Effects in Analytical Non-Metric Photogrammetry.
Proceedings of ISPRS-Symposium (Commission V), York 1982
- Fuchs, H. Untersuchungen zur Ausgleichung durch Minimieren der Absolutsumme
der Verbesserungen. Dissertation Technische Universität Graz, 1980
- Fuller, W. A. Introduction to Statistical Time Series. J. Wiley, New York 1976
- Gotthardt, E. Die Auswirkung unrichtiger Annahmen über Gewichte und Korrelationen
auf die Genauigkeit von Ausgleichungen. ZfV 1962, S. 65-68
- Grafarend, E. W. Geodetic Applications of Stochastic Processes. Physics of the Earth
and Planetary Interiors 1976, S. 151-179
- Grafarend, E. W. Operational Geodesy. In H. Moritz/H. Sünkel: Approximation Methods
in Geodesy, H. Wichmann Verlag, Karlsruhe 1978a, S. 235-284
- Grafarend, E. W. Schätzung von Varianz und Kovarianz der Beobachtungen in geodätischen
Ausgleichungsmodellen. AVN 1978b, S. 41-49
- Grafarend, E. W.
und d'Hone, A. Gewichtsschätzung in Geodätischen Netzen. DGK Reihe A, Heft 88,
München 1978
- Grafarend, E. W.
Kleusberg, A. und
Schaffrin, B. An Introduction to the Variance-Covariance-Component Estimation of
Helmert Type. ZfV 1980, S. 161-180
- Grafarend, E. W.
und Schaffrin, B. Unbiased Free Net Adjustment. Survey Review, Vol. 22, No. 171, 1974,
S. 200-218
- Grafarend, E. W.
und Schaffrin, B. Kriterium-Matrizen I - zweidimensionale homogene und isotrope geo-
dätische Netze. ZfV 1979, S. 133-149
- Grenader/Szegö Töplitz Forms and Their Applications. University of California Press,
Berkley 1958
- Grün, A. Die simultane Kompensation systematischer Fehler mit dem Münchener
Bündelprogramm MBOP. Proceedings of ISP-Congress (Commission III),
Helsinki 1976
- Grün, A. Experiences with Self-Calibrating Bundle Adjustment. Proceedings of
ACSM-ASP Convention, Washington 1978
- Hampel, F. R. Robust Estimation: A Condensed Partial Survey. Z. Wahrscheinlichkeits-
theorie verw. Geb. 1973, S. 87-104

- Harville, D. A. Maximum Likelihood Approaches to Variance Component Estimation and to Related Problems. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 72, No. 358, 1977, S. 320-340
- Haug, G. Bestimmung und Korrektur systematischer Bild- und Modelldeformationen in der Aerotriangulation am Beispiel des Testfeldes "Oberschwaben". *NaKaVerm*, Heft Nr. D-13, Frankfurt 1980
- Hein, G. W. Erdmessung als Teil einer integrierten Geodäsie - Begründung, Stand und Entwicklungstendenzen. *ZfV* 1983, S. 93-104
- Helmert, F. R. Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. B. G. Teubner, Leipzig 1907, S. 358-363
- Henderson, C. R. Estimation of Variance and Covariance Components. *Biometrics*, Vol. 9, 1953, S. 226-252
- Henderson, H. V. und Searle, S. R. Vec and Vech Operators for Matrices, with some Uses in Jacobians and Multivariate Statistics. *The Canadian Journal of Statistics*, Vol. 7, No. 1, 1979, S. 65-81
- Höbller, R. High Accurate Geometric Rectification - Necessity and Realization. *Proceedings of ISP-Symposium (Commission VII)*, Freiburg 1978
- Huber, P. J. Robust Regression: Asymptotics, Conjectures and Monte Carlo. *The Annals of Statistics*, Vol. 1, 1973, S. 799-821
- Huber, P. J. Robust Statistics. J. Wiley, New York 1981
- Jaud, S. Die Genauigkeit photogrammetrisch bestimmter Koordinaten bei unterschiedlichen Gewichtsannahmen. Unveröffentlichte Diplomarbeit am Institut für Photogrammetrie der Universität Stuttgart, 1980
- Kay, S. M. und Marple, S. L. Spectrum Analysis - A Modern Perspective. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 69, 1981, S. 1380-1419
- Kelm, R. Ist die Schätzung nach Helmert MINQUE? *AVN* 1978, S. 49-54
- Kilpelä, E. Compensation of Systematic Errors of Image and Model Coordinates. *Photogrammetria*, Vol. 37, 1981, S. 15-44
- Kilpelä, E., Heikkilä, J. und Inkilä, K. Compensation of Systematic Errors in Bundle Adjustment. *Photogrammetria*, Vol. 37, 1981, S. 1-13
- Klein, H. New Results of Bundle Block Adjustment with Additional Parameters. *Schriftenreihe des Instituts für Photogrammetrie der Universität Stuttgart*, Heft 6, Stuttgart 1980, S. 13-30
- Klein, H. und Förstner, W. Strategien für die Fehlersuche in der Aerotriangulation. *Schriftenreihe des Instituts für Photogrammetrie der Universität Stuttgart*, Heft 7, Stuttgart 1981, S. 91-109
- Klein, H. und Förstner, W. Realization of Automatic Error Detection in the Block Adjustment Program PAT-M43 Using Robust Estimators. *Proceedings of the ISPRS-Congress (Commission III)*, Rio de Janeiro 1984
- Koch, K. R. Schätzung von Varianzkomponenten. *AVN* 1978, S. 264-269
- Koch, K. R. Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. *Dümmler Verlag*, Bonn 1980
- Koch, K. R. Varianz- und Kovarianzkomponentenschätzung für Streckenmessung auf Eichlinien. *AVN* 1981, S. 125-132
- Koch, K. R. Estimation of Variances and Covariances in the Multivariate and in the Incomplete Multivariate Model. *DGK Reihe A*, Heft 98, München 1983, S. 53-60
- Krarup, T., Juhl, J. und Kubik, K. Götterdämmerung over Least Squares. *Proceedings of ISP-Congress (Commission III)*, Hamburg 1980
- Krarup, T. und Kubik, K. The Danish Method; Experience and Philosophy. *DGK Reihe A*, Heft 98, München 1983, S. 131-134
- Kraus, K. Automatische Berechnung digitaler Höhenlinien. *ZfV* 1971, S. 233-239
- Kraus, K. Interpolation nach kleinsten Quadraten in der Photogrammetrie. *BuL* 1972, S. 7-12
- Kraus, K. und Stark, E. Flächenhafte Verzeichnungskorrektur in der numerischen Photogrammetrie. *BuL* 1973, S. 50-56

- Krauß, H. Das Bild n-Tupel: Ein Verfahren für photogrammetrische Ingenieurvermessung hoher Präzision im Nahbereich. DGK Reihe C, Heft 276, München 1983
- Krüger, J. Numerische Behandlung von Datums- und Konfigurationsdefekten. In H. Pelzer: Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung. K. Wittwer Verlag, Stuttgart 1980, S. 257-325
- Kubik, K. Schätzung der Gewichte der Fehlergleichungen beim Ausgleichungsproblem nach vermittelnden Beobachtungen. ZfV 1967, S. 173-178
- Kubik, K. The Effect of Systematic Image Errors in Block Triangulation. ITC Publication A49, Delft 1971
- Kupfer, G. Teilkalibrierung von Reseau-Kammern unter Verwendung eines ebenen Testfeldes. Proceedings of ISP-Congress (Commission I), Helsinki 1976
- Lang, W. Messung von Reseau-Bildern am Komparator. Unveröffentlichte Studienarbeit am Institut für Photogrammetrie der Universität Stuttgart, 1978
- Lauer, S. und Wrobel, B. Eine elementare Herleitung der vektoriiellen Prädiktions-Filterung. ZfV 1972, S. 97-104 und S. 173-179
- Li, Deren Ein Verfahren zur Aufdeckung grober Fehler mit Hilfe der a posteriori Varianzschätzung. BuL 1983, S. 184-187
- Li, Deren Untersuchungen zur Trennbarkeit von groben und systematischen Fehlern bei der Bündelblockausgleichung. Dissertation, eingereicht bei der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Stuttgart, 1984
- Lindner, B. U. Mathematische Modelle und Hypothesentests bei der Bestimmung vertikaler Punktbeziehung durch Präzisionsnivellement. DGK Reihe C, Heft 280, München 1983
- Linkwitz, K. Über den Einfluß verschiedener Gewichtsannahmen auf das Ausgleichungsergebnis bei bedingten Beobachtungen. ZfV 1961, S. 179-186, S. 239-245 und S. 344-354
- Lucas, J. R. Photogrammetric Densification of Control. Proceedings of FIG-Congress (Commission V), Sofia 1983
- Mierlo, J. van Fehlersuche und Zuverlässigkeit in geodätischen Netzen. Schriftenreihe des Instituts für Photogrammetrie der Universität Stuttgart, Heft 7, Stuttgart 1981, S. 111-135
- Mohl, H. Eine weitere Verallgemeinerung des arithmetischen Mittels. ZfV 1967, S. 430-434
- Molenaar, M. Several Aspects of Sequential Processing of Photogrammetric Bundle Blocks. DGK Reihe A, Heft 98, München 1983, S. 105-130
- Moniwa, H. A Flexible Method of Self-Calibration for Aerial and Close-Range Photogrammetric Systems. Proceedings of ISP-Congress (Commission V), Helsinki 1976
- Moniwa, H. The Concept of "Photo-Variant" Selfcalibration and Its Application in Block Adjustment with Bundles. Photogrammetria, Vol. 36, 1981, S. 11-29
- Moritz, H. Least-Squares-Collocation. DGK Reihe A, Heft 75, München 1973
- Moser, G. und Stützel, H. Genauigkeitsuntersuchungen von Bildkoordinaten. Unveröffentlichte Diplomarbeit am Institut für Photogrammetrie der Universität Stuttgart, 1982
- Niemeier, W. Zur Kongruenz mehrfach beobachteter geodätischer Netze. Wissenschaftl. Arb. Uni Hannover Nr. 88, Hannover 1978
- Nicholls/Quinn Random Coefficient Autoregressive Models: An Introduction. Springer Verlag, New York 1982
- OEEPE Proceedings of the OEEPE-Symposium on Experimental Research on Accuracy of Aerial Triangulation (Results of Oberschwaben Tests). OEEPE Official Publication No. 8, Brüssel 1973
- Papoulis, A. Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo 1965
- Pelzer, H. Zur Behandlung singulärer Ausgleichungsaufgaben. ZfV 1974, S. 181-194 und S. 479-488
- Pelzer, H. Fehlerlehre und Statistik. In H. Pelzer: Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung. K. Wittwer Verlag, Stuttgart 1980, S. 25-77

- Pelzer, H. Influence of Systematic Effects in Stochastic and Functional Models. Proceedings Survey Control Network (Aalborg), Schriftenreihe der Hochschule der Bundeswehr, Heft 7, München 1982
- Persson, C. G. MINQUE and Related Estimators for Variance Components in Linear Models. The Royal Institute of Technology, Stockholm 1980
- Press, S. J. Applied Multivariate Analysis. Holt, Rinehard and Winston, New York 1972
- Pukelsheim, F. Classes of Linear Models. Paper presented at the Conference in honor of C. R. Henderson, Cornell University, New York 1979
- Pukelsheim, F. und Styan, G. P. H. Nonnegative Definiteness of the Estimated Dispersion Matrix in a Multivariate Linear Model. Bull. de l'académie Polonaise des Sciences mathématiques, Vol. XXVII, No. 3-4, 1979
- Rao, C. R. Least Squares Theory Using an Estimated Dispersion Matrix and Its Application to Measurement of Signals. 5th Berkeley Symposium, Vol. 1, 1967, S. 355-372
- Rao, C. R. Linear Statistical Inference and Its Application. J. Wiley, New York 1965 und 1973
- Reustlen, M. Empirische Genauigkeitsuntersuchung von Bildkoordinaten. Unveröffentlichte Diplomarbeit am Institut für Photogrammetrie der Universität Stuttgart, 1981
- Sarjakoski, T. Efficient Methods for Selecting Additional Parameters of Block Adjustment. Proceedings of the ISPRS-Congress (Commission III), Rio de Janeiro 1984
- Schaffrin, B. Persönliche Kommunikation, 1982
- Schaffrin, B. Varianz-Kovarianz-Komponenten-Schätzung bei der Ausgleichung heterogener Wiederholungsmessungen. DGK Reihe C, Heft 282, München 1983
- Schilcher, M. Empirisch-statistische Untersuchung zur Genauigkeitsstruktur des photogrammetrischen Luftbildes. DGK Reihe C, Heft 262, München 1980
- Schmid, H. H. An Analytical Treatment of the Orientation of a Photogrammetric Camera. Photogrammetric Engineering, Vol. 20, 1954, S. 765-781
- Schmid, H. Eine allgemeine analytische Lösung für die Aufgabe der Photogrammetrie. BuL 1958, S. 103-113 und BuL 1959, S. 1-12
- Schmid, H. H. und Schmid, E. A Generalized Least Squares Solution for Hybrid Measuring Systems. Canad. Surv. 1965, S. 27-41
- Schroth, R. On the Stochastic Properties of Image Coordinates. Proceedings of ISPRS-Symposium (Commission III), Helsinki 1982
- Schuh, H. Spektralanalyse von Restverbesserungen im Meßbild. BuL 1981, S. 20-26
- Schwarz, K. P. Tesseral Harmonic Coefficients and Station Coordinates from Satellite Observations by Collocation. OSU Rep. No. 217, Columbus 1974
- Schwarz, K. P. Least Squares Collocation for Large Systems. Boll. d. Geod. e Sc. Aff. 1976, S. 309ff
- Schwintzer, P. Analyse geodätisch gemessener Punktlageänderungen mit gemischten Modellen. Schriftenreihe der Hochschule der Bundeswehr, Heft 12, München 1984
- Schwidersky/
Ackermann Photogrammetrie. B. G. Teubner, Stuttgart 1976
- Searle, S. R. Linear Models. J. Wiley, New York 1971
- Searle, S. R. Variance Components Estimation: a Review, in Note Form. Biometrics Unit, Dpt. of Plant Breeding and Biometry, Cornell University, Ithaca (New York) 1978
- Seeber, G. Über das stochastische Verhalten von photographisch bestimmten Stern- und Satellitenkoordinaten. DGK Reihe C, Heft 178, München 1972
- Slama, C. C. High Precision Analytical Photogrammetry Using a Special Réseau Geodetic Lens Cone. Proceedings of ISP-Symposium (Commission III), Moskau 1978
- Stark, E. Die Genauigkeitsstruktur im photogrammetrischen Einzelmodell. DGK Reihe C, Heft 193, München 1973
- Stark, W. Untersuchung zur Lösung und Inversion schwach besetzter großer geodätischer Normalgleichungen. DGK Reihe C, Heft 301, München 1984

- Steidler, F. Darstellung und Vergleich von Lösungsstrategien für große schwach besetzte Normalgleichungssysteme in der Geodäsie und in der Photogrammetrie. DGK Reihe C, Heft 261, München 1980
- Straub, B. Das stochastische Verhalten von Luftbildern. Unveröffentlichte Diplomarbeit am Institut für Photogrammetrie der Universität Stuttgart, 1982
- Tienstra, J. M. Theory of the Adjustment of Normally Distributed Observations. Argus-Verlag, Amsterdam 1956
- Wand, B. Das stochastische Verhalten von Luftbildern. Unveröffentlichte Studienarbeit am Institut für Photogrammetrie der Universität Stuttgart, 1982
- Wang, S. C. Einfluß der geodätischen Abbildungsverzerrungen auf die photogrammetrische Punktbestimmung. DGK Reihe C, Heft 263, München 1980
- Wolf, H. Der Einfluß von Gewichts-Änderungen auf die Ausgleichungsergebnisse. ZfV 1961, S. 361-362
- Wolf, H. Die Sonderfälle der diskreten Kollokation. ÖZfVuPh, Heft 3/4, S. 132-138
- Wolf, H. Das geodätische Gauß-Helmert-Modell und seine Eigenschaften. ZfV 1978, S. 41-43
- Wolf, H. Hypothesentest im Gauß-Helmert-Modell. AVN 1980, S. 277-284
- Zurmühl, R. Matrizen und ihre technischen Anwendungen. Springer Verlag, Berlin 1964

Lebenslauf in Stichworten

Name	Ralf Schroth
Geburtsdatum	18. Juli 1953, Berlin
Staatsangehörigkeit	deutsch
Familienstand	verheiratet seit dem 15. April 1977, 1 Kind
Schulbildung:	
1960 - 1964	Grundschule, Heilbronn
1964 - 1972	naturwissenschaftliches Gymnasium, Heilbronn, Abschluß: Abitur (15. Juni 1972)
Berufsbildung:	
1972 - 1977	9 Semester Studium des Fachs Geodäsie an der Universität Stuttgart, Abschluß: Diplom-Ingenieur (24. Januar 1977)
1977 - 1979	Ausbildung für den höheren vermessungstechnischen Verwaltungsdienst im Land Baden-Württemberg, Abschluß: Große Staatsprüfung (29. Juni 1979)
1979 - 1984	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Photogrammetrie der Universität Stuttgart (Leitung: Prof. Dr.-Ing. F. Ackermann)
seit 1984	Mitarbeiter bei der Firma Hansa Luftbild GmbH in Münster / Westfalen