

DEUTSCHE GEODÄTISCHE KOMMISSION  
bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

---

Reihe C:

Dissertationen

Heft Nr. 231

Die Blockausgleichung zur Berechnung  
umfangreicher tachymetrischer Aufnahmen

Von der Universität Stuttgart (TH)  
zur Erlangung der Würde eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

vorgelegt von  
Dipl.-Ing. Klaus Krack  
geboren zu Unterkochen  
(Krs. Aalen-Württbg.)

München 1977

---

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

ISBN 3 7696 9287 X

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:

DEUTSCHE GEODÄTISCHE KOMMISSION  
Marstallplatz 8, D-8000 München 22

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. F. Ackermann  
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. K. Linkwitz

Tag der Einreichung: 16. Dezember 1974  
Tag der mündlichen Prüfung: 11. Dezember 1975

---

© 1977 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet, die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

Druck: Gebr. Brunner, 8151 Wangau

ISBN 3 7696 9287 X

## INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. EINLEITUNG	5
1.1 Gesichtspunkte zur tachymetrischen Punktbestimmung	5
1.2 Gegenstand der Untersuchungen	6
1.3 Aufgabenstellung	8
2. THEORETISCHE GRUNDLAGEN UND VORBEREITUNG DER GENAUIGKEITSVERGLEICHE	10
2.1 Stochastische Eigenschaften der Eingangsdaten zu den Rechenverfahren	11
2.1.1 Stochastische Eigenschaften der Richtungs- und Streckenbeobachtungen	11
2.1.2 Zentrierfehler	13
2.1.3 Genauigkeitseigenschaften der lokalen kartesischen Koordinaten	21
2.2 Die mathematischen Modelle der Rechenverfahren	23
2.2.1 Netzausgleichung	23
2.2.2 Blockausgleichung	25
2.3 Ein allgemeines Modell als Grundlage der Genauigkeits- untersuchungen	30
2.3.1 Die Rechenverfahren als Sonderfälle einer Transformation	30
2.3.2 Herleitung des allgemeinen Rechenmodells	31
2.3.3 Gesonderter Beweis für die Simulierbarkeit der Netz- ausgleichung	34
3. DURCHFÜHRUNG DER GENAUIGKEITSVERGLEICHE	39
3.1 Einführung in die Untersuchungsmethodik	39
3.2 Ermittlung der Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Koordinaten	39
3.3 Der Punktfehler nach Werkmeister	40
3.4 Benennung und formelmäßige Beschreibung der Rechen- varianten	40
3.5 Beschreibung der angenommenen untersuchten Punktverbände	43
3.6 Besonderheiten der Untersuchungen und Angaben zum Rechenprogramm	44
4. RECHNERISCHE DURCHFÜHRUNG UND ERGEBNISSE	46
4.1 Flächenhafte Punktverbände	46
4.1.1 Vorbemerkungen	46
4.1.2 Angaben zur Geometrie der Punktverbände	46
4.1.3 Zahlenangaben für die Beobachtungen	47
4.1.4 Darstellungsart der Ergebnisse	47

	Seite	
4.1.5	Ergebnisse und Diskussion	48
4.1.6	Verbindungen zu theoretischen Genauigkeitsuntersuchungen aus der Aerotriangulation	50
4.2	Genauigkeitsverhalten von gestreckten und beidseitig angeschlossenen Polygonzügen	51
4.2.1	Allgemeine Beschreibung von Längs- und Querfehlern in den untersuchten Zügen	51
4.2.2	Ermittlung und Diskussion der Ergebnisse	53
4.3	Untersuchungen zur Frage der Verknüpfungspunkte	56
4.3.1	Gesichtspunkte zur Wahl der Verknüpfungspunkte	56
4.3.2	Zahlenangaben und Geometrie der untersuchten Punktverbände	57
4.3.3	Ergebnisse bei veränderlichem Abstand der Verknüpfungspunkte	58
4.3.4	Ergebnisse bei veränderlicher Anzahl der Verknüpfungspunkte	60
4.3.5	Ergebnisse bei übergreifenden Verknüpfungen	62
4.4	Theoretische Genauigkeitsuntersuchungen zu trigonometrischen Einzelpunktbestimmungen	62
4.5	Genauigkeitserwartungen für die Bestimmung von Polarpunkten	64
4.5.1	Einführung in die Untersuchungen zur Genauigkeitsbestimmung der Polarpunkte	64
4.5.2	Zahlenangaben zum angenommenen Punktverband und Genauigkeitserwartungen nach der Ausgleichung	65
4.5.3	Genauigkeitserwartungen für Polarpunkte und Diskussion der Ergebnisse	66
5.	ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSSBETRACHTUNG	69
6.	TABELLEN	71
7.	ANHANG	83
	LITERATURNACHWEIS	85

## 1. EINLEITUNG

### 1.1 Gesichtspunkte zur tachymetrischen Punktbestimmung

Die tachymetrische Punktbestimmung ist seit jeher eine wichtige Aufgabe des Vermessungsingenieurs. Neben der tachymetrischen Geländeaufnahme, die unter den Gesichtspunkten der kartographischen und numerischen (digitales Geländemodell) Geländedarstellung zu sehen ist, dient die tachymetrische Punktbestimmung der Verdichtung des Festpunktfeldes niederer Ordnung und der koordinatenmäßigen Festlegung von Grenzpunkten, d.h. der Detailvermessung.

Im letzten Jahrzehnt sind mit fortschreitender Technik Meßinstrumente einerseits und Rechenhilfsmittel andererseits entwickelt worden, die Veranlassung geben, die herkömmlichen Arbeitsmethoden der tachymetrischen Punktbestimmung einer Überprüfung zu unterziehen. Bei den Instrumenten ist die neuere Entwicklung durch elektrooptische Nahbereichsentfernungsmesser (z.B. DI 10) und selbstregistrierende elektronische Tachymeter (z.B. Reg Elta 14) gekennzeichnet, die erfolgreich in die Praxis eingeführt sind. Eine Übersicht über die Geräte gibt z.B. Hallermann [1].

Die wichtigsten Merkmale der derzeitigen Nahbereichsentfernungsmesser sind:

- Nahezu entfernungsunabhängige Genauigkeit der zu messenden Strecke
- Meßgenauigkeit im 1 cm-Bereich (0.5 - 2 cm)
- Reichweite bis zu 2 km
- Schnelle Ermittlung der Entfernung; Dauer der Entfernungsmessung nach Einstellen des Zieles ca. 20 Sek.
- Zum Teil (AGA 700, Reg Elta 14) automatische Registrierung der Meßdaten.

Mit diesen Geräten sind Punktaufnahmen im Vergleich zu bisherigen Verfahren genauer und bis zu 50 % schneller durchzuführen (Aschauer [2]).

Hinsichtlich der Anlage von Messungen ergibt sich daraus eine größere Beweglichkeit und es kommen insbesondere auch geschlossene Großaufnahmen nicht nur in den Bereich der normalen Praxis, sondern sie bilden gerade den Anwendungsfall, bei dem sich die Leistungsfähigkeit der neuen Meßgeräte erst richtig entfalten kann.

Unter einer tachymetrischen Großaufnahme versteht man z.B. die Aufnahme eines Gebietes bis zu 5000 ha mit etwa 20 000 zu bestimmenden Punkten. Dabei werden innerhalb einer jährlichen Meßperiode bis zu 100 000 Meßwerte anfallen. (Diese Zahlenwerte sind aus Flurbereinigungsverfahren in Baden-Württemberg abgeleitet.)

Die Bearbeitung solch großer Datenmengen erfordert Rechenverfahren, die der Aufnahme im Hinblick auf Genauigkeit und Bearbeitungsdauer adäquat sind.

Da sich Rechenverfahren seit jeher an den Meßverfahren orientiert haben (und umgekehrt) ist es nur folgerichtig, die Rechenverfahren in der elektronischen Tachymetrie dem Entwicklungsstand der Meßverfahren anzupassen und entsprechend weiter zu entwickeln.

Man kann aus der Tatsache heraus, daß alle Punkte sehr genau gemessen werden, folgende allgemeine Forderung stellen:

- Die beobachteten Daten sollen möglichst direkt und gemeinsam verarbeitet werden.
- Das Rechenverfahren soll der Beobachtungsgenauigkeit adäquat sein, der Messung keine Bedingungen auferlegen und hinreichend wirtschaftlich sein.

Diese Forderungen können nur von einem weitgehend automatisch ablaufenden Auswerteverfahren befriedigend gelöst werden, welches auf modernen Rechenanlagen aufbaut. Ideal wäre die gleichzeitige, vollständige und strenge Berechnung aller Punkte.

## 1.2 Gegenstand der Untersuchungen

Es liegen zur Zeit (bis Ende 1974) verschiedene Vorschläge zur automatischen Berechnung umfangreicher tachymetrischer Lage- und Höhenaufnahmen vor, z.B. K. Kraus [3] und U. Völter [33].

Beschränkt auf die Lagekoordinaten sind die Vorschläge von F. Ackermann [5] und G. Heupel [4] hier von besonderem Interesse.

Im weiteren werden diese Vorschläge zur lagemäßigen tachymetrischen Punktbestimmung behandelt.

### Automatische Auswertung von Richtungs- und Streckenmessungen durch Netzausgleichung:

Das von G. Heupel [4] vorgeschlagene Rechenverfahren orientiert sich an der klassischen Form der Netzausgleichung und am hierarchischen Prinzip des Netzaufbaus. Es werden daher Unterschiede zwischen Netzpunkten und Polarpunkten gemacht. Beobachtungen zu Netzpunkten werden in der Ausgleichung streng behandelt, während Polarpunkte, welche die eigentliche Menge der Daten darstellen, nach der Ausgleichung eingerechnet und bei Mehrfachbestimmung gemittelt werden.

Um die Netzausgleichung durchführen zu können, benötigt man die Näherungskordinaten der Netzpunkte. In einem Unterprogramm werden diese Näherungskordinaten durch trigonometrisch polygonometrische Methoden berechnet, wobei offen bleibt, wie allgemein das angewendete Verfahren arbeitet.

Nach der Berechnung der Näherungskordinaten erfolgt die Ausgleichung der Netzpunkte mit linearisierten Verbesserungsgleichungen. Die Ausgleichung wird, falls notwendig, iterativ durchgeführt. Das Programm ist z.Z. so konzipiert, daß zur Ausführung Rechenanlagen mit einer Kernspeichergröße von 64 K bytes genügen.

### Berechnung der tachymetrischen Punktbestimmungen durch Blockausgleichung:

Von F. Ackermann [5] wurde die in der Aerotriangulation erfolgreich eingesetzte Blockausgleichung zur Berechnung tachymetrischer Punkte vorgeschlagen. Die Blockausgleichung beruht auf dem Prinzip der verketteten Ähnlichkeitstransformation. Hauptmerkmal der Methode ist, daß die gesuchten Koordinaten aller Punkte simultan und ohne zusätzliche Hilfsgrößen, wie Näherungskordinaten, direkt aus einer Ausgleichsberechnung erhalten werden, die des linearen Transformationsansatzes wegen ohne Iterationen auskommt. Die auszugleichenden Beobachtungen werden dabei alle gleichgewichtig behandelt, entsprechend der genähert gleichen und konstanten Aufnahmege nauigkeit im ganzen Meßgebiet. Es wird keine Klassifizierung der Punkte im hierarchischen Sinne vorgenommen.

Die Methode erlaubt bei der Messung insbesondere die freie Stationierung der Aufnahmestandpunkte (Ruopp [6]). Weiterhin ist im Programm eine automatische Fehlersuche für grobe Fehler enthalten (Kraus, Krack [7]).

Das Programm ist z.Z. für Rechner mit einer Kernspeicherkapazität von mindestens 128 K bytes verwirklicht.

Als eine wichtige Eigenheit der Blockausgleichung sind die Maßstabsfaktoren zu betrachten, die im Funktionalansatz (s. Kap. 2.2.2) jedem "Standpunktsystem" zugeordnet sind. Im Vergleich zum mathematischen Modell der Messung bzw. entsprechend der Netzausgleichung sind daher zu viele Parameter in die Ausgleichung eingeführt. Das System ist also "nicht streng". (Der Ausdruck Näherungsverfahren wäre hier irreführend - das Verfahren ist überparametrisiert.)

Dem stehen die vor allem bei Großaufnahmen wirksamen Rechenvorteile gegenüber. Es werden keine Näherungskordinaten benötigt und man erhält eine direkte Lösung mit allen Punkten. F. Ackermann hat das Rechenverfahren als Vorschlag zur Bestimmung von Näherungswerten verstanden, an das eine strenge Netzausgleichung anzuschließen wäre. In der Praxis werden jedoch meist die berechneten Koordinaten als endgültig betrachtet.

Bezüglich der nach der Blockausgleichung zu erwartenden Genauigkeiten wird von F. Ackermann (siehe [8]) in Analogie zu photogrammetrischen Blockausgleichungen angenommen, daß die Koordinatengenauigkeit der Punkte nach der Blockausgleichung, in der vorgeschlagenen flächenhaften Anwendung, kaum schlechter ist als die Koordinatengenauigkeit nach der strengen Netzausgleichung mit anschließendem Einrechnen der Polarpunkte.

Spezielle Untersuchungen für Tachymeteraufnahmen zum Beweis dieser Aussage stehen jedoch aus.

### 1.3 Aufgabenstellung

Im folgenden werden die beiden konkurrierenden Rechenverfahren, kurz Netz- und Blockausgleichung genannt, einander hinsichtlich ihrer Genauigkeitseigenschaften gegenübergestellt.

Ein weiterer Vergleich von Netz- und Blockausgleichung in Bezug auf ihre allgemeinen Eigenschaften, die z.B. Näherungskordinaten, iterative Lösung, grobe Fehler und Überparametrisierung betreffen könnten wäre zwar auch sehr interessant, ist hier jedoch nicht Gegenstand der Untersuchungen. Hier sollen nur vergleichende Fragen nach der Genauigkeit der beiden Rechenverfahren beantwortet werden. Dazu werden die mit den beiden Rechenverfahren erzielten Genauigkeitseigenschaften der ausgeglichenen Punkte theoretisch abgeleitet und verglichen.

Es werden zwei Teiluntersuchungen durchgeführt, nämlich einmal ein Genauigkeitsvergleich für flächenhafte Punktverbände, für welche die Blockausgleichung konzipiert ist und zum anderen Untersuchungen zum Genauigkeitsverhalten linienhafter Punktverbände und gestreckter Polygonzüge, die beim ursprünglichen Vorschlag (Ackermann [5]) ausgeschlossen geblieben sind.

Zu den Genauigkeitsuntersuchungen wird das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz angewendet. Dies ist hier ausreichend, weil beiden Rechenverfahren dieselben Beobachtungsdaten mit den gleichen Fehlereigenschaften zugrunde liegen.

Theoretische Vergleiche von Rechenverfahren mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz sind dann möglich, wenn ein Verfahren eine Spezialisierung des anderen ist, oder wenn auf ein drittes übergeordnetes Bezug genommen werden kann. Übertragen auf die zu untersuchenden Rechenverfahren stellt man fest, daß ein direkter Vergleich der Netzausgleichung mit der Blockausgleichung nicht unmittelbar möglich ist. Deshalb werden beide Verfahren auf ein übergeordnetes System bezogen, das aus der Blockausgleichung erhalten werden kann.

Die in dieser Arbeit durchgeführten Genauigkeitsuntersuchungen sind in einen theoretischen Teil und in die praktischen Zahlenrechnungen aufgeteilt.

Zur Schaffung der theoretischen Grundlagen der Untersuchungen werden zuerst die Eingangsdaten der Rechenverfahren, das sind die Beobachtungen und das ihnen zugeordnete stochastische Modell, diskutiert. Danach werden die mathematischen Modelle von Netz- und Blockausgleichung dargelegt und das übergeordnete Rechenmodell als Grundlage der Genauigkeitsuntersuchungen abgeleitet. Dem schließt sich die eigentliche rechnerische Durchführung der Untersuchungen an.

Die gesuchten Zahlenwerte zur Bestimmung der Genauigkeitsunterschiede errechnen sich aus dem übergeordneten Modell unter Anwendung des allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetzes. Mit dem übergeordneten Rechenmodell ergibt sich zudem die Möglichkeit, neben den Genauigkeitsunterschieden für Netz- und Blockausgleichung noch die Genauigkeitsunterschiede zweier weiterer Rechenvarianten zu ermitteln:

Dies sind Blockausgleichung ohne Maßstabsfaktoren (keine Überparametrisierung) und Blockausgleichung mit theoretisch strengem stochastischen Modell. Die Einbeziehung dieser Blockausgleichungsvarianten in die Genauigkeitsuntersuchungen ermöglicht es, den Einfluß der Überparametrisierung und der stochastischen Modellannahmen auf die theoretischen Genauigkeitserwartungen getrennt abzuschätzen.

Die Berechnungen beziehen sich auf schematische Punktverbände. Dabei werden flächenhafte und zugähnliche Punktverbände, gestreckte Polygonzüge und Einzelpunktbestimmungen unterschieden.

Die zu ermittelnden Genauigkeitswerte erlauben bis hierher den Vergleich der Genauigkeitseigenschaften der Rechenverfahren in der Anwendung auf einen geschlossen ausgeglichenen Punktverband. Zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit der Rechenverfahren können aus diesen Genauigkeitsunterschieden jedoch noch keine gültigen Schlüsse gezogen werden, da die Netzausgleichung ja nicht mit allen, sondern nur mit einigen bestimmten Beobachtungen durchgeführt wird, die zu ausgesuchten Netzknoten gehören, an die sich das Anhängen der Polarpunkte anschließt.

Zur Untersuchung dieses Sachverhalts wird ein besonderes Beispiel, das diesen Unterschieden in der Anwendung von Netz- und Blockausgleichung Rechnung trägt, angenommen und werden die theoretischen Genauigkeitswerte berechnet.

Die notwendigen Zahlenrechnungen wurden zum Teil im Rahmen einer Selbständigen Arbeit unter der Betreuung des Verfassers von Herrn cand.geod. R. Schirmer durchgeführt.

Der Verfasser möchte an dieser Stelle den Herren Professoren Dr.-Ing. F. Ackermann und Dr.-Ing. K. Kraus für die Anregungen und hilfreichen Diskussionen beim Entstehen dieser Arbeit danken.

## 2. THEORETISCHE GRUNDLAGEN UND VORBEREITUNG DER GENAUIGKEITSVERGLEICHE

Im folgenden wird die Genauigkeit zweier Rechenverfahren oder Verfahrensguppen der Polaraufnahme anhand theoretischer Vergleiche zu beurteilen sein.

Der Vergleich ist theoretisch, weil er mit der Methode des Fehlerfortpflanzungsgesetzes durchgeführt wird und im Ergebnis Kovarianzmatrizen bzw. Streuungen der berechneten Koordinaten der Neupunkte erhalten werden. Auf dem Vergleich dieser Kovarianzmatrizen beruhen Genauigkeitsbeurteilung und Schlußfolgerungen.

Dieses Untersuchungsverfahren ist deshalb möglich und zweckmäßig, weil die zu vergleichenden Rechenverfahren von den gleichen Beobachtungen der Polaraufnahme und Gegebenheiten bezüglich der Festpunkte ausgehen und das Ergebnis in gleicher Weise in den Koordinaten der Neupunkte im Koordinatensystem der Festpunkte besteht.

Zur Durchführung der theoretischen Genauigkeitsuntersuchungen sind also notwendig:

- die Genauigkeitseigenschaften der für die Rechenverfahren identischen Eingangsdaten
- die theoretische Fortpflanzung der Fehlereigenschaften durch den Rechenprozeß des jeweiligen Rechenverfahrens.

Die Fehlerfortpflanzung durch den Rechenprozeß könnte für jedes Rechenverfahren getrennt durchgeführt werden. Es ist jedoch möglich, die beiden interessierenden Rechenverfahren Blockausgleichung und Netzausgleichung als Sonderfall eines übergeordneten Algorithmus darzustellen, so daß für die Zahlenrechnung ein Formalismus genügt.

Diese allgemeine Formulierung wird darüber hinaus erlauben, Varianten der Rechenverfahren ohne großen zusätzlichen Aufwand mit zu untersuchen.

Im folgenden Teil der Untersuchungen werden die Grundlagen zum allgemeinen Rechenmodell dargestellt und Vorberechnungen durchgeführt.

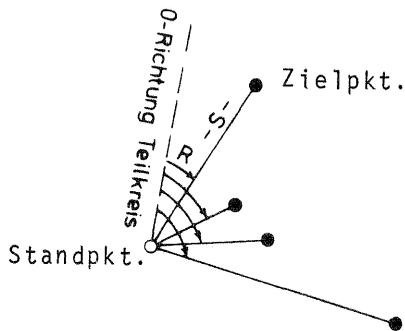
Dazu zählen:

- Genauigkeitseigenschaften der Beobachtungen
- Mathematische Modelle der Verfahren
- Allgemeines Rechenmodell

## 2.1 Stochastische Eigenschaften der Eingangsdaten zu den Rechenverfahren

### 2.1.1 Genauigkeitseigenschaften der Richtungs- und Streckenbeobachtungen

Die im Feld bei der polaren Punktaufnahme gemessenen Größen sind jeweils die von einem Standpunkt aus beobachteten Elemente Richtung  $R$  und Strecke  $S$  zu jedem angezielten Punkt. Siehe Abbildung 1.



Die Genauigkeitseigenschaften dieser Meßdaten resultieren als eine Summe von Einflüssen aus dem gesamten Meßprozeß. Das Ergebnis aus der gemeinsamen Wirkung aller Einflüsse ist gesucht.

Dazu werden die einflußnehmenden Faktoren nach der Größe ihrer Wirkung abgegrenzt und abgeschätzt.

Abb. 1 Gemessene Größen Richtung  $R$  und Strecke  $S$

Man kann unterscheiden:

- Fehler, die vom Meßinstrument herrühren: Instrumentenfehler
- Fehler beim Aufstellen: Zentrierfehler
- Fehler durch meteorologische Einflüsse: Refraktionsfehler
- Fehler bei der rechnerischen Reduktion der Meßwerte.

Bei tachymetrischen Punktbestimmungen sind an den gemessenen Strecken folgende Reduktionen anzubringen:

- Berücksichtigung des tatsächlichen Brechungsindex
- Reduktion auf den Horizont des Koordinatensystems der Festpunkte

Die zur Reduktion benötigten Werte (Temperatur, Luftdruck, Dampfdruck, Zenitwinkel, Meereshöhe) müssen so gut bekannt sein, daß durch die rechnerische Reduktion selbst keine spürbaren Fehlereinflüsse mit in die horizontierte Strecke einfließen. Bei einem Streckenmeßfehler von ca. 1 cm bedeutet dies Einflüsse aus rechnerischer Reduktion im mm-Bereich. Da dies auch praktisch eingehalten werden kann, wird hier auf die weitere Behandlung dieser Fehler verzichtet, d.h. sie können vernachlässigt werden.

Als weitere Fehlerquelle gelten die Refraktionsfehler. Sie verfälschen die Beobachtungen zufällig und systematisch. Systematische Einflüsse sind zu erwarten, weil die stark orts- und zeitabhängigen Brechungsverhältnisse entlang der Zielstrahlen praktisch nur am Anfangs- und Endpunkt der Meßstrecke bestimmt werden und nicht entlang des gesamten Strahlenverlaufs bekannt sind; zufällige Fehler sind zu erwarten aufgrund der immer vorhandenen Inhomogenitäten (Turbolenzen, Streuungen).

E. Grafarend findet in [31] anhand eines extremalen Beispiels für Lichtwellen zufällige mittlere Fehler infolge Refraktion

von  $\pm 26.5'$  für eine Richtung und von  $\pm 1$  cm für eine Strecke unter bestimmten statistischen Annahmen.

Die theoretisch strenge Behandlung der Refraktionsfehler führt damit auf eine Abhängigkeit aller Strecken und Richtungen. Für spezielle auf tachymetrische Punktbestimmungen nicht hierher übertragbare örtliche und zeitliche Verhältnisse und Meßinstrumente nehmen dazu praktische Untersuchungen von W. Höpke [11] Stellung.

Die Erfahrung zeigt jedoch, daß Refraktionsfehler bei der Horizontalwinkel-messung im Rahmen der tachymetrischen Punktbestimmungen praktisch ohne Einfluß auf das Ergebnis sind.

Bei der Entfernungsmessung werden Refraktionsfehler dagegen die gemessene Strecke direkt proportional zur Entfernung beeinflussen. Die Empfindlichkeit des Brechungsindex gegenüber atmosphärischen Veränderungen ist aber von der Wellenlänge der zur Messung benutzten Trägerwelle abhängig (Jordan/Eggert/Kneissl [32]).

Im Infrarotbereich, in dem die Nahbereichsentfernungsmesser arbeiten, zeigt sich hier eine weitgehende Unempfindlichkeit des Brechungsindex gegenüber atmosphärischen Veränderungen.

Ungenau ermittelte atmosphärische Meßdaten bewirken bei Entfernungen  $< 2$  km Streckenfehler im mm-Bereich. Bei  $p = 760$  mm Hg und  $t = 15^{\circ}$  C bewirken Änderungen  $\Delta p$  und  $\Delta t$  z.B. für den Entfernungsmesser Wild Di 10:

$$\Delta s = (0.97 \Delta t + 0.36 \Delta p) \cdot 10^{-6} \cdot s$$

Der Einfluß des Dampfdruckes ist so klein, daß er vernachlässigt werden kann.

Bei den hier durchgeführten theoretischen Genauigkeitsuntersuchungen werden nun, da die Reichweiten  $< 2$  km sind, Refraktionsfehler vernachlässigt bzw. zusammen mit den Instrumentenfehlern nur pauschal berücksichtigt. Diese Art der Betrachtung ist zwar nicht streng, aber im Hinblick auf die aus den Genauigkeitsvergleichen abzuleitenden Ergebnisse ausreichend.

Zentrierfehler werden vernachlässigbar klein, wenn Zwangszentrierungen eingesetzt werden. Für tachymetrische Punktbestimmungen ist die Verwendung von Zwangszentrierungen jedoch nicht üblich. In der Praxis werden deshalb sicher Zentrierfehler mit systematischen und zufälligen Fehleranteilen die Beobachtungsergebnisse verfälschen. Für die weiteren Untersuchungen wird angenommen, daß die systematischen Fehleranteile durch einwandfrei justierte Zentrier-einrichtungen und sorgfältiges Zentrieren verschwinden. Diese Vereinfachung ist im Hinblick auf den angestrebten Vergleich der Genauigkeiten erlaubt. Inwieweit nun die verbleibenden zufälligen Zentrierfehler die Genauigkeit beeinflussen ist im Prinzip gesondert zu untersuchen.

Zur Abschätzung der reinen Instrumentenfehler sind besondere Testreihen mit den entsprechenden Instrumenten notwendig. Für die meisten Instrumente liegen derartige Untersuchungen und Leistungsbeschreibungen vor. So zum Beispiel Strasser [9], Leitz [10]. Aus ihnen entnimmt man, daß alle Instrumente Richtungsgenauigkeiten von  $10^{\text{CC}}$  und besser erreichen und die Genauigkeit einer Entfernungsmessung unabhängig von der Entfernung 1 cm und besser ist. Allerdings werden für Tachymeter vereinfachend Unabhängigkeit von Richtung und Strecke, sowie Unabhängigkeit von Strecken untereinander und Richtungen untereinander angenommen.

Daß dies nicht der Fall zu sein braucht, vorläufig aber nicht genau genug bekannt ist, beweisen einschlägige Untersuchungen (z.B. Gotthardt |12|).

Für die durchzuführenden Genauigkeitsvergleiche von Rechenverfahren ist es jedoch nicht notwendig, experimentelle Untersuchungsreihen zu diesem Problemkreis durchzuführen. Es wird auf die verfügbaren Genauigkeitsdaten zurückgegriffen, in der Erwartung, daß genauere Berücksichtigung der Genauigkeitseigenschaften der Meßdaten keinen Einfluß auf die Schlußfolgerungen aus den Ergebnissen haben.

Diese Annahme ist hier um so mehr berechtigt, weil es sich um einen Genauigkeitsvergleich handelt. Nach Erfahrungen bei photogrammetrischen Untersuchungen könnten eventuelle zusätzliche Korrelationen den ohne sie ermittelten Unterschied zwischen den Verfahren sogar verringern (Mohl |29|).

Nach den vorangegangenen Betrachtungen der auf die Beobachtungsgenauigkeit einflußnehmenden Faktoren wird nun davon ausgegangen, daß sich die stochastischen Eigenschaften der später in die Genauigkeitsuntersuchungen einzuführenden Größen ausreichend mit folgenden Fehlergruppen beschreiben lassen:

- Fehler aus dem gesamten Meßprozeß (pauschale Erfassung von Instrumenten-, Refraktions- und Reduktionsfehlern)
- Zentrierfehler

Der ersten Fehlergruppe wird folgende Kovarianzmatrix zugeordnet:

$$Q \text{ Fehler aus dem gesamten Meßprozeß} = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & \sigma_{rs} \\ \sigma_{sr} & \sigma_s^2 \end{bmatrix}$$

$\sigma_r$  = mittlerer Fehler einer Richtung aus dem Meßprozeß

$\sigma_s$  = mittlerer Fehler einer Strecke aus dem Meßprozeß

$\sigma_{rs}$  = Kovarianz aus Richtung und Strecke.<sup>1)</sup>

Die aus dem Meßprozeß resultierenden Beobachtungen werden zwar wider besseres Wissen, aber mangels konkreter Zahlenangaben und weil die Korrelation jedenfalls schwach ist, als unkorrelierte Größen eingeführt und dementsprechend wird die Kovarianz  $\sigma_{rs} = 0$  gesetzt. Für die Varianzen von Richtung und Strecke werden in späteren Zahlenrechnungen  $\sigma_r^2 = 100 \text{cc}^2$  und  $\sigma_s^2 = 1 \text{cm}^2$  gesetzt.

### 2.1.2 Theoretische Herleitung des Einflusses von Zentrierfehlern auf die Eingangsdaten der Rechenverfahren

Die auftretenden Zentrierfehler, die voraussetzungsgemäß nur zufällig sind und kreisförmige Fehlerellipsen aufweisen, wirken nicht gleichzeitig mit voller Größe auf die Genauigkeitseigenschaften der Eingangsdaten der Rechenverfahren ein. Es ist zu beachten, daß sich die Richtung eines Zentrierfehlers zufällig ergibt, d.h. jede Richtung ist gleich wahrscheinlich. Damit ergeben sich von

<sup>1)</sup> Die Meßgrößen Richtung  $r$  und Strecke  $s$  sind begrifflich von den in die Ausgleichung eingehenden Größen Richtung  $R$  und Strecke  $S$  zu unterscheiden (s. Seite 19).

Zentrierung zu Zentrierung verschiedene Fehleranteile, die sich unmittelbar auf die Genauigkeitseigenschaften von Richtung bzw. Strecke auswirken.

Bei Polaraufnahmen mit elektronischen Tachymetern werden üblicherweise zwei Zentriereinrichtungen benützt. Zum einen die Zentriereinrichtung des Meßinstruments und zum anderen die Zentriereinrichtung des Reflektors. Bei gleicher Markierung aller Punkte, die vorausgesetzt ist, werden die Beträge der zufälligen Fehler beim Zentrieren durch einen mittleren Zentrierfehler für die jeweilige Zentriereinrichtung repräsentiert.

Die mittleren Zentrierfehler für die Beträge sind:

$\sigma_a$  = mittlerer Zentrierfehler im Standpunkt

$\sigma'_a$  = mittlerer Zentrierfehler im Zielpunkt

Für  $\sigma_a$  und  $\sigma'_a$  werden später plausible Zahlenwerte angenommen.

Zur Bestimmung der unmittelbar auf Richtung bzw. Strecke zu beliebigen Punkten  $i, j$  wirkenden Anteile eines Zentrierfehlers mit dem Betrag  $a$  bzw.  $a'$  und mit der auf eine willkürliche 0-Richtung bezogenen Richtung  $\phi$  bzw.  $\phi'$  werden die in Abbildung 2 dargestellten Längs- und Querkomponenten  $as_i, ar_i, as_j, ar_j, as'_i, ar'_i$  und  $as'_j, ar'_j$  eingeführt.

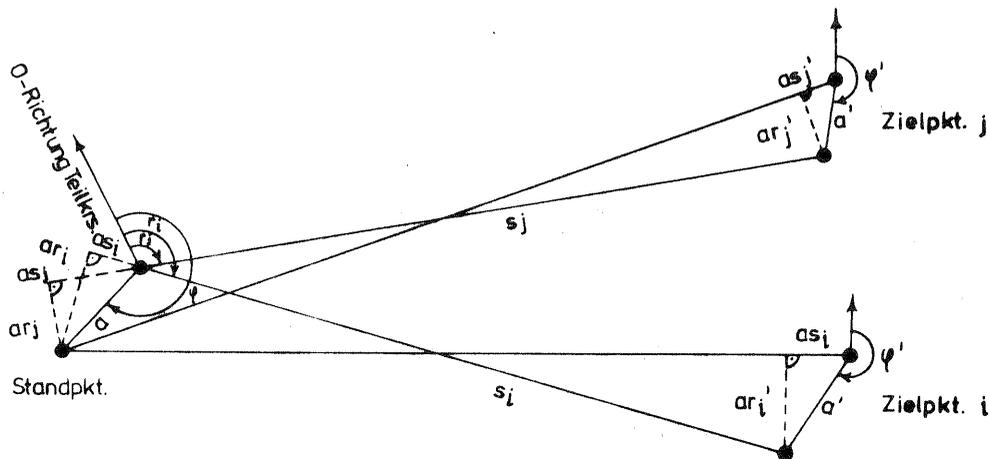


Abb. 2 Zerlegung der Beträge der Zentrierfehler  $a$  und  $a'$  in Längs- und Querkomponenten

Um sich unmittelbar auf die Genauigkeitseigenschaften von Richtung und Strecke auswirkenden Anteile zu erfassen, werden aus beliebig vielen Aufstellungen theoretisch die mittleren Fehler der Komponenten  $as_i, ar_i$  bzw.  $as_j, ar_j$  im Standpunkt und  $as'_i, ar'_i$  bzw.  $as'_j, ar'_j$  in den Zielpunkten  $i$  und  $j$  mit Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung abgeleitet.

Standpunkt

$\sigma_{ar_i}$	=	mittlerer Fehler der Komponente	$ar_i$
$\sigma_{as_i}$	=	" " " "	$as_i$
$\sigma_{ar_j}$	=	" " " "	$ar_j$
$\sigma_{as_j}$	=	" " " "	$as_j$
$\sigma_{ar_i as_i}$	=	Kovarianz von	$ar_i$ und $as_i$
$\sigma_{ar_i ar_j}$	=	" " "	$ar_i$ und $ar_j$
$\sigma_{ar_i as_j}$	=	" " "	$ar_i$ und $as_j$
$\sigma_{as_i ar_j}$	=	" " "	$as_i$ und $ar_j$
$\sigma_{as_i as_j}$	=	" " "	$as_i$ und $as_j$
$\sigma_{ar_j as_j}$	=	" " "	$ar_j$ und $as_j$

Zielpunkte

$\sigma_{ar_i'}$	=	mittlerer Fehler der Komponente	$ar_i'$
$\sigma_{as_i'}$	=	mittlerer Fehler der Komponente	$as_i'$
$\sigma_{ar_i' as_i'}$	=	Kovarianz von	$ar_i'$ und $as_i'$
$\sigma_{ar_j'}$	=	mittlerer Fehler der Komponente	$ar_j'$
$\sigma_{as_j'}$	=	mittlerer Fehler der Komponente	$as_j'$
$\sigma_{ar_j' as_j'}$	=	Kovarianz von	$ar_j'$ und $as_j'$

Alle anderen möglichen Kovarianzen sind nach den gemachten Voraussetzungen über die Zufälligkeit der Zentrierfehler gleich null.

Die Berechnungen erfolgen zunächst für  $\sigma_{ar_i}$ ,  $\sigma_{as_i}$  und  $\sigma_{ar_j, as_j}$ .

Die Richtung  $\phi$  nimmt mit gleicher Wahrscheinlichkeit alle Werte von 0 bis  $2\pi$  an.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $WD_{(\phi)}$  ist damit:  $WD_{(\phi)} = \frac{1}{2\pi}$

Der Betrag des Aufstellfehlers  $a$  sei mit dem mittleren Fehler  $\sigma_a$  normal verteilt.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $WD_{(a)}$  von  $a$  ist dann:

$$WD_{(a)} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2 a^2); \quad h = \frac{1}{\sigma_a \sqrt{2}} \quad (1)$$

Unter der Voraussetzung, daß Betrag  $a$  und Richtung  $\phi$  unabhängige Größen sind und die Mittelwerte von  $as_i$  und  $ar_i$  über alle Aufstellungen gleich null sind, errechnet man die Quadrate der mittleren Fehler  $\sigma_{ar_i}$  und  $\sigma_{as_i}$  folgendermaßen:

$$\sigma_{ar_i}^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{s_i}\right)^2 \cdot \sin^2(\phi - r_i) \cdot WD_{(\phi)} \cdot WD_{(a)} \cdot d\phi \cdot da \quad (2)$$

$$\sigma_{as_i}^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} a^2 \cdot \cos^2(\phi - r_i) \cdot WD_{(\phi)} \cdot WD_{(a)} \cdot d\phi \cdot da \quad (3)$$

Die Behauptung, daß die Mittelwerte von  $as_i$  und  $ar_i$ , nämlich  $E(as_i)$  und  $E(ar_i)$  über beliebig viele Aufstellungen gleich null sind ergibt sich aus den Voraussetzungen, kann aber auch formal wie folgt bestätigt werden:

$$E(ar_i) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{a}{s_i} \cdot \sin(\phi - r_i) \cdot WD_{(\phi)} \cdot WD_{(a)} \cdot d\phi \cdot da \quad (4)$$

$$E(as_i) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} a \cdot \cos(\phi - r_i) \cdot WD_{(\phi)} \cdot WD_{(a)} \cdot d\phi \cdot da \quad (5)$$

$$E(ar_i) = \int_0^{+\infty} \frac{a}{s_i} \cdot WD_{(a)} \cdot da \cdot \int_0^{2\pi} \sin(\phi - r_i) \cdot WD_{(\phi)} \cdot d\phi$$

$$E(as_i) = \int_0^{+\infty} a \cdot WD_{(a)} \cdot da \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\phi - r_i) \cdot WD_{(\phi)} \cdot d\phi$$

$$E(ar_i) = \int_0^{+\infty} \frac{a}{s_i} \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2 a^2) da \cdot \int_0^{2\pi} \sin(\phi - r_i) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\phi$$

$$E(as_i) = \int_0^{+\infty} a \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2 a^2) da \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\phi - r_i) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\phi$$

$$E(ar_i) = \frac{h}{s_i \sqrt{\pi}} \left[ -\frac{1}{2h^2} \exp(-h^2 a^2) \right] \Big|_0^{+\infty} \left( -\cos(\phi - r_i) \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \Big|_0^{2\pi}$$

$$E(as_i) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \left[ -\frac{1}{2h^2} \exp(-h^2 a^2) \right] \Big|_0^{+\infty} \left( \sin(\phi - r_i) \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \Big|_0^{2\pi}$$

$$E(ar_i) = \frac{1}{2s_i \sqrt{\pi} \cdot h} \cdot 0 = 0 \quad (4a)$$

$$E(as_i) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} \cdot h} \cdot 0 = 0 \quad (5a)$$

Lösung der Integrale für  $\sigma_{ar_i}^2$  und  $\sigma_{as_i}^2$ : nach (2) und (3) ist

$$\sigma_{ar_i}^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{s_i}\right)^2 \cdot \sin^2(\phi - r_i) \cdot WD_{(\phi)} \cdot WD_{(a)} \cdot d\phi \cdot da$$

$$\sigma_{as_i}^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} a^2 \cdot \cos^2(\phi - r_i) \cdot WD_{(\phi)} \cdot WD_{(a)} \cdot d\phi \cdot da$$

$$\sigma_{ar_i}^2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{a}{s_i}\right)^2 \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2 a^2) da \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2(\phi - r_i) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\phi \quad (6)$$

$$\sigma_{as_i}^2 = \int_0^{+\infty} a^2 \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2 a^2) da \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi - r_i) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\phi \quad (7)$$

Durch Substitution mit  $u = h \cdot a$  und partielle Integration erhält man:

$$\sigma_{ar_i}^2 = \frac{1}{s_i^2 h^2 \sqrt{\pi}} \left[ \left. \begin{aligned} &-\frac{h \cdot a}{2} \exp(-h^2 a^2) \\ &\cdot \frac{1}{2\pi} \left( \frac{(\phi - r_i)}{2} - \frac{1}{4} \sin 2(\phi - r_i) \right) \end{aligned} \right|_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+2\pi} \exp(-u^2) du \right]$$

$$\sigma_{as_i}^2 = \frac{1}{h^2 \sqrt{\pi}} \left[ \left. \begin{aligned} &-\frac{h \cdot a}{2} \exp(-h^2 a^2) \\ &\cdot \frac{1}{2\pi} \left( \frac{(\phi - r_i)}{2} + \frac{1}{4} \sin 2(\phi - r_i) \right) \end{aligned} \right|_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+2\pi} \exp(-u^2) du \right]$$

$$\sigma_{ar_i}^2 = \frac{1}{s_i^2 h^2 \sqrt{\pi}} \left( 0 + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sigma_{as_i}^2 = \frac{1}{h^2 \sqrt{\pi}} \left( 0 + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sigma_{ar_i}^2 = \frac{1}{s_i^2 8h^2}$$

$$\sigma_{as_i}^2 = \frac{1}{8h^2}$$

$$\sigma_{ar_i}^2 = \frac{1}{s_i^2} \cdot \frac{\sigma_a^2}{4} \quad (6a)$$

$$\sigma_{as_i}^2 = \frac{\sigma_a^2}{4} \quad (7a)$$

Ermittlung der Kovarianz  $\sigma_{ar_i, as_i}$ :

$$\sigma_{ar_i, as_i} = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{a}{s_i} \cdot \sin(\phi - r_i) \cdot a \cos(\phi - r_i) \cdot \text{WD}(\phi) \cdot \text{WD}(a) \, d\phi \, da \quad (8)$$

$$\sigma_{ar_i, as_i} = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} + \frac{1}{2s_i} a^2 \cdot \sin 2(\phi - r_i) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2 a^2) \, d\phi \, da$$

$$\sigma_{ar_i, as_i} = \int_0^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{a^2}{s_i} \cdot \exp(-h^2 a^2) \, da \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \sin 2(\phi - r_i) \, d\phi$$

$$\sigma_{ar_i, as_i} = + \frac{1}{s_i} \left( \frac{1}{h^2 \sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} \right) \cdot \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{1}{2} \cos 2(\phi - r_i) \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$\sigma_{ar_i, as_i} = - \frac{1}{s_i} \left( \frac{1}{h^2 \sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} \right) \cdot 0$$

$$\sigma_{ar_i, as_i} = 0 \quad (8a)$$

Die mittleren Fehler  $\sigma_{ar_j}$ ,  $\sigma_{as_j}$  und die Kovarianzen  $\sigma_{ar_j as_j}$  können entsprechend mit den gleichen Ergebnissen abgeleitet werden.

Die mittleren Fehler der in den Zielpunkten wirkenden Zentrierfehleranteile können ebenfalls entsprechend abgeleitet werden; im Ergebnis ist danach in (6a, 7a, 8a)  $\sigma_a$  durch  $\sigma_{a'}$  zu ersetzen:

$$\sigma_{ar'_i}^2 = \frac{1}{s_i^2} \cdot \frac{\sigma_{a'}^2}{4} \quad \sigma_{ar'_j}^2 = \frac{1}{s_j^2} \cdot \frac{\sigma_{a'}^2}{4} \quad (6b)$$

$$\sigma_{as'_i}^2 = \frac{\sigma_{a'}^2}{4} \quad \sigma_{as'_j}^2 = \frac{\sigma_{a'}^2}{4} \quad (7b)$$

$$\sigma_{ar'_i as'_i} = 0 \quad \sigma_{ar'_j as'_j} = 0 \quad (8b)$$

Ermittlung der Kovarianzen  $\sigma_{ar_i ar_j}$ ,  $\sigma_{as_i as_j}$ ,  $\sigma_{as_i ar_j}$  und  $\sigma_{ar_i as_j}$ :

$$\sigma_{ar_i ar_j} = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{a}{s_i} \sin(\phi - r_i) \cdot \frac{a}{s_j} \sin(\phi - r_j) \text{WD}_{(a)} \text{WD}_{(\phi)} d\phi da \quad (9)$$

$$\sigma_{ar_i ar_j} = \frac{1}{s_i s_j} \int_0^{+\infty} a^2 \cdot \text{WD}_{(a)} da \cdot \int_0^{2\pi} \sin(\phi - r_i) \cdot \sin(\phi - r_j) \text{WD}_{(\phi)} d\phi$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ar_i ar_j} &= \frac{1}{s_i s_j} \int_0^{+\infty} a^2 \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2 a^2) da \cdot \int_0^{2\pi} (\sin^2 \phi \cos r_i \cos r_j \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin 2\phi \cdot \sin(r_i + r_j) + \cos^2 \phi \sin r_i \sin r_j) \cdot \frac{1}{2\pi} d\phi \end{aligned}$$

Die Auflösung der Integrale erfolgt analog zu (6)

$$\begin{aligned} \sigma_{ar_i ar_j} &= \frac{1}{s_i \cdot s_j \cdot 4h^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \left( \cos r_i \cos r_j \left( \frac{\phi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\phi \right) + \sin(r_i + r_j) \cdot \frac{1}{4} \cos 2\phi \right. \\ &\quad \left. + \sin r_i \sin r_j \left( \frac{\phi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\phi \right) \right) \Bigg|_0^{2\pi} \end{aligned}$$

$$\sigma_{ar_i ar_j} = \frac{1}{s_i \cdot s_j \cdot 4h^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(r_i - r_j)$$

$$\sigma_{ar_i ar_j} = \frac{1}{s_i \cdot s_j} \cdot \frac{\sigma_a^2}{4} \cdot \cos(r_i - r_j) \quad (9a)$$

Entsprechend werden auch die Integrale der noch zu bestimmenden Kovarianzen behandelt. Man erhält:

$$\sigma_{as_i as_j} = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} a \cdot \cos(\phi - r_i) \cdot a \cos(\phi - r_j) \cdot \text{WD}_{(a)} \cdot \text{WD}_{(\phi)} d\phi da \quad (10)$$

Die Auflösung von (10) ergibt:

$$\sigma_{as_i as_j} = \frac{\sigma_a^2}{4} \cdot \cos(r_i - r_j) \quad (10a)$$

$$\sigma_{as_i ar_j} = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} + a \cdot \cos(\phi - r_i) \cdot \frac{a}{s_j} \sin(\phi - r_j) WD_{(a)} WD_{(\phi)} d\phi da \quad (11)$$

Die Auflösung von (11) ergibt:

$$\sigma_{as_i ar_j} = \frac{1}{s_j} \cdot \frac{\sigma_a^2}{4} \cdot \sin(r_i - r_j) \quad (11a)$$

$$\sigma_{ar_i as_j} = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{a}{s_i} \cdot \sin(\phi - r_i) \cdot a \cos(\phi - r_j) WD_{(a)} WD_{(\phi)} d\phi da \quad (12)$$

Die Auflösung von (12) ergibt:

$$\sigma_{ar_i as_j} = \frac{1}{s_i} \cdot \frac{\sigma_a^2}{4} \cdot (-\sin(r_i - r_j)) \quad (12a)$$

Die gefundenen Ergebnisse zeigen, daß bei Zielungen zu einem einzigen Punkt zwischen Richtung und Strecke im Mittel über beliebig viele Aufstellungen keine Korrelation auftritt.

Bei der Beobachtung von mehr als einem Zielpunkt treten dagegen auch im Mittel über beliebig viele Aufstellungen Abhängigkeiten zwischen den Zielungen zu den verschiedenen Punkten auf.

Die angenommenen Zentrierfehler bewirken also, daß alle Beobachtungen, die mit einer Instrumentenaufstellung gemacht werden, miteinander korreliert sind.

Die zahlenmäßigen Auswirkungen der Zentrierfehler auf die Genauigkeit der Beobachtungen lassen sich mit Mittelwerten beschreiben, wenn der mittlere Fehler des Betrages der Zentrierfehler bekannt ist. Als plausibler Zahlenwert wird in spätere Berechnungen zum Beispiel eingeführt:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= 2 \text{ mm} \\ \sigma_{a_i} &= 4 \text{ mm} \end{aligned}$$

Faßt man die Summe der Fehler aus dem gesamten Meßprozeß und die Zentrierfehler nach Fehlerfortpflanzung zusammen, so erhält man für die Strecken- und Richtungsbeobachtungen R, S eines Standpunktes jeweils eine Kovarianzmatrix die für das Beispiel eines Standpunktes mit zwei Zielungen allgemein angegeben sei:

Beobachtet seien die Richtungen  $R_1$  und  $R_2$  sowie die Strecken  $S_1$  und  $S_2$ . Die Kovarianzmatrix dieser Beobachtungen lautet dann:

$$Q_{bb} = \begin{bmatrix} \sigma_{R_1}^2 & \sigma_{R_1 S_1} & \sigma_{R_1 R_2} & \sigma_{R_1 S_2} \\ & \sigma_{S_1}^2 & \sigma_{S_1 R_2} & \sigma_{S_1 S_2} \\ & & \sigma_{R_2}^2 & \sigma_{R_2 S_2} \\ & & & \sigma_{S_2}^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Die Elemente nehmen dabei folgende Werte an:

$$\sigma_{R_1}^2 = \sigma_{r_1}^2 + \frac{1}{4S_1^2} (\sigma_a^2 + \sigma_{a'}^2)$$

$$\sigma_{R_1 S_1} = 0$$

$$\sigma_{R_1 R_2} = \frac{1}{S_1 S_2} \cdot \frac{\sigma_a^2}{4} \cdot \cos(R_2 - R_1)$$

$$\sigma_{R_1 S_2} = \frac{1}{S_1} \cdot \frac{1}{4} \sigma_a^2 \cdot \sin(R_2 - R_1)$$

$$\sigma_{S_1}^2 = \sigma_{s_1}^2 + \frac{1}{4} (\sigma_a^2 + \sigma_{a'}^2)$$

$$\sigma_{S_1 R_2} = \frac{1}{S_2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sigma_a^2 (-\sin(R_2 - R_1))$$

$$\sigma_{S_1 S_2} = \frac{1}{4} \sigma_a^2 \cdot \cos(R_2 - R_1)$$

$$\sigma_{R_2}^2 = \sigma_{r_2}^2 + \frac{1}{4S_2^2} (\sigma_a^2 + \sigma_{a'}^2)$$

$$\sigma_{R_2 S_2} = 0$$

$$\sigma_{S_2}^2 = \sigma_{s_2}^2 + \frac{1}{4} (\sigma_a^2 + \sigma_{a'}^2)$$

Unter der Annahme, daß alle Beobachtungen gleich genau ausgeführt werden konnten, kann man

$$\sigma_{r_1} = \sigma_{r_2} = \sigma_r$$

$$\text{und } \sigma_{s_1} = \sigma_{s_2} = \sigma_s$$

setzen.

An dieser Stelle sei auf den Fall der freien Stationierung hingewiesen. Da bei freier Stationierung nicht über einem bestimmten Punkt zentriert zu werden braucht, also  $\sigma_a = 0$  gesetzt werden kann, vereinfacht sich die Kovarianzmatrix  $Q_{bb}$ . Man erhält damit wieder am Beispiel einer Instrumentenaufstellung mit zwei beobachteten Richtungen ( $R_1, R_2$ ) und Strecken ( $S_1, S_2$ ) demonstriert für die Kovarianzmatrix der Beobachtungen bei freier Stationierung des Standpunktes:

$$Q_{bb}^x = \begin{bmatrix} \sigma_{R_1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ & \sigma_{S_1}^2 & 0 & 0 \\ & & \sigma_{R_2}^2 & 0 \\ & & & \sigma_{S_2}^2 \end{bmatrix} \quad (13a)$$

$$\sigma_{R_1}^2 = \sigma_r^2 + \frac{1}{4S_1^2} \cdot \sigma_{a'}^2$$

$$\sigma_{S_1}^2 = \sigma_s^2 + \frac{1}{4} \sigma_{a'}^2$$

$$\sigma_{R_2}^2 = \sigma_r^2 + \frac{1}{4S_2^2} \cdot \sigma_{a'}^2$$

$$\sigma_{S_2}^2 = \sigma_s^2 + \frac{1}{4} \sigma_{a'}^2$$

### 2.1.3 Genauigkeitseigenschaften der lokalen kartesischen Koordinaten

Bei der Blockausgleichung stehen, anders als bei der Netzausgleichung, im Funktionalmodell kartesische Koordinaten.

Die aus Messungen im Feld hervorgehenden Größen liegen aber zunächst als Polarkoordinaten (R,S) vor. Für die Blockausgleichung müssen sie deshalb in kartesische Koordinaten umgerechnet werden.

Darüber hinaus werden für die Genauigkeitsuntersuchungen die stochastisch streng nach Fehlerfortpflanzung hergeleiteten Genauigkeitseigenschaften dieser kartesischen Koordinaten benötigt.

Im Ergebnis werden die Genauigkeitseigenschaften der kartesischen Koordinaten mit der Kovarianzmatrix  $Q_{kk}$  beschrieben.

Der funktionelle Zusammenhang zwischen polaren und kartesischen Koordinaten lautet, bezogen auf den Instrumentenstandpunkt als Ursprung und die 0-Richtung des Teilkreises als x-Achse (siehe Kap. 2.2.2; Abb. 6):

$$\begin{aligned} x_i &= S_i \cos R_i \\ y_i &= S_i \sin R_i \end{aligned} \quad (14)$$

Die angenommenen Genauigkeitseigenschaften der polaren MeBelemente ( $R_i, S_i$ ) sind nach (13) mit der Kovarianzmatrix  $Q_{bb}$  beschrieben und "standpunktweise" korreliert. Aufgrund der Unabhängigkeit von polaren MeBelementen, die von verschiedenen Instrumentenaufstellungen aus beobachtet wurden, ist es ausreichend, die Kovarianzmatrix  $Q_{kk}$  für eine Instrumentenaufstellung allgemein anzugeben.

Mit dem allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetz errechnet sich  $Q_{kk}$  für die kartesischen Koordinaten der Zielpunkte 1, 2, ... i folgendermaßen:

$$Q_{kk} = U \cdot Q_{bb} \cdot U' \quad (15)$$

mit

$$U = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dS_1} & \frac{dx_1}{dR_1} \\ \frac{dy_1}{dS_1} & \frac{dy_1}{dR_1} \\ \dots & \dots \\ \frac{dx_j}{dS_j} & \frac{dx_j}{dR_j} \\ \frac{dy_j}{dS_j} & \frac{dy_j}{dS_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos R_1 & -S_1 \sin R_1 \\ \sin R_1 & S_1 \cos R_1 \\ \dots & \dots \\ \cos R_j & -S_j \sin R_j \\ \sin R_j & S_j \cos R_j \end{bmatrix}$$

Die Kovarianzmatrix  $Q_{kk}$  ist voll besetzt und weist folgende Anordnung der Koeffizienten auf:

$$Q_{kk} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 y_1} & \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{x_1 y_2} & \dots & \sigma_{x_1 x_i} & \sigma_{x_1 y_i} \\ & \sigma_{y_1}^2 & \sigma_{y_1 x_2} & \sigma_{y_1 y_2} & \dots & \sigma_{y_1 x_i} & \sigma_{y_1 y_i} \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \sigma_{x_i}^2 & \sigma_{x_i y_i} \\ & & & & & & \sigma_{y_i}^2 \end{bmatrix} \quad (15a)$$

Die Werte der einzelnen Elemente werden nicht explizit angegeben, da für die späteren Berechnungen von  $Q_{kk}$  direkt auf die Gleichung (15) zurückgegriffen wird.

$Q_{kk}$  ist die Kovarianzmatrix für die kartesischen Koordinaten  $(x_i, y_i)$  der Zielpunkte, die mit einer Instrumentenaufstellung beobachtet wurden.

Für die Ableitung der Kovarianzmatrix des Standpunktes geht man davon aus, daß die kartesischen Koordinaten des Standpunktes als Ursprung des lokalen Koordinatensystems gleich null sind:

$$\begin{aligned} x_s &= 0 \\ y_s &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Zur Festlegung der Kovarianzmatrix eines Standpunktes wird die Zentriergenauigkeit herangezogen, die für eine Aufstellung des Meßinstruments über einem vermarkten Punkt angenommen wird.

Die angenommene Zentriergenauigkeit wird mit dem mittleren Fehler  $\sigma_a$  beschrieben. So ergibt sich direkt für die Kovarianzmatrix der Koordinaten des Standpunktes in Analogie zu (7) und (8):

$$Q_{k_s k_s} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_s}^2 & \sigma_{x_s y_s} \\ \sigma_{y_s x_s} & \sigma_{y_s}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \sigma_a^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Für den Fall der freien Stationierung der Standpunkte ergeben sich Vereinfachungen bei der Berechnung der Kovarianzmatrix  $Q_{kk}$ .

Da nurmehr Zentrierfehler in den Zielpunkten auftreten können und nach (13a) alle polaren Meßelemente unkorrelierte Größen darstellen, kann die Ableitung von  $Q_{kk}$  auf einen allgemeinen Zielpunkt beschränkt werden.

Die Kovarianzmatrix  $Q_{kk}^x$  für die kartesischen Koordinaten eines Zielpunktes  $i$  lautet dann nach (15):

$$Q_{kk}^x = \begin{bmatrix} \cos R_i & -S_i \sin R_i \\ \sin R_i & S_i \cos R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{S_i}^2 & \sigma_{S_i R_i} \\ \sigma_{R_i S_i} & \sigma_{R_i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos R_i & \sin R_i \\ -S_i \sin R_i & S_i \cos R_i \end{bmatrix} \quad (18)$$

Beachtet man, daß  $R_i$  und  $S_i$  unkorreliert sind ( $\sigma_{S_i R_i} = 0$ ), erhält man aus (18):

$$Q_{kk}^x = \begin{bmatrix} \sigma_{x_i}^2 & \sigma_{x_i y_i} \\ \sigma_{y_i x_i} & \sigma_{y_i}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos^2 R_i \cdot \sigma_{S_i}^2 + S_i^2 \cdot \sin^2 R_i \cdot \sigma_{R_i}^2) & (\sin R_i \cos R_i (\sigma_{S_i}^2 - S_i^2 \sigma_{R_i}^2)) \\ (\sin R_i \cos R_i (\sigma_{S_i}^2 - S_i^2 \sigma_{R_i}^2)) & (\sin^2 R_i \sigma_{S_i}^2 + S_i^2 \cdot \cos^2 R_i \cdot \sigma_{R_i}^2) \end{bmatrix} \quad (18a)$$

und damit nach (13a)

$$Q_{kk}^x = \begin{bmatrix} (\frac{1}{4} \sigma_a^2 + S_i^2 \sin^2 R_i \cdot \sigma_r^2 + \cos^2 R_i \cdot \sigma_s^2) & \sin R_i \cos R_i (\sigma_s^2 - S_i^2 \sigma_r^2) \\ \sin R_i \cos R_i (\sigma_s^2 - S_i^2 \sigma_r^2) & (\frac{1}{4} \sigma_a^2 + S_i^2 \cdot \cos^2 R_i \cdot \sigma_r^2 + \sin^2 R_i \cdot \sigma_s^2) \end{bmatrix} \quad (18b)$$

In die fehlertheoretischen Untersuchungen werden die streng hergeleiteten Kovarianzmatrizen  $Q_{kk}$  bzw.  $Q_{kk}^x$ , je nachdem ob freie Stationierung der Standpunkte vorliegt oder nicht, Eingang finden.

Für die Standpunktkoordinaten gilt bei freier Stationierung  $Q_{k_s k_s} = 0$ .

## 2.2 Die mathematischen Modelle der Rechenverfahren

### 2.2.1 Das mathematische Modell der Netzausgleichung

Das hier als Netzausgleichung eingeführte Rechenverfahren stellt eine kombinierte Richtungs- und Streckenausgleichung für ausgewählte Netzpunkte dar. Eingangsgrößen in das Rechenverfahren Netzausgleichungen bzw. Beobachtungen im Sinne der Ausgleichsrechnung sind jeweils die polaren Elemente: Richtung  $R$  und Strecke  $S$ . Mit ihnen wird eine Netzausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen angesetzt. Als direktes Ergebnis der Ausgleichsrechnung erhält man die ausgeglichenen Koordinaten der zu bestimmenden Netzpunkte und die Orientierungsunbekannten in den Standpunkten.

### Funktionalmodell der Netzausgleichung

Das Funktionalmodell stellt die Beziehungen zwischen den als Beobachtungen und den als Unbekannten behandelten Größen her. Beschränkt auf ebene Berechnung treten als Unbekannte auf:

- die gesuchten Koordinaten der Netzkpunkte
- die Orientierungsunbekannten in den Standpunkten

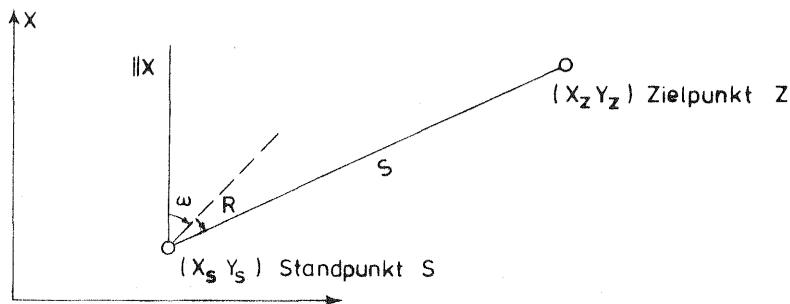


Abb. 3 Beobachtungen und Unbekannte der Netzausgleichung

Für eine Richtung  $R$  und eine Strecke  $S$  von Standpunkt  $S (X_S, Y_S)$  zum Zielpunkt  $Z (X_Z, Y_Z)$  erhält man folgende nichtlineare Verbesserungsgleichungen:

$$R + vR = \arctan \frac{Y_Z - Y_S}{X_Z - X_S} - \omega \quad (19)$$

$$S + vS = \sqrt{(Y_Z - Y_S)^2 + (X_Z - X_S)^2}$$

Weil die Ausgleichung lineare Beziehungen voraussetzt, werden die Gleichungen (19) mittels einer nach dem linearen Glied abbrechenden Taylorreihe linearisiert. Hierzu müssen folgende Näherungswerte eingeführt werden:

- genäherte Standpunktkoordinaten  $X'_S, Y'_S$
- genäherte Zielpunktkoordinaten  $X'_Z, Y'_Z$

Die linearisierten Verbesserungsgleichungen lauten dann (siehe auch (Gotthardt |13|)):

$$vR = -\omega - \frac{\sin \phi'}{S'} \Delta X_Z + \frac{\cos \phi'}{S'} \Delta Y_Z + \frac{\sin \phi'}{S'} \Delta X_S - \frac{\cos \phi'}{S'} \Delta Y_S + \Delta \phi \quad (19a)$$

$$vS = \cos \phi' \Delta X_Z + \sin \phi' \Delta Y_Z - \cos \phi' \Delta X_S - \sin \phi' \Delta Y_S + \Delta S$$

- $\phi'$  = Richtungswinkel aus Näherungskordinaten
- $S'$  = Strecke aus Näherungskordinaten
- $\Delta \phi$  = Richtung aus Näherungskordinaten - Beobachtung  $R$
- $\Delta S$  = Strecke aus Näherungskordinaten - Beobachtung  $S$

Aufgrund der nichtlinearen Ausgangsgleichungen ist nach einer Lösung des Ausgleichsproblems zu entscheiden, ob weitere Iterationsschritte notwendig sind. Je nach Güte der Näherung können mehrere Iterationen erforderlich sein.

### Stochastisches Modell der Netzausgleichung

In das Funktionalmodell der Netzausgleichung gehen Richtungen  $R$  und Strecken  $S$  als zu verbessernde Beobachtungen ein. Zur strengen Durchführung der Ausgleichsberechnung müssen somit die Genauigkeitseigenschaften dieser Elemente bekannt sein und in die Rechnung eingeführt werden. Die Netzausgleichung ist im Vergleich zur Blockausgleichung (siehe 2.2.2) ein strenges Ausgleichsverfahren, weil die Genauigkeitseigenschaften der Beobachtungen  $R$  und  $S$  streng zur Berechnung verwendet werden. Die Bezeichnung "streng" gilt jedoch auch nur im Rahmen der in Kap. 2.1 eingeführten Annahmen zu den Genauigkeitseigenschaften.

Zur Beschreibung der Genauigkeitseigenschaften der beobachteten Richtungen  $R$  und Strecken  $S$  wurde in 2.1.2 die Kovarianzmatrix  $Q_{bb}$  (13) bzw.  $Q_{bb}^X$  (13a) für frei stationierte Standpunkte, eingeführt. Sie steht für das stochastische Modell der Netzausgleichung und wird hierher übernommen.

### 2.2.2 Das mathematische Modell der Blockausgleichung

Die Blockausgleichung, die hier als neuer Vorschlag zur Berechnung tachymetrischer Punktbestimmungen untersucht wird, ist an und für sich schon lange, aber unter anderen Anwendungsgesichtspunkten, in der Geodäsie bekannt.

Sie stellt einen Sonderfall der verketteten Ähnlichkeitstransformation dar, die ganz allgemein dazu verwendet wird, mehrere kartesische Koordinatensysteme gemeinsam in ein übergeordnetes kartesisches Koordinatensystem zu transformieren. Zur Lösung dieses allgemeinen Transformationsproblems sind im Rahmen des mathematischen Modells der verketteten Ähnlichkeitstransformation verschiedene Rechenvarianten bekannt, die mit einem kurzen Überblick gestreift werden sollen.

Die verschiedenen Rechenvarianten sind in der geodätischen und photogrammetrischen Praxis für verschiedene spezielle Anwendungsbereiche entstanden. Dementsprechend sind die einzelnen Methoden auch mit verschiedenen Namen in der Literatur bekannt.

Zum näherungsweise Zusammenschluß von vorher getrennt ausgeglichenen Teilnetzen wurde von S. Finsterwalder die Feldermethode entwickelt [14]. Dem gleichen Zweck dient auch die Transformation von F.R. Helmert [15], die von ursprünglich zwei auf mehr Transformationseinheiten erweitert wurde. Für Aufgaben der Katastertechnik ist von E. Gotthardt die "Zusammenfassung mehrerer Aufmessungen eines Punkthaufens" angegeben worden [16]. Eine in der Photogrammetrie sehr verbreitete Anwendung zum Zusammenschluß von Stereomodellen hat die Blockausgleichung gefunden (Van den Hout [17]). Hierzu liegen auch umfangreiche Genauigkeitsuntersuchungen vor (Ackermann [18]).

Eine allgemeine Untersuchung und Gegenüberstellung der verschiedenen Varianten gibt K. Kraus in [19].

Bevor nun übergegangen wird auf die Beschreibung der Funktionalbeziehungen der zur Punktbestimmung vorgeschlagenen Blockausgleichung sollen die bereits in Ackermann [5] ausführlich dargelegten charakteristischen Merkmale der Blockausgleichung zusammengefaßt werden.

Bei der Blockausgleichung werden unabhängige Koordinatensysteme zur Bildung eines gemeinsamen Punktverbandes simultan in das übergeordnete Koordinatensystem transformiert. Diese Anwendung der Blockausgleichung auf tachymetrische Punktbestimmungen ist möglich, weil voraussetzungsgemäß mit den elektronischen Tachymetern immer Richtung und Strecke beobachtet werden, die sich also stets in standpunktbezogene kartesische Koordinatensysteme umrechnen lassen, welche dann die Datengrundlage zur Blockausgleichung darstellen.

An die standpunktbezogenen oder lokalen Koordinatensysteme werden keinerlei Bedingungen gestellt. Die Nullrichtung ist beliebig und wird sinnvollerweise mit der willkürlichen Nulllage des Teilkreises zusammenfallen. Der Nullpunkt der lokalen Koordinatensysteme ist ebenfalls frei wählbar, was bedeutet, daß das Meßinstrument an beliebigen Orten aufgestellt werden kann.

Der geometrische Zusammenhang wird bei der Blockausgleichung durch die sogenannten Verknüpfungspunkte und Festpunkte herbeigeführt. Er ist in den Abbildungen 4 und 5 veranschaulicht.

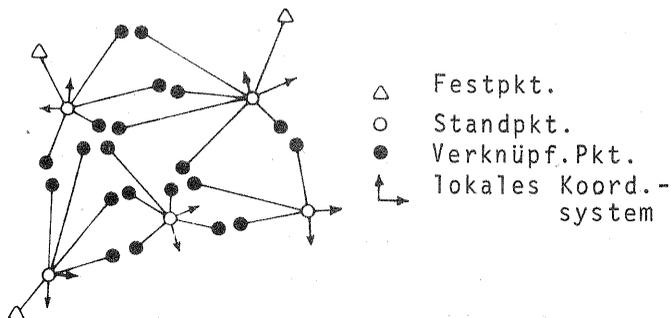


Abb. 4 Standpunktbezogene Koordinatensysteme und Verknüpfungspunkte (Meßsituation)

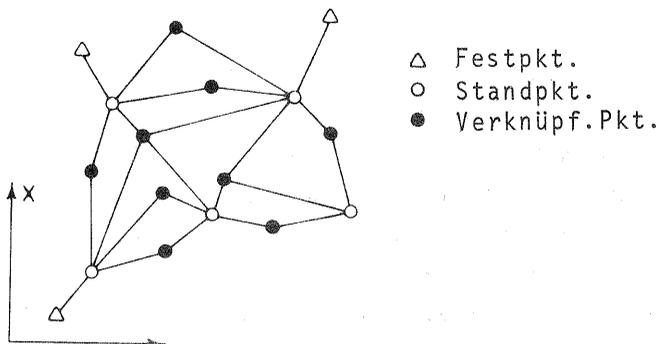


Abb. 5 Blockzusammenschluß mittels Verknüpfungspunkten

Als Verknüpfungspunkte fungieren in der Regel zu bestimmende Grenzpunkte, die von mindestens zwei verschiedenen Standpunkten aus tachymetrisch beobachtet wurden. Als Festpunkte gelten bereits im übergeordneten System koordinierte Punkte. In der Regel sind dies trigonometrische Punkte.

### Funktionalmodell der Blockausgleichung

Im hier vorliegenden Fall der tachymetrischen Punktbestimmung liegen die polaren Elemente Richtung  $R$  und Strecke  $S$  als Meßwerte vor. Die polaren Elemente können jedoch nicht unmittelbar in die Blockausgleichung eingeführt werden, weil rechtwinkelige Koordinaten vorausgesetzt werden. Es werden deshalb, wie in den Abbildungen 6 gezeigt, lokale kartesische Koordinatensysteme definiert und die polaren Elemente in diese standpunktbezogenen kartesischen Systeme umgerechnet.

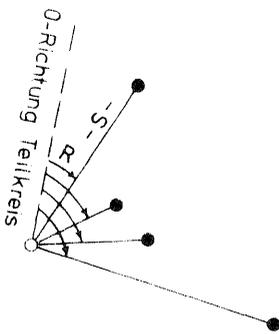


Abb. 6a Polare Beobachtungen

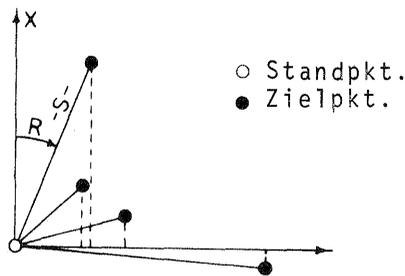


Abb. 6b Umgerechnete polare Beobachtungen, standpunktbezogenes Koordinatensystem

Die polaren Beobachtungen auf einem Standpunkt beziehen sich auf die willkürliche Nullrichtung des Teilkreises. Die x-Achse des lokalen Koordinatensystems soll mit dieser Nullrichtung zusammenfallen. Man erhält die kartesischen lokalen Koordinaten darauf direkt nach den einfachen Beziehungen (14):

$$x = S \cdot \cos R$$

$$y = S \cdot \sin R$$

Gesucht werden die ausgeglichenen Koordinaten der aufgemessenen Punkte im Koordinatensystem der Festpunkte. Zur Berechnung der ausgeglichenen Koordinaten durch simultane Helmert-Transformationen aller Standpunktsysteme beinhaltet die Blockausgleichung folgende Unbekannte:

- Für jedes lokale Koordinatensystem 4 Transformationsparameter:

a, b, c und d, wobei

c, d Translationen in X bzw. Y Richtung

a, b Parameter die implizit einen Maßstabsfaktor ( $m$ ) und die Richtungsorientierung ( $\omega$ ) beinhalten

$$(a = m \cdot \cos \omega, b = m \cdot \sin \omega)$$

- Die ausgeglichenen Koordinaten (X,Y) der zu berechnenden Punkte.

Die Herleitung der Verbesserungsgleichungen der Blockausgleichung aus dem Transformationsansatz wird, zur besseren Durchschaubarkeit, mit Hilfe der transformierten Koordinaten  $(X_t, Y_t)$  durchgeführt.

Die Beziehungen zwischen den vorliegenden lokalen Koordinaten  $x, y$  und den transformierten Koordinaten im System der Festpunkte lauten:

$$\begin{aligned} X_t &= ax - by + c \\ Y_t &= ay + bx + d \end{aligned} \quad (20)$$

Durch Einführen der gesuchten ausgeglichenen Koordinaten  $(X, Y)$  und der Verbesserungen  $vX, vY$  an den transformierten Koordinaten erhält man die Verbesserungsgleichungen zur Blockausgleichung.

$$\begin{aligned} -vX &= X_t - X = ax - by + c - X \\ -vY &= Y_t - Y = bx - ay + d - Y \end{aligned} \quad (21)$$

Die Verbesserungsgleichungen sind in den Unbekannten linear. Die Unbekannten des Ausgleichungsproblems werden deshalb direkt als Ergebnis einer Ausgleichungslösung erhalten.

Die Lösung erhält man durch Minimalisierung der Summe  $|vXvX| + |vYvY|$  nach der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen. Die sich dabei ergebende Struktur der Verbesserungs- und Normalgleichungen, sowie die Reduktionsmöglichkeiten welche die Rechnung wesentlich vereinfachen sind in Ebner [20] ausführlich dargestellt.

Eine Betrachtung der Unbekannten zeigt, daß eine eindeutige Lösung dann existiert, wenn für jedes lokale Koordinatensystem mindestens zwei Verknüpfungspunkte vorliegen und in die Ausgleichung mindestens zwei Festpunkte einbezogen werden.

Die Verbesserungsgleichungen lassen erkennen, daß bei einer Blockausgleichung für jedes lokale Koordinatensystem, d.h. für alle Beobachtungen einer Instrumentenaufstellung ein Maßstabsfaktor enthalten ist.

Verglichen mit den Funktionalbeziehungen der Netzausgleichung, wo keine Maßstabsfaktoren eingeführt werden, wird das Gleichungssystem der Blockausgleichung - beiden Rechenverfahren werden identische Beobachtungen zugrunde gelegt - eine geringere Überbestimmung aufweisen.

### Stochastisches Modell der Blockausgleichung

Die Blockausgleichung geht mit den Verbesserungsgleichungen (21) in den Ausgleichungsalgorithmus nach vermittelnden Beobachtungen ein, wobei die transformierten Koordinaten  $(X_t, Y_t)$  als zu verbessernde Größen behandelt werden. Im Sinne der Ausgleichungsrechnung gelten damit die transformierten Koordinaten als "Beobachtungen". Um den Begriff schärfer zu fassen werden sie als abgeleitete Beobachtungen oder Ersatzbeobachtungen (vgl. Linkwitz [30]) bezeichnet. Zur theoretisch strengen Durchführung der Blockausgleichung müssen zur Berechnung der Unbekannten die Genauigkeitseigenschaften der abgeleiteten Beobachtungen  $(X_t, Y_t)$  herangezogen werden.

Aus den bisherigen Untersuchungen sind jedoch nur die Genauigkeitseigenschaften der Eingangsgrößen der Blockausgleichung, nämlich die der lokalen kartesischen Koordinaten bekannt. Sie werden in den Gleichungen (15) bzw. (18b) mit der Kovarianzmatrix  $Q_{kk}$  bzw.  $Q_{kk}^x$  beschrieben.

Nach Gleichung (15) gilt (allgemeiner Fall, bei dem alle Beobachtungen einer Instrumentenaufstellung infolge Zentrierfehler im Standpunkt korreliert sind):

$$Q_{kk} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 y_1} & \cdots & \sigma_{x_1 y_i} \\ & \sigma_{y_1}^2 & \cdots & \sigma_{y_1 y_i} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sigma_{y_i}^2 \end{bmatrix}$$

Die Kovarianzmatrix  $Q_{tt}$  der abgeleiteten Beobachtungen ( $X_t, Y_t$ ) erhält man nach Fehlerfortpflanzung und den Funktionalbeziehungen (20). (Es werden alle abgeleiteten Beobachtungen  $x_1, y_1 \dots x_i, y_i$  eines Instrumentenstandpunktes betrachtet.)

$$Q_{tt} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_{t_1}}^2 & \sigma_{x_{t_1} y_{t_1}} & \cdots & \sigma_{x_{t_1} y_{t_i}} \\ & \sigma_{y_{t_1}}^2 & \cdots & \sigma_{y_{t_1} y_{t_i}} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sigma_{y_{t_i}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \\ & a & -b \\ & b & a \end{bmatrix} \cdot Q_{kk} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \\ & a & b \\ & -b & a \end{bmatrix} \quad (22)$$

Die Ableitung der Kovarianzmatrix vereinfacht sich wesentlich, wenn die Beobachtungen von frei stationierten Standpunkten aus gemacht werden und man die Betrachtung der Kovarianzmatrix der transformierten Koordinaten punktweise vornehmen kann.

Man erhält für unkorrelierte polare Meßelemente nach Fehlerfortpflanzung:

$$Q_{tt}^x = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot Q_{kk}^x \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad (22a)$$

In Gleichung (22), (22a) sind  $a, b$  als Näherungswerte der entsprechenden Unbekannten einzuführen.

$Q_{kk}^x$  aus (18a) eingesetzt:

$$Q_{tt}^x = \begin{bmatrix} a^2 \cdot \sigma_{x_i}^2 + b^2 \cdot \sigma_{y_i}^2 - 2ab \sigma_{x_i y_i} & ab \sigma_{x_i}^2 - ab \sigma_{y_i}^2 + (a^2 - b^2) \sigma_{x_i y_i} \\ ab \sigma_{x_i}^2 - ab \sigma_{y_i}^2 + (a^2 - b^2) \sigma_{y_i x_i} & a^2 \sigma_{y_i}^2 + b^2 \sigma_{x_i}^2 + 2ab \sigma_{x_i y_i} \end{bmatrix} \quad (22b)$$

Im Rahmen der Voraussetzungen für die Kovarianzmatrix  $Q_{kk}$  bzw.  $Q_{kk}^X$  stellen  $Q_{tt}$  bzw.  $Q_{tt}^X$  die strengen stochastischen Eigenschaften der transformierten Koordinaten dar. Bei strenger Berechnung einer Blockausgleichung wäre diese Kovarianzmatrix  $Q_{tt}$  bzw.  $Q_{tt}^X$  voll einzuführen.

Da die Berücksichtigung und Berechnung der strengen Kovarianzmatrix  $Q_{tt}$  bzw.  $Q_{tt}^X$  in der praktischen Anwendung der Blockausgleichung auf tachymetrische Punktbestimmungen einen großen numerischen Aufwand bedeutet, wird auf die Verwendung des strengen stochastischen Modells verzichtet. Statt dessen wird für praktische Berechnungen ein vereinfachtes stochastisches Modell für die transformierten Koordinaten angenommen. Als vereinfachtes stochastisches Modell wird die Einheitsmatrix eingeführt.

Für praktische Berechnungen steht also

$$Q_{tt} = E \quad (23)$$

Im Sinne der Ausgleichsrechnung stellt  $Q_{tt} = E$  eine Vernachlässigung dar, abgesehen von Sonderfällen, wenn zum Beispiel lokalen kartesischen Koordinaten kreisförmige Fehlerellipsen zugeschrieben werden können. Dies dürfte bei tachymetrischen Punktbestimmungen jedoch die Ausnahme sein. Es werden deshalb durch die vereinfachende Annahme der Einheitsmatrix für die Genauigkeitseigenschaften der transformierten Koordinaten Genauigkeitsverluste bei den ausgeglichenen Koordinaten gegenüber einer strengen Ausgleichung zu erwarten sein.

Für die folgenden fehlertheoretischen Genauigkeitsuntersuchungen sind deshalb sowohl die Ergebnisse aus der stochastisch vereinfachten Blockausgleichung als auch aus der stochastisch streng rechnenden Blockausgleichung interessant, obwohl letztere z.Z. nicht in einem Rechenprogramm realisiert ist.

## 2.3 Ein allgemeines Rechenmodell als Grundlage der Genauigkeitsuntersuchungen

### 2.3.1 Die Rechenverfahren als Sonderfälle einer Transformation

Tachymetrische Punktbestimmungen werden praktisch mit den beschriebenen mathematischen Modellen von Netz- und Blockausgleichung berechnet. Es läge deshalb nahe, die theoretischen Genauigkeitsuntersuchungen anhand dieser Modelle durchzuführen.

Es zeigt sich aber, daß Netz- und Blockausgleichung als Sonderfälle eines gemeinsamen allgemeinen Rechenmodells darstellbar sind. Das allgemeine Rechenmodell wird den Vorteil bieten, die theoretischen Genauigkeitsuntersuchungen der verschiedenen Rechenverfahren mit nur einem Rechenalgorithmus durchführen zu können. Das übergeordnete Rechenmodell wird Netz- und Blockausgleichung als Sonderfälle einer allgemein formulierten Ähnlichkeitstransformation beinhalten.

Ausgangspunkt ist eine allgemein formulierte Ähnlichkeitstransformation mit den Unbekannten:

- ausgeglichene Koordinaten (X,Y)
- Maßstab (m)
- Richtungsorientierung ( $\omega$ )
- zwei Translationen (c,d)

Die Netzausgleichung dagegen verfügt nur über die Unbekannten:

- ausgeglichene Koordinaten (X,Y)
- Richtungsorientierung ( $\omega$ ).

Durch entsprechende Interpretation bzw. Konstanthaltung der gegenüber der Netzausgleichung überschüssigen Unbekannten (m,c,d) muß nun erreicht werden können, daß die Netzausgleichung als Spezialisierung aus der Ähnlichkeitstransformation hervorgeht.

Das allgemeine Rechenmodell wird nachfolgend aus dem Funktionalmodell der Blockausgleichung durch eine rein algebraische Umformung abgeleitet, die lediglich bewirkt, daß sich die Unbekannten Maßstab (m) und Richtungsorientierung ( $\omega$ ) explizit darstellen. Damit ist gewährleistet, daß das funktionelle Rechenmodell rein formal die gleichen Eigenschaften wie das funktionelle Modell der Blockausgleichung besitzt.

Im allgemeinen Rechenmodell werden die Verbesserungsgleichungen zudem so formuliert, daß lokale kartesische Koordinaten als Ersatzbeobachtungen in die Ausgleichung eingehen. Damit entfällt die aufwendige strenge Herleitung der stochastischen Genauigkeitseigenschaften der transformierten Koordinaten ( $X_t, Y_t$ ) nach Gleichung (22) für die späteren Genauigkeitsuntersuchungen.

Anhand einer Gegenüberstellung von den zu untersuchenden Rechenverfahren und dem allgemeinen Rechenmodell wird erklärt, wie mit dem allgemeinen Rechenmodell die interessierenden Rechenverfahren simuliert werden.

Der Nachweis, daß die Netzausgleichung mit dem allgemeinen Rechenmodell tatsächlich simulierbar ist, wird getrennt geführt.

### 2.3.2 Herleitung des allgemeinen Rechenmodells

Gegeben ist das Funktionalmodell der Blockausgleichung.

Es wird mit den Transformationsgleichungen (20) beschrieben:

$$\begin{aligned} X &= ax - by + c \\ Y &= ay + bx + d \end{aligned}$$

wobei:

x,y Koordinaten im lokalen kartesischen Koordinatensystem

X,Y Koordinaten im System der Festpunkte

a,b,c,d Transformationsparameter:

c,d Translationen in Richtung der X- bzw. Y-Achse.

a,b beinhalten implizit Orientierung und Streckung des lokalen kartesischen Koordinatensystems.

Maßstab und Richtungsorientierung stellen sich explizit folgendermaßen dar:

$$\begin{aligned} a &= m \cdot \cos \omega \\ b &= m \cdot \sin \omega \end{aligned} \quad (24)$$

Die Gleichungen (20) werden nun durch Inversion so umgeformt, daß die lokalen kartesischen Koordinaten eine Funktion der Unbekannten darstellen und die Unbekannten für Maßstab und Richtungsorientierung explizit enthalten sind.

Man erhält dann:

$$(x, y) = f(\omega, m, c, d, X, Y)$$

Das Ergebnis der Umformung und Einsetzen von (24) ergibt:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\cos \omega}{m} X + \frac{\sin \omega}{m} Y - \frac{\cos \omega}{m} c - \frac{\sin \omega}{m} d \\ y &= \frac{\cos \omega}{m} Y - \frac{\sin \omega}{m} X + \frac{\sin \omega}{m} c - \frac{\cos \omega}{m} d \end{aligned} \quad (25)$$

Zur besseren Übersichtlichkeit werden Abkürzungen eingeführt.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos \omega}{m} & C &= -\frac{\cos \omega}{m} c - \frac{\sin \omega}{m} d \\ B &= \frac{\sin \omega}{m} & D &= \frac{\sin \omega}{m} c - \frac{\cos \omega}{m} d \end{aligned}$$

(25) lautet nun:

$$\begin{aligned} x &= AX + BY + C \\ y &= -BX + AY + D \end{aligned} \quad (25a)$$

Die lokalen kartesischen Koordinaten werden als Ersatzbeobachtungen behandelt. Durch entsprechende Einführung der Verbesserungen  $v_x$  und  $v_y$  erhält man damit die nichtlinearen Fehlergleichungen des allgemeinen Rechenmodells

$$\begin{aligned} x + v_x &= AX + BY + C \\ y + v_y &= -BX + AY + D \end{aligned} \quad (26)$$

Die Ausgleichung setzt stets lineare Beziehungen voraus. Die Gleichungen (26) werden deshalb mittels Taylorentwicklung linearisiert.

Dazu werden folgende Näherungswerte eingeführt:

$$m^{\circ}, \omega^{\circ}, c^{\circ}, d^{\circ}$$

$$\begin{aligned} A^{\circ} &= \frac{\cos \omega^{\circ}}{m^{\circ}} & C^{\circ} &= -\frac{\cos \omega^{\circ}}{m^{\circ}} c^{\circ} - \frac{\sin \omega^{\circ}}{m^{\circ}} d^{\circ} \\ B^{\circ} &= \frac{\sin \omega^{\circ}}{m^{\circ}} & D^{\circ} &= \frac{\sin \omega^{\circ}}{m^{\circ}} c^{\circ} - \frac{\cos \omega^{\circ}}{m^{\circ}} d^{\circ} \end{aligned}$$

Die Linearisierung an der Näherungsstelle ( $^{\circ}$ ) ergibt:

$$\begin{aligned} x + v_x &= A^{\circ} \cdot \Delta X + B^{\circ} \cdot \Delta Y + X^{\circ} \cdot \Delta A + Y^{\circ} \cdot \Delta B + \Delta C + A^{\circ} \cdot X^{\circ} + B^{\circ} \cdot Y^{\circ} + C^{\circ} \\ y + v_y &= -B^{\circ} \cdot \Delta X + A^{\circ} \cdot \Delta Y + Y^{\circ} \cdot \Delta A - X^{\circ} \cdot \Delta B + \Delta D - B^{\circ} \cdot X^{\circ} + A^{\circ} \cdot Y^{\circ} + D^{\circ} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
\text{mit } \Delta A &= (-\cos \omega^0 / m^0)^2 \Delta m - (\sin \omega^0 / m^0) \Delta \omega \\
\Delta B &= (-\sin \omega^0 / m^0)^2 \Delta m + (\cos \omega^0 / m^0) \Delta \omega \\
\Delta C &= \left[ (\cos \omega^0 / m^0)^2 c^0 + (\sin \omega^0 / m^0)^2 d^0 \right] \Delta m + \left[ (-\cos \omega^0 / m^0) d^0 + (\sin \omega^0 / m^0) c^0 \right] \Delta \omega \\
&\quad - (\cos \omega^0 / m^0) \Delta c - (\sin \omega^0 / m^0) \Delta d \\
\Delta D &= \left[ (-\sin \omega^0 / m^0)^2 c^0 + (\cos \omega^0 / m^0)^2 d^0 \right] \Delta m + \left[ (\cos \omega^0 / m^0) c^0 + (\sin \omega^0 / m^0) d^0 \right] \Delta \omega \\
&\quad + (\sin \omega^0 / m^0) \Delta c - (\cos \omega^0 / m^0) \Delta d \\
x^0 &= A^0 X^0 + B^0 Y^0 + C^0 & X^0 &= m^0 \cos \omega^0 x^0 - m^0 \sin \omega^0 y^0 + c^0 \\
y^0 &= -B^0 X^0 + A^0 Y^0 + D^0 & Y^0 &= m^0 \sin \omega^0 x^0 + m^0 \cos \omega^0 y^0 + d^0 \\
m^0 &= 1 & & (28)
\end{aligned}$$

(28) in (27):

$$\begin{aligned}
v_x &= \cos \omega^0 \Delta X + \sin \omega^0 \Delta Y - x^0 \Delta m + y^0 \Delta \omega - \cos \omega^0 \Delta c - \sin \omega^0 \Delta d + x^0 - x \\
v_y &= -\sin \omega^0 \Delta X + \cos \omega^0 \Delta Y - y^0 \Delta m - x^0 \Delta \omega + \sin \omega^0 \Delta c - \cos \omega^0 \Delta d + y^0 - y
\end{aligned} \quad (29)$$

Mit den Verbesserungsgleichungen (29) ist das allgemeine Rechenmodell gefunden. Verbessert werden die lokalen kartesischen Koordinaten (xy) die hier als Ersatzbeobachtungen stehen. Die Unbekannten  $\omega, m, c, d, X, Y$  sind explizit enthalten. Alle späteren theoretischen Genauigkeitsuntersuchungen werden mit diesem Rechenmodell durchgeführt.

#### Gegenüberstellung von Netzausgleichung, Blockausgleichung und allgemeinem Rechenmodell

Mit den Verbesserungsgleichungen (29) können nun durch entsprechende Interpretation der Unbekannten die interessierenden Rechenverfahren simuliert werden. Am einfachsten ist die Simulierung der Blockausgleichung, denn sie ist in ihren Unbekannten mit denen des allgemeinen Rechenmodells identisch und braucht somit nicht weiter diskutiert zu werden. Wie man dagegen vorzugehen hat, um die Netzausgleichung mit dem allgemeinen Rechenmodell zu simulieren, zeigt folgende Gegenüberstellung von Netzausgleichung einerseits und allgemeinem Rechenmodell andererseits.

	<u>Netzausgleichung</u>	<u>allgemeines Rechenmodell</u>
Ausgangsdaten der Rechenverfahren	<ul style="list-style-type: none"> <li>polare Meßwerte</li> <li>Richtung R</li> <li>Strecke S</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>polare Meßwerte</li> <li>Richtung R</li> <li>Strecke S</li> <li>daraus abgeleitet werden die lokalen kartesischen Koordinaten (x,y)</li> </ul>
Unbekannte	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>(X_Z, Y_Z)</math> ausgeglichene Koordinaten eines Zielpunktes</li> <li><math>(X_S, Y_S)</math> ausgeglichene Koordinaten eines Standpunktes</li> <li><math>\omega</math> Orientierungsunbekannte</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>(X, Y)</math> ausgeglichene Koordinaten eines Zielpunktes</li> <li><math>(c, d)</math> Translationen in X bzw. Y-Richtung</li> <li><math>(m, \omega)</math> Maßstabsunbekannte und Orientierungsunbekannte.</li> </ul>

Man beachtet nun, daß der Nullpunkt des lokalen kartesischen Koordinatensystems, auf den sich die Translationsunbekannten beziehen, mit dem Standpunkt identisch ist. Man setzt somit:

$$\begin{aligned} c &= X_S \\ d &= Y_S \end{aligned} \quad (30)$$

Führt man noch die Bedingung für die Maßstabsunbekannte

$$m = 1, \text{ d.h. } \Delta m = 0 \quad (31)$$

ein, dann sind Funktionalmodell von Netzausgleichung und des allgemeinen Rechenmodells identisch.

Berücksichtigt man beim allgemeinen Rechenmodell im stochastischen Ansatz die strengen Fehlereigenschaften der Ersatzbeobachtungen, liegt es im Prinzip der Ausgleichung begründet, daß Netzausgleichung und allgemeines Rechenmodell völlig identisch sind.

Zur besseren Anschauung sollen die Fehlergleichungen des allgemeinen Rechenmodells für verschiedene Visurtypen bei tachymetrischen Punktbestimmungen angeschrieben werden unter der Voraussetzung, daß eine Netzausgleichung zu simulieren ist.

Aus (29) ergeben sich für Visuren unter Beachtung von (30) und (31)

a) von Festpunkt zu Festpunkt

$$\begin{aligned} v_x &= y^{\circ} \Delta \omega + x^{\circ} - x \\ v_y &= -x^{\circ} \Delta \omega + y^{\circ} - y \end{aligned} \quad (32)$$

b) von Festpunkt zu Neupunkt

$$\begin{aligned} v_x &= \cos \omega^{\circ} \Delta X_Z + \sin \omega^{\circ} \Delta Y_Z + y^{\circ} \Delta \omega + x^{\circ} - x \\ v_y &= -\sin \omega^{\circ} \Delta X_Z + \cos \omega^{\circ} \Delta Y_Z - x^{\circ} \Delta \omega + y^{\circ} - y \end{aligned} \quad (33)$$

c) von Neupunkt zu Festpunkt

$$\begin{aligned} v_x &= + y^{\circ} \Delta \omega - \cos \omega^{\circ} \Delta X_S - \sin \omega^{\circ} \Delta Y_S + x^{\circ} - x \\ v_y &= - x^{\circ} \Delta \omega + \sin \omega^{\circ} \Delta X_S - \cos \omega^{\circ} \Delta Y_S + y^{\circ} - y \end{aligned} \quad (34)$$

d) von Neupunkt zu Neupunkt

$$\begin{aligned} v_x &= \cos \omega^{\circ} \Delta X_Z + \sin \omega^{\circ} \Delta Y_Z + y^{\circ} \Delta \omega - \cos \omega^{\circ} \Delta X_S - \sin \omega^{\circ} \Delta Y_S + x^{\circ} - x \\ v_y &= -\sin \omega^{\circ} \Delta X_Z + \cos \omega^{\circ} \Delta Y_Z - x^{\circ} \Delta \omega + \sin \omega^{\circ} \Delta X_S - \cos \omega^{\circ} \Delta Y_S + y^{\circ} - y \end{aligned} \quad (35)$$

### 2.3.3 Gesonderter Beweis für die Simulierbarkeit der Netzausgleichung

Die Gleichwertigkeit der Rechenverfahren Netzausgleichung und allgemeines Rechenmodell mit entsprechenden Bedingungen kann noch anhand weiterer Überlegungen aufgezeigt werden.

Es handelt sich hier um eine zusätzliche Darlegung des Sachverhaltes mit dem die Wirkungsweise der Funktionalansätze von Netzausgleichung und allgemeinem Rechenmodell anschaulich gemacht werden soll. Die Ableitungen werden punktweise durchgeführt, was einer Meßanordnung mit freier Stationierung der Standpunkte entspricht. Der allgemeinere Fall, standpunktweise Korrelation der Beobachtungen, läßt sich analog behandeln und führt auf dasselbe Ergebnis (siehe Anhang S. 83).

Zunächst wird die Ausgangssituation der Berechnungen nochmals kurz gestreift und auf die gewichtete Quadratsumme der Verbesserungen zurückgegriffen.

In beiden mathematischen Modellen liegt dieselbe Beobachtungssituation vor. Als Ausgangsdaten für die Berechnung stehen die Beobachtungen Richtung R und Strecke S mit ihren angenommenen Genauigkeitseigenschaften bereit. Während in die Netzausgleichung mit den vorliegenden Daten direkt eingegangen werden kann, sind für das allgemeine Rechenmodell die lokalen kartesischen Koordinaten und ihre Genauigkeitseigenschaften abzuleiten (2.1.3). Beide Rechenverfahren werden einer im Rahmen der stochastischen Annahmen strengen Ausgleichung unterzogen. Das Prinzip der Ausgleichsrechnung bewirkt, daß die zu verbessernden Größen solche Zuschläge erhalten, die zur größtmöglichen Genauigkeit der Unbekannten führen. Die gewichtete Quadratsumme aller Verbesserungen wird zum Minimum.

Wird unter den genannten Voraussetzungen in beiden Ausgleichungsverfahren dieselbe gewichtete Quadratsumme der Verbesserungen erzeugt, ist dies ein Beweis für die Gleichwertigkeit der Verfahren.

#### Beweisführung

Es sollen die Beobachtungen R, S von einem Standpunkt zu m Zielpunkten vorliegen. Man erhält dann insgesamt  $n = 2m$  Beobachtungen die einer Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen unterzogen werden, wozu bei Netzausgleichung und allgemeinem Rechenmodell  $n$  Verbesserungsgleichungen aufgestellt werden. Die gewichtete Quadratsumme der Verbesserungen lautet dann in Matrixschreibweise:

$$\text{Gewichtete Quadratsumme} = v'Pv$$

$v$  Vektor der Verbesserungen

$P$  strenge Gewichtsmatrix der Beobachtungen

Da die Beobachtungen zu allen Punkten zunächst als unabhängige Größen angenommen werden, kann die gewichtete Quadratsumme aus Quadratsummenanteilen einzelner Punkte zusammengesetzt werden.

$$v'Pv = v_1 P_1 v_1 + v_2 P_2 v_2 + \dots + v_m P_m v_m$$

Kann die Gleichheit der Quadratsummenanteile eines Punktes aus Netzausgleichung und allgemeinem Rechenmodell aufgezeigt werden, dann ist auch die gesamte Summe  $v'Pv$  aus beiden Rechenmodellen identisch.

#### Quadratsumme der Verbesserungen bei Netzausgleichung

Die Verbesserungen  $v$  für eine tachymetrische Punktbestimmung ergeben sich aus den linearisierten Verbesserungsgleichungen (19a)

$$v = \begin{bmatrix} vS \\ vR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi' \Delta X_z + \sin\phi' \Delta Y_z - \cos\phi' \Delta X_s - \sin\phi' \Delta Y_s + \Delta S \\ -\frac{\sin\phi'}{S'} \Delta X_z + \frac{\cos\phi'}{S'} \Delta Y_z + \frac{\sin\phi'}{S'} \Delta X_s - \frac{\cos\phi'}{S'} \Delta Y_s - \Delta\omega + \Delta\phi \end{bmatrix}$$

$vS$  = Verbesserung einer Strecke S

$vR$  = Verbesserung einer Richtung R

$\Delta S$  = Strecke aus Näherungskordinaten - Beobachtung  
 $\Delta \phi$  = Richtung aus Näherungskordinaten - Beobachtung  
 $\phi'$  = Richtungswinkel aus Näherungskordinaten  
 $S'$  = Strecke aus Näherungskordinaten

Die Gewichtsmatrix P ergibt sich als Inverse der Kovarianzmatrix  $Q_{bb}^x$  (siehe S. 21)

$$P = \sigma_0^2 \cdot Q_{bb}^{x-1} = \begin{bmatrix} Q_{SS} & 0 \\ 0 & Q_{RR} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} p_S & 0 \\ 0 & p_R \end{bmatrix} \quad (36)$$

$p_S$  = Gewicht einer Strecke  
 $p_R$  = Gewicht einer Richtung

Damit erhält man den Anteil jeder Zielung einer polaren Punktbestimmung an der gewichteten Quadratsumme der Verbesserungen bei Netzausgleichung.

$$v'Pv = \begin{bmatrix} v_S \\ v_R \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} p_S & 0 \\ 0 & p_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_S \\ v_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_S \cdot p_S \cdot v_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_R \cdot p_R \cdot v_R \end{bmatrix} \quad (37)$$

#### Quadratsumme der Verbesserungen bei allgemeinem Rechenmodell mit Bedingungen

Die Verbesserungen v werden im allgemeinen Rechenmodell an den lokalen kartesischen Koordinaten (x,y) angebracht.

Die Verbesserungen lassen sich unter der Bedingung  $m=1$ ,  $c=X_S$  und  $d=Y_S$  (bzw.  $\Delta m=0$ ,  $\Delta c=\Delta X_S$ ,  $\Delta d=\Delta Y_S$ ) mit den linearisierten Verbesserungsgleichungen des allgemeinen Rechenmodells nach (33) darstellen.

$$v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega^\circ \Delta X_Z + \sin \omega^\circ \Delta Y_Z + y^\circ \Delta \omega - \cos \omega^\circ \Delta X_S - \sin \omega^\circ \Delta Y_S + x^\circ - x \\ -\sin \omega^\circ \Delta X_Z + \cos \omega^\circ \Delta Y_Z - x^\circ \Delta \omega + \sin \omega^\circ \Delta X_S - \cos \omega^\circ \Delta Y_S + y^\circ - y \end{bmatrix}$$

Die Gewichtsmatrix P der lokalen kartesischen Koordinaten erhält man als Inverse der Kovarianzmatrix  $Q_{kk}^x$  (siehe S. 23)

$$P = \sigma_0^2 \cdot Q_{kk}^{x-1} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{bmatrix}^{-1} \quad (38)$$

Man erhält für die Inverse  $Q_{kk}^{x-1}$ :

(38a)

$$P = \sigma_0^2 \cdot Q_{kk}^{x-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S^2} \cdot \sin^2 R \cdot p_R + \cos^2 R \cdot p_S & \sin R \cdot \cos R \cdot p_S - \frac{1}{S^2} \cdot \sin R \cdot \cos R \cdot p_R \\ \sin R \cdot \cos R \cdot p_S - \frac{1}{S^2} \cdot \sin R \cdot \cos R \cdot p_R & \frac{1}{S^2} \cdot \cos^2 R \cdot p_R + \sin^2 R \cdot p_S \end{bmatrix}$$

$p_S$  = Gewicht einer Strecke S  
 $p_R$  = Gewicht einer Richtung R

Die Gewichtsmatrix  $P = \sigma_0^2 \cdot Q_{kk}^{X-1}$  beinhaltet die Gewichte der polaren Elemente Richtung R und Strecke S. Bei Netzausgleichung werden S und R direkt um die Beträge  $v_R$  und  $v_S$  verbessert. Im allgemeinen Rechenmodell werden hier dagegen die Verbesserungen  $v_x$  und  $v_y$  an den lokalen Koordinaten  $(x,y)$  angebracht.

Um nun die Produkte  $v'Pv$  aus Netzausgleichung und hier eingesetztem allgemeinem Rechenmodell vergleichen zu können, wird die Gewichtsmatrix  $\sigma_0^2 \cdot Q_{kk}^{X-1}$  so aufgespalten, daß der Verbesserungsvektor  $v$  des allgemeinen Rechenmodells in Komponenten in Strahlrichtung zerlegt wird.

$Q_{kk}^{X-1}$  aufgespalten ergibt:

$$P = \sigma_0^2 \cdot Q_{kk}^{X-1} = \begin{bmatrix} \cos R - \frac{1}{S} \sin R \\ + \sin R & \frac{1}{S} \cos R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_S & 0 \\ 0 & p_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos R & \sin R \\ -\frac{1}{S} \sin R & \frac{1}{S} \cos R \end{bmatrix} \quad (38b)$$

$v'Pv$  wird damit:

$$v'Pv = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \cos R - \frac{1}{S} \sin R \\ \sin R & \frac{1}{S} \cos R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_S & 0 \\ 0 & p_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos R & \sin R \\ -\frac{1}{S} \sin R & \frac{1}{S} \cos R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad (39)$$

Zum Nachweis, daß die Produkte  $v'Pv$  aus Netzausgleichung und dem hier verwendeten allgemeinen Rechenmodell gleich sind, braucht nur noch gezeigt zu werden, daß die oben angegebene Komponentenerlegung tatsächlich auf die Verbesserungen der Netzausgleichung führt.

Es muß gelten:

$$\begin{bmatrix} v_S \\ v_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos R & \sin R \\ -\frac{1}{S} \sin R & \frac{1}{S} \cos R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad (40)$$

Dazu werden auf der rechten Seite der Gleichung (40) für  $(v_x, v_y)$  die Verbesserungsgleichungen (35) eingeführt und das Produkt gebildet.

$$\begin{bmatrix} \cos R \cdot v_x + \sin R \cdot v_y \\ -\frac{1}{S} \sin R \cdot v_x + \frac{1}{S} \cos R \cdot v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_S \\ v_R \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} v_S &= \cos R \cdot \cos \omega^\circ \Delta X_Z + \cos R \sin \omega^\circ \Delta Y_Z + \cos R \cdot y^\circ \Delta \omega - \cos R \cdot \cos \omega^\circ \Delta X_S - \cos R \sin \omega^\circ \Delta Y_S \\ &\quad + \cos R (x^\circ - x) - \sin R \sin \omega^\circ \Delta X_Z + \sin R \cdot \cos \omega^\circ \Delta Y_Z - \sin R \cdot x^\circ \Delta \omega + \sin R \sin \omega^\circ \Delta X_S \\ &\quad - \sin R \cdot \cos \omega^\circ \Delta Y_S + \sin R (y^\circ - y) \end{aligned} \quad (41a)$$

$$\begin{aligned} v_R &= \frac{1}{S} (-\sin R \cos \omega^\circ \Delta X_Z - \sin R \sin \omega^\circ \Delta Y_Z - \sin R \cdot y^\circ \Delta \omega + \sin R \cos \omega^\circ \Delta X_S + \sin R \sin \omega^\circ \Delta Y_S \\ &\quad - \sin R (x^\circ - x) - \cos R \sin \omega^\circ \Delta X_Z + \cos R \cos \omega^\circ \Delta Y_Z - \cos R \cdot x^\circ \Delta \omega + \cos R \sin \omega^\circ \Delta X_S \\ &\quad - \cos R \cos \omega^\circ \Delta Y_S + \cos R (y^\circ - y)) \end{aligned}$$

Mit  $R = \phi' - \omega^0$  erhält man:

$$\begin{aligned} vS &= \cos\phi' \Delta X_Z + \sin\phi' \Delta Y_Z - \cos\phi' \Delta X_S - \sin\phi' \Delta Y_S + \cos R(x^0 - x) + \sin R(y^0 - y) \\ vR &= \frac{1}{S} (-\sin\phi' \Delta X_Z + \cos\phi' \Delta Y_Z + \sin\phi' \Delta X_S - \cos\phi' \Delta Y_S - (\sin R \cdot y^0 + \cos R \cdot x^0) \Delta\omega \\ &\quad + \cos R(y^0 - y) - \sin R(x^0 - x)) \end{aligned} \quad (41b)$$

Aus (25) erhält man

$$\begin{aligned} x^0 &= \cos\omega^0 X'_Z + \sin\omega^0 Y'_Z - \cos\omega^0 X'_S - \sin\omega^0 Y'_S \\ y^0 &= -\sin\omega^0 X'_Z + \cos\omega^0 Y'_Z + \sin\omega^0 X'_S - \cos\omega^0 Y'_S \end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned} x^* &= \cos\omega^0 \cdot x - \sin\omega^0 \cdot y \\ y^* &= \sin\omega^0 \cdot x + \cos\omega^0 \cdot y \end{aligned}$$

läßt sich (41b) weiter umformen zu (41c):

$$\begin{aligned} vS &= \cos\phi' \Delta X_Z + \sin\phi' \Delta Y_Z - \cos\phi' \Delta X_S - \sin\phi' \Delta Y_S + \underbrace{\cos\phi' (X'_Z - X'_S) + \sin\phi' (Y'_Z - Y'_S) - S}_{s' - s} \\ vR &= \frac{1}{S} (-\sin\phi' \Delta X_Z + \cos\phi' \Delta Y_Z + \sin\phi' \Delta X_S - \cos\phi' \Delta Y_S - S' \Delta\omega + \underbrace{\cos\phi' (Y'_Z - Y'_S - y^*) - \sin\phi' (X'_Z - X'_S - x^*)}_{\Delta\phi}) \\ vS &= \cos\phi' \Delta X_Z + \sin\phi' \Delta Y_Z - \cos\phi' \Delta X_S - \sin\phi' \Delta Y_S + \Delta S \\ vR &= -\frac{\sin\phi'}{S} \Delta X_Z + \frac{\cos\phi'}{S} \Delta Y_Z + \frac{\sin\phi'}{S} \Delta X_S - \frac{\cos\phi'}{S} \Delta Y_S - \Delta\omega + \Delta\phi \end{aligned} \quad (41c)$$

Geometrische Interpretation von  $\Delta\phi$  in Abbildung 7

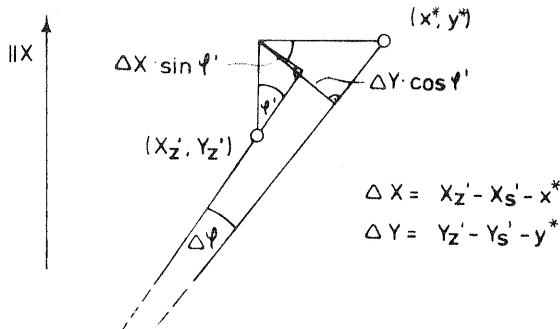


Abb. 7 Geometrische Deutung von  $\Delta\phi$

Die Gleichungen (42) zeigen zunächst am Beispiel freier Stationierungen, daß im Falle der Simulation der Netzausgleichung mit dem allgemeinen Rechenmodell dieselbe Quadratsumme der Verbesserungen erzeugt wird, wie bei der unmittelbaren Netzausgleichung. Die entsprechende Ableitung für den allgemeinen Fall ist mit dem gleichen Ergebnis im Anhang auf Seite 83 beschrieben.

Damit ist bewiesen, daß die Netzausgleichung als Sonderfall aus dem allgemeinen Rechenmodell hervorgeht, wenn der Maßstabsfaktor  $m=1$  gesetzt und die Translationen  $c, d$  als Koordinaten des Standpunkts aufgefaßt werden.

### 3. DURCHFÜHRUNG DER GENAUIGKEITSVERGLEICHE

#### 3.1 Einführung in die Untersuchungsmethodik

Gemäß der allgemeinen Aufgabenstellung sind zunächst die theoretischen Genauigkeiten zu ermitteln, welche mit den zu untersuchenden Rechenverfahren für die ausgeglichenen Koordinaten erzielt werden.

Ausgangspunkt für die notwendigen numerischen Berechnungen ist das den Verfahrensgruppen gemeinsame Rechenmodell, weil es die Ermittlung der Genauigkeiten aus den verschiedenen Rechenverfahren durch einen Rechenalgorithmus ermöglicht.

Die Bestimmung der Genauigkeiten der ausgeglichenen Koordinaten wird nun durchgeführt, indem die Methode des allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf die jeweilige Funktion angewendet wird mit der das zu untersuchende Rechenverfahren im allgemeinen Rechenmodell spezifiziert ist. Dieses Vorgehen nach dem allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt theoretische Genauigkeiten in Form einer Kovarianzmatrix für die ausgeglichenen Koordinaten.

#### 3.2 Ermittlung der Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Koordinaten

Die ausgeglichenen Koordinaten erhält man in jedem Fall aus einer Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

Setzt man für die Fehlergleichungen allgemein  $v = Ax - f$  dann gilt:

$$x = (A'PA)^{-1} A'Pf \quad (43)$$

- x Vektor der Unbekannten
- A Koeffizientenmatrix der Verbesserungsgleichungen
- P Gewichtsmatrix
- f Vektor der Absolutglieder

Die gesuchten Genauigkeitseigenschaften der Unbekannten x werden mit der Kovarianzmatrix  $Q_{xx}$  beschrieben.

Durch Anwendung des allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf die Funktion (43) ergibt sich  $Q_{xx}$  wie bekannt:

$$Q_{xx} = (A'PA)^{-1} A'P \cdot Q_{ff} \cdot PA \cdot (A'PA)^{-1} \quad (44)$$

wobei

$Q_{ff}$  = Kovarianzmatrix der Beobachtungen oder Ersatzbeobachtungen

Der Kovarianzmatrix  $Q_{ff}$  in Gleichung (44) kommt hier eine ganz zentrale Bedeutung zu. Sie repräsentiert die stochastisch streng hergeleiteten Genauigkeitseigenschaften der zu verbessernden Beobachtungen und bildet die gemeinsame strenge Basis für die Genauigkeitsvergleiche der Rechenverfahren bei der Betrachtung einer Netzkonfiguration, unabhängig davon, welche Kovarianz- bzw. Gewichtsmatrix im Einzelfall in die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen eingeführt wird. Die möglichst realistische Kovarianzmatrix  $Q_{ff}$  der Beobachtungen bzw. Ersatzbeobachtungen ist also zu unterscheiden von den je-

weiligen Kovarianz- oder Gewichtsmatrizen  $P^{-1}$  bzw.  $P$ , die in den Rechenverfahren Verwendung finden.

Für die in das allgemeine Rechenmodell eingehenden Ersatzbeobachtungen  $(x, y)$  ist die Matrix  $Q_{ff}$  mit den Elementen der Kovarianzmatrizen  $Q_{kk}$  bzw.  $Q_{kk}^x$  zu besetzen (vgl. 2.1.3, Gleichungen (15), (18)).

### 3.3 Der Punktfehler nach Werkmeister

Die nach Gleichung (44) berechnete Kovarianzmatrix  $Q_{xx}$  setzt sich aus den Varianzen und Kovarianzen der ausgeglichenen Koordinaten der Punkte zusammen. Für Genauigkeitsangaben eines einzelnen Punktes können seine Varianzen  $q_{xx}$ ,  $q_{yy}$  und die Kovarianz  $q_{xy}$  aus  $Q_{xx}$  entnommen werden.

Diese Koeffizienten stellen jedoch ein wenig anschauliches und schlecht zu Vergleichen geeignetes Genauigkeitsmaß dar. Deshalb wird, um zu einem geeigneten Fehlermaß für die ausgeglichenen Koordinaten eines Punktes zu kommen, der mittlere Punktfehler nach Werkmeister eingeführt (Werkmeister |21|, Großmann |22|). Er vereinigt die für einen Punkt charakteristischen Varianzen  $q_{xx}$ ,  $q_{yy}$  und die Kovarianz  $q_{xy}$  nach folgender Gleichung

$$F_p = \sqrt{q_{xx} \cdot q_{yy} - q_{xy}^2} \quad (45)$$

Der Werkmeister'sche Punktfehler ist der Fläche der Fehlerellipse proportional und damit ein Wert quadratischer Dimension. Um zu einem in der Geodäsie üblichen linearen Fehlermaß zu kommen wird aus  $F_p$  noch die Wurzel gezogen. Als mittlerer Punktfehler wird bei der folgenden Untersuchung auf diesen Wert  $m_p$  zurückgegriffen.

$$m_p = \sqrt{F_p} \quad (46)$$

Die bis hierher ermittelten theoretischen Genauigkeitsangaben stellen keine absoluten Werte dar, denn sie werden in Einheiten des mittleren Gewichtseinheitsfehlers  $\sigma_0$  erhalten. Für die Genauigkeitsuntersuchungen wird  $\sigma_0 = 1 \text{ cm}$  gesetzt. Für die Genauigkeitsvergleiche ist der Wert von  $\sigma_0$  zwar unerheblich, er muß jedoch bei allen Untersuchungen gleich sein. Die relativen Genauigkeitsunterschiede werden somit aufgrund der gemeinsamen Ausgangssituation aller Rechenverfahren streng erhalten.

### 3.4 Benennung und formelmäßige Beschreibung der Rechenvarianten

Nach diesen allgemeinen Verfahrensfragen werden nun die zu untersuchenden Rechenverfahren als Spezialisierungen des allgemeinen Rechenmodells formelmäßig angegeben und die zugehörigen Gewichts- und Kovarianzmatrizen aufgeführt.

Untersucht werden Netzausgleichung und drei Varianten der Blockausgleichung. Es ist deshalb vorab notwendig, diese Varianten eindeutig zu benennen, wozu sich die Anzahl der in die Blockausgleichungsverfahren eingeführten Parameter und die verwendete Gewichtsmatrix anbieten.

Was bislang als "Blockausgleichung" schlechthin bezeichnet wurde heißt nun genauer:

- 4 Parameter Blockausgleichung mit vereinfachtem stochastischen Modell  
(4 Par. Blockausgleichung, stoch. vereinf.)

Entsprechend lauten die Benennungen der anderen Blockvarianten:

- 4 Parameter Blockausgleichung mit stochastisch strengem Modell  
(4 Par. Blockausgleichung, stoch. str.)
- 3 Parameter Blockausgleichung mit stochastisch vereinfachtem Modell  
(3 Par. Blockausgleichung, stoch. vereinf.)

Letztere Variante wird deshalb mit in die Untersuchungen einbezogen, weil sie die Überparametrisierung der 4 Parameter Blockausgleichungen vermeidet. Sie ist im Funktionalmodell mit der Netzausgleichung identisch, läßt im übrigen aber die stochastischen Vereinfachungen ( $P=E$ ) der Blockausgleichung zu.

In dieser Betrachtungsweise ist die Netzausgleichung mit einer 3 Parameter Blockausgleichung mit stochastisch strengem Modell identisch.

#### Verbesserungsgleichungen, Gewichts- und Kovarianzmatrizen der Rechenvarianten

Da im allgemeinen Fall die von verschiedenen Standpunkten aus gemachten Beobachtungen unabhängig und unkorreliert sind, genügt hier die Angabe der Verbesserungsgleichung eines Standpunktes.

Die  $i$ -Beobachtungen eines Standpunktes haben die Indices 1, 2, 3 ...  $i$ .

##### a) Netzausgleichung

Verbesserungsgleichungen (siehe auch S. 34, Gleichungen (32) - (35)):

$$\begin{aligned} vx_1 &= \cos\omega^\circ \Delta X_{z_1} + \sin\omega^\circ \Delta Y_{z_1} + y_1^\circ \Delta\omega - \cos\omega^\circ \Delta X_s - \sin\omega^\circ \Delta Y_s + x_1^\circ - x_1 \\ vy_1 &= -\sin\omega^\circ \Delta X_{z_1} + \cos\omega^\circ \Delta Y_{z_1} - x_1^\circ \Delta\omega + \sin\omega^\circ \Delta X_s - \cos\omega^\circ \Delta Y_s + y_1^\circ - y_1 \\ &\vdots \\ vx_i &= \cos\omega^\circ \Delta X_{z_i} + \sin\omega^\circ \Delta Y_{z_i} + y_i^\circ \Delta\omega - \cos\omega^\circ \Delta X_s - \sin\omega^\circ \Delta Y_s + x_i^\circ - x_i \\ vy_i &= -\sin\omega^\circ \Delta X_{z_i} + \cos\omega^\circ \Delta Y_{z_i} - x_i^\circ \Delta\omega + \sin\omega^\circ \Delta X_s - \cos\omega^\circ \Delta Y_s + y_i^\circ - y_i \end{aligned}$$

Gewichtsmatrix:

$$P = \sigma_0^2 \cdot Q_{kk}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 y_1} & \cdots & \sigma_{x_1 y_i} \\ & \sigma_{y_1}^2 & & \sigma_{y_1 y_i} \\ & & & \vdots \\ & & & \sigma_{y_i}^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \sigma_0^2 \quad (47)$$

Kovarianzmatrix  $Q_{ff}$ :

$$Q_{ff} = Q_{kk}$$

b) 4 Parameter Blockausgleichung, stochastisch vereinfacht  
Verbesserungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 vx_1 &= \cos \omega^\circ \Delta X_1 + \sin \omega^\circ \Delta Y_1 - x_1^\circ \Delta m + y_1^\circ \Delta \omega - \cos \omega^\circ \Delta c - \sin \omega^\circ \Delta d + x_1^\circ - x_1 \\
 vy_1 &= -\sin \omega^\circ \Delta X_1 + \cos \omega^\circ \Delta Y_1 - y_1^\circ \Delta m - x_1^\circ \Delta \omega + \sin \omega^\circ \Delta c - \cos \omega^\circ \Delta d + y_1^\circ - y_1 \\
 &\vdots \\
 vx_i &= \cos \omega^\circ \Delta X_i + \sin \omega^\circ \Delta Y_i - x_i^\circ \Delta m + y_i^\circ \Delta \omega - \cos \omega^\circ \Delta c - \sin \omega^\circ \Delta d + x_i^\circ - x_i \\
 vy_i &= -\sin \omega^\circ \Delta X_i + \cos \omega^\circ \Delta Y_i - y_i^\circ \Delta m - x_i^\circ \Delta \omega + \sin \omega^\circ \Delta c - \cos \omega^\circ \Delta d + y_i^\circ - y_i
 \end{aligned} \tag{48}$$

Gewichtsmatrix:

$$P = E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \tag{49}$$

Kovarianzmatrix  $Q_{ff}$ :

$$Q_{ff} = Q_{kk} \quad (\text{siehe Gl. (15)})$$

c) 4 Parameter Blockausgleichung, stochastisch streng  
Verbesserungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 vx_1 &= \cos \omega^\circ \Delta X_1 + \sin \omega^\circ \Delta Y_1 - x_1^\circ \Delta m + y_1^\circ \Delta \omega - \cos \omega^\circ \Delta c - \sin \omega^\circ \Delta d + x_1^\circ - x_1 \\
 vy_1 &= -\sin \omega^\circ \Delta X_1 + \cos \omega^\circ \Delta Y_1 - y_1^\circ \Delta m - x_1^\circ \Delta \omega + \sin \omega^\circ \Delta c - \cos \omega^\circ \Delta d + y_1^\circ - y_1 \\
 &\vdots \\
 vx_i &= \cos \omega^\circ \Delta X_i + \sin \omega^\circ \Delta Y_i - x_i^\circ \Delta m + y_i^\circ \Delta \omega - \cos \omega^\circ \Delta c - \sin \omega^\circ \Delta d + x_i^\circ - x_i \\
 vy_i &= -\sin \omega^\circ \Delta X_i + \cos \omega^\circ \Delta Y_i - y_i^\circ \Delta m - x_i^\circ \Delta \omega + \sin \omega^\circ \Delta c - \cos \omega^\circ \Delta d + y_i^\circ - y_i
 \end{aligned} \tag{50}$$

Gewichtsmatrix:

$$P = \sigma_0^2 \cdot Q_{kk}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 y_1} & \cdots & \sigma_{x_1 y_i} \\ & \sigma_{y_1}^2 & & \sigma_{y_1 y_i} \\ & & & \vdots \\ & & & \sigma_{y_i}^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \sigma_0^2 \tag{51}$$

Kovarianzmatrix  $Q_{ff}$ :

$$Q_{ff} = Q_{kk}$$

d) 3 Parameter Blockausgleichung, stochastisch vereinfacht  
Verbesserungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 vx_1 &= \cos\omega^\circ \Delta X_1 + \sin\omega^\circ \Delta Y_1 + y_1^\circ \Delta\omega - \cos\omega^\circ \Delta c - \sin\omega^\circ \Delta d + x_1^\circ - x_1 \\
 vy_1 &= -\sin\omega^\circ \Delta X_1 + \cos\omega^\circ \Delta Y_1 - x_1^\circ \Delta\omega + \sin\omega^\circ \Delta c - \cos\omega^\circ \Delta d + y_1^\circ - y_1 \\
 &\vdots \\
 vx_i &= \cos\omega^\circ \Delta X_i + \sin\omega^\circ \Delta Y_i + y_i^\circ \Delta\omega - \cos\omega^\circ \Delta c - \sin\omega^\circ \Delta d + x_i^\circ - x_i \\
 vy_i &= -\sin\omega^\circ \Delta X_i + \cos\omega^\circ \Delta Y_i - x_i^\circ \Delta\omega + \sin\omega^\circ \Delta c - \cos\omega^\circ \Delta d + y_i^\circ - y_i
 \end{aligned} \tag{52}$$

Gewichtsmatrix:

$$P = E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \tag{53}$$

Kovarianzmatrix  $Q_{ff}$ :

$$Q_{ff} = Q_{kk} \quad (\text{siehe Gl. (15)})$$

Mit den angegebenen Verbesserungsgleichungen und stochastischen Modellannahmen kann direkt in die allgemeine Gleichung (44) eingegangen werden, um als Ergebnis die Kovarianzmatrix  $Q_{xx}$  der ausgeglichenen Koordinaten des untersuchten Rechenverfahrens zu erhalten.

### 3.5 Beschreibung der angenommenen Punktverbände

Die Genauigkeitsuntersuchungen werden an schematischen Netzen und Blöcken durchgeführt, denen tachymetrische Beobachtungen zugrunde liegen. Die zu den Untersuchungen konstruierten schematischen Punktverbände werden in ihrer geometrischen Anordnung und Größe so festgelegt, daß sie, soweit dies überhaupt möglich ist, die in der Praxis vorkommenden Aufnahmesituationen schematisch repräsentieren können. Als Netzvorlage zu Genauigkeitsuntersuchungen von Netz- und Blockausgleichung werden folgende tachymetrischen Punktverbände angenommen, wobei der Schwerpunkt der Untersuchungen auf den flächenhaften Punktverbänden liegt:

- beidseitig angeschlossene und gestreckte Polygonzüge
- beidseitig angeschlossene zugähnliche Punktverbände
- flächenhafte Punktverbände
- flächenhafter Punktverband mit Polarpunkten
- Einzelpunktbestimmungen

Es ist anzunehmen, daß die Geometrie der Meßanlage einen Einfluß auf die erzielbaren Genauigkeiten hat. Deshalb werden, um Erkenntnisse über diesen Einfluß zu bekommen, jeweils die Genauigkeiten von mehreren ähnlichen Punktverbänden errechnet.

### 3.6 Besonderheiten der Untersuchungen und Angaben zum Rechenprogramm

Bei den Untersuchungen ist dem Zusammenhang zwischen Rechenverfahren und Netzform besondere Beachtung zu schenken. Die Genauigkeitsvergleiche werden nämlich zunächst in der Form durchgeführt, daß alle Punkte der Netze in die Ausgleichungsverfahren einbezogen werden. Im Auswerteprogramm Heupel [4] ist dies jedoch nicht zutreffend. Wie eingangs beschrieben, wird die Netzausgleichung in der Regel mit einigen ausgesuchten Punkten des Netzes durchgeführt und die verbleibenden zu bestimmenden Punkte werden polar eingerechnet und eventuell bei Mehrfachbestimmungen gemittelt. Bei Blockausgleichungen werden dagegen alle Punkte in das Ausgleichungsverfahren einbezogen.

Insofern haben die Untersuchungen, welche jeweils alle Punkte mit in die eigentlichen Ausgleichungsverfahren einschließen, im Vergleich zu dem Auswerteprogramm Heupel [4] nur informativen Charakter. Sie werden wie erwartet zeigen, daß die Blockausgleichungsverfahren zwar immer anwendbar sind, jedoch allgemein schlechter abschneiden als die Netzausgleichung.

Die Betonung der Genauigkeitsvergleiche muß deshalb auf dem Fall liegen, für den die Blockausgleichung speziell vorgeschlagen ist: Große Datenmengen, geometrischer Zusammenhang des Punktverbandes nur über Verknüpfungspunkte und simultane Berechnung aller Koordinaten. Die Netzausgleichung nach Heupel muß hier dagegen mit ausgesuchten Netzknoten im strengen Ausgleichungsverfahren auskommen. Bei diesem Fall wird sich zeigen, daß die Blockausgleichung der Netzausgleichung praktisch ebenbürtig ist.

Einige Angaben zur praktischen Berechnung:

Für die numerischen Berechnungen der gesuchten Gewichtskoeffizienten wurde ein Rechenprogramm für den Großrechner Telefunken TR 440 der Universität Stuttgart erstellt. Bei der Konzeption des Rechenprogramms wurde darauf geachtet, daß es besonders hinsichtlich des Kernspeicher- und Rechenzeitbedarfs optimiert wurde. So konnten auch Gewichtskoeffizienten von umfangreichen Blöcken mit vertretbarem Aufwand an Kernspeicherkapazität und Rechenzeit berechnet werden.

Das Programm setzt voraus, daß die polaren Beobachtungselemente der Punkte und die den Beobachtungen zugeordneten Genauigkeitseigenschaften vorliegen.

Des weiteren müssen die einbezogenen Punkte als Festpunkte, Verknüpfungspunkte oder Einzelpunkte gekennzeichnet sein.

Als Ergebnis werden Kovarianzmatrix, Elemente der Fehlerellipsen und Punktfehler nach Werkmeister der ausgeglichenen Punkte aus den vier zu untersuchenden Rechenverfahren ausgegeben.

Die Berechnung der in 3.4 aufgeführten Fälle erfolgt stets nach demselben nachstehenden Programmablauf:

- Einlesen der Beobachtungselemente (R, S) mit zugeordneten Genauigkeitseigenschaften und Punktartkodierung
- Berechnung der Matrix  $Q_{ff} = Q_{kk}$  (siehe Gl. (15)) und Festlegung der Gewichtsmatrix P in Abhängigkeit von der Rechenmethode
- Aufstellen der Koeffizientenmatrix A (siehe Gl. (43)) der Verbesserungsgleichungen in Abhängigkeit von der Rechenmethode

- Berechnung der Kovarianzmatrix  $Q_{xx}$
- Ausgabe der gesuchten Werte für die ausgeglichenen Koordinaten der Punkte

Das Rechenprogramm ist in ALGOL 60 geschrieben und segmentiert. Es berücksichtigt alle Symmetrie-Eigenschaften und Bandstrukturen der auftretenden Matrizen und vermeidet so Multiplikationen mit Null bei gleichzeitiger Kernspeichereinsparung.

Das Rechenprogramm allein benötigt ca. 18 K Ganzworte. Es stehen insgesamt 60 K Ganzworte zur Verfügung. Damit können ca. 130 Unbekannte und 200 Beobachtungen in eine Berechnung einbezogen werden.

Für größere Fälle muß die Berechnung in Teilschritten durchgeführt werden.

Um die Ergebnisse des größten berechneten Blocks mit 64 Standpunkten zu erhalten, mußten für ein Rechenverfahren 834 Unbekannte und 1024 Beobachtungen mit in die Genauigkeitsberechnung einbezogen werden.

Die Rechenzeit im Kern betrug zur Berechnung der Gewichtskoeffizienten (quadratischer Block mit 64 Standpunkten; siehe Tab. 1, S. 71) für vier Rechenmethoden ca. 1.25<sup>h</sup>.

Aufgrund der erforderlichen Rechenzeiten wurde deshalb auf die Berechnung von noch größeren Blöcken verzichtet. Diese Einschränkung erscheint zulässig, da die Ausdehnung der untersuchten Blöcke eine Größe hat, die bei der zugrunde liegenden Festpunktverteilung in der Praxis kaum erreicht wird, bzw. weil bei noch größeren Systemen die Genauigkeitseigenschaften leicht extrapoliert werden können, wie die Parallelfälle aus der Photogrammetrie beweisen.

#### 4. RECHNERISCHE DURCHFÜHRUNG UND ERGEBNISSE

##### 4.1 Theoretische Genauigkeitsuntersuchungen an flächenhaften Punktverbänden

###### 4.1.1 Vorbemerkungen

Die folgenden theoretischen Genauigkeitsuntersuchungen stellen die Fehlerfortpflanzungseigenschaften der Rechenverfahren an tachymetrisch aufgemessenen flächenhaften Punktverbänden dar. Diese Untersuchungen sind deshalb interessant, weil die Blockausgleichung speziell für diese Art der Punktaufnahme als Rechenverfahren vorgeschlagen wurde. Die Genauigkeitsuntersuchungen an flächenhaften Punktverbänden werden unter zwei Gesichtspunkten durchgeführt.

Zum einen soll ein Vergleich zwischen den Genauigkeitseigenschaften der Rechenverfahren durchgeführt werden und zum anderen sollen charakteristische Eigenschaften der blockweisen Berechnung herausgestellt werden.

Für letzteren Punkt brauchen hier keine besonderen Berechnungen durchgeführt zu werden. Es zeigt sich nämlich, daß die Resultate der vergleichenden Genauigkeitsuntersuchungen erlauben, Verbindungen zu bestehenden Untersuchungen aus der Aerotriangulation herzustellen. Die charakteristischen Eigenschaften von Blöcken werden deshalb aus Genauigkeitsuntersuchungen zur Aerotriangulation entnommen, die vergleichenden Genauigkeitsuntersuchungen aber anhand schematischer Blöcke mit quadratischer Ausdehnung zahlenmäßig durchgeführt.

###### 4.1.2 Angaben zur Geometrie der Punktverbände

Die zu diesen Untersuchungen angenommenen Punktverbände setzen sich aus einer von Fall zu Fall unterschiedlich großen Anzahl von Standpunkten zusammen, von denen aus die umliegenden Verknüpfungspunkte tachymetrisch bestimmt sind. Von einem Standpunkt aus werden jeweils acht Verknüpfungspunkte beobachtet, die ein quadratisches Feld abgrenzen. Die Blockkonfiguration ist in Abbildung 8 dargestellt.

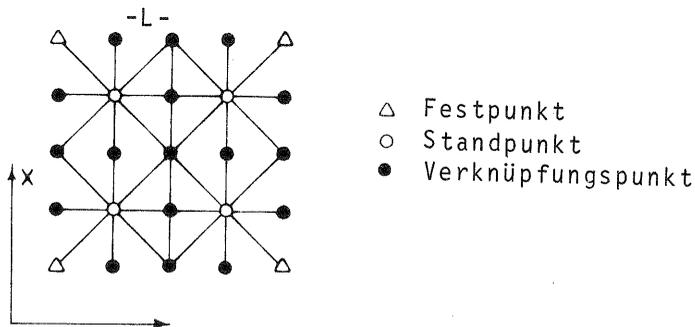


Abb. 8 Blockverband mit quadratischer Ausdehnung

Es werden acht Verknüpfungspunkte pro Standpunkt angenommen, weil für diese Verknüpfungszahl rein praktische und fehlertheoretische Gesichtspunkte sprechen: Praktische Gesichtspunkte insofern, als an einer Nahtstelle zwischen zwei Standpunkten Überbestimmung entsteht, die für Kontrollzwecke unerlässlich ist,

und fehlertheoretische Gesichtspunkte, weil für diese Verknüpfungsart, wie die Untersuchungen noch zeigen werden, ein homogenes Genauigkeitsbild erwartet wird. Die Einpassung eines Blocks auf Festpunkte erfolgt mit vier Festpunkten in den Blockecken. Diese Festpunktverteilung wird für alle untersuchten Beispiele beibehalten.

Wie aus der Photogrammetrie bekannt ist, handelt es sich bei dieser relativ schwachen Festpunktverteilung um einen für Blockausgleichungen ungünstigen Fall. Die vergleichenden Genauigkeitsaussagen lassen deshalb keine besonders günstigen Schlußfolgerungen erwarten.

#### 4.1.3 Zahlenangaben für die Beobachtungen

Zur Berechnung werden schematisch folgende Zahlenwerte angenommen:

- Abstand benachbarter Verknüpfungspunkte  $L = 450 \text{ m}$
- Genauigkeit einer Strecke S:  $\sigma_s = \pm 1 \text{ cm}$
- Genauigkeit einer Richtung R:  $\sigma_r = \pm 10 \text{ cc}$
- Genauigkeit einer Aufstellung im Zielpunkt:  $\sigma_a = \pm 0.4 \text{ cm}$
- fehlerfreie Festpunkte und fehlerfreie Standpunkte (freie Stationierung)

#### 4.1.4 Darstellung der Ergebnisse

Für die verschieden großen Punktverbände werden mit den vorgegebenen Zahlenwerten für die Beobachtungen und deren Genauigkeitseigenschaften die Kovarianzmatrizen der ausgeglichenen Koordinaten nach (44) für die vier Rechenverfahren ermittelt:

- Netzausgleichung
- 4 Parameter Blockausgleichung, stochastisch vereinfacht
- 4 Parameter Blockausgleichung, stochastisch streng
- 3 Parameter Blockausgleichung, stochastisch vereinfacht

Die jeweiligen Kovarianzmatrizen bilden die Grundlage für die Genauigkeitsvergleiche.

Für die Genauigkeitsvergleiche benötigt man indessen nicht die gesamte Kovarianzmatrix  $Q_{xx}$  sondern nur einen Auszug mit den Varianzen  $q_{xx}$ ,  $q_{yy}$ , der Kovarianz  $q_{xy}$  und den daraus abgeleiteten mittleren Punktfehlern  $m_p$ . Aus Symmetriegründen genügt es darüberhinaus, den Auszug aus der Kovarianzmatrix auf einen Teil der Punkte zu beschränken.

Die Ergebnisse können damit in einfachen Tabellen dargestellt werden, die am Schluß der Arbeit zusammengefaßt sind und die Varianzen und mittleren Punktfehler ausweisen. In den Tabellen sind zusätzlich zu den Genauigkeiten der einzelnen Punkte die jeweiligen quadratischen Mittelwerte ausgewiesen. Sie geben Aufschluß über das globale Genauigkeitsverhalten der untersuchten Rechenverfahren.

Die aus den Tabellen berechneten Mittelwerte der Punktfehler und deren Abhängigkeit vom Rechenverfahren und der Größe des zugrundeliegenden Punktverbandes lassen sich in Diagrammen anschaulich machen und diskutieren.

Neben den Mittelwerten über die Punktfehler können auch noch die in den jeweiligen Rechenverfahren auftretenden kleinsten und größten Punktfehler interessant sein. Sie werden graphisch in entsprechender Art und Weise dargestellt und diskutiert.

#### 4.1.5 Ergebnisse und Diskussion

Die für die Genauigkeitsvergleiche der vier Rechenverfahren benötigten Auszüge aus den Kovarianzmatrizen sind für den Fall der flächenhaften Punktverbände in den Tabellen 1, 7, 8, 9 und 10 dargestellt, ebenso die quadratischen Mittelwerte  $m_{pm}$  der mittleren Punktfehler.

Zunächst sind als wichtigste Werte die quadratischen Mittelwerte  $m_{pm}$  in Abhängigkeit von der Größe des Punktverbandes in Abb. 9 dargestellt.

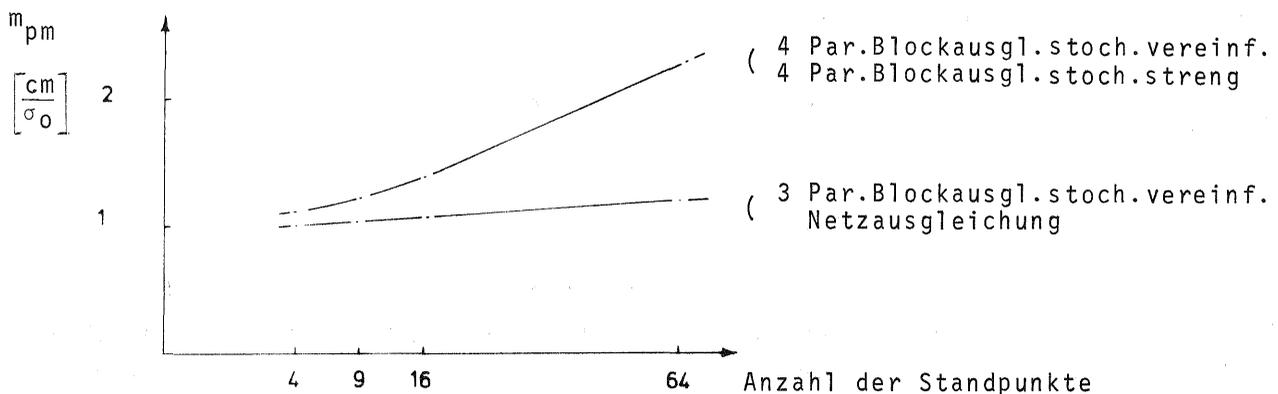


Abb. 9 Abhängigkeit des Mittelwertes  $m_{pm}$  bei quadratischen Blöcken von der Blockgröße

Die Mittelwerte der Punktfehler zeigen für Netzausgleichung und 3 Parameter Blockausgleichung, stochastisch vereinfacht gleichförmig schwach ansteigenden Kurvenverlauf. Für 4 Parameter Blockausgleichung, stochastisch vereinfacht und 4 Parameter Blockausgleichung, stochastisch streng nehmen die theoretischen Genauigkeits-Erwartungen für den Mittelwert jedoch schneller als linear ab.

Das Zusammenfallen der Kurven jeweils zweier Rechenverfahren in Abb. 9 ist nur scheinbar. In Wirklichkeit bestehen jeweils in den Diagrammen nicht mehr darstellbare kleine Genauigkeitsunterschiede.

Die größten Genauigkeitsunterschiede der Mittelwerte zwischen den Rechenverfahren belaufen sich bei Blöcken mit vier Standpunkten auf  $0.1 \text{ cm}/\sigma_0$  zwischen Netzausgleichung und 4 Parameter Blockausgleichung und erhöhen sich auf  $1.1 \sigma_0$  bei Blöcken mit 64 Standpunkten. Bei noch größeren Blöcken und gleichbleibender Festpunktanordnung (je 1 Festpunkt in den Blockecken) würden sich die Genauigkeitsunterschiede weiter vergrößern.

Die dargestellten Verläufe der theoretischen Erwartungswerte zeigen, daß sich Ausgleichungen flächenhafter Punktverbände günstig auf die Fehlerfortpflanzungseigenschaften aller Rechenverfahren auswirken. Die besten Ergebnisse werden mit der Netzausgleichung erzielt. Die 4 Parameter Blockausgleichung, stochastisch vereinfacht weist die größten Genauigkeitsdifferenzen zur Netzausgleichung auf. Die Differenzen sind jedoch im Bereich bis 16 freie Stationierungen mit  $0.3 \text{ cm}/\sigma_0$  so klein, daß für tachymetrische Punktbestimmungen die Genauigkeitsunterschiede zwischen Netzausgleichung und der stochastisch vereinfachten 4 Parameter Blockausgleichung praktisch vernachlässigt werden können. An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, daß hier im Gegensatz zum bisherigen praktischen Gebrauch, alle gemessenen Punkte in die strenge Netzausgleichung eingeführt worden sind. Für die praktische Anwendung sei auch erwähnt, daß mit 16 Standpunkten und 4 Festpunkten hier eine Fläche von ca. 1300 ha überdeckt wird.

Weiterhin ist das Verhalten der minimalen und maximalen Punktfehler im Punktverband interessant.

Die Abbildungen 10 und 11 zeigen die Unterschiede zwischen den Rechenverfahren anhand der größten und kleinsten Punktfehler, die jeweils am Blockrand bzw. im Blockinnern auftreten, in Abhängigkeit der Blockgröße.

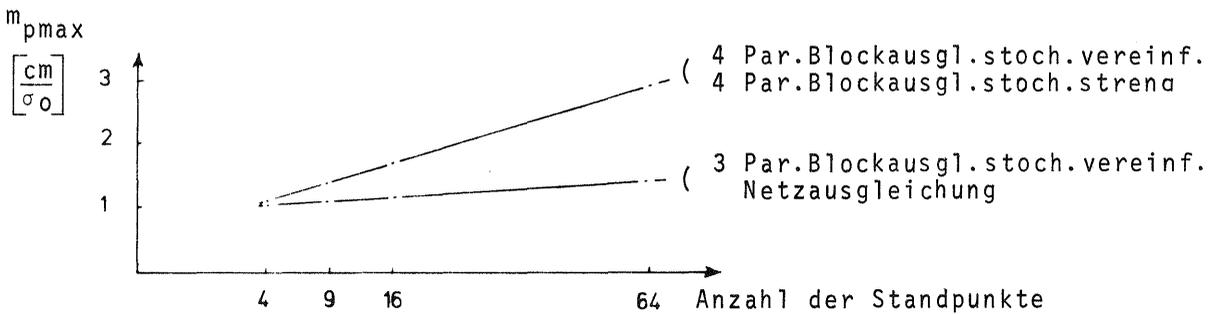


Abb. 10 Abhängigkeit des größten Punktfehlers bei quadratischen Blöcken von der Blockgröße

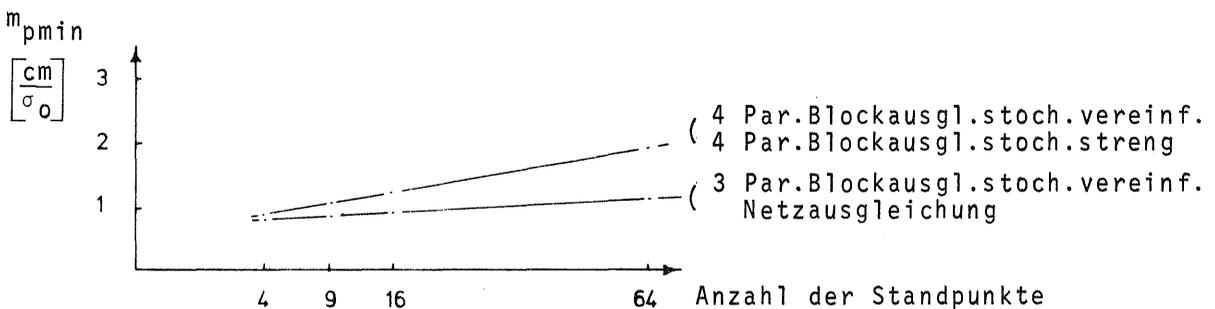


Abb. 11 Abhängigkeit des kleinsten Punktfehlers bei quadratischen Blöcken von der Blockgröße

Für die extremen Punktfehler ergibt sich für alle Rechenverfahren schwach ansteigendes lineares Verhalten. Das Zusammenfallen der Genauigkeitsverläufe von stochastisch strenger und stochastisch vereinfachter Blockausgleichung bzw. zwischen Netzausgleichung und stochastisch vereinfachter 3 Parameter Blockausgleichung rührt wiederum von kleinen, in den Diagrammen nicht mehr darstellbaren Genauigkeitsunterschieden her.

Die Unterschiede zwischen den minimalen und maximalen Genauigkeiten am offenen Blockrand bzw. im Blockinnern sind zwischen den einzelnen Rechenverfahren für kleine Blöcke mit vier Standpunkten vernachlässigbar. Sie wachsen jedoch mit zunehmender Blockgröße und betragen bei 64 Standpunkten  $1.4 \text{ cm}/\sigma_0$ .

#### 4.1.6 Verbindungen zu theoretischen Genauigkeitsuntersuchungen aus der Aerotriangulation

Als eine wichtige Eigenschaft flächenhafter Punktverbände zeigt sich in den Untersuchungsergebnissen (z.B. Tab. 1), daß vereinfachte Annahmen im stochastischen Modell, wie sie bei den stochastisch vereinfachten 4 Parameter- und 3 Parameter-Blockausgleichungen gemacht werden, nur einen sehr kleinen und deshalb vernachlässigbaren Genauigkeitsverlust im Vergleich zu strengen stochastischen Annahmen bewirken.

Es kann deshalb erwartet werden, daß sich Ergebnisse aus theoretischen Genauigkeitsuntersuchungen zur blockweisen Ausgleichung horizontierter photogrammetrischer Modelle auf Blockausgleichungen tachymetrischer Punktbestimmung übertragen lassen.

Diese Erwartung wird damit begründet, daß theoretische Genauigkeitsuntersuchungen zur blockweisen Ausgleichung horizontierter photogrammetrischer Modelle, die z.B. in Ackermann [18], Ebner [25], [26] beschrieben sind, auf dem gleichen Funktionalmodell der Blockausgleichung basieren wie die Berechnung tachymetrischer Punktbestimmung mit der stochastisch vereinfachten 4 Parameter Blockausgleichung. Unterschiede bestehen nur in den Annahmen zum stochastischen Modell der Beobachtungen. Die Ergebnisse hier haben jedoch gezeigt, daß vereinfachende Annahmen im stochastischen Modell die theoretischen Genauigkeitsvoraussagen bei Ausgleichungen flächenhafter Verbände nur in verschwindend kleinem Umfang verfälschen.

Die von Ackermann [18] und Ebner [25], [26] gefundenen Eigenschaften der Blockausgleichung gelten deshalb auch für 4 Parameter Blockausgleichungen tachymetrischer Punktbestimmungen.

Die charakteristischen Eigenschaften der blockweisen Ausgleichung wurden an schematischen und quadratischen Blöcken durch Berechnung theoretischer Genauigkeiten gefunden und haben sich in der Praxis der Aerotriangulation bestätigt (z.B. Ackermann [27]):

- Bei verschieden großen Blöcken mit 4 Festpunkten in den Blockecken ergibt sich ein lineares Anwachsen der theoretischen Punktfehler mit der Blockgröße. Die höchsten Punktgenauigkeiten treten in der Blockmitte, die niedrigsten am offenen Blockrand auf.

Diese Eigenschaften sind hier durch die Ergebnisse von Blockausgleichungen tachymetrischer Punktbestimmung direkt bestätigt.

- Weitaus günstigere Ergebnisse erhält man bei dicht mit Festpunkten besetztem Blockrand. Unter solchen Voraussetzungen können auch für größere Blöcke relative Genauigkeitsunterschiede wie in kleinen Blöcken zwischen den Rechenverfahren erwartet werden. Die zu erwartenden Genauigkeitsunterschiede zwischen den 4 Parameter Blockausgleichungen und der Netzausgleichung bzw. 3 Parameter Blockausgleichung sind im wesentlichen durch die Überparametrisierung hervorgerufen und nur in verschwindendem Umfang durch Vereinfachungen im stochastischen Modell bedingt.
- Bei dicht mit Festpunkten besetztem Blockrand verschieben sich die Punkte mit minimaler Genauigkeit zur Blockmitte hin. Mit zunehmender Blockgröße und dichtem Festpunktbesatz am Blockrand nehmen die Punktgenauigkeiten in der Blockmitte nur sehr schwach ab. Der Verlauf der Genauigkeitserwartungen läßt sich hier mit einer logarithmischen Funktion approximieren (Meissl |28|).
- Mit steigender Anzahl der Verknüpfungspunkte erhöhen sich auch die Genauigkeitserwartungen der Blockausgleichung. Gleichzeitig stellt sich eine zunehmende Unempfindlichkeit gegenüber der Festpunktverteilung ein.

Die gemachten Aussagen stützen sich auf theoretische Genauigkeitsuntersuchungen, die zwar auf vereinfachten stochastischen Annahmen basieren, sich aber in der Aerotriangulation in erster Näherung bestätigt haben. Inwieweit sich diese Ergebnisse auf tachymetrische Punktbestimmungen übertragen lassen, wird im wesentlichsten davon abhängen, in welchem Maß in der Praxis die schematischen Annahmen zur Lage der Verknüpfungspunkte erfüllt sind. Zur Frage der Verknüpfungspunkte folgen dann auch spezielle Untersuchungen.

#### 4.2 Genauigkeitsverhalten von gestreckten und beidseitig angeschlossenen Polygonzügen

##### 4.2.1 Allgemeine Beschreibung von Längs- und Querfehlern in den untersuchten Zügen

Über die herkömmlichen Ausgleichungsverfahren, insbesondere auch Netzausgleichung, zur Berechnung von Polygonzügen liegen umfangreiche Genauigkeitsuntersuchungen vor (z.B. Gotthardt |23|). Diese Untersuchungen beschreiben das Genauigkeitsverhalten von schematischen Polygonzügen als Funktionen der Zuglänge bzw. der Anzahl der Polygonpunkte.

Ziel der Untersuchungen hier ist es, auch das Genauigkeitsverhalten der Varianten der Blockausgleichung möglichst allgemein wiederzugeben, denn formal können mit den Blockausgleichsverfahren auch Polygonzüge berechnet werden.

Aus fehlertheoretischen Gründen ist die Berechnung von Polygonzügen mittels 4 Parameter Blockausgleichung jedoch nicht ratsam und wurde auch von F. Ackermann in |5| ausgeschlossen. Trotzdem ist es interessant, die Größen der Genauigkeitsunterschiede zwischen Blockausgleichung und strenger Berechnung zu kennen. Aufbauend auf dem bekannten Genauigkeitsverlauf bei strenger Netzausgleichung (s. Gotthardt |23|) wird geprüft, ob die für die Netzausgleichung

geltenden Funktionen für normierte Längs- und Querfehler auf die anderen Rechenverfahren übertragen werden können.

Die allgemeinen Funktionen für den Genauigkeitsverlauf von schematischen Polygonzügen nach strenger Netzausgleichung lauten:

#### Normierter Längs- und Querfehler

Querfehler:

$$QF_i = \sqrt{q_{xx_i}} \cdot \rho / (\sqrt{Q_{\beta\beta}} \cdot S \cdot \sqrt{n_B^3}) \quad (47)$$

$QF_i$  = normierter Querfehler

$q_{xx_i}$  = Varianz der Koordinate x im Polygonpunkt i

$Q_{\beta\beta}$  = Varianz eines Brechungswinkels

S = Seitenlängen des Zuges

$n_B$  = Anzahl der Brechungswinkel

Längsfehler:

$$LF_i = \sqrt{q_{yy_i}} / (\sqrt{Q_{ss}} \cdot \sqrt{n_s}) \quad (48)$$

$LF_i$  = normierter Längsfehler

$q_{yy_i}$  = Varianz der Koordinate y im Polygonpunkt i

$Q_{ss}$  = Varianz einer Streckenmessung

$n_s$  = Anzahl der Polygonseiten

Die Formeln für die normierten Längs- und Querfehler werden überprüft bzw. bestätigt, indem die theoretischen Gewichtskoeffizienten  $q_{xx_i}$  und  $q_{yy_i}$  von mehreren Polygonzügen unterschiedlicher Länge und mit unterschiedlichen Genauigkeitsannahmen für die Meßgrößen theoretisch berechnet werden und in die Gleichung (47) und (48) eingesetzt werden.

Die allgemeine Darstellung der Genauigkeitseigenschaften der interessierenden Rechenverfahren wird analog durchgeführt. Es werden zunächst für mehrere schematische Polygonzüge die theoretischen Varianzen  $q_{xx}$  und  $q_{yy}$  mit den zu untersuchenden Rechenverfahren errechnet. Die theoretisch berechneten Werte sind danach so zu normieren, daß sich aus allen Zügen übereinstimmende normierte Längs- und Querfehler ergeben.

Für die Querfehler ist dies für alle Rechenverfahren ohne weiteres möglich, weil sich für sie aus allen Rechenverfahren gleiche Werte ergeben. Die Längsfehler sind jedoch nur für die stochastisch vereinfachte 3 Parameter Blockausgleichung mit den bekannten Formeln der Netzausgleichung (47) normierbar. Die Rechenverfahren für die stochastisch strenge und die stochastisch vereinfachte 4 Parameter Blockausgleichung müssen dagegen zur allgemeinen Darstellung der Genauigkeitseigenschaften in Längsrichtung für sich betrachtet werden. Beachtet man, daß bei diesen beiden Varianten der Blockausgleichung die Maßstabsfaktoren als Freiheitsgrade in Längsrichtung des Zuges wirken, vergleichbar den in Querrichtung des Zuges wirkenden Freiheitsgraden der Orien-

tierung der Richtungssätze in den Standpunkten, dann liegt der Ansatz nahe, die Längsfehler mit einer Funktion zu beschreiben, welche analog zur Darstellung der Querfehler proportional zu  $\sqrt{n_s^3}$  wächst. Eine ausführliche Untersuchung zu diesem Themenkreis enthält die "Selbständige Arbeit" [24]. Die dort angegebenen Ergebnisse werden hierher übernommen.

Demnach werden analog zu (47) die Genauigkeitseigenschaften in Längsrichtung von schematischen Zügen bei stochastisch strengen und bei stochastisch vereinfachten 4 Parameter Blockausgleichungen in der Anwendung auf schematische Polygonzüge folgendermaßen beschrieben:

$$LF_i = \sqrt{q_{yy_i}} / (\sqrt{Q_{ss}} \cdot \sqrt{n_s^3}) \quad (49)$$

$LF_i$  = Normierter Längsfehler

$q_{yy_i}$  = Varianz der Koordinate y im Polygonpunkt i

$Q_{ss}$  = Varianz einer Streckenmessung

$n_s$  = Anzahl der Polygonseiten

#### 4.2.2 Ermittlung und Diskussion der Ergebnisse

Mit Hilfe des allgemeinen Rechenmodells werden nun die Zahlenrechnungen zur Ermittlung der theoretischen Genauigkeiten von schematischen Polygonzügen durchgeführt. Den Untersuchungen liegen gestreckte Polygonzüge mit konstanter Seitenlänge S, beidseitigem Anschluß und  $(n-2)$  Neupunkten zugrunde, siehe Abb. 12:

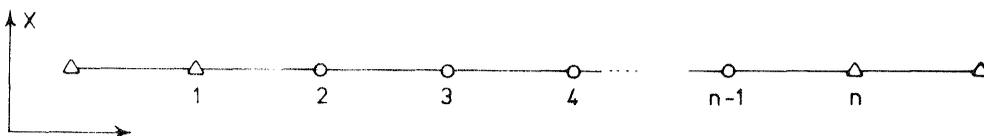


Abb. 12 Schema eines Polygonzuges

Die Beobachtungen sind so angelegt, daß auf den Standpunkten 1 ... n jeweils zwei Richtungen und zwei Strecken gemessen werden. Es werden für alle Stand- und Zielpunkte zu vernachlässigende Zentrierfehler angenommen und es werden fehlerfreie Festpunkte vorausgesetzt.

Die Varianzen und Kovarianzen der Polygonpunkte und die daraus abgeleiteten normierten Quer- und Längsfehler sind am Beispiel von zwei Polygonzügen mit 9 bzw. 17 Standpunkten in Tabelle 12, Seite 82 angegeben.

Zur übersichtlichen Darstellung werden die errechneten normierten Längs- und Querfehler der Polygonpunkte i in Abhängigkeit von der Lage des Punktes i im Zug für die untersuchten Rechenverfahren in Diagramme eingetragen. Diese so eingezeichneten Stützwerte werden graphisch durch kontinuierliche Kurven verbunden. Die Diagramme sind in den Abbildungen 13 und 14 dargestellt.

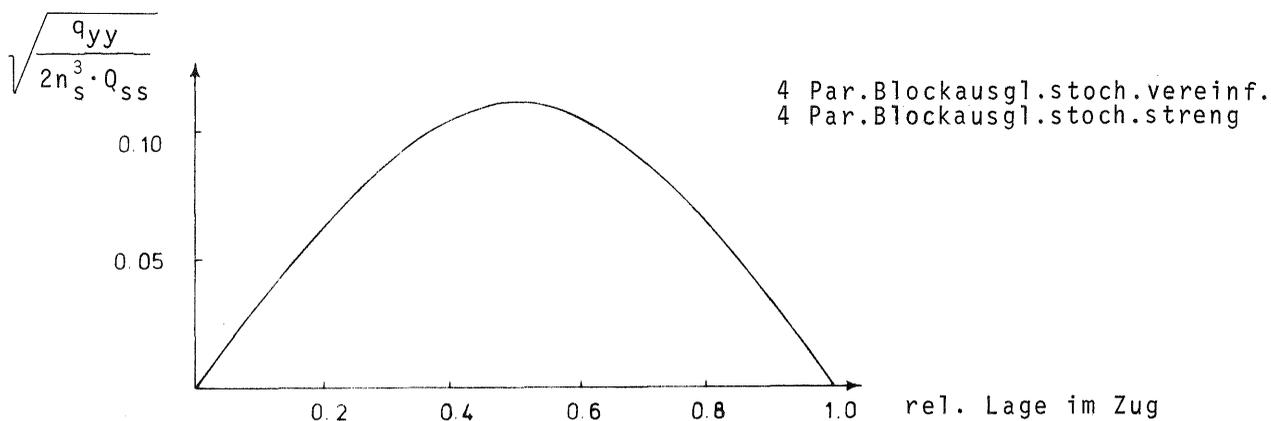
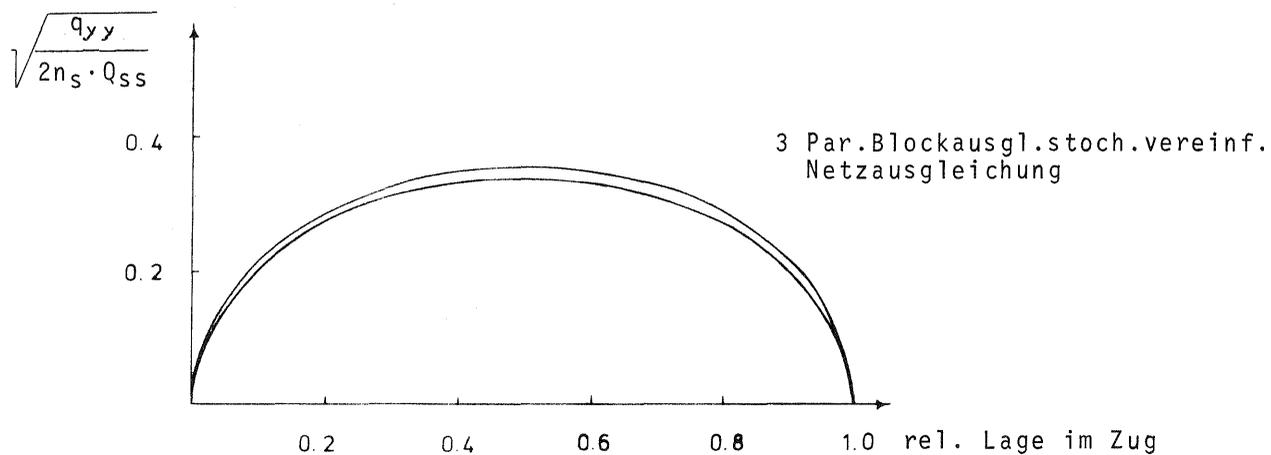


Abb. 13 Abhängigkeit des Längsfehlers in beidseitig angeschlossenen Polygonzügen von der Lage der Punkte im Zug

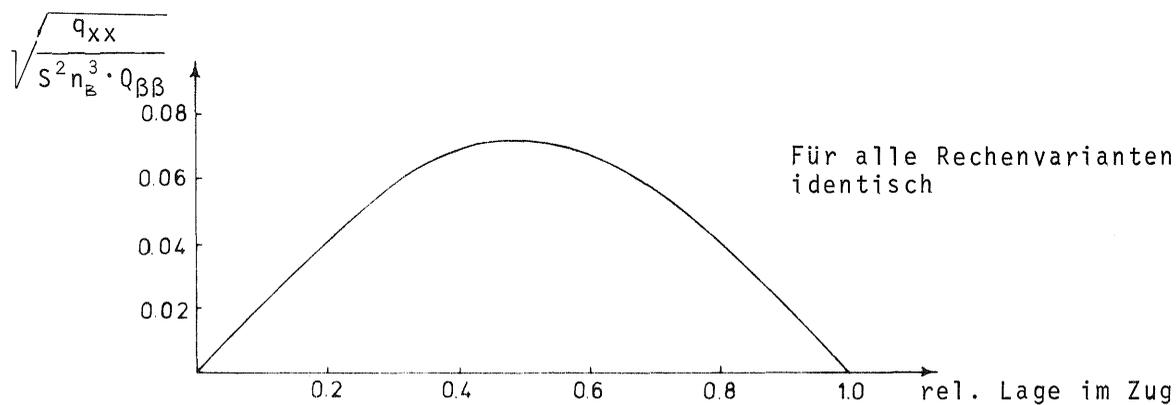


Abb. 14 Abhängigkeit des Querfehlers in beidseitig angeschlossenen Polygonzügen von der Lage der Punkte im Zug

Die Diagramme erlauben die theoretischen Genauigkeitswerte aus den vier untersuchten Rechenverfahren für beliebige Polygonzüge miteinander zu vergleichen. Man kommt zu den folgenden Ergebnissen:

Die Querfehler in den Polygonpunkten sind für alle vier untersuchten Rechenverfahren gleich. Die Rechenverfahren sind also bezüglich dieser Fehler in ihren Fehlerfortpflanzungseigenschaften gleichwertig. Die errechneten Werte verlaufen proportional zu  $\sqrt{n_B^3}$ .

Für die Längsfehler ergeben sich dagegen bei der Netzausgleichung und der stochastisch vereinfachten 3 Parameter Blockausgleichung Fehlerfortpflanzungseigenschaften die nur proportional zur Wurzel aus der Anzahl der Polygonseiten ansteigen. Dabei ergibt die stochastisch vereinfachte 3 Parameter Blockausgleichung im Vergleich zur Netzausgleichung um ca. 2 % schlechtere Genauigkeiten.

Bei stochastisch strenger und stochastisch vereinfachter 4 Parameter Blockausgleichung ergibt sich dagegen ein Anwachsen der Längsfehler proportional zu  $\sqrt{n_S^3}$ .

Damit sind die Genauigkeiten bei stochastisch strenger und stochastisch vereinfachter 4 Parameter Blockausgleichung in Zugrichtung deutlich schlechter als bei der Netzausgleichung oder der stochastisch vereinfachten 3 Parameter Blockausgleichung. Stellt man aber in Rechnung, daß die Längsfehler bei stochastisch strenger und stochastisch vereinfachter 4 Parameter Blockausgleichung nicht stärker als die Querfehler aller untersuchten Rechenverfahren ansteigen, kommt man zu folgendem Schluß:

Es ist Vorsicht geboten, aber immerhin können bei entsprechenden Werten für Seitenlänge und stochastisches Modell für Züge, die mit stochastisch strenger oder stochastisch vereinfachter 4 Parameter Blockausgleichung berechnet werden, homogene Genauigkeitsverteilungen vorausgesagt werden, d.h. es ergeben sich kreisförmige Fehlerellipsen für die ausgeglichenen Koordinaten der Neupunkte. Je länger ein Zug jedoch ist, umso mehr machen sich die durch die Überparametrisierung bedingten ungünstigen Fehlerfortpflanzungseigenschaften bemerkbar.

Zur Verdeutlichung der Fehlerfortpflanzungseigenschaften der einzelnen Rechenverfahren werden die in der Zugmitte auftretenden größten Punktfehler für einige Polygonzüge besonders dargestellt. Abbildung 15 und 16 zeigen die Werte in Abhängigkeit von der Anzahl der Neupunkte, wenn folgende Zahlenwerte eingesetzt werden:

Seitenlänge	$s = 636.4 \text{ m}$
mittlerer Streckenfehler	$\sigma_s = \pm 1 \text{ cm}$
mittlerer Richtungsfehler	$\sigma_r = \pm 10 \text{ cc}$

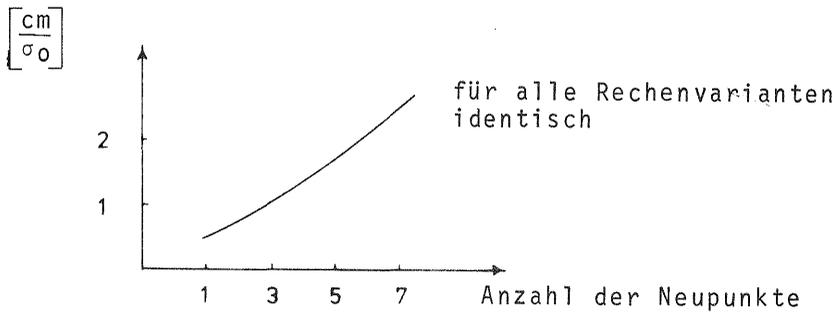


Abb. 15 Größter Querfehler in der Mitte von beidseitig angeschlossenen Polygonzügen mit einer Seitenlänge von 636.4 m

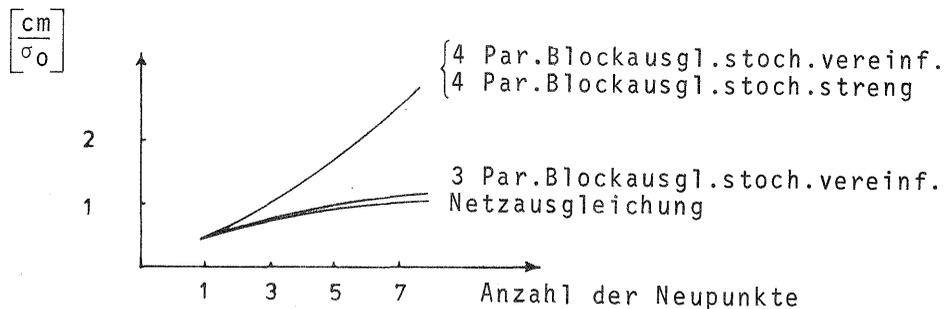


Abb. 16 Größter Längsfehler in der Mitte von beidseitig angeschlossenen Polygonzügen mit einer Seitenlänge von 636.4 m

#### 4.3 Untersuchungen zur Frage der Verknüpfungspunkte

##### 4.3.1 Gesichtspunkte zur Wahl der Verknüpfungspunkte

Die mittels Polygonzugmessung erreichbaren Punktgenauigkeiten können durch die stabilisierende Wirkung weiterer, etwa seitlich des Zuges liegender Verknüpfungspunkte, verbessert werden.

Eine ebensolche Wirkung ist auch in Blockverbänden zu erwarten, wo der Einfluß der Verknüpfungspunkte auf die erreichbare Punktgenauigkeit von besonderem Interesse ist, wenn bei freier Stationierung der geometrische Zusammenhang eines Netzes ausschließlich über die Verknüpfungspunkte hergestellt wird.

Es wird erwartet, daß sowohl die Lage als auch die Anzahl der Verknüpfungspunkte Einfluß auf die Genauigkeit der ausgeglichenen Koordinaten haben. Zur unabhängigen Aufklärung des Einflusses von Lage und Anzahl der Verknüpfungspunkte werden deshalb die folgenden Untersuchungen in drei Abschnitte unterteilt.

Die theoretischen Genauigkeiten werden unter folgenden Gesichtspunkten ermittelt:

- In einem schematischen Netz mit konstanter Anzahl von Fest-, Stand- und Verknüpfungspunkten wird nur die Lage der Verknüpfungspunkte geändert.

- In einem schematischen Netz mit konstanter Anzahl von Fest- und Standpunkten wird die Zahl der Verknüpfungspunkte schrittweise erhöht.
- In einem schematischen Netz werden zusätzliche Verknüpfungen einmal durch weitere Punkte oder durch weitere Beobachtungen zu entfernteren Verknüpfungspunkten eingebracht.

Als Ergebnisse der Untersuchungen kann der Einfluß der Verknüpfungsart auf die Koordinatengenauigkeit bei den einzelnen Rechenverfahren graphisch dargestellt werden.

#### 4.3.2 Zahlenangaben und Geometrie der untersuchten Punktverbände

Die nachfolgenden Untersuchungen behandeln jeweils zwei schematische Fälle, nämlich einen zugähnlichen Punktverband und einen quadratischen Blockverband. Für die Untersuchungen wird eine einheitliche Lage der Stand- und Festpunkte angenommen. Die Abbildungen 17 und 18 zeigen die verwendeten Punktlagen.

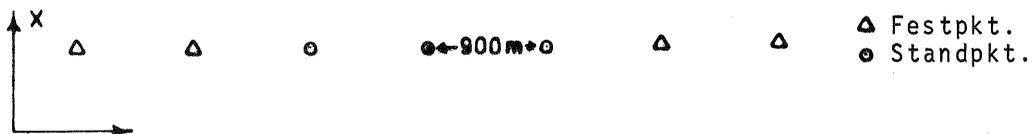


Abb. 17 Schematische Lage der Fest- und Standpunkte bei zugähnlichen Punktverbänden

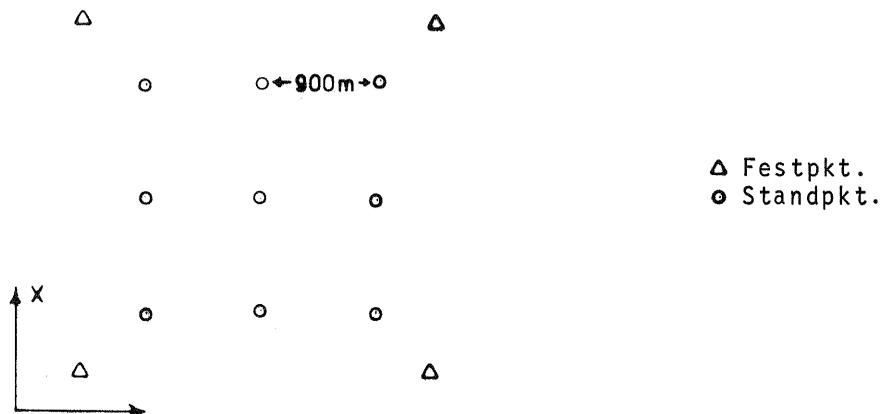


Abb. 18 Schematische Lage der Fest- und Standpunkte in Blockverbänden

Die Verknüpfungspunkte werden für die folgenden Untersuchungsgänge entsprechend zwischen die Standpunkte eingefügt.

Die Genauigkeit für die polare Bestimmung der Verknüpfungspunkte wird einheitlich folgendermaßen angenommen:

Genauigkeit einer Richtung  $\sigma_r = \pm 10''$

Genauigkeit einer Strecke  $\sigma_s = \pm 1 \text{ cm}$

Zentriergenauigkeit in den Verknüpfungspunkten  $\sigma_a' = \pm 0.4 \text{ cm}$

In der ersten Reihe von Genauigkeitsuntersuchungen wird der geometrische Zusammenhang zwischen den Standpunkten durch jeweils zwei Verknüpfungspunkte realisiert. Abbildungen 19 und 20 veranschaulichen die Art der Verknüpfung.

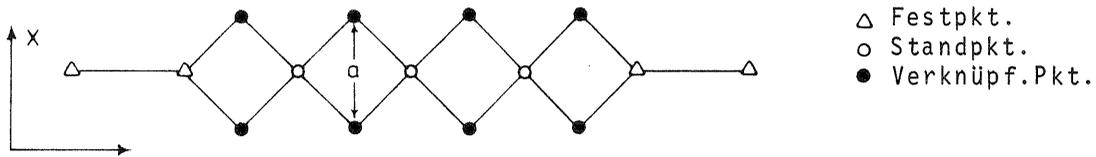


Abb. 19 Darstellung der Verknüpfung in zugähnlichen Punktverbänden

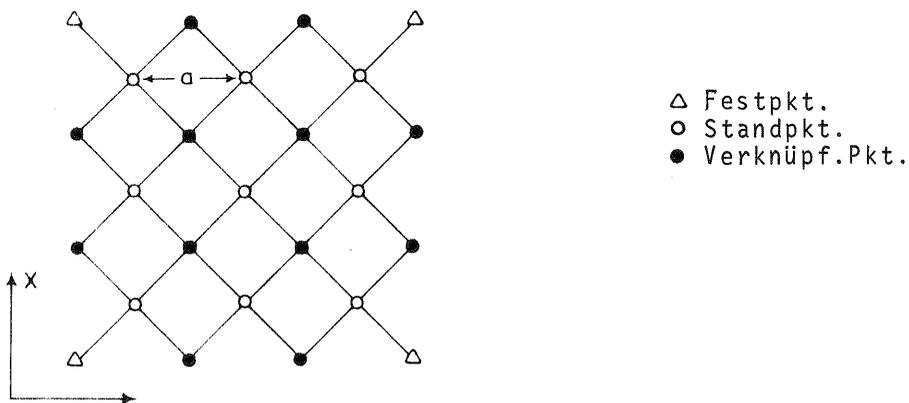


Abb. 20 Darstellung der Verknüpfung in Blockverbänden

Die Abstände  $a$  werden schrittweise geändert und zwar beginnend mit  $a = 900$  m über  $a = 450$  m bis  $a = 225$  m. Für die jeweilige Punktkonfiguration werden die theoretischen Genauigkeiten für die ausgeglichenen Punkte aus den vier Rechenverfahren ermittelt.

#### 4.3.3 Ergebnisse bei veränderlichem Abstand der Verknüpfungspunkte

In den Tabellen 2 bis 6 sind die errechneten theoretischen Genauigkeiten für die ausgeglichenen Koordinaten angegeben. Zur graphischen Darstellung des Genauigkeitsverhaltens der untersuchten Rechenverfahren in Abhängigkeit von den Abständen  $a$  der Verknüpfungspunkte werden die größten Punktfehler herangezogen. Sie treten in zugähnlichen Punktverbänden grundsätzlich in der Mitte des Punktverbandes und in Blöcken, bei der gewählten Festpunktverteilung, am offenen Blockrand auf.

Die Zahlenwerte für die größten Punktfehler werden in Abhängigkeit der Abstände  $a$  in einem Diagramm dargestellt. In Abbildung 21 sind die Kurven für zugähnliche Punktverbände dargestellt.

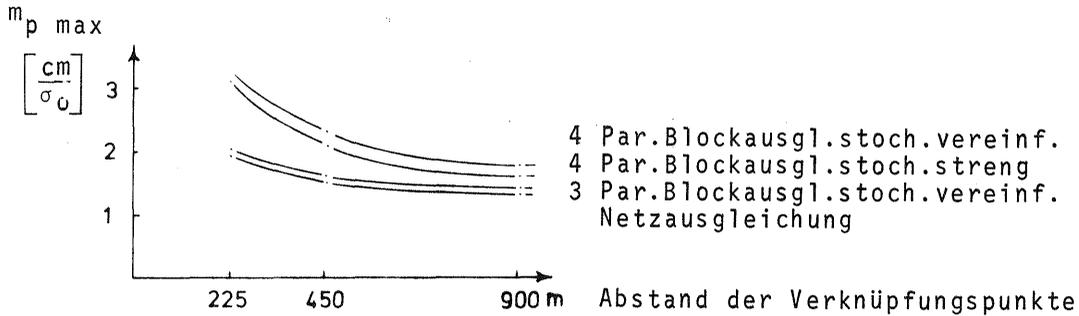


Abb. 21 Abhängigkeit des größten Punktfehlers von der Lage der Verknüpfungspunkte in zugähnlichen Punktverbänden mit 5 Standpunkten

Die dargestellten Ergebnisse bestätigen die Netzausgleichung als das Rechenverfahren mit den besten Fehlerfortpflanzungseigenschaften. Für den kleinsten Abstand  $a = 225$  m zeigen die Untersuchungen einen deutlichen Genauigkeitsunterschied zwischen den Rechenverfahren mit und ohne Maßstabsfaktoren. Vergrößert man die Abstände  $a$  werden die Unterschiede in den Genauigkeiten schnell deutlich geringer.

Für  $a = 225$  m beträgt der Unterschied noch  $1.4 \text{ cm}/\sigma_0$  und schwindet für  $a = 900$  m auf einen Tiefstwert von  $0.5 \text{ cm}/\sigma_0$ .

Für Werte  $a > 900$  werden die zu erwartenden Genauigkeiten wieder langsam schlechter, entsprechend der mit zunehmender Entfernung schlechter werdenden Punktbestimmung aus den Richtungsmessungen.

Die analogen Untersuchungen im Blockverband ergeben die in Abbildung 22 dargestellten Ergebnisse.

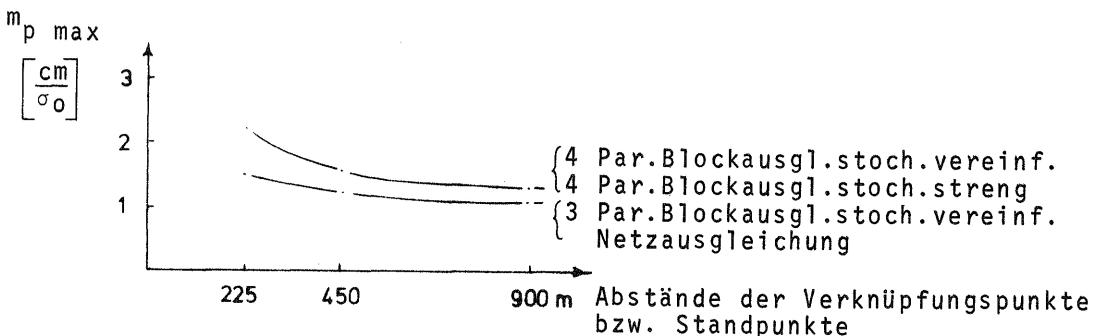


Abb. 22 Abhängigkeit des größten Punktfehlers von den Abständen der Verknüpfungspunkte im Block mit 9 Standpunkten

Es ergeben sich keine darstellbaren Unterschiede mehr für die Genauigkeitserwartungen aus stochastisch strenger und stochastisch vereinfachter 4 Parameter Blockausgleichung bzw. aus Netzausgleichung und stochastisch vereinfachter 3 Parameter Blockausgleichung.

Die größten Punktfehler im Block sind erheblich kleiner als bei vergleichbarer zugähnlicher Punktanordnung.

Die Genauigkeitsunterschiede betragen für  $a = 225$   $0.7 \text{ cm}/\sigma_0$  und gehen für  $a = 900$  m auf einen Tiefstwert von  $0.2 \text{ cm}/\sigma_0$  zurück.

Die Genauigkeitsuntersuchungen zeigen, daß die Lage der Verknüpfungspunkte einen deutlichen Einfluß auf die zu erwartenden Genauigkeiten der ausgeglichenen Punkte hat.

Für quadratische Verknüpfungsraster ergeben sich bei allen Rechenverfahren die jeweils größten Genauigkeiten. Je mehr sich die angenommene Lage der Verknüpfungspunkte dem quadratischen Raster nähert, desto geringer werden die Genauigkeitsunterschiede zwischen den Rechenverfahren.

Bei der Berechnung von flächenhaften Punktverbänden bleiben die festgestellten Eigenschaften zum Genauigkeitsverlauf für alle untersuchten Rechenverfahren erhalten. Insgesamt verringern sich die Differenzen zwischen den Genauigkeiten der Rechenverfahren deutlich und die Genauigkeitserwartungen liegen über den Erwartungen zugähnlicher Punktverbände. Die Ergebnisse zeigen weiter, daß bei der Berechnung von flächenhaften Punktverbänden die Rechenverfahren mit bzw. ohne Maßstabsfaktoren keine darstellbaren Genauigkeitsdifferenzen aufweisen.

Bei flächenhaften blockweisen Berechnungen führen also vereinfachende stochastische Annahmen zu keinem merklichen Genauigkeitsverlust der ausgeglichenen Koordinaten.

#### 4.3.4 Ergebnisse bei veränderlicher Anzahl der Verknüpfungspunkte

In der zweiten Reihe von Untersuchungen wird der Einfluß der Anzahl der Verknüpfungspunkte auf die Genauigkeiten der ausgeglichenen Koordinaten ermittelt.

Ausgehend von zwei Verknüpfungspunkten im Abstand  $a = 900$  m werden systematisch weitere Verknüpfungspunkte zwischen die bestehenden eingeschoben. Am Ende verknüpfen Standpunkte im Block über maximal 16, im zugähnlichen Verband über maximal 10 Punkte. Die Netzsituation ist in den Abbildungen 23 und 24 dargestellt.

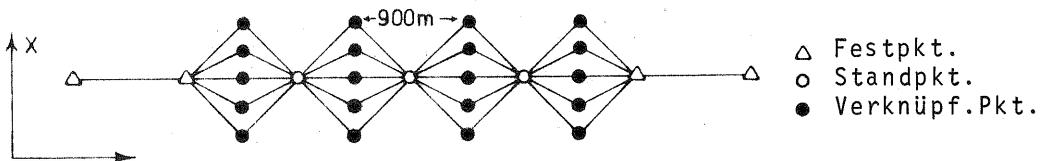


Abb. 23 Stärkste Verknüpfung in zugähnlichen Punktverbänden

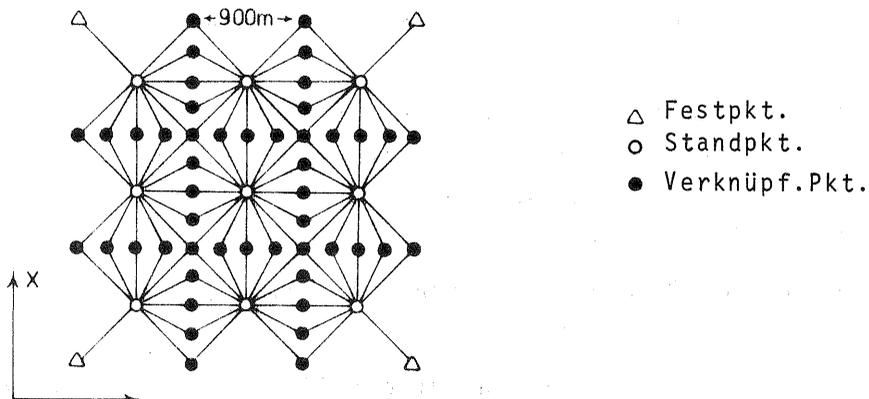


Abb. 24 Stärkste Verknüpfung in Blockverbänden

Für die einzelnen Punktconfigurationen werden mit dem allgemeinen Rechenmodell die theoretischen Genauigkeiten der ausgeglichenen Koordinaten ermittelt. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 2-5 und 7-10 dargestellt.

Zur graphischen Darstellung des Genauigkeitsverhaltens der untersuchten Rechenverfahren werden wieder die größten Punktfehler herangezogen. Sie werden den Tabellen entnommen und in Abhängigkeit von der Anzahl der Verknüpfungspunkte in einem Diagramm dargestellt. Die Diagramme sind in den Abbildungen 25 und 26 zu sehen.

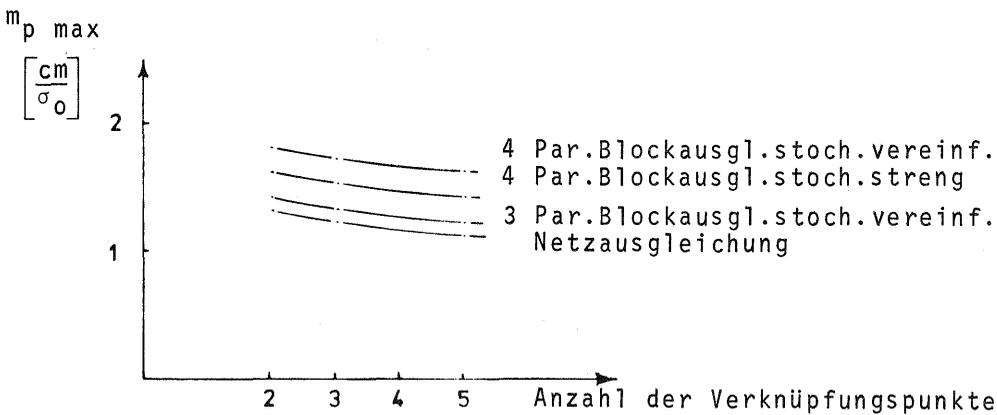


Abb. 25 Abhängigkeit des größten Punktfehlers in zugänglichen Punktverbänden mit 5 Standpunkten von der Anzahl der Verknüpfungspunkte

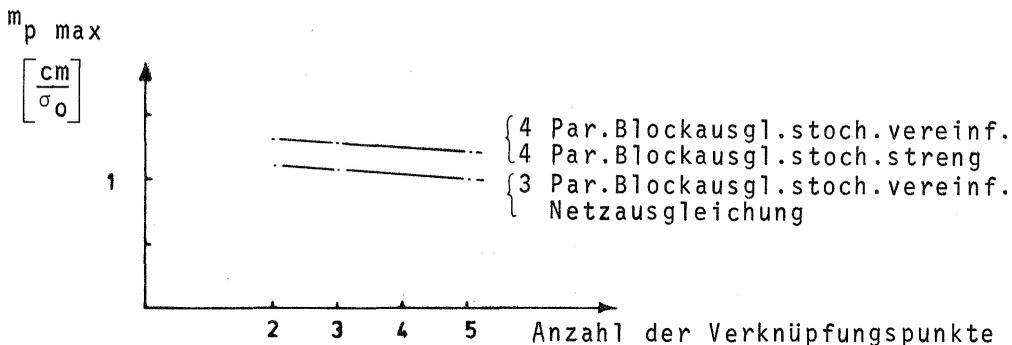


Abb. 26 Abhängigkeit des größten Punktfehlers in Blöcken mit 9 Standpunkten von der Anzahl der Verknüpfungspunkte

Wie die Diagramme zeigen, ist der Verlauf der Kurven für alle Verfahren schwach abfallend.

Als wichtigstes Ergebnis dieser Untersuchung ergibt sich daraus, daß die Steigerung der Anzahl der Verknüpfungspunkte einen nur unwesentlichen Genauigkeitsgewinn bewirkt.

Die Parallelität der Kurvenverläufe zeigt weiter, daß die Rechenverfahren mit ihren Fehlerfortpflanzungseigenschaften auf die Variation der Anzahl der Verknüpfungspunkte gleich reagieren. Im übrigen bestätigt sich wieder, daß die Ausgleichung flächenhafter Blöcke für alle Rechenverfahren merklich bessere

Genauigkeitseigenschaften ergibt, geringere Genauigkeitsunterschiede zwischen den Rechenverfahren auftreten und Vereinfachung in den stochastischen Annahmen praktisch keinen Genauigkeitsverlust bewirkt.

#### 4.3.5 Ergebnisse bei übergreifenden Verknüpfungen

Im folgenden dritten Abschnitt werden zwei weitere Möglichkeiten, die Genauigkeiten in zugähnlichen Punktverbänden durch zusätzliche Verknüpfungen zu steigern, dargestellt.

In einem Fall handelt es sich um zusätzliche Verknüpfungspunkte seitlich der Standpunkte (siehe Tab. 2 - 5, Beispiel Nr. 8) und im anderen Fall um zusätzliche Beobachtungen zu entfernteren Verknüpfungspunkten (siehe Tab. 2 - 5, Beispiel Nr. 7).

Die errechneten theoretischen Genauigkeiten zeigen folgende Ergebnisse:

- Die hier eingeführten Verknüpfungen bewirken ein homogenes Genauigkeitsbild für alle Rechenverfahren. Innerhalb eines Rechenverfahrens ergeben sich Unterschiede zwischen den mittleren Punktfehlern von höchstens  $0.3 \text{ cm}/\sigma_0$ .
- Weiter übergreifende Beobachtungen wirken sich bei allen Rechenverfahren günstiger als zusätzliche seitliche Verknüpfungspunkte auf die erzielten Genauigkeiten aus. Man erhält im Schnitt etwa eine Genauigkeitssteigerung von 20 %, bezogen auf die mittleren Punktfehler.
- Verglichen mit den mittleren Punktfehlern des Punktverbandes mit nur 3 Verknüpfungspunkten zwischen den Standpunkten sind die Genauigkeitssteigerungen - sie betragen für alle Rechenverfahren etwa  $0.5 \text{ cm}/\sigma_0$  - durch zusätzliche Verknüpfungspunkte unerheblich. Der Beobachtungsumfang ist in einem Fall jedoch um ca. 10 % und im anderen Fall um ca. 30 % höher.

Es besteht also bei zugähnlichen Punktverbänden kein echter Vorteil der übergreifenden Verknüpfungen gegenüber Punktverbänden mit nur 3 Verknüpfungen an den Nahtstellen zwischen den Standpunkten. Allerdings steigern übergreifende Verknüpfungen deutlich die Homogenität der mittleren Punktfehler.

#### 4.4 Theoretische Genauigkeitsuntersuchungen zu trigonometrischen Einzelpunktbestimmungen

Trigonometrische Einzelpunktbestimmungen stellen im Rahmen der Anwendungsbereiche von elektronischen Tachymetern einen Ausnahmefall dar. Sie können jedoch mit den hier vorgeschlagenen Rechenverfahren im Prinzip berechnet werden, obwohl die Blockausgleichung in keiner Weise für Einzelpunktbestimmungen vorgesehen ist. Als Bestätigung dafür werden die folgenden Untersuchungen dienen, mit denen ein Überblick über die Größe der auftretenden Genauigkeiten vermittelt wird, wenn die Blockausgleichung zur Berechnung ungünstiger Beobachtungsverfahren dient.

Als ungünstige Beobachtungsverfahren gelten hier Vorwärtseinschneiden, Rückwärtseinschneiden und Knotenpunktbestimmung bei Polygonzügen, wobei jeweils Strecken- und Richtungsmessungen angenommen sind. Zur Durchführung der Genauigkeitsvergleiche wird angenommen, daß ein Neupunkt tachymetrisch nach einem dieser Beobachtungsverfahren bestimmt sei und seine Koordinaten mit Netz- und Blockausgleichungsverfahren berechnet werden. Die verschiedenen schematischen Beobachtungsanordnungen sind in den Abbildungen 27 bis 30 dargestellt.

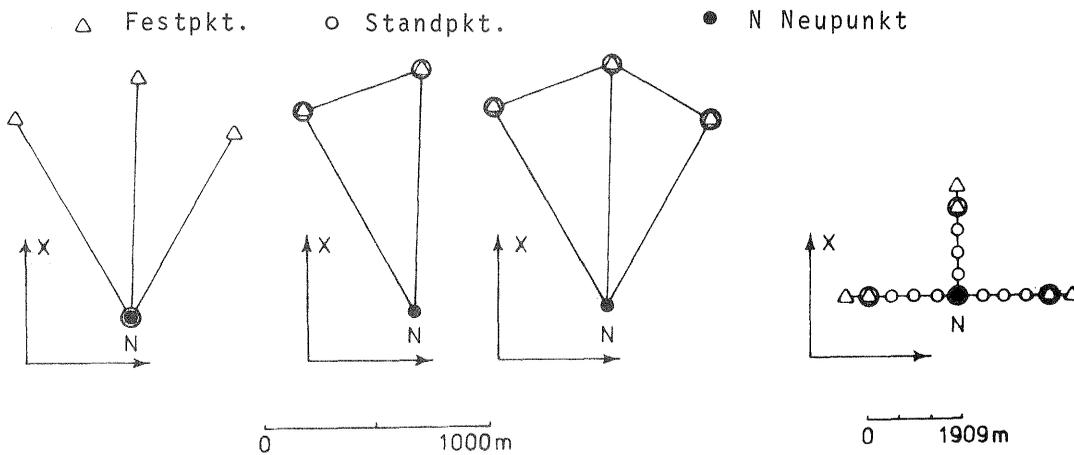


Abb. 27

Abb. 28

Abb. 29

Abb. 30

#### Netzaufbau zu Einzelpunktbestimmungen

Die Zahlenrechnungen basieren auf folgenden einheitlichen Annahmen für die Genauigkeiten der Beobachtungen:

- Fehlerfreie Festpunkte
- Zentrierfehler vernachlässigbar
- Genauigkeit einer Strecke  $\sigma_s = \pm 1 \text{ cm}$
- Genauigkeit einer Richtung  $\sigma_r = \pm 10 \text{ cc}$

Als Ergebnis erhält man die in den folgenden Tabellen aufgeführten Genauigkeitswerte in den Einheiten  $\text{cm}/\sigma_0$ .

a = große Halbachse b = kleine Halbachse mp = Punktfehler	Netzausgleichung			3 Parameter Blockausgleichung stoch.vereinf.			4 Parameter Blockausgleichung stoch.vereinf.			4 Parameter Blockausgleichung stoch.streng		
	a	b	mp	a	b	mp	a	b	mp	a	b	mp
Zugverknotung	1.3	1.0	1.1	1.4	1.0	1.2	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4
Rückwärts- schnitt	1.8	0.7	1.1	1.9	0.7	1.1	2.0	1.8	1.8	1.9	1.8	1.8
Vorwärts- schnitt	1.4	0.7	1.0	1.6	0.8	1.1	1.6	1.5	1.6	1.6	1.5	1.6
zweifacher Vorwärts- schnitt	1.0	0.6	0.8	1.0	0.7	0.9	1.4	1.2	1.3	1.3	1.2	1.3

Wie erwartet zeigen die Ergebnisse, daß die besten Genauigkeiten für den Neupunkt immer aus einer Berechnung mit der Netzausgleichung resultieren und daß Berechnungen mit 4 Parameter Blockausgleichungsverfahren erheblich schlechter sein können.

Die Genauigkeitsunterschiede zwischen der stochastisch strengen 4 Parameter Blockausgleichung und der stochastisch vereinfachten 4 Parameter Blockausgleichung sowie zwischen Netzausgleichung und der stochastisch vereinfachten 3 Parameter Blockausgleichung sind dagegen minimal. Damit bestätigt sich, daß die Maßstabsfaktoren im wesentlichen die Genauigkeitsunterschiede zwischen den Rechenverfahren bedingen. Die Überparameterisierung der Blockausgleichungsverfahren macht sich hier bei Einzelpunktbestimmungen besonders deutlich negativ bemerkbar.

Die Genauigkeitsuntersuchungen zeigen, daß die Ausgleichungsverfahren mit Maßstabsfaktoren für die beschriebenen Einzelpunktbestimmungen als Berechnungsverfahren nicht gut geeignet sind. Um keine Genauigkeit zu verschenken, sollte die Berechnung immer mit der Netzausgleichung oder der stochastisch vereinfachten 3 Parameter Blockausgleichung durchgeführt werden.

#### 4.5 Genauigkeitserwartungen für die Bestimmung von "Polarpunkten"

##### 4.5.1 Einführung in die Untersuchungen zur Genauigkeitsbestimmung der Polarpunkte

Der eigentliche Zielfall der Blockausgleichung ist die Berechnung von Blöcken mit großen Datenmengen. In diese Berechnung werden alle Daten eingeführt und insgesamt einer simultanen Ausgleichung unterzogen. Die Ausgleichung beinhaltet jedoch vereinfachte Annahmen im stochastischen Modell und eine Überparameterisierung im Funktionalmodell. Dieser Einschränkung steht bei der Netzausgleichung nach Heupel [4] gegenüber, daß ein Grundnetz zwar streng berechnet wird, die Polarpunkte aber nachträglich angehängt werden. Mehrfach bestimmte Polarpunkte können damit zur Netzversteifung nichts beitragen. Sie werden nur gemittelt, was ebenfalls als Vereinfachung zu werten ist.

Die Auswirkungen der Vereinfachungen auf die Genauigkeiten der ausgeglichenen Koordinaten werden nun einander gegenübergestellt. Dazu werden die Fehlerfortpflanzungseigenschaften der beiden Rechenmethoden in der Anwendung auf einen Block bzw. ein Grundnetz bis hin zu den theoretischen Genauigkeiten der Polarpunkte untersucht. Der angenommene Blockverband ist in Abbildung 31 dargestellt.

Die Bestimmungsstücke werden nun insgesamt direkt der stochastisch vereinfachten 4 Parameter Blockausgleichung zugeführt und die Genauigkeiten aller Punkte errechnet. In die Netzausgleichung werden nur die ausgewählten Bestimmungsstücke, die zur Festlegung eines Grundnetzes (Abb. 32) dienen, einbezogen. Dies sind hier alle Standpunkte. Ausgehend von dieser Netzgrundlage werden die restlichen Punkte mit den verbleibenden Bestimmungsstücken polar eingerechnet.

Der Genauigkeitsvergleich an diesen Punkten wird eine Beurteilung der Rechenverfahren unter praktischen Gesichtspunkten ermöglichen.

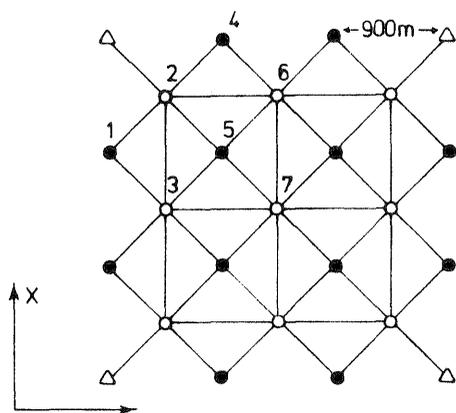


Abb. 31 Punktverband zur Blockausgleichung

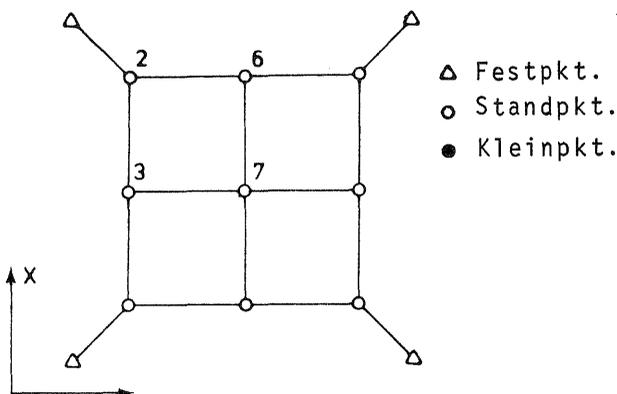


Abb. 32 Netz als Grundlage zur Berechnung der Kleinpunkte

#### 4.5.2 Zahlenangaben zum angenommenen Punktverband und Genauigkeitserwartungen nach der Ausgleichung

Die Zahlenrechnungen basieren auf folgenden Werten:

- Fehlerfreie Festpunkte
- Zentrierfehler
- Standpunkte:  $\sigma_a = \pm 0.2$  cm
- Zielpunkte:  $\sigma_a = \pm 0.4$  cm
- Genauigkeit einer Strecke:  $\sigma_s = \pm 1$  cm
- Genauigkeit einer Richtung:  $\sigma_r = \pm 10$  cc

Das allgemeine Rechenmodell ergibt für die Blockausgleichung sofort die Genauigkeiten aller Punkte, während für die Netzausgleichung zunächst nur die Genauigkeiten des Grundnetzes erhalten werden.

Die errechneten theoretischen Genauigkeiten sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

4 Parameter-Blockausgleichung stochastisch vereinfacht		Netzausgleichung	
Pkt.Nr.	mittlerer Punktfehler mp	Pkt.Nr.	mittlerer Punktfehler mp
1	1.18	1	
2	0.99	2	0.78
3	1.01	3	0.87
4	1.18	4	
5	0.97	5	
6	1.01	6	0.87
7	0.92	7	0.85

Die Genauigkeitseigenschaften der nach Netzausgleichung polar eingerechneten Punkte werden im folgenden Abschnitt gesondert mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung berechnet. Aus Symmetriegründen genügt es, die Berechnung für einen innerhalb und für einen am Rand des Grundnetzes liegenden Polarpunkt durchzuführen.

## 4.5.3 Genauigkeitserwartungen für Polarpunkte und Diskussion der Ergebnisse

Der Einrechnung von Polarpunkten liegt folgender Rechengang zugrunde:

- Bestimmung der Richtungswinkel
- Polare Berechnung der Koordinaten
- Mittelung mehrfach bestimmter Koordinaten

Bestimmung der Richtungswinkel:

In der Netzausgleichung werden neben den ausgeglichenen Koordinaten  $(X_{s_i}, Y_{s_i})$  der ausgewählten Netzpunkte, die im vorliegenden Beispiel gleichzeitig die Standpunkte sind, die Orientierungsunbekannten  $\omega_{s_i}$  bestimmt. Für die folgenden Ableitungen sind diese Unbekannten und die dazugehörige theoretisch strenge Kovarianzmatrix  $Q_{xx}$  aus den vorausgehenden Untersuchungen bekannt.

Der Richtungswinkel  $\alpha_{s_i z}$  von einem bekannten Standpunkt  $i$  zu einem Polarpunkt  $z$ , der mit den polaren Elementen Richtung  $R_{s_i z}$  und Strecke  $S_{s_i z}$  beobachtet wurde, lautet dann:

$$\alpha_{s_i z} = \omega_{s_i} + R_{s_i z} \quad (50)$$

Polare Berechnung der Koordinaten eines Kleinpunktes:

Die gesuchten Koordinaten eines Kleinpunktes, der von einem Standpunkt mit den ausgeglichenen Koordinaten  $X_{s_i}, Y_{s_i}$  polar abgesetzt wird, lauten:

$$\begin{aligned} X_{s_i z} &= X_{s_i} + S_{s_i z} \cos \alpha_{s_i z} \\ Y_{s_i z} &= Y_{s_i} + S_{s_i z} \sin \alpha_{s_i z} \end{aligned} \quad (51)$$

Mittelung mehrfach bestimmter Koordinaten:

Der Polarpunkt wird von verschiedenen Standpunkten aus abgesetzt und die endgültigen Koordinaten  $X_z, Y_z$  werden durch einfache Mittelbildung berechnet:

$$\begin{aligned} X_z &= \frac{1}{i} \sum_1^i (X_{s_i z}) \\ Y_z &= \frac{1}{i} \sum_1^i (Y_{s_i z}) \end{aligned} \quad (52)$$

Berechnung der Kovarianzmatrix der Koordinaten  $X_z, Y_z$ :

Zur Bestimmung der Kovarianzmatrix  $Q_{zz}$  der gemittelten Koordinaten  $X_z, Y_z$  setzt man die Gleichungen (50) und (51) in (52) ein und wendet das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz an.

(50) und (51) in (52) eingesetzt:

$$\begin{aligned} X_z &= \frac{1}{i} \sum_1^i X_{s_i} + S_{s_i z} \cos(\omega_{s_i} + R_{s_i z}) \\ Y_z &= \frac{1}{i} \sum_1^i Y_{s_i} + S_{s_i z} \sin(\omega_{s_i} + R_{s_i z}) \end{aligned} \quad (53)$$

Die nichtlinearen Beziehungen (53) sind zur Anwendung des allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetzes zu linearisieren:

Man erhält:

$$\begin{aligned} \Delta X_z &= \frac{1}{i} \sum_1^i \Delta X_{s_i} + \cos(\omega_{s_i} + R_{s_i z}) \Delta S_{s_i z} - S_{s_i z} \cdot \sin(\omega_{s_i} + R_{s_i z}) \Delta R_{s_i z} \\ &\quad - S_{s_i z} \cdot \sin(\omega_{s_i z} + R_{s_i z}) \Delta \omega_{s_i} \\ \Delta Y_z &= \frac{1}{i} \sum_1^i \Delta Y_{s_i} + \sin(\omega_{s_i} + R_{s_i z}) \Delta S_{s_i z} + S_{s_i z} \cdot \cos(\omega_{s_i} + R_{s_i z}) \Delta R_{s_i z} \\ &\quad + S_{s_i z} \cdot \cos(\omega_{s_i} + R_{s_i z}) \Delta \omega_{s_i} \end{aligned} \quad (54)$$

Damit erhält man die Kovarianzmatrix  $Q_{zz}$  nach dem allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetz (wobei  $U$  die Koeffizientenmatrix der stochastischen Größen in Gleichungen (54) darstellt):

$$Q_{zz} = U \cdot Q_{xx} \cdot U'$$

Zahlenmäßige Berechnung der Kovarianzmatrix für den Polarpunkt Nr. 1:

Bereitstellung der Matrix  $U$ :

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & +45000 & +45000 & -0.7071 & +0.7071 & +45000 & +45000 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -45000 & +45000 & -0.7071 & -0.7071 & -45000 & +45000 \end{bmatrix}$$

Bereitstellung der Matrix  $Q_{xx}$  (aus 3.6. ):

Tiefgestellte Zahlen bedeuten die Zehnerpotenz; aus Symmetriegründen werden Werte unterhalb der Hauptdiagonalen nicht eingetragen.

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} 6.16_{-1} & 2.68_{-2} & 4.61_{-1} & -5.71_{-3} & -1.49_{-6} & 5.77_{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 6.16_{-1} & 4.62_{-2} & 4.17_{-1} & -1.49_{-6} & 1.83_{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 6.91_{-1} & 8.23_{-5} & -1.50_{-6} & 1.34_{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 8.35_{-1} & -3.15_{-6} & -2.50_{-10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1.08_{-10} & 2.86_{-12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1.08_{-10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 1.1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 2.59_{-10} & 0 \\ & & & & & & & & & 2.59_{-10} \end{bmatrix}$$

(  $X_2 \quad Y_2 \quad X_3 \quad Y_3 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad S_{2.1} \quad S_{3.1} \quad R_{2.1} \quad R_{3.1}$  )

Mit den bereitgestellten Zahlenwerten ergibt sich für den Kleinpunkt Nr. 1 folgende Kovarianzmatrix

$$Q_{zz} (1) = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.04 \\ 0.04 & 1.3 \end{bmatrix}$$

Der mittlere Punktfehler  $m_p$  lautet  $m_p (1) = 1.2 \left[ \frac{\text{cm}}{\sigma_0} \right]$

Die entsprechende Berechnung für die viermalige Bestimmung des Kleinpunktes Nr. 5 ergibt:

$$Q_{zz} (5) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Der mittlere Punktfehler  $m_p$  lautet  $m_p (5) = 0.9 \left[ \frac{\text{cm}}{\sigma_0} \right]$

Die entsprechenden Werte aus der 4 Parameter Blockausgleichung, stochastisch vereinfacht, lauten (siehe Tab. 11)

$$m_p = \pm 1.2 \left[ \frac{\text{cm}}{\sigma_0} \right] \quad \text{für Punkt Nr. 1}$$

$$m_p = \pm 1.0 \left[ \frac{\text{cm}}{\sigma_0} \right] \quad \text{für Punkt Nr. 5}$$

Das quadratische Mittel über die Punktfehler  $m_p$  aller Punkte ergibt für die beiden Rechenverfahren fast gleiche Werte.

Quadr. Mittel über alle  $m_p$  bei Netzausgleichung:  $1.0 \left[ \frac{\text{cm}}{\sigma_0} \right]$

Quadr. Mittel über alle  $m_p$  bei 4 Parameter Blockausgleichung, stochastisch vereinfacht:  $1.1 \left[ \frac{\text{cm}}{\sigma_0} \right]$

Damit hat sich an diesem Beispiel die Leistungsfähigkeit der stochastisch vereinfachten 4 Parameter Blockausgleichung hinsichtlich der Fehlerfortpflanzungseigenschaften für den Zielfall der flächenhaften Punktbestimmung bestätigt. Die Effekte der Vernachlässigungen bei der stochastisch vereinfachten 4 Parameter Blockausgleichung und der Netzausgleichung in der hier angewandten Form sind etwa gleich. Dieses Ergebnis ist zunächst nur für das untersuchte Beispiel gültig. Inwieweit es auf größere Blöcke übertragbar ist, wird wesentlich von der zugrundeliegenden Festpunktverteilung abhängen. Bei großen Blöcken mit je einem Festpunkt in den Blockecken wird sich der in Abb. 9 (S. 48) dargestellte Effekt, wonach die Genauigkeitsunterschiede mit der Blockgröße zunehmen, einstellen. Bei dicht mit Festpunkten besetztem Blockrand darf jedoch erwartet werden, daß das oben gefundene gute Ergebnis auch bei großen Blöcken erhalten bleibt.

Diese Ergebnisse bestätigen zwar die Zweckmäßigkeit des untersuchten Blockverfahrens für den Fall flächenhafter Punktverbände, sobald es technisch realisierbar ist, sollte jedoch aus Gründen der Allgemeinheit für praktische Berechnungen trotzdem ein völlig strenges Rechenverfahren angestrebt werden.

## 5. ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSSBETRACHTUNG

Die vorliegende Arbeit stellt einen Beitrag zum Problemkreis der automatischen Tachymetrie dar. Sie konzentriert sich auf die Diskussion von verschiedenen Verfahrensgruppen zur lagemäßigen Berechnung tachymetrischer Punktbestimmungen und untersucht speziell die zwischen den Rechenverfahren auftretenden Genauigkeitsunterschiede in den ausgeglichenen Koordinaten.

Die hier behandelten Genauigkeitsuntersuchungen sind rein theoretisch, indem das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz zusammen mit angenommenen stochastischen Modellvorstellungen zur Anwendung kommt. Das Ergebnis besteht somit aus den Varianzen und Kovarianzen der ausgeglichenen Koordinaten in Einheiten des mittleren Gewichtseinheitsfehlers.

Für die Genauigkeitsunterschiede zwischen den Rechenverfahren darf erwartet werden, daß sie gegenüber den Voraussetzungen in den Annahmen zum stochastischen Modell unempfindlich sind und Genauigkeitsvergleiche deshalb möglich sind.

Die Zahlenrechnungen stützen sich auf schematische Punktverbände und möglichst realistische Annahmen für die stochastischen Eigenschaften der Beobachtungen.

Die Funktionsmodelle der ursprünglich interessierenden Rechenverfahren Netzausgleichung und Blockausgleichung werden zur einfacheren numerischen Berechnung der gesuchten Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Koordinaten auf ein allgemeines Rechenmodell bezogen. Das allgemeine Rechenmodell erlaubt über die Simulierung der stochastisch vereinfachten 4 Parameter Blockausgleichung und der Netzausgleichung hinaus, zwei weitere Varianten der Blockausgleichung, 4 Parameter Blockausgleichung mit strengem stochastischen Modell und 3 Parameter Blockausgleichung mit vereinfachtem stochastischen Modell, mit einfachen Mitteln zu untersuchen.

Im Ergebnis erhält man zur Gegenüberstellung für alle Beispiele die Kovarianzmatrizen der ausgeglichenen Koordinaten nach

Netzausgleichung

4 Parameter Blockausgleichung, stochastisch streng

4 Parameter Blockausgleichung, stochastisch vereinfacht

3 Parameter Blockausgleichung, stochastisch vereinfacht

Eine erste Gruppe von Genauigkeitsuntersuchungen dient zur Klärung der allgemeinen theoretischen Genauigkeitseigenschaften der Rechenverfahren. Es werden deshalb alle Beobachtungen mit in den Ausgleichsalgorithmus einbezogen. Dieses Vorgehen entspricht jedoch im Falle der Polarpunktaufnahme nicht der tatsächlichen Anwendung des derzeit einzigen Rechenverfahrens von Heupel in der Praxis.

Aus den Beispielen mit allen Beobachtungen im Ausgleichungsverfahren leiten sich zusammenfassend folgende Ergebnisse ab:

- Die Netzausgleichung läßt, relativ zu den anderen Rechenverfahren gesehen, die besten Genauigkeiten erwarten.
- Die Genauigkeitsunterschiede zwischen den Rechenverfahren sind stark von der Geometrie des Punktverbandes abhängig. Für Polygonzüge erhält man noch deutliche Genauigkeitsunterschiede, während bei flächenhaften Punktverbänden die Unterschiede nur minimal sind.
- Rechenverfahren mit Maßstabsfaktoren ergeben immer stärker ausgerundete (kreisförmigere) Fehlerellipsen als Rechenverfahren ohne Maßstabsfaktoren.
- Vernachlässigungen im stochastischen Modell wirken sich, insbesondere bei flächenhaften Punktverbänden, kaum merklich auf die zu erwartenden Punktgenauigkeiten aus.
- Die 3 Parameter Blockausgleichung mit vereinfachtem stochastischen Modell ist stets günstiger als eine 4 Parameter Blockausgleichung mit strengem stochastischen Modell.  
Das Funktionalmodell übt den größeren Einfluß auf die erzielten Punktgenauigkeiten aus.

Eine abschließende Untersuchung berücksichtigt die praktische Anwendung der Rechenverfahren. Es wird beachtet, daß in die Blockausgleichungsverfahren alle Beobachtungen eingehen, während in der Netzausgleichung nach Heupel nur die Beobachtungen zu Netzpunkten Berücksichtigung finden und Polarpunkte nachträglich eingerechnet und eventuell gemittelt werden.

Das hierzu berechnete Beispiel zeigt, daß sich in diesem Fall die Genauigkeiten von Netzausgleichung und Blockausgleichung praktisch nicht unterscheiden und beide Rechenverfahren für diesen Anwendungsfall als gleichwertig betrachtet werden dürfen.

Die 4 Parameter Blockausgleichung hat sich damit als leistungsfähiges Rechenverfahren bestätigt, mit dem unter der Voraussetzung eines dicht mit Festpunkten besetzten Blockrandes, Genauigkeiten für die ausgeglichenen Koordinaten erzielt werden, die sich von denen einer strengen Berechnung kaum unterscheiden. Um jedoch immer optimale Ergebnisse zu erhalten, sollte trotzdem ein völlig strenges Rechenverfahren angestrebt werden. Hierzu bietet sich als operationelles Verfahren die 3 Parameter Blockausgleichung, nach vorangegangener 4 Parameter Blockausgleichung zur Bestimmung der Näherungswerte, an, abgesehen von dem Verfahren einer allgemeinen Netzausgleichung.

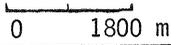
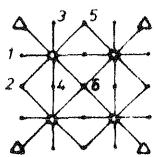
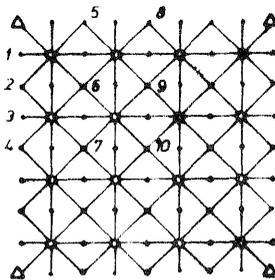
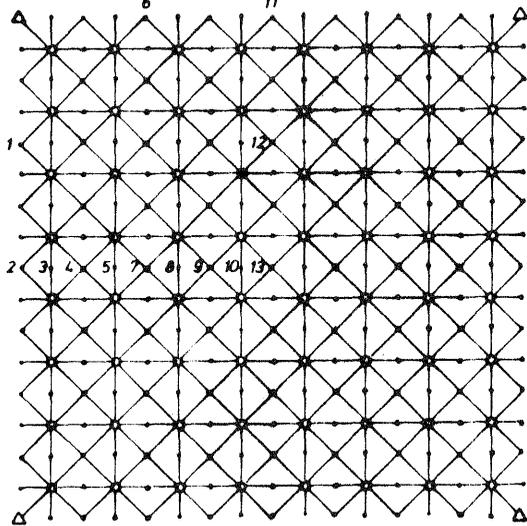
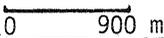
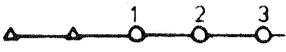
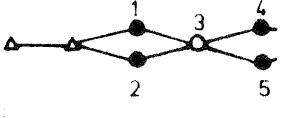
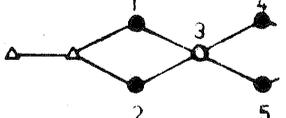
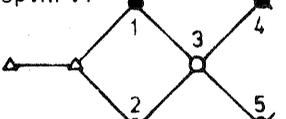
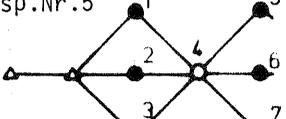
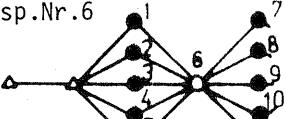
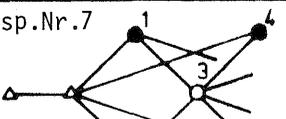
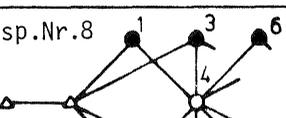
$\sigma_r = \pm 10^{\text{CC}}$ $\sigma_s = \pm 1 \text{ cm}$ $\sigma_{a_1} = \pm 0.4 \text{ cm}$ freie Stationierung 		$\triangle$ Festpkt. $\circ$ Standpkt. $\bullet$ Verknüpf.Pkt.		Netzausgleichung und 3 Par.Blockausgl. stoch.vereinfacht (im Ergebnis gleich)		4 Par.Blockausgl. stoch.streng und 4 Par.Blockausgl. stoch.vereinfacht (im Ergebnis gleich)		
		[cm]		[cm]		[cm]		
		$\sigma_0$		$\sigma_0$		$\sigma_0$		
	Pkt. Nr.	$\overline{q_{xx}}$	$\overline{q_{yy}}$	$m_p$	Pkt. Nr.	$\overline{q_{xx}}$	$\overline{q_{yy}}$	$m_p$
	1	1.0	1.2	1.1	1	1.1	1.3	1.2
	2	1.0	0.9	1.0	2	1.1	1.1	1.1
	3	1.2	1.0	1.1	3	1.3	1.1	1.2
	4	0.9	0.8	0.9	4	1.1	0.9	1.0
	5	0.9	1.0	1.0	5	1.1	1.1	1.1
	6	0.8	0.8	0.8	6	0.9	0.9	0.9
$m_{pm}$				1.0				1.1
	1	1.1	1.3	1.2	1	1.2	1.4	1.3
	2	1.1	1.2	1.2	2	1.4	1.4	1.4
	3	1.3	1.4	1.3	3	1.6	1.7	1.6
	4	1.2	1.2	1.2	4	1.6	1.6	1.6
	5	1.2	1.1	1.1	5	1.4	1.4	1.4
	6	1.0	1.0	1.0	6	1.2	1.2	1.2
	7	0.9	1.0	1.0	7	1.2	1.2	1.2
	8	1.2	1.2	1.2	8	1.6	1.6	1.6
	9	1.0	0.9	1.0	9	1.2	1.2	1.2
	10	0.9	0.9	0.9	10	1.2	1.2	1.2
$m_{pm}$			1.1				1.4	
	1	1.4	1.4	1.4	1	2.4	2.4	2.4
	2	1.5	1.4	1.4	2	2.9	2.9	2.9
	3	1.3	1.3	1.3	3	2.6	2.5	2.5
	4	1.2	1.2	1.2	4	2.2	2.2	2.2
	5	1.2	1.2	1.2	5	2.2	2.1	2.1
	6	1.4	1.4	1.4	6	2.4	2.4	2.4
	7	1.1	1.1	1.1	7	2.0	2.0	2.0
	8	1.2	1.1	1.1	8	2.0	2.0	2.0
	9	1.1	1.1	1.1	9	1.9	1.9	1.9
	10	1.2	1.1	1.1	10	2.0	2.0	2.0
	11	1.4	1.5	1.4	11	2.9	2.9	2.9
	12	1.1	1.1	1.1	12	2.0	2.0	2.0
	13	1.1	1.1	1.1	13	1.9	1.9	1.9
$m_{pm}$			1.2				2.3	

Tabelle 1





$\sigma_r = \pm 10^{\text{CC}}$ $\blacktriangle$ Festpkt. $\sigma_s = \pm 1 \text{ cm}$ $\circ$ Standpkt. $\sigma_a = \pm 0.4 \text{ cm}$ $\bullet$ Verknüpf. Pkt. 	Pkt. Nr.		$\sqrt{q_{xx}}$		$\sqrt{q_{yy}}$		$m_p$ [cm/ $\sigma_0$ ]				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
Bsp.Nr.1 			0.8 1.1 0.9				1.3 1.8 1.6			1.5 2.0 1.8	
Bsp.Nr.2 	1			2	3	4				5	
	1.1 1.3 1.2			1.1 1.3 1.2	2.0 1.9 1.9	3.6 2.9 3.2				3.6 2.9 3.2	
Bsp.Nr.3 	1			2	3	4				5	
	1.1 1.3 1.2			1.1 1.3 1.2	1.3 1.5 1.4	2.1 2.0 2.0				2.1 2.0 2.0	
Bsp.Nr.4 	1			2	3	4				5	
	1.2 1.2 1.2			1.2 1.2 1.2	1.2 1.3 1.2	1.6 1.7 1.6				1.6 1.7 1.6	
Bsp.Nr.5 	1	2		3	4	5	6			7	
	1.1 1.2 1.1	0.9 1.1 1.0		1.1 1.2 1.1	1.0 1.2 1.1	1.5 1.6 1.5	1.4 1.6 1.5			1.5 1.6 1.5	
Bsp.Nr.6 	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1.1 1.1 1.1	0.9 1.0 0.9	0.8 1.0 0.9	0.9 1.0 0.9	1.1 1.1 1.1	0.9 1.0 0.9	1.4 1.5 1.4	1.3 1.4 1.3	1.3 1.4 1.3	1.3 1.4 1.3	1.4 1.5 1.4
Bsp.Nr.7 	1			2	3	4				5	
	1.0 1.0 1.0			1.0 1.0 1.0	0.9 0.9 0.9	1.0 1.0 1.0				1.0 1.0 1.0	
Bsp.Nr.8 	1			2	3	4	5	6		7	
	1.0 1.1 1.0			1.0 1.1 1.0	1.1 1.1 1.1	0.9 1.1 0.9	1.1 1.1 1.1	1.2 1.2 1.2		1.2 1.2 1.2	

4 Parameter Blockausgleich, stochastisch streng

Tabelle 4



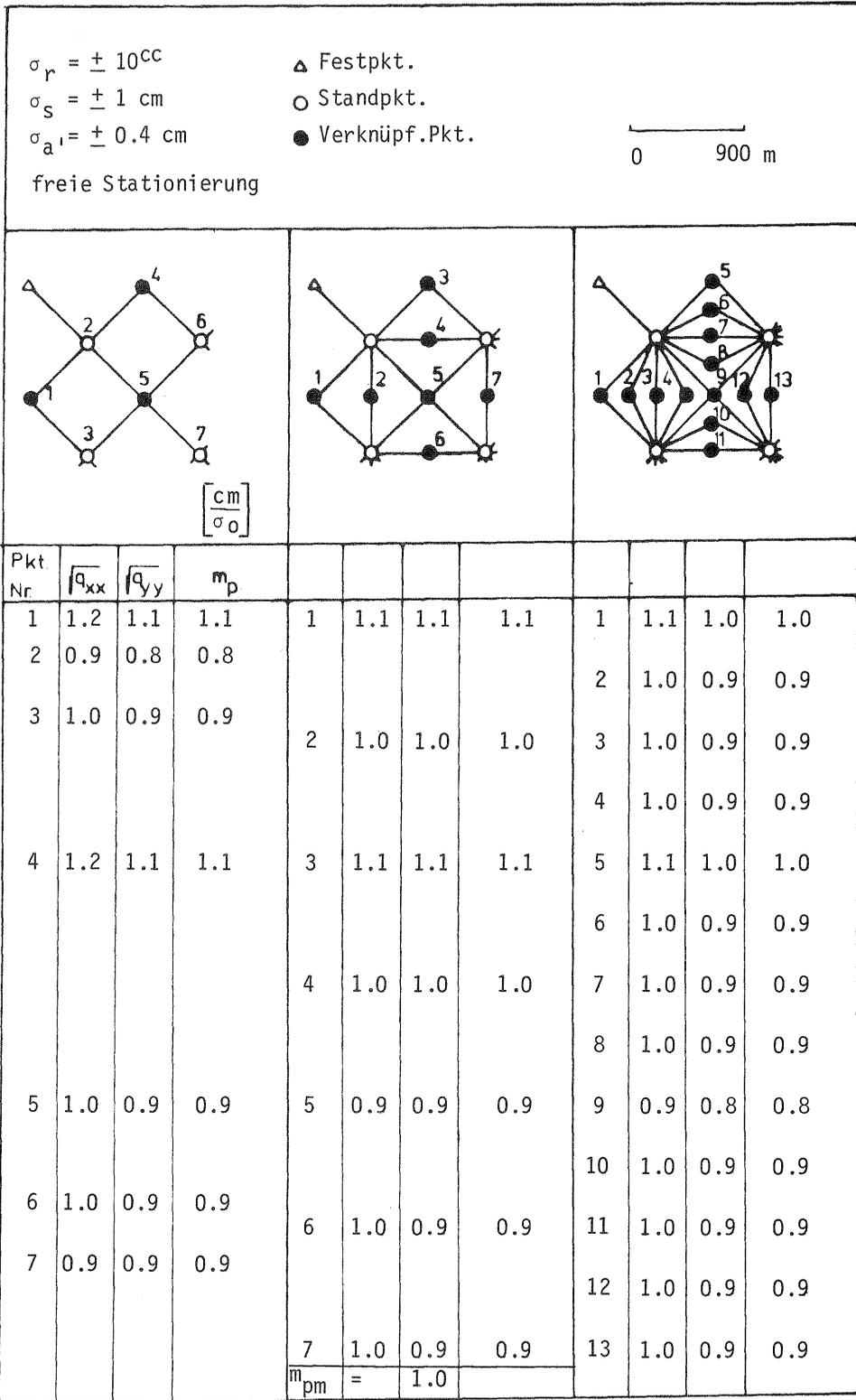
$\sigma_r = \pm 10^{CC}$   
 $\sigma_s = \pm 1 \text{ cm}$   
 $\sigma_a = \pm 0.4 \text{ cm}$   
 freie Stationierung

▲ Festpkt.  
 ○ Standpkt.  
 ● Verknüpf.Pkt.

0 ————— 900 m

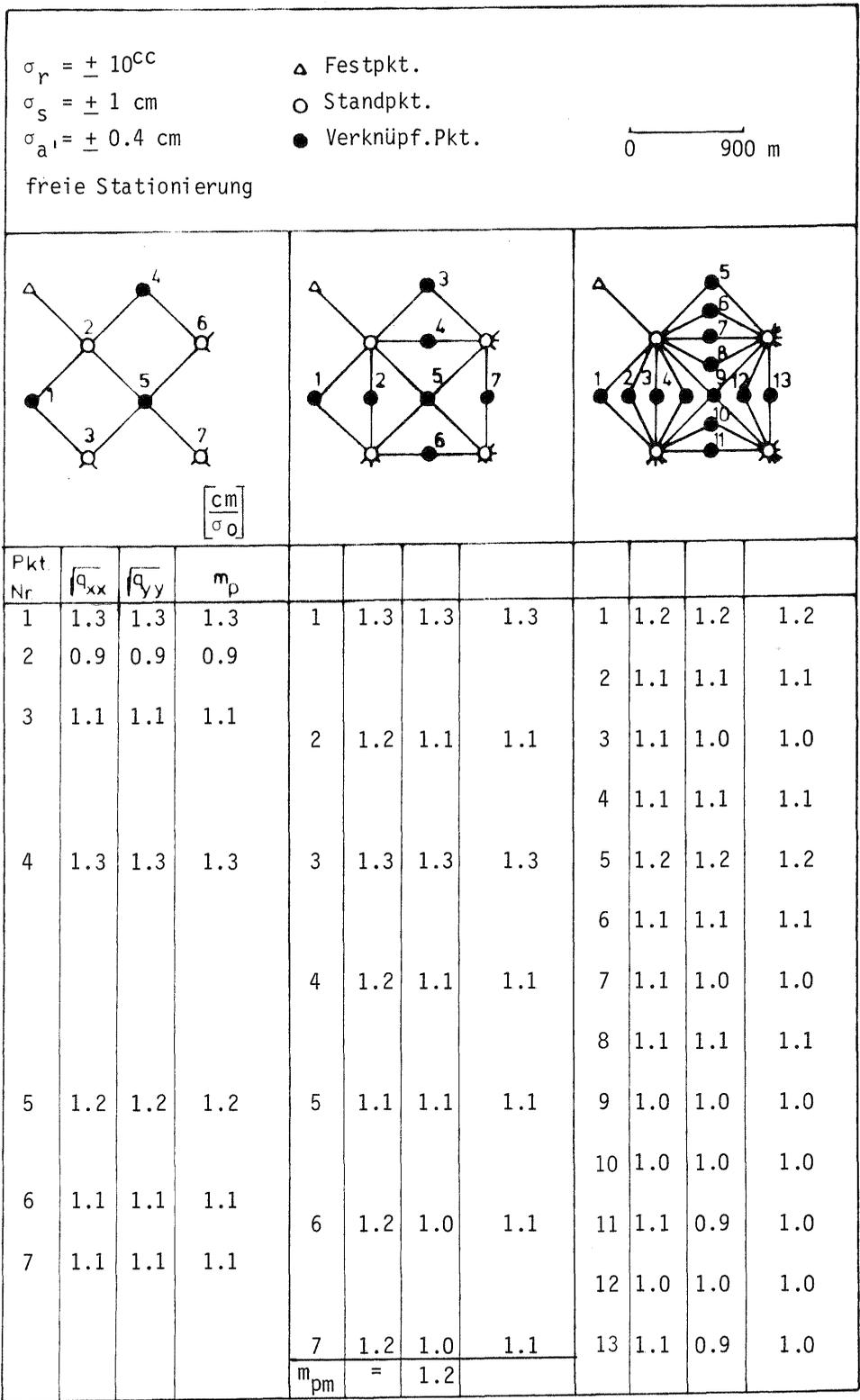
Netzausgleichung	Pkt. Nr.	$\sqrt{q_{xx}}$	$\sqrt{q_{yy}}$	$m_p$							
	1	1.1	1.2	1.1		1.0	1.4	1.2	1.0	2.2	1.5
2	1.2	1.1	1.1		1.0	0.9	1.0	1.0	0.9	1.0	
3	1.0	1.0	1.0		0.8	1.3	1.0	0.8	2.1	1.3	
4 Parameter Blockausgleichung, stoch. vereinfacht	1	1.3	1.3	1.3		1.4	1.5	1.5	2.0	2.4	2.2
	2	1.3	1.3	1.3		1.2	1.0	1.1	1.2	0.9	1.0
	3	1.2	1.2	1.2		1.2	1.3	1.3	1.8	2.2	2.0
4 Parameter Blockausgleichung, stoch. streng	1	1.3	1.3	1.3		1.4	1.5	1.5	2.0	2.3	2.2
	2	1.3	1.3	1.3		1.2	1.0	1.1	1.2	0.9	1.0
	3	1.2	1.2	1.2		1.2	1.3	1.3	1.8	2.2	2.0
3 Parameter Blockausgleichung, stoch. vereinfacht	1	1.1	1.2	1.1		1.0	1.4	1.2	1.0	2.2	1.5
	2	1.2	1.1	1.1		1.0	0.9	1.0	1.0	0.9	1.0
	3	1.0	1.0	1.0		0.8	1.3	1.0	0.8	2.1	1.3

Tabelle 6

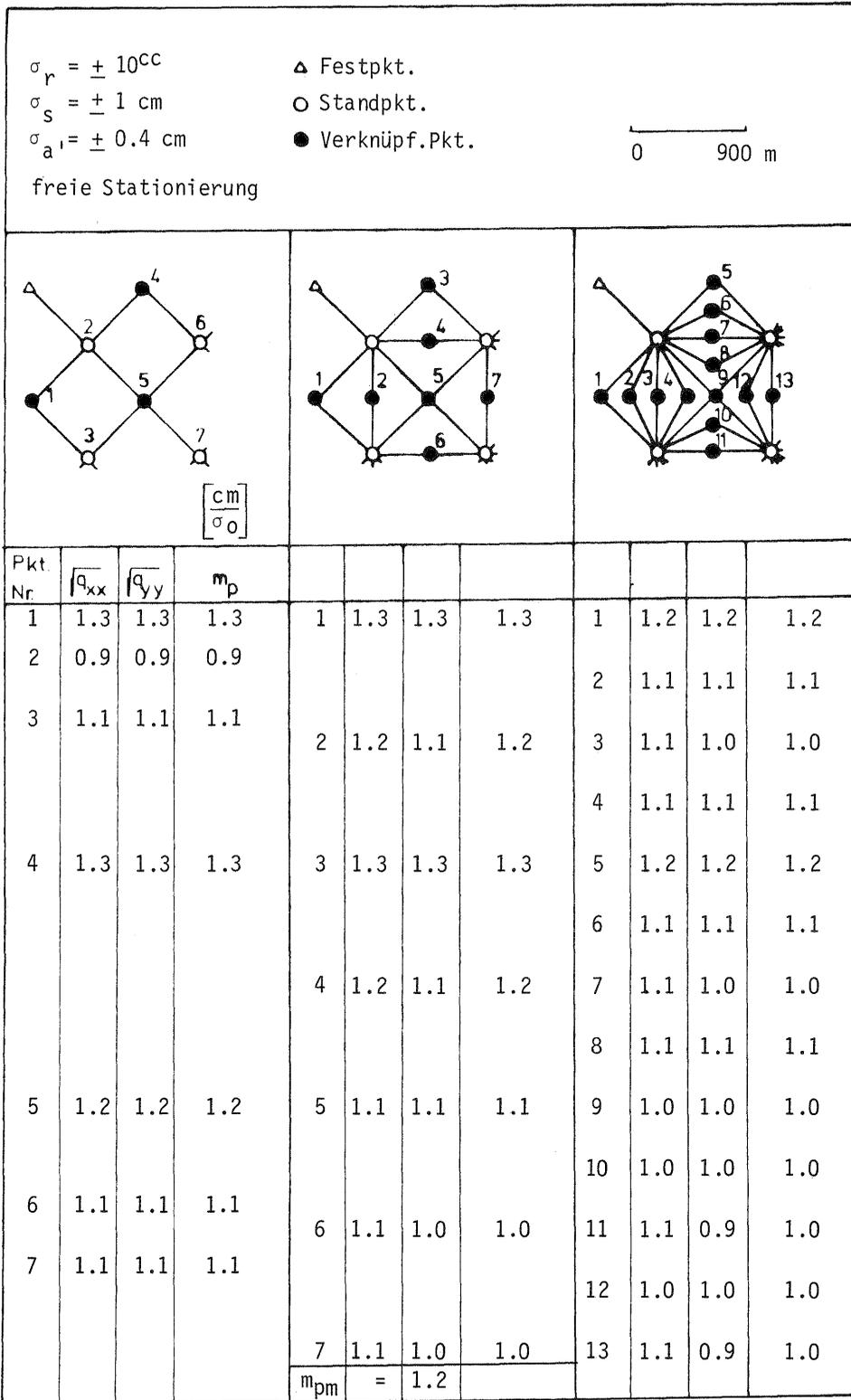


Netzausgleichung

Tabelle 7

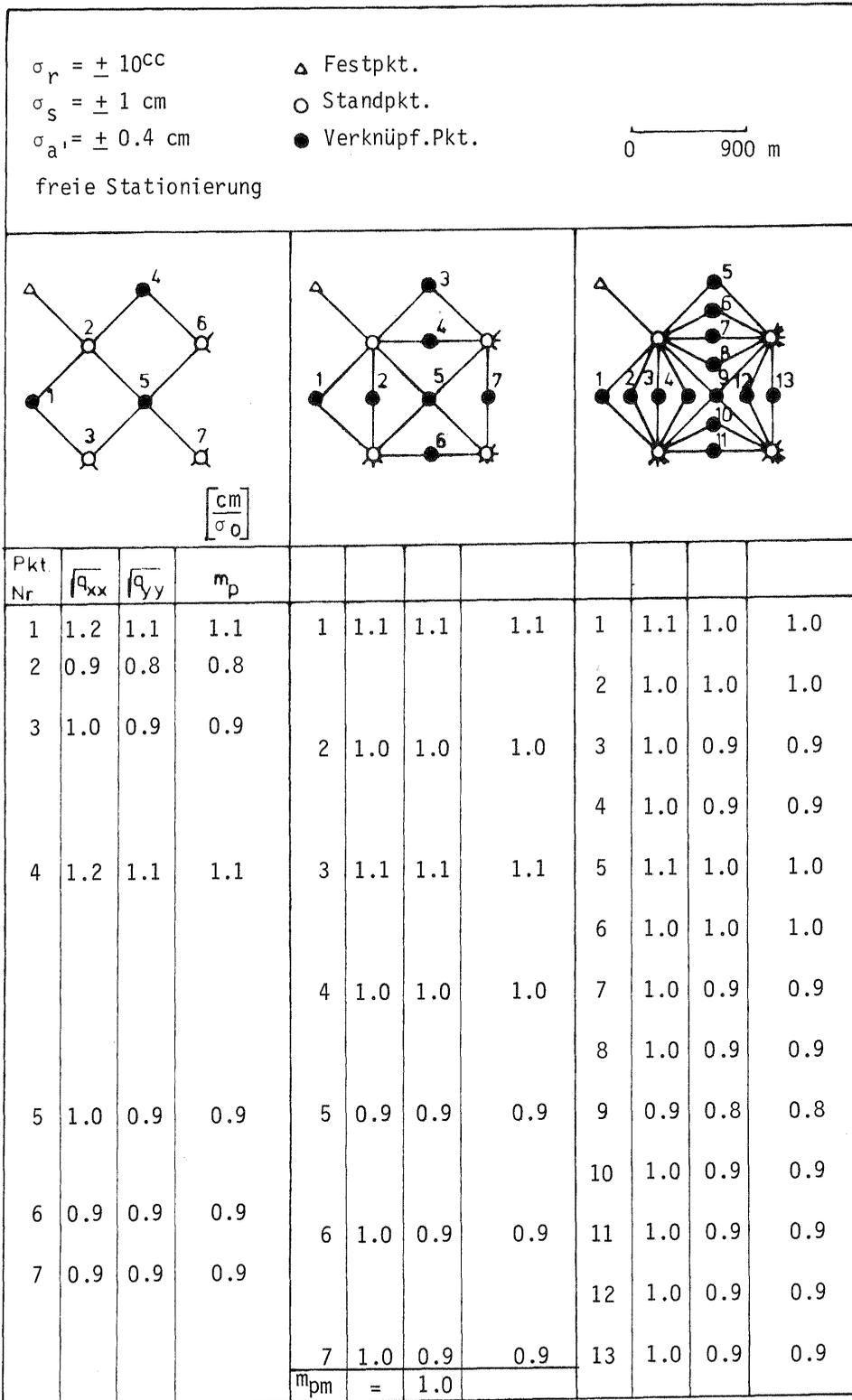


4 Parameter Blockausgleichung, stochastisch vereinfacht      Tabelle 8



4 Parameter Blockausgleich, stochastisch streng

Tabelle 9



3 Parameter Blockausgleichung, stochastisch vereinfacht

Tabelle 10

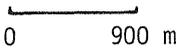
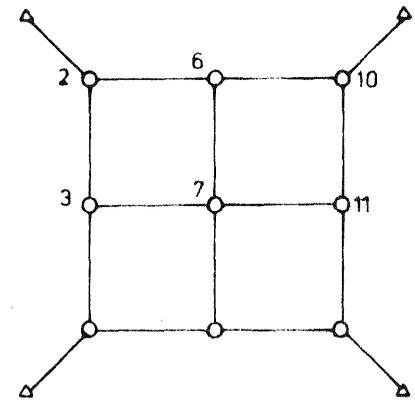
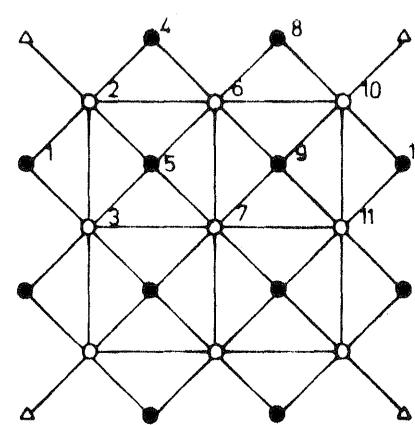
$\sigma_r = \pm 10^{\text{cc}}$ $\sigma_s = \pm 1 \text{ cm}$ $\sigma_a = \pm 0.2 \text{ cm}$ $\sigma_{a'} = \pm 0.4 \text{ cm}$				
$\triangle$ Festpunkt $\circ$ Standpunkt $\bullet$ Zielpunkt				
				
 <p>Netzausgleich</p>	Pkt. Nr.	$\sqrt{q_{xx}}$	$\sqrt{q_{yy}}$	$m_p$ $\frac{\text{cm}}{\sigma_0}$
	2	0.78	0.78	0.78
	3	0.83	0.91	0.87
	6	0.91	0.83	0.87
	7	0.85	0.85	0.85
	10	0.78	0.78	0.78
	11	0.83	0.91	0.87
 <p>4 Parameter Blockausgleich stochastisch vereinfacht</p>	1	1.17	1.19	1.18
	2	0.99	0.99	0.99
	3	0.99	1.02	1.01
	4	1.19	1.17	1.18
	5	0.97	0.97	0.97
	6	1.02	0.99	1.01
	7	0.92	0.92	0.92
	8	1.19	1.17	1.18
	9	0.97	0.97	0.97
	10	0.99	0.99	0.99
	11	0.99	1.02	1.01
	12	1.17	1.19	1.18

Tabelle 11

$S = 636 \text{ m}$ $\sigma_{\beta} = \pm 14^{\text{cc}}$ $\sigma_s = \pm 1 \text{ cm}$ $n_B = 9$ $n_s = 8$							$S = 636 \text{ m}$ $\sigma_{\beta} = \pm 14^{\text{cc}}$ $\sigma_s = \pm 1 \text{ cm}$ $n_B = 17$ $n_s = 16$						
	Pkt. Nr.	$Q_{xx}$	$Q_{yy}$	QF	LF	rel.Lage im Zug		Pkt. Nr.	$Q_{xx}$	$Q_{yy}$	QF	LF	rel.Lage im Zug
Netzausgleichung	1	1.25	0.44	0.030	0.23	0.13		1	1.57	0.47	0.012	0.17	0.06
	2	3.97	0.75	0.053	0.31	0.25		2	6.35	0.88	0.025	0.23	0.13
	3	6.67	0.94	0.068	0.34	0.38		3	14.29	1.22	0.038	0.28	0.19
	4	7.78	1.00	0.073	0.35	0.50		4	24.24	1.50	0.050	0.31	0.25
								5	34.54	1.72	0.059	0.33	0.31
								6	43.45	1.88	0.067	0.34	0.38
								7	49.46	1.97	0.071	0.35	0.44
								8	51.58	2.00	0.073	0.35	0.50
4 Parameter Blockausgleichung, stoch. vereinfacht	1	1.25	1.25	0.030	0.050	0.13		1	1.57	1.57	0.012	0.019	0.06
	2	3.97	3.97	0.053	0.088	0.25		2	6.35	6.35	0.025	0.039	0.13
	3	6.67	6.67	0.068	0.11	0.38		3	14.29	14.29	0.038	0.059	0.19
	4	7.78	7.78	0.073	0.12	0.50		4	24.24	24.24	0.050	0.077	0.25
								5	34.54	34.54	0.059	0.092	0.31
								6	43.45	43.44	0.067	0.10	0.38
								7	49.46	49.45	0.071	0.11	0.44
								8	51.58	51.57	0.073	0.11	0.50
4 Parameter Blockausgleichung, stoch. vereinfacht	1	1.25	1.25	0.030	0.050	0.13		1	1.57	0.012	0.019	0.06	
	2	3.97	3.97	0.053	0.088	0.25		2	6.35	0.025	0.039	0.13	
	3	6.67	6.67	0.068	0.11	0.38		3	14.29	0.038	0.059	0.19	
	4	7.78	7.78	0.073	0.12	0.50		4	24.24	0.050	0.077	0.25	
								5	34.54	0.059	0.092	0.31	
								6	43.44	0.067	0.10	0.38	
								7	49.46	0.071	0.11	0.44	
								8	51.58	0.073	0.11	0.50	
3 Parameter Blockausgleichung, stoch. vereinfacht	1	1.25	0.53	0.030	0.26	0.13		1	0.57	0.012	0.18	0.06	
	2	3.97	0.84	0.053	0.32	0.25		2	0.98	0.025	0.24	0.13	
	3	6.67	1.01	0.068	0.35	0.38		3	1.30	0.038	0.28	0.19	
	4	7.78	1.08	0.073	0.36	0.50		4	1.59	0.050	0.31	0.25	
								5	1.80	0.059	0.34	0.31	
								6	1.95	0.067	0.35	0.38	
								7	2.05	0.071	0.36	0.44	
								8	2.08	0.073	0.36	0.50	

Tabelle 12

## 7. ANHANG ZU KAPITEL 2.3.3

Bei standpunktweiser Korrelation der Beobachtungen ist zu zeigen, daß die Anteile eines "Standpunktes" aus Netzausgleichung und allgemeinem Rechenmodell an der gewichteten Quadratsumme der Verbesserungen gleich sind.

Es muß gezeigt werden, daß gilt:

$$\begin{bmatrix} vR_1 \\ vS_1 \\ vR_2 \\ vS_2 \\ \vdots \\ vR_i \\ vS_i \end{bmatrix} \cdot Q_{bb}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} vR_1 \\ vS_1 \\ vR_2 \\ vS_2 \\ \vdots \\ vR_i \\ vS_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} vx_1 \\ vy_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ vx_i \\ vy_i \end{bmatrix} \cdot Q_{kk}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} vx_1 \\ vy_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ vx_i \\ vy_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\text{oder } v'_N \cdot P_N \cdot v_N = v'_A \cdot P_A \cdot v_A \quad (\text{A.2})$$

Zum Nachweis wird die Zerlegung

$$P_A = Z \cdot P_N \cdot Z' \quad (\text{A.3})$$

(A.3) in (A.2)

$$v'_N \cdot P_N \cdot v_N = v'_A \cdot Z \cdot P_N \cdot Z' \cdot v_A$$

durchgeführt und gezeigt, daß

$$v'_N = v'_A \cdot Z \quad \text{ist.} \quad (\text{A.4})$$

Zerlegung von  $P_A$  nach Gleichung (15)

$$P_A = Q_{kk}^{-1} = (U \cdot Q_{bb} \cdot U')^{-1}$$

Da  $U$  eine reguläre quadratische Matrix mit Pseudodiagonalstruktur ist, läßt sich  $P_A$  hier auch umformen zu:

$$P_A = U'^{-1} \cdot Q_{bb}^{-1} \cdot U^{-1} = U'^{-1} \cdot P_N \cdot U^{-1} \quad (\text{A.5})$$



## LITERATURNACHWEIS

- | 1 | HALLERMANN, L.: Überblick über die auf dem Markt befindlichen Nahbereichsentfernungsmesser.  
Sammlung Wichmann, Neue Folge 1970, Nr. 15, S. 104 - 117.
- | 2 | ASCHAUER, H.: Drei Jahre elektronische Tachymetrie in der bayerischen Vermessungsverwaltung.  
Vortrag zum 57. Geodätentag in Braunschweig.  
Gedruckt bei Wild Heerbrugg, Dez. 1972.
- | 3 | KRAUS, K.: Rationalisierung der tachymetrischen Geländeaufnahme.  
Allgemeine Vermessungsnachrichten 1973, Nr. 1, S. 2 - 15.
- | 4 | HEUPEL, G.: Automatische Auswertung von Richtungs- und Streckenmessungen.  
Sammlung Wichmann, Neue Folge 1972, Nr. 19, S. 98 - 114.
- | 5 | ACKERMANN, F.: Neue Ziele und Methoden der automatischen Berechnung umfangreicher Polaraufnahmen.  
Sammlung Wichmann, Neue Folge 1970, Nr. 15, S. 17 - 30.
- | 6 | RUOPP, M.: Genauigkeitsbetrachtungen zur polaren Punktbestimmung mit elektronischen Tachymetern bei freier Standpunktwahl.  
Allgemeine Vermessungsnachrichten 1971, Nr. 8, S. 289-299.
- | 7 | KRAUS, K., KRACK, K.: Detailprobleme bei der Bearbeitung großräumiger Polaraufnahmen.  
Sammlung Wichmann, Neue Folge 1972, Nr. 19, S. 82 - 97.
- | 8 | ACKERMANN, F.: Ergebnisse einer Programmentwicklung zur Blockausgleichung großräumiger Polaraufnahmen.  
Sammlung Wichmann, Neue Folge 1972, Nr. 19, S. 57 - 81.
- | 9 | STRASSER, G.: Der Infrarot Distanzmesser Wild Di 10.  
Allgemeine Vermessungsnachrichten 1969, Nr. 2, S. 65 - 72.
- | 10 | LEITZ, H.: Untersuchungen zur Instrumentengenauigkeit.  
Sammlung Wichmann, Neue Folge 1972, Nr. 19, S. 22 - 25.
- | 11 | HÖPCKE, W.: Systematische Fehler und Korrelationen.  
Aus der geod. Lehre und Forschung.  
Witwer 1967, Festschrift zum 70. Geb. von Prof. W. Großmann, S. 132 - 143.
- | 12 | GOTTHARDT, E.: Zur Ermittlung von Korrelationen.  
Zeitschrift für Vermessungswesen 1960, S. 181 - 191.
- | 13 | GOTTHARDT, E.: Einführung in die Ausgleichsrechnung.  
Sammlung Wichmann, Neue Folge Band 3, S. 105 - 113,  
S. 40 - 41, 1968.
- | 14 | FINSTERWALDER, S.: Über die Ausgleichung des künftigen bayerischen Dreiecksnetzes.  
Deutsche Gesellschaft für Photogrammetrie, S. Finsterwalder zum 75. Geb., Berlin 1937, S. 108 - 114.
- | 15 | HELMERT, F.R.: Besonderes Verfahren zum Aneinanderfügen zweier Dreiecksnetze. Die europäische Längengradmessung um 52° von Greenwich bis Warschau.  
Heft I 1893, S. 47.
- | 16 | GOTTHARDT, E.: Zusammenfassung mehrerer Aufmessungen eines Punkthaufens.  
Zeitschrift für Vermessungswesen 1973, S. 392 - 396.

- |17| VAN DEN HOUT: The Anblock Method of Planimetric Block Adjustment.  
Photogrammetria 21, 1966, S. 171 - 178.
- |18| ACKERMANN, F.: On the theoretical accuracy of Planimetric Block  
Triangulation.  
Photogrammetria 21, 1966, S. 145 - 170.
- |19| KRAUS, K.: Untersuchungen zur ebenen verketteten linearen Ähnlich-  
keitstransformation.  
Zeitschrift für Vermessungswesen 1966, S. 123 - 130.
- |20| EBNER, H.: Das Programmpaket PAT-M für die räumliche Aerotriangu-  
lation mit unabhängigen Modellen.  
Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen, 1971,  
Reihe I, Heft Nr. 53, S. 43 - 45.
- |21| WERKMEISTER, P.: Über die Genauigkeit trigonometrischer Punkt-  
bestimmungen.  
Zeitschrift für Vermessungswesen 1920, S. 406 - 408.
- |22| GROSSMANN, W.: Vorwärtseinschneiden und Fehlermaße.  
Zeitschrift für Vermessungswesen 1969, S. 235 - 237.
- |23| GOTTHARDT, E.: Grundsätzliches zur Fehlertheorie und Ausgleichung  
von Polygonzügen und -Netzen.  
Sammlung Wichmann, Neue Folge 1971, Nr. 12.
- |24| SCHIRMER, R.: Ermittlung von theoretischen Genauigkeitserwartungen  
verschiedener Ausgleichsverfahren zur Berechnung tachy-  
metrischer Punktbestimmungen.  
Selbständige Arbeit am Institut für Photogrammetrie  
im SS 1974, unveröffentlicht.
- |25| EBNER, H.: Die theoretische Lagegenauigkeit ausgeglichener Blöcke  
mit bis zu 10 000 unabhängigen Modellen.  
Bildmessung und Luftbildwesen 38, 1970, S. 225 - 231.
- |26| EBNER, H.: Genauigkeitserwartungen photogrammetrischer Blöcke mit  
großen Punktmengen.  
Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen 1971,  
Reihe I, Heft Nr. 53, S. 51 - 70.
- |27| ACKERMANN, F.: Die photogrammetrische Straßenschlußvermessung  
Neckarsulm.  
AVN 79, S. 259 - 271, 1972.
- |28| MEISSL, P.: A Theoretical Random-Error Propagation Law for Anblock  
Networks with Constrained Boundery.  
ÖZfV, S. 61 - 65, 1972.
- |29| MOHL, H.: Vergleichende fehlertheoretische Untersuchung über die  
Genauigkeit verschiedener Verfahren der photogrammetrischen  
Streifentriangulation.  
DGK, Reihe C, Nr. 149, S. 170 - 171.
- |30| LINKWITZ, K.: Über die Substitution von Variablen ("Ersatzbeob-  
achtungen") bei der Ausgleichung nichtlinearer bedingter  
Beobachtungen.  
ZfV 1972, Heft 2, S. 57 - 60.
- |31| GRAFAREND, E.: Elektromagnetische Entfernungsmessung im Konzept  
stochastischer Prozesse.  
AVN 1971, Heft 2, S. 47.
- |32| JORDAN/EGGERT/KNEISSL: Handbuch der Vermessungskunde Band VI, § 39.
- |33| VÖLTER, U.: Automatische Auswertung von Tachymeteraufnahmen.  
AVN 1968, S. 515 - 519.